

# 目 录

|   |     |
|---|-----|
| <b>第一章 代数基础</b>                         | 1   |
| § 1. 反对称形式                              | 1   |
| § 2. 辛向量空间, 辛基底                         | 8   |
| § 3. $sl(2, k)$ 在辛向量空间上的反对称形式代数中的标准线性表示 | 9   |
| § 4. 辛群                                 | 13  |
| § 5. 辛复结构                               | 20  |
| <b>第二章 辛流形</b>                          | 24  |
| § 6. 流形上的辛结构                            | 24  |
| § 7. 辛流形上的微分形式代数的算子                     | 29  |
| § 8. 辛坐标                                | 35  |
| § 9. Hamilton 向量场和辛向量场                  | 40  |
| § 10. 辛坐标下的 Poisson 括号                  | 51  |
| § 11. 辛流形的子流形                           | 56  |
| <b>第三章 余切丛</b>                          | 66  |
| § 12. Liouville 形式和余切丛上的标准辛结构           | 66  |
| § 13. 余切丛上的辛向量场                         | 71  |
| § 14. 余切丛的 Lagrange 子流形                 | 79  |
| <b>第四章 辛 <math>G</math>-空间</b>          | 87  |
| § 15. 定义和例子                             | 88  |
| § 16. Hamilton $g$ -空间和矩射               | 92  |
| § 17. 矩射的等价不变性                          | 102 |
| <b>第五章 Poisson 流形</b>                   | 107 |
| § 18. Poisson 流形的结构                     | 107 |
| § 19. Poisson 流形的叶子                     | 112 |
| § 20. Lie 代数的对偶上的 Poisson 结构            | 116 |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| <b>第六章 一个分级情形</b>    | 129 |
| § 21. $(0, n)$ 维超流形  | 129 |
| § 22. $(0, n)$ 维辛超流形 | 135 |
| <b>参考文献</b>          | 139 |
| <b>名词索引</b>          | 141 |
| <b>记号</b>            | 143 |

# 第一章 代数基础

## § 1. 反对称形式

我们用  $V$  来表示特征  $\neq 2$  的域  $k$  上的有限维向量空间, 用  $A^p(V)$  来表示  $V$  上取值于  $k$  中的反对称  $p$ -线性形(或称  $p$ -形式)所构成的向量空间, 特别地,  $A^0(V) = k$ ,  $A^1(V)$  就是  $V$  的对偶空间  $V^*$ .

设  $\alpha \in A^p(V)$ ,  $\beta \in A^q(V)$ , 则  $p$ -形式  $\alpha$  和  $q$ -形式  $\beta$  的外积  $\alpha \wedge \beta$  是一个  $p+q$ -形式, 它在  $(x_1, \dots, x_{p+q}) \in \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p+q}$  处的

值由下式决定

$$(\alpha \wedge \beta)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\tau \in S(p,q)} sg(\tau) \alpha(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) \beta(x_{\tau(p+1)}, \dots, x_{\tau(p+q)}),$$

其中  $S(p,q)$  表示集合  $\{1, 2, \dots, p+q\}$  的所有满足下面的条件的置换  $\tau$  的全体:

(i)  $\tau(1) < \tau(2) < \cdots < \tau(p)$

且

(ii)  $\tau(p+1) < \tau(p+2) < \cdots < \tau(p+q)$ .

用这种方式定义的外积满足结合律, 从而在

$$A(V) = \bigoplus_p A^p(V)$$

上定义了一个分级代数结构. 根据外积的定义, 若  $\alpha \in A^p(V)$ ,  $\beta \in A^q(V)$ , 则我们有

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

因为这一性质, 所以我们称分级代数  $A(V)$  为  $Z_2$ -可换的(或  $Z_2$ -交换).

设  $f_1, \dots, f_n$  为  $V$  的一组基, 并且设  $\lambda$  为任意一个从集合  $\{1, 2, \dots, p\}$  到集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  内的映射, 我们记

$$f^p = f_{1(1)} \wedge \cdots \wedge f_{1(p)},$$

则当  $\lambda$  遍取所有的从  $\{1, 2, \dots, p\}$  到  $\{1, 2, \dots, n\}$  内的满足条件

$$\lambda(1) < \lambda(2) < \cdots < \lambda(p)$$

的映射时，所得到的  $f^p$  的全体就构成空间  $A^p(V)$  的一组基。设

$$n = \dim V, \text{ 则对任一整数 } p \geq 0, \text{ 我们有 } \dim A^p(V) = \binom{n}{p}.$$

对任一  $x \in V$ , 我们定义分级空间  $A(V)$  的一个  $-1$  级的自同态  $i(x)$  如下：

$$(i(x)\alpha)(x_1, \dots, x_{p-1}) = \alpha(x, x_1, \dots, x_{p-1}),$$

对所有的  $\alpha \in A^p(V)$  和所有的  $x_1, \dots, x_{p-1} \in V$  都成立。设  $\alpha \in A^p(V)$ , 则  $i(x)\alpha$  是  $-(p-1)$ -形式, 我们称  $i(x)\alpha$  为  $\alpha$  通过  $x$  的内积。根据  $i(x)$  的定义可知, 映射

$$x \mapsto i(x)$$

是从  $V$  到  $A(V)$  的自同态空间  $\text{End}(A(V))$  内的一个线性映射。

对任意的  $x, y \in V$ , 我们有

$$(1.1) \quad i(x) \circ i(y) + i(y) \circ i(x) = 0,$$

若  $\alpha \in A^p(V)$ ,  $\beta \in A(V)$ , 则我们有

$$(1.2) \quad i(x)(\alpha \wedge \beta) = (i(x)\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i(x)\beta).$$

由于这个性质, 所以我们称  $i(x)$  为分级代数  $A(V)$  的  $Z_2$ -导子。

**1.3. 定义。** 设  $\alpha$  是向量空间  $V$  上的一个反对称  $p$ -形式。我们称由  $V$  中所有满足  $i(x)\alpha = 0$  的元素  $x$  所构成的子空间为  $\alpha$  的核, 记为  $\text{Ker}\alpha$ 。 $\alpha$  的核的余维数称为  $\alpha$  的秩 ( $= \dim V - \dim \text{Ker}\alpha$ )。

设  $V, W$  为域  $k$  上的两个向量空间,  $f$  为从  $V$  到  $W$  的一个线性映射, 我们利用下面的等式

$$(A(f)\beta)(x_1, \dots, x_p) = \beta(f(x_1), \dots, f(x_p)),$$

其中  $\beta \in A^p(W)$  和  $x_1, \dots, x_p \in V$  均为任意, 来定义一个从分级代数  $A(W)$  到分级代数  $A(V)$  内的同态  $A(f)$ 。由  $A(f)$  的定义知, 若  $f$  是内射 (或满射), 则  $A(f)$  也是内射 (或满射)。

设  $\alpha \in A^p(V)$ ,  $N$  为  $V$  的一个向量子空间且  $N \subset \text{Ker}\alpha$ . 记从  $V$  到  $V/N$  上的标准映射为  $q$ , 则不难看出, 存在唯一的一个  $p$ -形式  $\beta \in A^p(V/N)$  使  $\alpha = q(\alpha)\beta$ . 我们有

$$\text{Ker}\beta = q(\text{Ker}\alpha).$$

**由一个反对称 2- 形式定义的正交性.** 设  $\omega$  是向量空间  $V$  上的一个反对称 2- 形式.  $V$  的两个元素  $x, y$  称为是互相正交的 (对于  $\omega$ ), 如果有  $\omega(x, y) = 0$ . 设  $E$  是  $V$  的一个子空间, 我们以  $E^\perp$  来表示由  $V$  中所有满足  $\omega(x, y) = 0, \forall y \in E$ , 的  $x$  所构成的  $V$  的子空间, 并把它称为  $E$  的正交补. 我们不加证明地引用下列结论, 读者可试证之:

(i) 对  $V$  的任一子空间  $E$  都有

$$\begin{aligned} E^\perp &\supset \text{Ker}\omega, \\ (E^\perp)^\perp &= E + \text{Ker}\omega, \\ ((E^\perp)^\perp)^\perp &= E^\perp. \end{aligned}$$

(ii) 若  $E, F$  为  $V$  的两个子空间, 则有

$$(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp.$$

(iii) 若  $E \subset F$ , 则  $E^\perp \supset F^\perp$ .

(iv) 若  $\text{Ker}\omega \subset E \cap F$ , 则有

$$(E + F)^\perp = E^\perp + F^\perp.$$

**1.4. 引理.** 设  $\omega \in A^2(V)$  并设  $E$  为  $V$  的一个子空间, 则我们有

$$\dim E^\perp = \dim V - \dim E + \dim(E \cap \text{Ker}\omega).$$

证. 根据  $i(x)$  的定义知, 映射

$$x \mapsto i(x)\omega, x \in V,$$

是从  $V$  到  $V^*$  的线性映射, 它的核为  $\text{Ker}\omega$ . 在这个映射下,  $E$  的象的维数是

$$\dim E - \dim(E \cap \text{Ker}\omega).$$

但根据对偶性,  $E$  的象是  $E^\perp$  的正交补, 所以它的维数等于  $E^\perp$  的余维数, 所以结论成立. 证完.

**1.5. 定义.** 设  $\omega$  是向量空间  $V$  上的一个反对称 2- 形式. 又

设  $E$  是  $V$  的一个子空间, 则

若  $E \subset E^\perp$ ,  $E$  称为  $(V, \omega)$  的迷向子空间;

若  $E \supset E^\perp$ ,  $E$  称为  $(V, \omega)$  的余迷向子空间;

若  $E = E^\perp$ ,  $E$  称为  $(V, \omega)$  的 Lagrange 子空间;

若  $E \cap E^\perp = \{0\}$ ,  $E$  称为  $(V, \omega)$  的辛子空间.

由定义可知, 所有维数  $\leq 1$  的子空间都是迷向的, 所有余维数  $\leq 1$  且含  $\text{Ker}\omega$  的子空间都是余迷向的, 而根据包含关系来确定的极小迷向子空间和极小余迷向子空间都是 Lagrange 子空间.

1.6. 命题. 设  $\omega \in \Lambda^2(V)$  并设  $L$  为  $(V, \omega)$  的一个 Lagrange 子空间, 则

$$\text{秩 } \omega = 2(\dim L - \dim \text{Ker}\omega).$$

证. 事实上, 因为  $L$  是一个 Lagrange 子空间, 所以

$$L \cap \text{Ker}\omega = L^\perp \cap \text{Ker}\omega = \text{Ker}\omega.$$

从而利用引理 1.2 得

$$\dim L = \dim V - \dim L + \dim \text{Ker}\omega.$$

证完.

推论.  $V$  上任一反对称 2- 形式的秩都是偶数, 空间  $(V, \omega)$  的所有 Lagrange 子空间具有相同的维数.

1.7. 命题. 设  $\omega \in \Lambda^2(V)$  并设  $W$  是  $(V, \omega)$  的一个余迷向子空间, 则对  $(V, \omega)$  的任一 Lagrange 子空间  $L$ ,  $L \cap W = W^\perp$  都是  $(W, \omega|_W)$  的一个 Lagrange 子空间.

证. 因为  $L$  和  $W$  都是余迷向的, 所以

$$\text{Ker}\omega \subset L \cap W.$$

从而

$$(L \cap W)^\perp = L^\perp + W^\perp = L + W^\perp.$$

又由于  $W$  是余迷向的, 所以

$$(L \cap W)^\perp \cap W = (L + W^\perp) \cap W = L \cap W + W^\perp.$$

这说明  $L \cap W + W^\perp$  在  $(W, \omega|_W)$  中的正交补就是它本身. 证完.

1.8. 命题. 设  $\omega \in A^2(V)$  并设  $N$  为  $V$  的一个含于  $\text{Ker}\omega$  中的子空间. 设

$$q: V \rightarrow V/N$$

为标准映射,  $\omega' \in A^2(V/N)$  满足关系式

$$A(q)\omega = \omega,$$

则映射

$$L \mapsto q(L)$$

是从  $(V, \omega)$  的 Lagrange 子空间所构成的集合到  $(V/N, \omega')$  的 Lagrange 子空间所构成的集合上的一个双射 (bijection).

证. 因为对任意的  $x, y \in V$  有

$$\omega'(q(x), q(y)) = \omega(x, y),$$

所以对任一子空间  $E \subset V$ ,  $q(E^\perp)$  是  $q(E)$  关于  $\omega'$  的正交补. 因此, 若  $L$  是  $(V, \omega)$  的一个 Lagrange 子空间, 则  $q(L)$  是  $(V/N, \omega')$  的一个 Lagrange 子空间. 由于  $N \subset \text{Ker}\omega$ , 所以  $(V, \omega)$  的任一 Lagrange 子空间均含  $N$ , 于是有

$$L = q^{-1}(q(L)).$$

这说明映射

$$L \mapsto q(L)$$

是一内射. 现证它也是满射. 设  $L'$  是  $(V/N, \omega')$  的一个 Lagrange 子空间, 令

$$L = q^{-1}(L'),$$

则有

$$q(L^\perp) = q(L)^\perp = L',$$

从而

$$L^\perp + N = L + N.$$

又因为

$$N \subset \text{Ker}\omega \subset L^\perp \text{ 且 } N = \text{Ker}q \subset L,$$

所以有  $L^\perp = L$ . 于是证明了  $L$  是  $(V, \omega)$  的一个 Lagrange 子空间且有  $q(L) = L'$ . 证完.

1.9. 命题. 设  $\omega \in A^2(V)$  并设  $L$  为  $(V, \omega)$  的一个 Lagrange 子空间. 令  $J$  为  $(V, \omega)$  的所有满足  $E \cap L = \{0\}$  的迷向子空间

$E$  所构成的集合。若  $F$  是由包含关系来确定的  $J$  的一个极大元，则  $V$  是  $L$  和  $F$  的直和。

证。事实上，若  $x \in F^\perp$ ，则子空间  $F + kx$  是迷向子空间，从而

$$F + kx \subset F \quad \text{或者} \quad (F + kx) \cap L = \{0\}.$$

无论怎样都有  $F^\perp \subset F + L$ 。于是有

$$F^\perp \cap L = F^\perp \cap L^\perp = (F + L)^\perp \subset (F^\perp)^\perp = F + \text{Ker}\omega.$$

因而

$$F^\perp \cap L \subset (F + \text{Ker}\omega) \cap L = \text{Ker}\omega$$

且

$$V = (F^\perp \cap L)^\perp = F + \text{Ker}\omega + L^\perp = F + L.$$

证完。

我们称由命题 1.9 给出的  $F$  为 Lagrange 子空间  $L$  的迷向补子空间。

**推论 1.** 设  $L$  为  $(V, \omega)$  的一个 Lagrange 子空间，设  $f_1, \dots, f_r$  为  $V$  的对偶空间  $V^*$  里的一组线性无关的 1-形式使得

$$L = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \text{Ker}f_i,$$

则在  $V^*$  中存在  $r$  个线性无关的 1-形式  $f_{r+1}, \dots, f_{2r}$  使  $f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_{2r}$  线性无关且

$$\omega = \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}.$$

证。事实上，设  $F$  是  $L$  在  $V$  中的迷向补子空间， $e_1, \dots, e_r$  为  $F$  的一组满足  $f_i(e_j) = \delta_{ij}$  的基。令

$$f_{r+i} = i(e_i)\omega, \quad i = 1, \dots, r,$$

则因为  $F$  是迷向的，所以有

$$i(e_i)f_{r+i} = \omega(e_i, e_i) = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

因此，

$$i(e_i)(\omega - \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}) = f_{r+i} - f_{r+i} = 0$$

对所有  $1 \leq i \leq r$  成立。由此推知形式

$$\omega = \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}$$

的核包含  $F$ . 另外, 由推论的假设知上面的形式限制在  $L$  上为 0.  
又由  $F$  的定义有

$$V = F + L.$$

于是便有

$$\omega = \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}.$$

为证  $f_1, \dots, f_r$  的无关性, 注意到  $\omega$  的核包含

$$\bigcap_{1 \leq i \leq r} \text{Ker } f_i,$$

但是它的核的维数是

$$2 \dim L - \dim V = \dim V - 2r,$$

于是  $f_1, \dots, f_r$  是线性无关的. 证完.

**推论 2.** 设  $L$  是  $(V, \omega)$  的一个 Lagrange 子空间, 则存在  $(V, \omega)$  的 Lagrange 子空间  $\tilde{L}$  使得

$$L \cap \tilde{L} = \text{Ker } \omega,$$

因而也就有

$$V = L + \tilde{L}.$$

证. 沿用推论 1 的符号, 令

$$\tilde{L} = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \text{Ker } f_{r+i}$$

便可. 证完.

**推论 3.** 若域  $k$  的特征为 0,  $\omega$  的秩为  $2r$ , 则  $\omega$  的  $r$  阶外积幂  $\omega^r \neq 0$  而  $r+1$  阶外积幂  $\omega^{r+1} = 0$ .

证. 沿用推论 1 的符号, 设

$$\omega = \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i},$$

则有

$$\begin{aligned} \omega^r &= r! f_1 \wedge f_{r+1} \wedge f_2 \wedge f_{r+2} \cdots f_r \wedge f_r \\ &= (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} r! f_1 \wedge f_2 \cdots f_r. \end{aligned}$$

由此推得结论成立. 证完.

## § 2. 辛向量空间, 辛基底

设  $V$  是特征  $\neq 2$  的域  $k$  上的向量空间.

2.1. 定义. 设  $\omega$  是  $V$  上的一个反对称 2-形式. 若  $\text{Ker} \omega = (0)$ , 则我们称  $\omega$  为  $V$  上的一个辛形式, 这时, 我们把  $(V, \omega)$  称为辛空间.

若  $(V, \omega)$  是一辛空间, 则  $\dim V = \text{秩} \omega$ , 从而  $V$  是偶维数空间. 此时  $(V, \omega)$  的 Lagrange 子空间的维数为  $\frac{1}{2} \dim V$ .

例 1. 设  $W$  是域  $k$  上维数为  $r$  的一个向量空间,  $W^*$  为  $W$  的对偶空间. 对任意的  $x_1, x_2 \in W$  和任意的  $f_1, f_2 \in W^*$ , 令

$$\omega((f_1, x_1), (f_2, x_2)) = f_1(x_2) - f_2(x_1),$$

则  $\omega$  是  $W^* \times W$  上的一个辛形式. 不难看出,  $W^* \times 0$  和  $0 \times W$  都是  $(W^* \times W, \omega)$  的 Lagrange 子空间.

例 2. 设  $f_1, \dots, f_r$  是向量空间  $k^r$  的自然坐标, 则

$$\omega = \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}$$

是  $k^r$  上的一个辛形式, 我们称它为  $k^r$  上的标准辛形式, 而称辛空间  $(k^r, \omega)$  为  $2r$  维的标准辛  $k$ -空间.

根据命题 1.7 的推论 2, 辛空间  $(V, \omega)$  的任一 Lagrange 子空间  $L$  在  $V$  中都有一 Lagrange 补子空间, 即有  $(V, \omega)$  的 Lagrange 子空间  $\tilde{L}$  使得

$$L \cap \tilde{L} = (0) \quad \text{且} \quad V = L + \tilde{L}.$$

2.2. 命题. 设  $(V, \omega)$  是一  $2n$  维的辛空间,  $L_1$  和  $L_2$  是  $(V, \omega)$  中互补的两个 Lagrange 子空间. 设  $e_1, \dots, e_n$  是  $L_1$  的一组基, 则存在  $L_2$  的一组唯一的基  $e_{n+1}, \dots, e_{2n}$  使得

$$\omega(e_i, e_{n+j}) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

证. 事实上, 映射

$$x \mapsto (i(x)\omega)|_{L_1}$$

是从  $L_1$  到  $L_1^*$  的对偶空间  $L_1^*$  上的一个同构。令  $f_1, \dots, f_n$  为  $L_1^*$  中与  $e_1, \dots, e_n$  相对偶的一组基。对任一  $1 \leq i \leq n$ , 取  $e_{n+i} \in L_1$  使

$$(i(e_{n+i})\omega)|_{L_1} = -f_i,$$

则  $e_{n+1}, \dots, e_{2n}$  为  $L_1$  的一组基且

$$\omega(e_i, e_{n+j}) = f_j(e_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

证完。

**2.3. 定义.** 设  $(V, \omega)$  是一  $2n$  维的辛空间。若  $V$  的一组基  $e_1, \dots, e_{2n}$  满足

$$\begin{aligned} \omega(e_i, e_{n+i}) &= \delta_{ii} \quad \text{且} \quad \omega(e_i, e_j) = \omega(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0, \\ i, j &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

则我们称它为  $(V, \omega)$  的一组辛基。

由命题 1.9 的推论 2 和命题 2.2 可知任一辛空间  $(V, \omega)$  都有辛基。

若  $(V, \omega)$  是一辛空间，则在一组辛基下， $\omega$  所对应的矩阵具有形式

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $I_n$  为  $n$  阶单位方阵。

若  $(V, \omega)$  是一辛空间，则  $V$  的一组基  $e_1, \dots, e_{2n}$  是一组辛基的充要条件为：对于  $V^*$  中相对于  $e_1, \dots, e_{2n}$  的对偶基  $f_1, \dots, f_{2n}$ ,

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i \wedge f_{n+i}.$$

**习题.** 设  $L_1$  和  $L_2$  是辛空间  $(V, \omega)$  的两个 Lagrange 子空间。试证明在  $V$  中存在同时为  $L_1$  和  $L_2$  的 Lagrange 补的子空间。

### § 3. $sl(2, k)$ 在辛向量空间上的反对称形式

代数中的标准线性表示

在这一节中， $k$  表示特征为 0 的域， $sl(2, k)$  表示  $k$  上由基

## 元素

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

所生成的三维 Lie 代数(见本节末的注).

设  $(V, \omega)$  是  $k$  上  $-2n$  维的辛空间. 对  $\alpha \in A^r(V)$ , 记空间  $A(V)$  的自同态

$$\beta \mapsto \alpha \wedge \beta, \quad \beta \in A(V),$$

为  $\mu(\alpha)$ , 则  $\mu(\alpha)$  是  $A(V)$  的一个  $r$  级的自同态, 即它把每一子空间  $A^p(V)$  映入子空间  $A^{p+r}(V)$  中. 特别地,

$$X = \mu(\omega)$$

是一  $-2$  级自同态. 设  $e_1, \dots, e_{2n}$  是  $(V, \omega)$  的一组辛基, 则自同态

$$Y = \sum_{i=1}^n i(e_i) i(e_{n+i})$$

是一  $-2$  级的自同态.

**3.1. 引理.** 对每一  $x \in V$  都有

$$i(x) = Y \circ \mu(f) - \mu(f) \circ Y,$$

其中  $f = i(x)\omega$ .

证. 根据定义, 对任一  $e_j$ ,  $1 \leq j \leq 2n$ ,  $i(e_j)$  都是一个  $-1$  级的  $Z_2$ -导子, 即对任意的  $\alpha \in A^p(V)$  和  $\beta \in A^q(V)$  都有

$$i(e_j)(\alpha \wedge \beta) = (i(e_j)\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i(e_j)\beta).$$

所以对任一  $\beta \in A(V)$  我们有

$$\begin{aligned} (i(e_j) \circ \mu(f))(\beta) &= i(e_j)((i(x)\omega) \wedge \beta) \\ &= (i(e_j)i(x)\omega) \wedge \beta + (-1)(i(x)\omega) \wedge (i(e_j)\beta), \\ (\mu(f) \circ i(e_j))(\beta) &= f \wedge (i(e_j)\beta) \\ &= (i(x)\omega) \wedge (i(e_j)\beta). \end{aligned}$$

又

$$\mu(f(e_j))(\beta) = f(e_j) \wedge \beta = \omega(x, e_j)\beta.$$

于是推出

$$i(e_j) \circ \mu(f) + \mu(f) \circ i(e_j) = \mu(f(e_j)), \quad 1 \leq j \leq 2n.$$

现设

$$x = \sum_{i=1}^{2n} x_i e_i,$$

则有

$$\mu(f(e_i)) = -x_{n+i}, \quad \mu(f(e_{n+i})) = x_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

于是有

$$\begin{aligned} Y \circ \mu(f) &= \sum_{i=1}^n i(e_i) i(e_{n+i}) \mu(f) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i i(e_i) - \sum_{i=1}^n i(e_i) \mu(f) i(e_{n+i}), \\ \mu(f) \circ Y &= \sum_{i=1}^n \mu(f) i(e_i) i(e_{n+i}) \\ &= - \sum_{i=1}^n x_{n+i} i(e_{n+i}) - \sum_{i=1}^n i(e_i) \mu(f) i(e_{n+i}). \end{aligned}$$

两式相减得

$$Y \circ \mu(f) - \mu(f) \circ Y = \sum_{i=1}^n x_i i(e_i) = i(x).$$

证完。

现在我们证明上面所定义的  $A(V)$  的自同态  $Y$  不依赖于辛基底  $e_1, \dots, e_{2n}$  的选择。

事实上, 设  $e'_1, \dots, e'_{2n}$  是  $(V, \omega)$  的另一组辛基, 并设

$$Y' = \sum_{i=1}^n i(e'_i) i(e'_{n+i}),$$

则由引理 3.1 得

$$(Y' - Y) \circ \mu(f) = \mu(f) \circ (Y' - Y),$$

对任意的 1-形式  $f = i(x)\omega$  成立。因而对任意的  $f \in V^*$  成立。于是对任意的  $f \in V^*$ ,  $Y' - Y$  的核是  $\mu(f)$  的不变子空间。又因为代数  $A(V)$  是由  $V^* = A^1(V)$  所生成的, 所以  $Y' - Y$  的核是  $A(V)$  的一个理想。但  $Y' - Y$  的核显然含  $A(V)$  的单位元。于是  $Y' = Y$ 。

若设  $f_1, \dots, f_{2n}$  是  $V^*$  的一组相对于  $e_1, \dots, e_{2n}$  的对偶基, 则有

$$i(e_i)\omega = f_{n+i}, \quad i(e_{n+i})\omega = -f_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

从而利用(1.1)和(1.2)两式有

$$\begin{aligned} [X, Y] &= Y \circ X - X \circ Y \\ &= \sum_{i=1}^n (-i(e_{n+i}) \circ \mu(f_{n+i}) + \mu(f_i) \circ i(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(f_i) \circ i(e_i) - n \cdot id. \end{aligned}$$

其中  $id$  表示单位映射。因为  $A(V)$  的自同态

$$\sum_{i=1}^n \mu(f_i) \circ i(e_i)$$

是  $A(V)$  的零级导子，容易知道它在  $A(V)$  上为恒等变换，从而它限制在  $A^0(V)$  上等于  $p \cdot id$ 。若令

$$H = [Y, X],$$

则对任意的  $\alpha \in A^0(V)$  有

$$H(\alpha) = (p - n)\alpha.$$

**3.2 命题。** 定义从  $sl(2, k)$  到  $A(V)$  的自同态空间内的线性映射  $\rho$  使

$$\rho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X, \quad \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = Y, \quad \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H,$$

则  $\rho$  是 Lie 代数  $sl(2, k)$  在空间  $A(V)$  上的一个线性表示。

证。事实上，根据定义， $[Y, X] = H$ 。又  $H$  是  $A(V)$  的零级导子，而  $X$  和  $Y$  则分别是  $A(V)$  的 2 级和 -2 级的导子，直接计算便得到

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y,$$

因此  $\rho$  是  $sl(2, k)$  的一个表示。证完。

$H$  在  $A(V)$  里的特征向量显然是  $A(V)$  的齐次元素。特别地，我们把含于  $\text{Ker } X \setminus \{0\}$  中的  $H$  的特征向量称为表示  $\rho$  的素元素（参看文献[13]）。根据 Lie 代数的表示理论，若  $\varphi \in A(V)$  而且  $\varphi$  是一素元素， $H(\varphi) = r\varphi$ ，那么  $r$  是  $- \geq 0$  的整数，而下列元素：

$$\varphi, Y(\varphi), \dots, Y^r(\varphi)$$

构成  $A(V)$  的一个  $sl(2, k)$  单子模的基. 因为由

$$H(\varphi) = r\varphi$$

知道  $\varphi \in A^{n+r}(V)$ , 所以所有素元素的级数  $\geq n$ . 由于  $\text{Ker } X$  是由素元素所生成的  $A(V)$  的子空间, 所以  $\text{Ker } X$  包含在  $A^n(V) + A^{n+1}(V) + \dots + A^{2n}(V)$  中.

**例.** 1) 设  $\omega^n$  是  $\omega$  的  $n$  次外积幂, 则  $\omega^n \neq 0$ ,  $\omega^n \in A^{2n}(V)$  且  $\omega^n$  是一素元素, 在表示  $\rho$  下, 它生成一个  $n+1$  维  $sl(2, k)$  子模

$$k + k\omega + \dots + k\omega^n.$$

2) 因为  $X$  是  $-2$  级导子, 所以  $A^{2n-1}(V)$  的任一非零元素都是素元素. 每一个这样的素元素都生成一个  $n$  维子模.

**3.3. 命题.** 对于  $r = 0, 1, \dots, n$ , 我们有

- i)  $X'$  把  $A^{n+r}(V)$  同构地映到  $A^{n+r}(V)$  上;
- ii)  $Y'$  把  $A^{n+r}(V)$  同构地映到  $A^{n+r}(V)$  上.

**证.** 这是 Lie 代数表示理论的直接结果 (参看文献 [31]), 也可参看文献 [27].

**习题.** 试证明子空间

$$\text{Ker } X \cap A^{n+r}(V)$$

的维数是

$$\binom{2n}{n+r} - \binom{2n}{n+r+2}.$$

**注.** 在本书中, 我们假定读者具有 Lie 代数, Lie 群及表示理论的基础知识, 读者可参看文献 [13] 和 [31].

## § 4. 辛 群

设  $(V_1, \omega_1)$  和  $(V_2, \omega_2)$  是域  $k$  上的两个辛空间. 设  $\varphi$  是从  $V_1$  到  $V_2$  上的一个向量空间的同构, 若  $\varphi$  满足  $\omega_1 = A(\varphi)\omega_2$ , 则称它为从  $(V_1, \omega_1)$  到  $(V_2, \omega_2)$  上的一个同构.

$(V_1, \omega_1)$  和  $(V_2, \omega_2)$  之间存在同构的充要条件是  $\dim V_1 =$

$\dim V_1$ . 事实上, 若  $V_1$  和  $V_2$  都是  $2n$  维的, 设  $e_1, \dots, e_{2n}$  (或  $e'_1, \dots, e'_{2n}$ ) 为  $V_1$  (或  $V_2$ ) 的一组辛基, 则由

$$\varphi(e_i) = e'_i, \quad i = 1, \dots, 2n,$$

所定义的映射  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  就是从  $(V_1, \omega_1)$  到  $(V_2, \omega_2)$  上的一个同构. 而必要性是显然的.

设  $(V, \omega)$  是一辛空间, 所谓  $(V, \omega)$  的一个自同构, 指的是从  $(V, \omega)$  到其自身上的一个同构, 所以  $(V, \omega)$  的一个自同构是  $V$  的线性变换群  $Gl(V)$  的一个元素, 若把它记为  $s$ , 则它满足下式:

$$\omega(sx, sy) = \omega(x, y), \quad \forall x, y \in V.$$

易知  $(V, \omega)$  的自同构全体构成群  $Gl(V)$  的一个子群, 我们把它记为  $Sp(V, \omega)$ . 特别, 标准辛空间  $(k^{2n}, \omega)$  的自同构群记为  $Sp(2n, k)$ . 若  $k = R$ , 则把  $Sp(2n, k)$  简记为  $Sp(2n)$  并称它为  $2n$  维辛群.

设  $e_1, \dots, e_{2n}$  是  $(V, \omega)$  的一组辛基. 设矩阵  $S \in Gl(2n, k)$ , 则  $S$  为  $(V, \omega)$  的某一自同构在基  $e_1, \dots, e_{2n}$  下的矩阵的充要条件是

$${}^t S J_{2n} S = J_{2n},$$

其中  ${}^t S$  是  $S$  的转置矩阵,  $J_{2n}$  是  $\omega$  在基  $e_1, \dots, e_{2n}$  下的矩阵, 即

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

设  $S \in Gl(2n, k)$  并设

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中  $A, B, C, D$  都是  $n \times n$  矩阵, 则  $S \in Sp(2n, k)$  的充分必要条件是

$$\begin{aligned} {}^t CA - {}^t AC &= 0, & {}^t CB - {}^t AD &= I_n, \\ (4.1) \quad {}^t DA - {}^t BC &= -I_n, & {}^t DB - {}^t BD &= 0. \end{aligned}$$

因为  $\det J_{2n} = 1$ , 所以若  $S \in Sp(2n, k)$ , 则由等式

$${}^tSJ_{2n}S = J_{2n}$$

可得  $(\det S)^2 = 1$ . 更确切些, 我们有

4.2. 命题. 设  $(V, \omega)$  是一辛空间, 则对任一  $s \in Sp(V, \omega)$ , 我们有  $\det(s) = 1$ .

证. 事实上, 若设  $\dim V = 2n$ , 则因为

$$A(s)\omega = \omega,$$

所以我们有

$$A(s)\omega^n = \omega^n.$$

因为  $\omega^n \in A^{2n}(V)$ , 所以

$$A(s)\omega^n = \det(s)\omega^n.$$

若  $V$  是特征等于 0 的域  $k$  上的向量空间, 则我们有  $\omega^n \neq 0$  (命题 1.9 的推论 3), 从而  $\det(s) = 1$ . 而对一般情形, 则可用“除幂  $\omega^{[n]}$ ”(la puissance divisée  $\omega^{[n]}$ ) 代替  $\omega^n$  加以讨论, 注意到  $\omega^{[n]}$  仍然是  $A^{2n}(V)$  的一个基便可. 证完.

设  $T$  是一不定元. 我们以  $k[T]$  来表示  $k$  上的以  $T$  为不定元的一元多项式环.

4.3 命题. 设  $(V, \omega)$  是一个  $2n$  维的辛空间,  $s \in Sp(V, \omega)$ . 若  $P \in k[T]$  是  $s$  的特征多项式, 则我们有

$$T^{2n}P\left(\frac{1}{T}\right) = P(T).$$

证. 事实上, 简记  $J_{2n} = J$ ,  $I_{2n} = I$ , 则  $J^2 = -I$ . 若  $S$  是  $s$  在  $V$  的某一组辛基下的矩阵, 则因为  ${}^tSJS = J$ , 从而有  ${}^tS = -JS^{-1}J$ . 于是有

$$\begin{aligned} P(T) &= \det(S - TI) = \det({}^tS - TI) \\ &= \det(-JS^{-1}J - TI) = \det(S^{-1} - TI). \end{aligned}$$

又因为  $\det(S) = 1$ , 所以有

$$\begin{aligned} P(T) &= \det(S)\det(S^{-1} - TI) \\ &= \det(I - TS) = T^{2n}P\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

证完.

设  $L$  是辛空间  $(V, \omega)$  的一个 Lagrange 子空间, 则对任意的

$s \in Sp(V, \omega)$ ,  $s(L)$  显然是  $(V, \omega)$  的一个 Lagrange 子空间. 可见  $Sp(V, \omega)$  作用于  $(V, \omega)$  的所有的 Lagrange 子空间所成的集合上.

**4.4. 命题.** 群  $Sp(V, \omega)$  可递地作用于由所有的  $(L, \hat{L})$  所构成的集合上, 这里  $L$  和  $\hat{L}$  是  $(V, \omega)$  中任意的两个互为 Lagrange 补的 Lagrange 子空间.

证. 事实上, 根据命题 2.2, 对于任意一个 Lagrange 互补对  $(L, \hat{L})$ , 存在  $(V, \omega)$  的一组辛基  $e_1, \dots, e_{2n}$  使得  $e_1, \dots, e_n$  为  $L$  的一组基而  $e_{n+1}, \dots, e_{2n}$  为  $\hat{L}$  的一组基. 又因为  $Sp(V, \omega)$  在  $(V, \omega)$  的所有辛基所构成的集合上的作用是可递的, 所以命题得证. 证完.

设  $L$  是辛空间  $(V, \omega)$  的任意一个 Lagrange 子空间, 我们用  $S(L)$  来表示  $L$  在  $Sp(V, \omega)$  中的稳定子.

**4.5. 命题.** 设  $L$  和  $\hat{L}(V, \omega)$  中任意的两个互为 Lagrange 补的 Lagrange 子空间, 则从  $S(L)$  到  $Gl(L)$  内的映射

$$s \mapsto s|_L$$

诱导出从  $S(L) \cap S(\hat{L})$  到  $Gl(L)$  上的一个同构.

证. 事实上, 取  $(V, \omega)$  的一组辛基使得  $e_1, \dots, e_n$  是  $L$  的基而  $e_{n+1}, \dots, e_{2n}$  是  $\hat{L}$  的基, 利用关系式 (4.1), 可知  $S(L) \cap S(\hat{L})$  是  $Gl(V)$  中这样一些元素的集合, 它们在基  $e_1, \dots, e_{2n}$  下的矩阵有形状

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix},$$

其中  $A \in Gl(n, k)$  是  $s$  在  $L$  上的限制  $s|_L$  所对应的矩阵, 于是知命题成立. 证完.

**推论.** 设  $S(L)_0$  是从  $S(L)$  到  $Gl(L)$  上的同态映射

$$s \mapsto s|_L$$

的核, 则群  $S(L)$  是正规子群  $S(L)_0$  和子群  $S(L) \cap S(\hat{L})$  的半直积. 又群  $S(L)_0$  单可递地作用于  $(V, \omega)$  的所有的  $L$  的 Lagrange 补子空间所构成的集合上.

下面我们来确定  $S(L)_0$  的结构。记  $q$  为从  $V$  到  $V/L$  上的标准映射，记  $B(V/L)$  为  $V/L$  上的对称双线性型所构成的空间。因为  $\omega$  的秩等于  $V$  的维数，所以对任一  $b \in B(V/L)$ ，存在  $V$  的唯一的一个自同态  $\tilde{b}$  使得

$$(4.2) \quad \omega(\tilde{b}(x), y) = b(q(x), q(y))$$

对任意的  $x, y \in V$  都成立。

#### 4.6. 命题. 映射

$$b \mapsto id_V + \tilde{b}$$

是从加法群  $B(V/L)$  到  $Sp(V, \omega)$  的子群  $S(L)_0$  上的一个同构。

证。对任意的  $b \in B(V/L)$ ，我们有  $\tilde{b}(L) = (0)$ ，这里  $\tilde{b}$  由 (4.2) 式所定义。又因为  $\tilde{b}(V) \subset L^\perp = L$ ，从而  $\tilde{b}^2 = 0$ 。于是映射  $b \mapsto id_V + \tilde{b}$  是从加法群  $B(V/L)$  到群  $GI(V)$  内的同态。这个同态是一内射。这是因为  $q: V \rightarrow V/L$  是满射，若  $\tilde{b} = 0$ ，则有  $b = 0$ 。对任意的  $b \in B(V/L)$  和任意的  $x, y \in V$ ，因为  $\omega(\tilde{b}(x), \tilde{b}(y)) = 0$ ，所以

$$\begin{aligned} & \omega(x + \tilde{b}(x), y + \tilde{b}(y)) \\ &= \omega(x, y) + \omega(\tilde{b}(x), y) + \omega(x, \tilde{b}(y)) \\ &= \omega(x, y) + b(q(x), q(y)) - b(q(y), q(x)) \\ &= \omega(x, y). \end{aligned}$$

于是  $id_V + \tilde{b} \in Sp(V, \omega)$ 。因为  $\tilde{b}(L) = (0)$ ，所以

$$id_V + \tilde{b} \in S(L)_0, \quad \forall b \in B(V/L).$$

现若  $s \in Sp(L)_0$ ，我们在  $V$  上定义一双线性型如下：

$$(x, y) \mapsto \omega(s(x) - x, y) = \omega(x, s^{-1}(y) - y), \quad \forall x, y \in V.$$

若  $x, y$  中至少有一个属于  $L$ ，则显然有  $(x, y) = 0$ 。所以对任意的  $y \in V$ ，我们有

$$s(y) - y = s^{-1}(s(y) - y) = y - s^{-1}(y).$$

于是知双线性型  $(x, y) \mapsto \omega(s(x) - x, y)$  是对称的。因为它的核含  $L$ ，所以存在  $b \in B(V/L)$  使

$$\omega(s(x) - x, y) = b(q(x), q(y)), \quad \forall x, y \in V.$$

于是我们有  $s = id_V + \tilde{b}$ ，于是同态  $b \mapsto id_V + \tilde{b}$  的象是

$S(L)$ 。证完。

由命题 4.5 和命题 4.6, 我们得到一个标准正合列

$$(0) \longrightarrow B(V/L) \longrightarrow S(L) \longrightarrow Gl(L) \longrightarrow (1).$$

从上面我们还知道群  $S(L)$  同构于具有下列形状的矩阵所构成的线性群:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix},$$

其中  $A \in Gl(n, k)$ , 而  $B$  则是  $n \times n$  阶对称矩阵。该矩阵线性群是一  $n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$  维的线性群。

设  $(V, \omega)$  是一辛空间, 则  $(V, \omega)$  的所有 Lagrange 子空间所构成的集合是  $V$  的  $n$  维平面 Grassmann 流形的一个子流形(设  $\dim V = 2n$ ), 我们把它记为  $\mathcal{L}(V, \omega)$ 。设  $L$  是  $(V, \omega)$  的一个 Lagrange 子空间, 则由  $L$  的所有 Lagrange 补空间构成的集合是  $\mathcal{L}(V, \omega)$  的一个开的 Zariski。由命题 4.5 的推论和命题 4.6, 可知这个开集有一仿射空间结构, 它的仿射变换群同构于  $B(V/L)$ , 而因为  $B(V/L)$  的维数是  $\frac{n(n+1)}{2}$ , 所以  $\mathcal{L}(V, \omega)$  是  $-\frac{n(n+1)}{2}$  维

的流形。而群  $Sp(V, \omega)$  则是一维数为  $\dim \mathcal{L}(V, \omega) + \dim S(L) = n(n+1) + n^2 = 2n^2 + n$  的线性代数群。

设  $(V, \omega)$  为一辛空间, 我们用  $sp(V, \omega)$  来表示  $V$  的自同态空间  $gl(V)$  中所有满足

$$\omega(\alpha(x), y) + \omega(x, \alpha(y)) = 0, \quad \forall x, y \in V,$$

的  $\alpha$  所构成的子空间。

#### 4.7. 命题. 映射:

$$\alpha \mapsto (id_V - \alpha)(id_V + \alpha)^{-1}$$

是从  $sp(V, \omega)$  中所有使  $id_V + \alpha$  可逆的元素  $\alpha$  所构成的集合到  $Sp(V, \omega)$  中所有使  $id_V + s$  为可逆的  $s$  所构成的集合上的一个双射。

证。令  $id_V = I$ , 则对任一  $\alpha \in sp(V, \omega)$ , 等式

$$\omega((I + \alpha)(x), (I + \alpha)(y)) = \omega((I - \alpha)(x), (I - \alpha)(y))$$

对任意的  $x, y \in V$  成立。于是, 若  $I + \alpha$  可逆, 则等式

$$\omega((I - \alpha)(I + \alpha)^{-1}(x), (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1}(y)) = \omega(x, y)$$

对任意的  $x, y \in V$  成立。从而知

$$s = (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1} \in Sp(V, \omega).$$

又因为

$$I + s = (I + \alpha)(I + \alpha)^{-1} + (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1} = 2(I + \alpha)^{-1},$$

所以  $I + s$  可逆。

反之, 若  $s \in Sp(V, \omega)$  使  $I + s$  可逆, 令

$$\alpha = (I + s)^{-1}(I - s),$$

则对任意的  $x, y \in V$  有

$$\begin{aligned} & \omega(\alpha(x), y) + \omega(x, \alpha(y)) \\ &= -2\omega(x, y) + 2\omega((I + s)^{-1}(x), y) + 2\omega(x, (I + s)^{-1}(y)). \end{aligned}$$

令

$$x_1 = (I + s)^{-1}x, \quad y_1 = (I + s)^{-1}y,$$

由上式得

$$\begin{aligned} & \omega(\alpha(x), y) + \omega(x, \alpha(y)) \\ &= -2\omega((I + s)(x_1), (I + s)(y_1)) + 2\omega(x_1, (I + s)(y_1)) \\ & \quad + 2\omega((I + s)(x_1), y_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以  $\alpha = (I + s)^{-1}(I - s) \in sp(V, \omega)$ 。又因

$$\begin{aligned} I + \alpha &= (I + s)^{-1}(I + s) + (I + s)^{-1}(I - s) \\ &= 2(I + s)^{-1}, \end{aligned}$$

所以  $I + \alpha$  可逆而且  $s = (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1}$ 。于是映射

$$s \mapsto (I + s)^{-1}(I - s)$$

是映射

$$\alpha \mapsto (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1}$$

的逆。证完。

命题 4.7 中的双射:  $\alpha \mapsto (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1}$  称为 Cayley 参数化 (参看文献 [30])。

注. 若  $\alpha, \beta \in sp(V, \omega)$ , 则

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha \in sp(V, \omega).$$

若利用上式在  $sp(V, \omega)$  上定义一括号运算, 则  $sp(V, \omega)$  便成为  $Sp(V, \omega)$  的 Lie 代数. 若  $k = R$  或者  $k = C$ , 则指数映射

$$\alpha \mapsto \exp \alpha$$

把  $sp(V, \omega)$  映入  $Sp(V, \omega)$  中(参看文献[12]).

## §5. 辛复结构

在本节中, 假定  $(V, \omega)$  是  $R$  上的  $2n$  维辛空间. 因为  $V$  是一偶数维的向量空间, 所以在  $V$  上存在复结构, 即存在  $V$  的一个自同态  $j$  满足  $j^2 = -id_V$ . 设  $j$  是  $V$  的一个复结构, 如果  $j \in Sp(V, \omega)$ , 则我们称  $j$  为一辛复结构. 于是, 若  $j$  是一辛复结构, 则对任意  $x, y \in V$  有

$$\omega(j(x), j(y)) = \omega(x, y).$$

并且有

$$\omega(x, j(y)) = \omega(j(x), -y) = \omega(y, j(x)).$$

于是

$$(x, y) = \omega(x, j(y)), \forall x, y \in V,$$

是  $V$  上的一个对称双线性型. 显然, 该双线性型是非退化的. 对  $\lambda + i\mu \in C$  和  $x \in V$ , 利用等式

$$(\lambda + i\mu)x = \lambda x + \mu j(x)$$

把  $V$  定义成为  $C$  上的向量空间, 则复值实线性型

$$h(x, y) = \omega(x, j(y)) - i\omega(x, y), x, y \in V,$$

是  $V$  上的伪 Hermite 型. 事实上, 对任意的  $x, y \in V$ , 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \overline{h(y, x)}, \\ h(ix, y) &= h(j(x), y) \\ &= \omega(j(x), j(y)) - i\omega(j(x), y) \\ &= \omega(x, y) + i\omega(x, j(y)) = ih(x, y). \end{aligned}$$

**5.1. 定义.** 辛空间  $(V, \omega)$  上的一个复结构  $j$  称为适应的 (adapté), 若它是辛的并且由它所定义的对称双线性型  $(x, y) \mapsto \omega(x, j(y))$  是正定的.

根据定义,一个复结构  $j$  是一适应复结构相当于

$$(x, y) \mapsto h(x, y) = \omega(x, j(y)) - i\omega(x, y)$$

是一 Hermite 型.

**5.2. 命题.** 设  $e_1, \dots, e_{2n}$  是辛空间  $(V, \omega)$  的一组辛基,  $j$  是  $V$  上的复结构使对任意的  $1 \leq i \leq n$  有  $j(e_i) = e_{n+i}$ , 则  $j$  是一适应复结构. 反之,若  $j$  是  $(V, \omega)$  上的一个适应复结构, 则存在  $(V, \omega)$  的一组辛基  $e_1, \dots, e_{2n}$  使  $j(e_i) = e_{n+i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

证. 事实上,若  $j(e_i) = e_{n+i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , 则我们有  $j(e_{n+i}) = -e_i$ , 从而  $j$  在辛基  $e_1, \dots, e_{2n}$  下的矩阵是

$$-J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

于是由 §4 知  $j$  是辛的. 又因为在基  $e_1, \dots, e_{2n}$  下, 对称双线性型  $\omega(x, j(y))$  的矩阵是  $-(-J_{2n})^2 = I_{2n}$ , 因此是正定的,即  $j$  是适应复结构. 反之,设  $j$  是  $(V, \omega)$  上的一个适应复结构. 设  $L$  为  $(V, \omega)$  的一个 Lagrange 子空间,  $e_1, \dots, e_n$  是  $L$  的这样一组基, 它们对于双线性型  $(x, y) \mapsto \omega(x, j(y))$  是正交基, 令  $e_{n+i} = j(e_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 则  $e_1, \dots, e_{2n}$  是  $(V, \omega)$  的一组辛基. 证完.

**5.3. 命题.** 设  $j$  是  $(V, \omega)$  上的一个适应复结构, 则我们有

- (i) 对  $(V, \omega)$  的任意一个 Lagrange 子空间  $L$ ,  $j(L)$  是  $L$  的一个 Lagrange 补子空间;
- (ii)  $V$  的任一复子空间 (即在  $j$  的作用下不变的子空间) 都是辛子空间.

证. 因为  $j \in Sp(V, \omega)$ , 所以  $j(L)$  是 Lagrange 子空间, 若  $x, y \in L$ , 则我们有

$$\omega(x, j(j(y))) = -\omega(x, y) = 0,$$

从而  $j(L)$  对于双线性型  $(x, y) \mapsto \omega(x, j(y))$  与  $L$  正交. 因

为该双线性型是正定的, 所以我们有  $L \cap i(L) = \{0\}$ , 因此  $i(L)$  是  $L$  的 Lagrange 补, (i) 得证. 现若  $E$  是  $V$  的一个复子空间,  $x \in E \cap E^\perp$ , 则由于  $i(x) \in E$ , 所以  $\omega(x, i(x)) = 0$ , 于是有  $x = 0$ . 因此  $E \cap E^\perp = \{0\}$ . 这说明  $E$  是一辛子空间. 证完.

**5.4. 引理.** 设  $i$  为辛空间  $(V, \omega)$  的一个辛复结构,  $s \in Gl(V)$ , 则下列条件等价:

(i)  $s \circ i = i \circ s$  而且对任意的  $x, y \in V$  有  $\omega(s(x), s(y)) = \omega(x, y)$ ,

(ii)  $s \circ i = i \circ s$  而且对任意的  $x, y \in V$  有  $\omega(x, i(y)) = \omega(s(x), i(s(y)))$ ,

(iii)  $\omega(s(x), s(y)) = \omega(x, y)$  而且对任意的  $x, y \in V$  有  $\omega(s(x), i(s(y))) = \omega(x, i(y))$ .

证. 从 (i) 推 (ii) 和从 (ii) 推 (iii) 都是显然的. 若 (iii) 成立, 则

$$\omega(s(x), s(i(y)) - i(s(y))) = 0$$

对任意的  $x, y \in V$  成立. 因此  $s \circ i = i \circ s$ . 因此可由 (iii) 推出 (i). 证完.

引理 5.4 中的条件 (i) 等于说  $s \in Gl_c(V) \cap Sp(V, \omega)$ , 条件 (ii) 等于说  $s \in Gl_c(V) \cap O(V, b)$ , 这里  $O(V, b)$  代表  $V$  的对于对称双线性型  $b(x, y) = \omega(x, i(y))$  的正交变换群, 而 (iii) 则等于说  $s$  保持 Hermite 型  $h = b - i\omega$  不变.

如果  $(V, \omega)$  就是标准辛空间  $(R^{2n}, \omega)$ , 而  $i$  则是由矩阵  $J_{2n}$  所定义的复结构, 则  $b$  是 Euclid 线性型

$$b(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 2n,$$

而  $h$  则是标准的 Hermite 型

$$h(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

于是我们有下面的命题

### 5.5. 命题.

$$Sp(2n) \cap Gl(n, C) = O(2n) \cap Gl(n, C) = U(n),$$

其中  $O(2n)$  表示正交群,  $U(n)$  表示酉群.

5.6. 推论. 酉群  $U(n)$  是  $Sp(2n)$  的一个极大紧子群.

证. 设  $G$  是  $Sp(2n)$  的一个紧子群且设  $G \supset U(n)$ . 设  $b$  为  $R^{2n}$  上的 Euclid 线性型. 由于  $G$  紧, 所以在  $R^{2n}$  上存在一个在  $G$  的作用下不变的正定对称双线性型  $\tilde{b}$  (参看文献 [5]). 不难知道, 可以选取  $\lambda \in R$  使  $b - \lambda \tilde{b}$  的秩  $< 2n$ . 因为  $U(n) \subset O(2n)$ , 所以  $b - \lambda \tilde{b}$  的核是  $U(n)$  的非零不变子空间. 又因为  $U(n)$  在酉向量集上可逆, 所以  $\text{Ker}(b - \lambda \tilde{b}) = R^{2n}$ , 也即  $b = \lambda \tilde{b}$  并且  $G \subset Sp(2n) \cap O(2n) = U(n)$ . 所以  $G = U(n)$ . 证完.

习题. 设  $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  是  $Sp(2n)$  的一个元素, 其中  $A, B, C, D$  都是  $n \times n$  矩阵. 令  $P$  为所有的这样的  $n \times n$  复系数矩阵  $Z$  的集合,  $Z$  对称并且  $\frac{1}{2i}(Z - \bar{Z})$  是正定的. 证明若  $Z \in P$ , 则  $CZ + D$  可逆. 证明映射

$$(S, Z) \mapsto (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, S \in Sp(2n).$$

定义了群  $Sp(2n)$  在  $P$  上的一个作用, 即对任意的  $S \in Sp(2n)$  和  $Z \in P$  有

$$(AZ + B)(CZ + D)^{-1} \in P.$$

证明该作用是可逆的并求出  $iI_n \in P$  的稳定子 (参看文献 [22]).

## 第二章 辛流形

在本章及以后各章里，“可微”指的是“ $C^\infty$  可微”，“流形”指的是  $C^\infty$  可微实流形，而“微分形式”及“向量场”则分别指外微分形式和  $C^\infty$  向量场。

设  $M$  是一个流形，我们以  $\Omega^p(M)$  来表示  $M$  上的微分  $p$ -形式所构成的空间，而以  $\Omega(M)$  来表示分级代数

$$\bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(M).$$

对于  $M$  上的一个向量场  $X$ ，我们可以在  $\Omega(M)$  上定义两个很重要的算子：通过  $X$  的内积，记为  $i(X)$ ，以及 Lie 导子  $\theta(X)$ 。 $i(X)$  的定义见第一章，而  $\theta(X)$  则可用下式来定义：

$$\theta(X) = d \circ i(X) + i(X) \circ d,$$

其中  $d$  是  $\Omega(M)$  的外微分算子。对  $i(X)$  和  $\theta(X)$ ，我们有下列关系式（参看文献 [12]）：

$$\begin{aligned}\theta([X, Y]) &= \theta(X) \circ \theta(Y) - \theta(Y) \circ \theta(X), \\ i([X, Y]) &= \theta(X) \circ i(Y) - i(Y) \circ \theta(X), \\ i(X) \circ i(Y) + i(Y) \circ i(X) &= 0.\end{aligned}$$

其中  $X$  和  $Y$  都是  $M$  上的向量场。从定义可知 Lie 导子  $\theta(X)$  是分级代数  $\Omega(M)$  的 0 级导子，内积  $i(X)$  是  $-1$  级的  $Z_2$ -导子。

设  $N$  是流形  $M$  的一个子流形， $\alpha \in \Omega^p(M)$ ，我们记  $\alpha|_N$  为  $\alpha$  在  $\Omega^p(N)$  中的拉回 (pull back)。

### § 6. 流形上的辛结构

6.1. 定义. 设微分形式  $\omega \in \Omega^2(M)$ ，若  $\omega$  满足下面的两个条件：

(1) 对任一  $x \in M$ ， $\omega_x$  都是点  $x$  处的切向量空间  $T_x M$  的一

个辛结构,

$$(2) d\omega = 0,$$

则称它为流形  $M$  上的一个辛结构, 并且称  $(M, \omega)$  为辛流形。

设  $(M_1, \omega_1)$  和  $(M_2, \omega_2)$  是两个辛流形,

$$\varphi: M_1 \rightarrow M_2,$$

是一可微映射。若  $\varphi$  满足条件

$$(6.2) \quad \omega_1 = \varphi^*(\omega_2),$$

则我们称  $\varphi$  为从  $(M_1, \omega_1)$  到  $(M_2, \omega_2)$  内的一个辛流形同态。而从  $(M_1, \omega_1)$  到  $(M_2, \omega_2)$  上的一个辛流形同构, 则是满足条件 (6.2) 的一个从  $M_1$  到  $M_2$  上的微分同胚。

若

$$\varphi: (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$$

是一辛流形同态, 则对任一  $x \in M_1$ ,  $\varphi$  在  $x$  点的微分是辛向量空间之间的一个同态

$$\varphi_x^*: (T_x M_1, (\omega_1)_x) \rightarrow (T_{\varphi(x)} M_2, (\omega_2)_{\varphi(x)}).$$

因此, 所有的辛流形同态都是浸入映射。

**基本性质.** 设  $(M, \omega)$  是一辛流形, 则我们有:

(a)  $M$  的维数是偶数。

(b)  $M$  是可定向的。若设  $\dim M = 2n$ , 则  $n$  阶外积幂  $\omega^n$  就是  $M$  上的一个体积元素。

(c) 若  $v \in T_x M$ , 则  $i(v)\omega_x \in T_x^*(M)$ . 由映射

$$v \mapsto i(v)\omega_x, \quad v \in T_x(M),$$

可定义从切丛  $TM$  到余切丛  $T^*M$  上的一个标准同构。同样, 把  $M$  上的向量场  $X$  映为 1-形式  $i(X)\omega$  的映射是从向量场模到 1-形式模上的标准同构。

(d)  $M$  上所有的一阶标架所构成的纤维丛含有一个由结构群  $Sp(2n)$  所决定的子丛, 这个子丛由辛标架构成, 所谓辛标架, 指的是满足  $A(\xi)\omega_x = \omega$  的标架  $\xi: R^{2n} \rightarrow T_x M$ , 其中  $\omega$  是  $R^{2n}$  上的标准辛形式 (参看 § 2)。

(e) 若  $M$  是紧流形, 则对  $i = 0, 1, \dots, n$ , 上同调空间

(de Rham)  $H^i(M, \mathbb{R})$  均非零。事实上, 形式  $\omega'$  所对应的上同调类  $[\omega'] = [\omega]^i \in H^i(M, \mathbb{R})$ 。由于  $\omega^*$  是体积元素, 所以  $[\omega^*] \neq 0$ , 故知  $[\omega'] \neq 0$ 。从而也就可以知道维数  $\geq 2$  的球没有辛结构。我们可以在同胚于 2 维球的投影空间  $CP^1$  上定义一辛结构。

注. 设  $(M, \omega)$  是一  $2n$  维的辛流形, 则对任意的  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ,  $\lambda\omega$  都是  $M$  上的辛结构。若  $M$  紧而且  $|\lambda| \neq 1$ , 则辛流形  $(M, \omega)$  和  $(M, \lambda\omega)$  是不同构的, 这是因为

$$|\int_M \omega^n| \neq |\int_M (\lambda M)^n|.$$

**例 1.** 设  $x_1, \dots, x_{2n}$  是  $\mathbb{R}^{2n}$  上的自然坐标, 则 2-形式

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{i+1}$$

是流形  $\mathbb{R}^{2n}$  上的一个辛结构, 我们称它为  $\mathbb{R}^{2n}$  上的标准辛结构。

**例 2.** 设  $G$  是由  $\mathbb{R}^{2n}$  上这样一些仿射变换  $f$  所构成的群, 这些  $f$  的线性部分属于  $Sp(2n)$ , 则  $G$  含平移变换, 是辛流形  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  的可递自同构群。若  $\Gamma$  是  $G$  的一个离散子群, 而且它在  $\mathbb{R}^{2n}$  上的作用是自由作用, 则  $\mathbb{R}^{2n}/\Gamma$  是一流形, 而且在  $\mathbb{R}^{2n}/\Gamma$  上存在唯一的辛结构使得标准映射

$$\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}/\Gamma$$

是一辛流形同态。若取  $\Gamma$  为整平移群  $\mathbb{Z}^{2n}$ , 则可以在环面  $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$  上定义一辛结构使该辛结构对于  $\mathbb{R}^{2n}$  在  $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$  上的自然作用是不变的。

**例 3.** 设  $(M, \omega)$  是一辛流形,

$$\pi: \tilde{M} \rightarrow M$$

是  $M$  的一个覆盖, 则  $(\tilde{M}, \pi^*(\omega))$  是辛流形而且  $\pi$  是辛流形同态。

**例 4.** 设  $(M_1, \omega_1)$  和  $(M_2, \omega_2)$  是两个辛流形。设

$$pr_i: M_1 \times M_2 \rightarrow M_i, i = 1, 2,$$

是标准投影, 则  $pr_1^*(\omega_1) + pr_2^*(\omega_2)$  是  $M_1 \times M_2$  上的一个辛结构。我们称辛流形

$$(M_1 \times M_2, pr_1^*(\omega_1) + pr_2(\omega_2))$$

为辛流形  $(M_1, \omega_1)$  和  $(M_2, \omega_2)$  的积，并把它记为

$$(M_1, \omega_1) \times (M_2, \omega_2).$$

**Kähler 结构.** 设  $M$  是  $-2n$  维流形， $J$  是  $M$  上的一个复结构，则作为  $M$  上的张量， $J$  是  $(1,1)$  型的。所以我们可把它看作  $M$  上的向量场模的一个自同态。 $J$  满足下列条件：

$$(1) \quad J^2 = -id,$$

$$(2) \quad J[X, Y] = [JX, Y] + [X, JY] + J[JX, JY],$$

其中  $X, Y$  是  $M$  上的任意的两个向量场。

设  $g$  是  $M$  上的微分对称 2-形式并且

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

对  $M$  上任意的向量场  $X, Y$  成立。令

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y),$$

则  $\omega \in \Omega^2(M)$ .

若  $g$  在  $M$  的任意一点处的秩都是  $2n$ ，即  $g$  是伪 Riemann 形式，则对任意的  $x \in M$ ,  $\omega_x$  都是向量空间  $T_x M$  上的辛形式而且  $J_x$  是  $(T_x M, \omega_x)$  上的辛复结构。形式  $h = g - i\omega$  是  $M$  上的一个伪 Hermite 形式。若还有  $d\omega = 0$ ，则  $\omega$  是  $M$  上的一个辛结构，并且我们称  $h$  为伪 Kähler 形式。最后，若  $d\omega = 0$  并且  $g$  在  $M$  的任意一点处的切空间都是正定的，则  $h$  称为  $M$  上的一个 Kähler 形式。若  $h$  是一个 Kähler 形式，则对任一  $x \in M$ ,  $J_x$  都是  $(T_x M, \omega_x)$  上的一个适应复结构。

若  $h$  是复流形  $M$  上的一个 Kähler 形式，则对  $M$  的任意一个复子流形  $N$ ,  $h$  在  $N$  上的拉回都是  $N$  上的一个 Kähler 形式。特别， $M$  的所有复子流形都具有诱导的辛结构。

**例 5.** 设  $CP^n$  是由  $C^{n+1}$  中所有的复直线所构成的复投影空间。任意一点  $D \in CP^n$  处的切向量空间可以等同于复线性映射空间

$$\mathcal{L}_c(D, C^{n+1}/D).$$

若  $\eta$  为  $C^{n+1}$  上的标准 Hermite 形式，即

$$\eta = \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i,$$

其中  $z_1, \dots, z_{n+1}$  是  $C^{n+1}$  上的自然坐标。令  $D^\perp$  为  $D$  在  $C^{n+1}$  中对于  $\eta$  的正交超平面，则可以把  $D$  点的切空间等同于复向量空间  $\mathcal{L}_c(D, D^\perp)$ 。于是对任意的  $D \in CP^n$ ，我们可以在  $T_D CP^n$  上定义一 Hermite 形式如下：

$$\eta_D(\varphi, \phi) = \frac{\eta(\varphi(u), \phi(u))}{\eta(u, u)},$$

其中  $\varphi, \phi \in \mathcal{L}_c(D, D^\perp)$ ,  $u \in D \setminus \{0\}$ 。设  $p$  是从  $U = C^{n+1} \setminus \{0\}$  到  $CP^n$  上的标准映射

$$u \mapsto Cu.$$

利用下式把切丛  $TU$  等同于  $U \times C^{n+1}$ :

$$(u, v) = \frac{d}{dt} (u + tv)|_{t=0}, \quad u \in U, v \in C^{n+1}.$$

于是, 对任意的  $(u, v) \in T_u U$ , 我们可定义

$$\mathcal{L}_c(C_u, (C_u)^\perp)$$

中的一个向量  $p^r(u, v)$ , 使得

$$(p^r(u, v))(w) = v - \frac{\eta(v, u)}{\eta(u, u)} u.$$

这样, 对  $(u, v), (u, w) \in T_u U$  我们有

$$\eta_C u (p^r(u, v), (u, w)) = \frac{\eta(u, u)\eta(v, w) - \eta(v, u)\eta(w, u)}{\eta(u, u)^2},$$

这是  $U$  上由下式

$$\tilde{\eta} = \frac{\left( \sum_i z_i \bar{z}_i \right) \left( \sum_j dz_j d\bar{z}_j \right) - \left( \sum_j \bar{z}_j dz_j \right) \left( \sum_i z_i d\bar{z}_i \right)}{\left( \sum_i z_i \bar{z}_i \right)^2}$$

所定义的 Hermite 型  $\tilde{\eta}$  在向量对  $(u, v), (u, w)$  上的值。于是, 对任一  $D \in CP^n$ ,  $\eta_D$  都是  $CP^n$  上满足  $p^*(h) = \tilde{\eta}$  的 Hermite 形式  $\eta$  在  $D$  点的值。记  $\eta$  的虚部为  $\omega$ , 则  $p^*(\omega)$  是  $\tilde{\eta}$  的虚部。令  $z_i = x_i + iy_i$ , 则  $p^*(\omega)$  就等于

$$-\frac{1}{r} \sum_j dx_i \wedge dy_i + \frac{1}{2} \frac{dr}{r^2} \wedge \sum_i (x_i dy_i - y_i dx_i),$$

其中  $r = \sum_i z_i \bar{z}_i$ . 直接计算知  $p^*(\omega)$  是一闭的 2-形式. 从而有

$$p^*(d\omega) = d(p^*(\omega)) = 0.$$

又因为  $p$  是子浸入, 所以  $d\omega = 0$ . 这就证明了  $\eta$  是一 Kähler 形式而  $\omega$  是  $CP^n$  上的一个辛结构.

酉群  $U(n+1)$  在  $CP^n$  上的作用可递并且保持 Kähler 形式  $\eta$  不变. 设  $D \in CP^n$  并设  $r_D \in U(n+1)$  是由下面的条件所决定的反射:

$$r_D(x) = \begin{cases} -x, & x \in D, \\ x, & x \in D^\perp, \end{cases}$$

则  $r_D$  在  $CP^n$  上的作用保持点  $D$  不动而对任意的  $\varphi \in T_D CP^n$ ,  $(r_D)^*\varphi = -\varphi$ . 可见它是以  $D$  为中心点的一个“对称”. 于是对  $CP^n$  上任一微分  $p$ -形式  $\alpha$  有

$$(r_D^*(\alpha))_D = (-1)^p \alpha_D.$$

若  $p$  是一奇数且  $\alpha$  在  $U(n+1)$  下不变, 则

$$\alpha_D = (r_D^*(\alpha))_D = -\alpha_D$$

对所有  $D \in CP^n$  都成立. 于是  $\alpha = 0$ . 这推出  $CP^n$  上的  $U(n+1)$  不变微分形式或者是偶数阶的或者是 0, 并且全都是闭的. 因为  $\eta$  是  $U(n+1)$  不变微分形式, 所以这也从另一方面证明了  $\eta$  的虚部是闭形式. 用同样的方法可以证明, 所有齐性对称空间的不变微分形式都是闭的(参看文献 [12]).

注. 存在不具有 Kähler 结构的紧辛流形, Thurston 给出了一个 4 维的例子, 构造的方法与例 2 类似(参看文献 [29]).

## § 7. 辛流形上的微分形式代数的算子

设  $(M, \omega)$  是  $-2n$  维的辛流形. 由辛流形的定义, 对任意的

$x \in M$ ,  $(T_x M, \omega_x)$  都是一辛空间。设  $\Omega_x(M)$  是向量空间  $T_x M$  上的反对称形式代数。如 §3 中所述, Lie 代数  $sl(2, R)$  在每一  $\Omega_x(M)$  中有一标准线性表示。这一线性表示可由  $sl(2, R)$  在  $\Omega(M)$  上的一个标准线性表示通过限制在  $\Omega_x(M)$  上得到。下面我们就来定义  $sl(2, R)$  在  $\Omega(M)$  上的一个标准线性表示。

首先, 对任意的  $\beta \in \Omega(M)$ , 定义  $\Omega(M)$  的自同态  $X$  为

$$X(\beta) = \omega \wedge \beta.$$

其次, 定义  $\Omega(M)$  的自同态  $H$  为

$$H(\beta) = (p - n)\beta, \forall \beta \in \Omega^p(M).$$

设  $x \in M$ ,  $e_1, \dots, e_{2n}$  是  $(T_x M, \omega_x)$  的一组辛基。我们定义  $\Omega(M)$  的自同态  $Y$  使

$$(Y(\beta))_x = \sum_{i=1}^{2n} i(e_i) i(e_{n+i}) \beta_x, \quad \forall \beta \in \Omega(M).$$

在局部上,  $Y$  可表达为

$$Y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} i(E_i) i(E'_i),$$

其中  $E_1, \dots, E_{2n}$  和  $E'_1, \dots, E'_{2n}$  是满足  $\omega(E_i, E'_j) = \delta_{ij}$  的两组向量场。

把  $\Omega(M)$  看作  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$  上的模。容易看出, 算子  $X, H, Y$  是模  $\Omega(M)$  的自同态。注意到这已经在 §3 中讨论过, 所以我们有

$$\begin{aligned} [H, X] &= H \circ X - X \circ H = 2X, \\ (7.1) \quad [H, Y] &= H \circ Y - Y \circ H = -2Y, \\ [X, Y] &= X \circ Y - Y \circ X = -H. \end{aligned}$$

所以算子  $X, H, Y$  在  $\Omega(M)$  上定义了 Lie 代数  $sl(2, R)$  的一个标准线性表示。这一表示在流形的研究, 尤其在 Kähler 流形的研究中起很重要的作用 (参看文献 [27])。

现设  $\omega$  是一正合形式, 即在  $M$  上存在 1-形式  $\alpha$  使  $d\alpha = -\omega$ 。我们把由  $\alpha$  定义的  $\Omega(M)$  的自同态

$$\beta \mapsto \alpha \wedge \beta, \quad \forall \beta \in \Omega(M),$$

称为由  $\alpha$  定义的左外积，并记为  $\mu(\alpha)$ 。利用  $\alpha$ ，我们在  $\Omega(M)$  上定义两个新的算子  $P$  和  $Q$  如下：

$$P = d - \mu(\alpha),$$

(7.2)

$$Q = [Y, P].$$

算子  $P$  和  $Q$  都是一阶微分算子。例如，对任意的  $f \in C^\infty(M)$  和  $\beta \in \Omega(M)$ ，我们有

$$P(f\beta) = fP(\beta) + df \wedge \beta.$$

又  $P$  和  $Q$  分别是 1 级和 -1 级的导子，即有

$$(7.3) \quad P(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p+1}(M), \quad Q(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p-1}(M).$$

7.4. 命题。算子  $X, Y, H, P$  和  $Q$  满足下列关系式：

- (i)  $[H, P] = P, \quad [H, Q] = -Q;$
- (ii)  $[X, P] = 0, \quad [X, Q] = -P;$
- (iii)  $[Y, P] = Q, \quad [Y, Q] = 0;$
- (iv)  $P^2 = X, \quad Q^2 = Y, \quad P \circ Q + Q \circ P = H.$

证。关系式 (i) 可直接从 (7.3) 导出。现证 (ii) 因为  $d\omega = 0$ ，所以有  $[d, X] = 0$ ，从而由 (7.2) 和  $\alpha$  的定义有  $[X, P] = 0$ 。根据定义， $Q = [Y, P]$ ，所以我们有

$$\begin{aligned} [X, Q] &= [X, [Y, P]] = [[X, Y], P] + [Y, [X, P]] \\ &= -[H, P] = -P. \end{aligned}$$

(ii) 得证。又因为  $d\alpha = -\omega$ ，所以我们有

$$d \circ \mu(\alpha) + \mu(\alpha) \circ d = -X,$$

于是

$$P^2 = (d - \mu(\alpha))^2 = X.$$

因为  $Q = [Y, P]$ ，所以

$$\begin{aligned} P \circ Q + Q \circ P &= P \circ Y \circ P - P^2 \circ Y + Y \circ P^2 - P \circ Y \circ P \\ &= [Y, X] = H. \end{aligned}$$

现在只剩下证明  $[Y, Q] = 0$  和  $Q^2 = Y$ 。设

$$\alpha = RX + RY + RH$$

是由  $X, Y, H$  生成的空间  $\Omega(M)$  上的自同态 Lie 代数  $gl(\Omega(M))$

的子代数，则  $\mathfrak{a}$  同构于  $sl(2, R)$ . 记  $\mathfrak{s}$  为  $gl(\Omega(M))$  中由下列元素张成的向量子空间：

$$P, ad(Y)P, \dots, ad(Y)^r P, \dots$$

其中  $ad$  是  $gl(\Omega(M))$  的伴随表示（即  $ad(U)V = [U, V]$ ,  $U, V \in gl(\Omega(M))$ ）。因为对大于  $n$  的正整数  $r$  有  $ad(Y)^r = 0$ , 所以空间  $\mathfrak{s}$  是有限维的。又因为对所有  $r \geq 0$  有

$$ad(H)ad(Y)^r P = (2r + 1)ad(Y)^r P,$$

所以  $\mathfrak{s}$  在  $ad(Y)$  和  $ad(H)$  的作用下都不变。又因为

$$\begin{aligned} ad(X)ad(Y)^r - ad(Y)^r ad(X) \\ = r(1 - r)ad(Y)^{r-1} - r ad(H)ad(Y)^{r-1}, \end{aligned}$$

所以  $\mathfrak{s}$  在  $ad(X)$  下也不变。因为  $ad(X)P = 0$  而且  $ad(H)P = P$ , 所以  $P$  对于  $\mathfrak{a}$  的由伴随表示  $ad$  限制在  $\mathfrak{s}$  上而得到的线性表示来说，是权为 1 的素元素。我们知道（参看文献[13]或[31]），这时一定有  $ad(Y)^2 P = 0$ , 从而

$$[Y, Q] = ad(Y)Q = ad(Y)^2 P = 0.$$

把  $Q^2$  分别写成

$$Q^2 = Q \circ Y \circ P - Q \circ P \circ Y = Y \circ Q \circ P - Q \circ P \circ Y,$$

和

$$Q^2 = Y \circ P \circ Q - P \circ Y \circ Q = Y \circ P \circ Q - P \circ Q \circ Y,$$

就得到  $2Q^2 = [Y, H] = 2Y$ . 证完。

利用所谓“Lie 超代数”的概念，命题 7.4 中的关系式可用“Lie 超代数”的语言很好地表达出来。下面我们就来定义 Lie 超代数，并且给出一些例子。

**7.5. 定义.** (参看文献[14].) 域  $k$  上的一个 Lie 超代数是  $k$  上的一个  $Z_2$ -分级向量空间  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ , 和一双线性映射（称为括号）

$$[, ]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

使得下面的(1)–(3)成立：

- (1)  $[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q}$ ,  $p, q \in Z_2$ ,
- (2)  $[x, y] = (-1)^{pq}[y, x]$ , 对  $\forall x \in \mathfrak{g}_p, y \in \mathfrak{g}_q$ ,

(3)  $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{pq} [y, [x, z]],$   
对  $\forall x \in g_p, y \in g_q.$

例 1. 设

$$V = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} V_p$$

是一  $\mathbb{Z}$ -分级向量空间. 记  $gl(V)_r$  为  $gl(V)$  中所有满足  $\alpha(V_p) = V_{p+r}$  的元素  $\alpha$  所构成的集合. 在  $\mathbb{Z}$ -分级空间

$$gl(V)_* = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} gl(V)_r$$

上定义一括号如下:

$$[\alpha, \beta] = \alpha \circ \beta - (-1)^{pr} \beta \circ \alpha, \quad \forall \alpha \in gl(V)_p, \beta \in gl(V)_q.$$

对于这样定义的括号, 若将  $gl(V)_*$  原来在  $\mathbb{Z}$  中的分级按模 2 同余类重新分级, 则空间  $gl(V)_*$  就成为一 Lie 超代数.

例 2. 设

$$A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A_p$$

是一  $\mathbb{Z}$ -分级结合代数 ( $A_p A_q \subset A_{p+q}$ ),  $gl(A)_p$  的定义同例 1.  
若  $\alpha \in gl(A)_p$ , 且

$$\alpha(xy) = \alpha(x)y + (-1)^{pr} x\alpha(y), \quad \forall x \in A_r, y \in A,$$

则我们称  $\alpha$  为  $A$  的一个  $Z_2$ -导子. 记  $\text{Der}(A)_p$  为  $gl(A)_p$  中所有的  $Z_2$ -导子构成的子空间, 则

$$\text{Der}(A)_* = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \text{Der}(A)_p$$

是  $gl(A)_*$  的一个 Lie 子超代数, 即它是在  $gl(A)_*$  的括号下不变的分级子空间.

例 3. 设  $e_{-1}, e_0, e_1$  是  $\mathbb{R}^3$  的一组自然基, 在  $\mathbb{R}^3$  上定义一  $\mathbb{Z}$ -分级如下:

$$e_p \text{ 的级数} = p, \quad p = -1, 0, 1.$$

设  $b$  是  $\mathbb{R}^3$  上的双线性型, 它在基  $e_{-1}, e_0, e_1$  下对应着矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则  $b$  在  $R\epsilon_{-1} + R\epsilon_1$  上的限制是辛形式而在  $R\epsilon_0$  上的限制则是对称正定型 (称  $b$  为正交辛形式). 设  $osp(2, 1)$  是  $gl(3, R) = gl(R^3)_*$  中这样的一个  $Z$ -分级子空间, 它的  $p$  级元素是  $gl(3, R)_p$ , 中满足

$$b(\alpha(x), y) + (-1)^{pr} b(x, \alpha(y)) = 0, \quad \forall x \in R\epsilon_r, y \in R^3,$$

的元素  $\alpha$ , 则  $osp(2, 1)$  是  $gl(3, R)$  的一个 Lie 子超代数 (比较例 1). 它是 5 维的, 而且下列元素构成它的一组基:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ Y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ Q &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

元素  $X, P, H, Q, Y$  的  $Z$ -级数分别是  $2, 1, 0, -1, -2$ .  $osp(2, 1)$  中由偶数级元素所张成的子空间是同构于  $sl(2, R)$  的子代数.

现设  $(M, \omega)$  是一辛流形, 并设  $X, H, Y, P, Q$  是本节开头通过满足等式  $d\alpha = -\omega$  的  $\alpha$  而定义出的  $\Omega(M)$  中的算子. 不难证明 (读者可作为习题自证之), 从  $osp(2, 1)$  到  $gl(\Omega(M))$  中的映射  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \rho(X) &= X, \quad \rho(H) = H, \quad \rho(Y) = Y, \\ \rho(P) &= P, \quad \rho(Q) = Q, \end{aligned}$$

是一 Lie 超代数同态. 于是,  $\alpha$  的选取确定了  $osp(2, 1)$  在分级空间  $\Omega(M)$  中的一个线性表示.

Lie 超代数  $osp(2, 1)$  与  $sl(2, R)$  很相似 (参看文献 [14] 和 [21]). 例如,  $osp(2, 1)$  是单代数, 即它不含除  $(0)$  和它本身以外的理想子代数.  $osp(2, 1)$  的所有有限维线性表示都是半单的

(即完全可约的). 对任一整数  $n \geq 0$ , 在同构意义下存在唯一的一个  $2n+1$  维的单线性表示(不可约线性表示). 对于这个表示,  $H$  的权是区间  $[-n, n]$  中的所有整数. 若  $n > 0$ , 则表示分解为  $sl(2, R) \subset osp(2, 1)$  的两个维数分别是  $n$  和  $n+1$  的单表示的直和. 最后, 我们指出,  $osp(2, 1)$  的所有单表示的维数都是奇数.

## §8. 辛坐标

利用 Darboux 的一个定理, 可得到这样一个结论: 两个同维数的辛流形是局部同构的. 在本节中, 我们用对维数进行归纳的方法, 给出这个结论的一个证明. Moser (参看文献 [29]) 指出了另一通过变换给出的证明, 他的结果我们将在 §11 中加以叙述.

设  $M$  是一流形,  $\alpha$  是  $M$  上任意的一个  $p$ -形式. 考虑切丛  $TM$  中所有这样的元素  $v$ , 它们满足条件: 若  $v \in T_x M$ , 则  $i(v)\alpha_x = 0$ . 这些  $v$  所构成的集合称为  $\alpha$  的核, 记为  $\text{Ker}\alpha$ . 若  $\text{Ker}\alpha$  是  $TM$  的纤维维数是  $\dim M - r$  的子向量丛, 则称  $\alpha$  具有常秩  $r$ .

8.1. 引理. 设  $M$  是一流形, 映射

$$\varphi: M \rightarrow R^s$$

是一子浸入. 设  $\alpha \in \Omega^p(M)$ . 若

$$\text{Ker}\varphi^T \subset (\text{Ker}\alpha) \cap (\text{Ker}d\alpha),$$

则对  $M$  的任一点  $x^0$ , 存在  $x^0$  的一个开邻域  $U$  和  $\Omega(\varphi(U))$  中的一个形式  $\beta$ , 使  $\alpha|_U = \varphi^*(\beta)$ .

证. 设  $n = \dim M$ , 并设  $y_1, \dots, y_s$  是  $R^s$  的自然坐标. 令  $x_i = y_i \circ \varphi$ . 因为  $\varphi$  是子浸入, 所以存在  $x_0$  在  $M$  中的一个开邻域  $V$  和  $V$  上的可微函数  $x_{s+1}, \dots, x_n$  使得  $x_1, \dots, x_n$  是  $V$  上的坐标系.

对于  $i = s+1, \dots, n$ , 向量场  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  是  $V$  上纤维丛  $\text{Ker}\varphi^T$  的截面.

面. 设  $S(p, n)$  为所有满足

$$\tau(1) < \tau(2) < \dots < \tau(p)$$

的映射  $\tau$

$$[1, p] \rightarrow [1, n]$$

所成的集合。并设  $\alpha|_V$  的坐标表达式是

$$\alpha|_V = \sum_{\tau \in S(p, n)} f_\tau dx_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\tau(p)}.$$

因为对  $i > s$  有

$$i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \alpha = 0,$$

所以若  $\tau(p) > s$ , 则  $f_\tau = 0$ . 于是有

$$\alpha|_V = \sum_{\tau} f_\tau (dy_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dy_{\tau(s)}), \quad \tau \in S(p, s).$$

又因为对  $i > s$  有

$$i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) d\alpha = 0,$$

所以对所有的  $i > s$  有

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_\tau = 0.$$

于是推出，在  $x_0$  的某一开邻域中，设该邻域为  $U$ ，函数  $f_\tau$  具有形式  $f_\tau = \varphi^*(g_\tau)$ ，这里  $g_\tau$  是  $\varphi(U)$  上的可微函数。令

$$\beta = \sum_{\tau} g_\tau dy_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dy_{\tau(s)}, \quad \tau \in S(p, s),$$

则我们有

$$\alpha|_V = \varphi^*(\beta).$$

证完。

**8.2. 命题.** 设  $M$  和  $N$  是两个流形，映射

$$\varphi: M \rightarrow N$$

是一到上的子浸入。假定  $\varphi$  的纤维是连通的。设  $\alpha$  是  $M$  上的一个微分形式使得

$$\text{Ker } \varphi^T = (\text{Ker } \alpha) \cap (\text{Ker } d\alpha),$$

则在  $N$  上存在唯一的一个微分形式  $\beta$  使得

$$\alpha = \varphi^*(\beta).$$

证。根据引理 8.1，对任一  $x \in M$ ，存在  $x$  的一个开邻域  $U_x$

和  $\varphi(U_x)$  上的微分形式  $\beta_x$  使得

$$\alpha|_{U_x} = \varphi^*(\beta_x).$$

把  $\beta_x$  看作是空间  $N$  上的纤维丛的一个截面，则对任意的  $x, y \in M$ ，在  $\varphi(U_x \cap U_y)$  上我们有  $\beta_x = \beta_y$ 。又因为  $\varphi$  的纤维是连通的，于是在  $\varphi(U_x) \cap \varphi(U_y)$  上有  $\beta_x = \beta_y$ 。从而在  $\varphi(M) = N$  上存在一个微分形式  $\beta$  使等式

$$\beta_x = \beta|_{\varphi(U_x)}$$

对所有的  $x \in M$  都成立。于是  $\alpha = \varphi^*(\beta)$ 。又因为

$$\varphi^T: TM \rightarrow TN$$

是满射，所以上式唯一地确定了  $\beta$ 。证完。

设  $M$  是一流形，向量丛  $TM$  的一个子向量丛  $E$  称为是可积的，若它是一微分流形并且对它上的任两可微截面  $X, Y$ ,  $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$  都是  $E$  的截面。

例如，若

$$\varphi: M \rightarrow N$$

是一常秩可微映射，则子纤维丛  $\text{Ker } \varphi^T \subset TM$  便是可积的。

下面引述的 Frobenius 定理表明，在局部上， $TM$  的所有可积子丛都可用上面例子中的同样的方法得到。该定理的证明读者可在任何一本关于流形的书上找到。

**Frobenius 定理.** 设  $M$  为一流形， $E$  是  $TM$  的一个可积子丛。设  $E$  的纤维的维数是  $r$ ， $TM$  的纤维的维数是  $n$ ，则在局部上， $M$  上存在坐标  $x_1, \dots, x_n$  使

$$E = \bigcap_{r < i \leq n} \text{Ker } dx_i.$$

于是对上述的局部坐标， $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}$  在局部上是  $E$  的截面的一组基。

**推论.** 设  $M$  是一流形， $E$  是  $TM$  的一个可积子丛，则对任意的  $x \in M$ ，存在  $x$  在  $M$  中的一个开邻域  $U$  和子浸入

$$\varphi: U \rightarrow R^{n-r}$$

使得

$$\text{Ker}\varphi^T = E \cap TU.$$

证. 这是 Frobenius 定理的直接推论. 证完.

**8.3. 命题.** 设  $M$  是一流形,  $\alpha \in \Omega^p(M)$  是一闭微分  $p$ -形式, 并设  $\alpha$  在  $M$  上每一点处的秩都是  $r$ , 则对任意的  $x \in M$ , 存在  $x$  的一个开邻域  $U$ , 子浸入

$$\varphi: U \rightarrow R^r$$

以及  $p$ -形式  $\beta \in \Omega^p(\varphi(U))$  使得

$$\alpha|_U = \varphi^*(\beta).$$

并且,  $\beta$  也是闭形式, 它在  $\varphi(U)$  的每一点处的秩也是  $r$ .

证. 因为  $\alpha$  在  $M$  的每一点处的秩都是  $r$ , 所以  $E = \text{Ker}\alpha$  是  $TM$  的一个子丛而且其纤维的维数是  $n - r$ , 这里  $n = \dim M$ . 因为  $E = \text{Ker}\alpha$ , 所以  $E$  的可微截面是  $M$  上的满足  $i(X)\alpha = 0$  的向量场  $X$ . 若  $X, Y$  是  $E$  的两个截面, 则我们有

$$\begin{aligned} i([X, Y])\alpha &= \theta(X)i(Y)\alpha + i(Y)\theta(X)\alpha \\ &= i(Y)\theta(X)\alpha \\ &= i(Y)(di(X)\alpha + i(X)d\alpha) = 0. \end{aligned}$$

所以  $[X, Y]$  也是  $E$  的截面. 从而  $E$  是可积的. 由 Frobenius 定理的推论, 对任意的  $x \in M$ , 存在  $x$  的一个开邻域  $U_0$  和子浸入  $\varphi: U_0 \rightarrow R^r$  使得

$$\text{Ker}\varphi^T = E \cap TU_0.$$

因为

$$(\text{Ker}\alpha) \cap (\text{Ker}d\alpha) = \text{Ker}\alpha = E \supset \text{Ker}\varphi^T,$$

根据引理 8.1, 存在  $x$  的一个含于  $U_0$  中的开邻域  $U$  和  $\beta \in \Omega^p(\varphi(U))$  使得

$$\alpha|_U = \varphi^*(\beta).$$

又因为  $\varphi$  是子浸入并且

$$\varphi^*(d\beta) = d\varphi^*(\beta) = d\alpha = 0,$$

所以我们有  $d\beta = 0$ . 因为

$$\text{Ker}\beta = \varphi^T(\text{Ker}\alpha|_U) = 0,$$

所以  $\beta$  的秩恒等于  $r$ . 证完.

**推论.** 设  $\alpha$  是流形  $M$  上在每一点处的秩都是  $2r$  的闭  $2$ -形

式, 则对任意的  $x \in M$ , 存在  $x$  的一个开邻域  $U$  和子浸入

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{2r},$$

以及  $\varphi(U)$  上的一个辛结构  $\omega$  使得

$$\alpha|_U = \varphi^*(\omega).$$

证. 直接应用命题 8.3 便可. 证完.

**8.4. 定理 (Darboux).** 设  $M$  是一流形,  $\alpha$  是  $M$  上在每一点处的秩都是  $2r$  的闭  $2$ -形式, 则对任意的  $x \in M$ , 存在  $x$  的一个开邻域  $U$  和  $U$  上的可微函数  $x_1, \dots, x_{2r}$  使得

$$\alpha|_U = dx_1 \wedge dx_{r+1} + \cdots + dx_r \wedge dx_{2r}.$$

证. 我们对  $2r + \dim M$  进行归纳. 当  $2r + \dim M = n$  时, 结论显然成立.

下面我们把证明分作两步.

(1) 设  $2r < \dim M$ . 根据命题 8.3 的推论, 存在  $x$  的一个邻域  $U_0$ , 子浸入

$$\varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^{2r}$$

和  $\varphi(U_0)$  上的辛结构  $\omega$  使得

$$\alpha|_{U_0} = \varphi^*(\omega).$$

因为

$$\dim \varphi(U) = 2r < \dim M,$$

因此我们可以假设结论在  $2r - 2$  时成立, 而对  $\dim \varphi(U) = 2r$ , 存在  $y = \varphi(x)$  在  $\mathbb{R}^{2r}$  中的一个开邻域  $V$  和  $V$  上的可微函数  $y_1, \dots, y_{2r}$  使得

$$\omega|_V = dy_1 \wedge dy_{r+1} + \cdots + dy_r \wedge dy_{2r}.$$

令  $x_i = y_i \circ \varphi$ , 则得

$$\alpha|_{\varphi^{-1}(V)} = dx_1 \wedge dx_{r+1} + \cdots + dx_r \wedge dx_{2r}.$$

于是我们就对所有  $2r < \dim M$  证明了结论.

(2) 设  $2r = \dim M$ . 此时,  $\alpha$  是  $M$  上的一个辛结构, 而映射

$$X \mapsto i(X)\alpha$$

是从  $M$  上的向量场模到模  $\Omega^1(M)$  上的一个模同构. 所以对  $M$  上任一可微函数  $f$ , 在  $M$  上存在唯一的一个向量场  $H_f$ , 使得  $i(H_f)\alpha =$

$df$  (我们将在 §9 中仔细研究映射  $f \mapsto H_f$ ). 设  $f$  是  $x$  的某一邻域上的可微函数使  $df_x \neq 0$ , 则在  $x$  的某一邻域上有  $H_f \neq 0$ . 我们还可以在  $x$  的一个充分小的开邻域  $U_0$  上找到一可微函数  $g$ , 使对  $U_0$  的任一点都有  $H_f \cdot g = 1$ . 现设  $\alpha' = \alpha - df \wedge dg$ , 则  $d\alpha' = 0$  且

$$i(H_f)\alpha' = df - (i(H_f)i(H_f)\alpha) \wedge dg - df \wedge (i(H_f)dg) = 0.$$

于是  $\alpha'$  在  $U_0$  上任一点处的秩都  $< 2r$ . 另一方面,

$$\alpha' = (\alpha')^r + r(\alpha')^{r-1} \wedge df \wedge dg = r(\alpha')^{r-1} \wedge df \wedge dg,$$

这说明在  $U_0$  的任一点处都有  $(\alpha')^{r-1} \neq 0$ . 于是  $\alpha'$  在  $U_0$  上是常秩为  $r-1$  的形式. 由 (1) 可知在  $x$  的某一含于  $U_0$  中的开邻域  $U$  上存在可微函数  $x_1, \dots, x_{r-1}$  和  $x_{r+1}, \dots, x_{2r-1}$  使得

$$\alpha' = dx_1 \wedge dx_{r+1} + \cdots + dx_{r-1} \wedge dx_{2r-1}.$$

于是得知在  $U$  上有

$$\alpha = dx_1 \wedge dx_{r+1} + \cdots + dx_r \wedge dx_{2r},$$

其中  $x_r = f$ ,  $x_{2r} = g$ . 证完.

注. 因为  $\alpha$  在每一点处的秩都是  $2r$ , 所以函数  $x_1, \dots, x_{2r}$  在  $U$  的任意一点处都是不相关的.

**8.5. 定义.** 设  $(M, \omega)$  是一  $2n$  维辛流形,  $U$  是  $M$  的一个开集.  $U$  上的坐标  $x_1, \dots, x_{2n}$  称为辛坐标, 若

$$\omega|_U = dx_1 \wedge dx_{n+1} + \cdots + dx_n \wedge dx_{2n}.$$

由 Darboux 定理知, 在  $M$  的每一点的一个适当的邻域上, 存在局部的辛坐标. 设  $M$  的维数是  $2n$ . 对  $R^{2n}$  中的开集, 我们把它看作具有由  $R^{2n}$  上的标准辛结构的拉回辛结构的  $2n$  维辛流形. 于是, 利用  $M$  的一个开集  $U$  上的辛坐标, 可定义一个从  $(U, \omega|_U)$  到  $R^{2n}$  的一个开集上的同构. 局部辛坐标的存在还证明了两个同维数的辛流形是局部同构的.

## § 9. Hamilton 向量场和辛向量场

设  $X$  是流形  $M$  上的一个向量场,  $U$  是  $M$  的一个开集,  $I$  是  $R$  的

包含 0 的一个开区间。设可微映射

$$\varphi: I \times U \rightarrow M$$

满足下面的两个条件：

- (i)  $\varphi(0, x) = x, \forall x \in U,$
- (ii) 映射:  $a \mapsto \varphi(a, x)$  对  $\forall x \in U$  都是  $X$  的一条积分曲线，

则我们称  $\varphi$  是由  $X$  产生的一个流 (flow).

记  $\iota$  为投影

$$R \times M \rightarrow R,$$

并把偏导算子  $\frac{\partial}{\partial t}$  看作流形  $R \times M$  上的向量场，则上面的条件

- (ii) 等价于要求

$$\varphi^T \circ \frac{\partial}{\partial t} = x \circ \varphi,$$

而在  $\Omega(M)$  上则等价于

$$\theta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \theta(x).$$

设  $a \in I$ , 则可定义一浸入

$$\lambda_a: x \mapsto (a, x), x \in U.$$

于是  $\lambda_a$  把  $U$  映入  $I \times U$  中，而且  $\varphi_a = \varphi \circ \lambda_a$  是一依赖于参数  $a \in I$  的从  $U$  到  $M$  内的可微映射族。由  $\varphi$  的定义可知，对每一  $a \in I$ ,  $\varphi_a$  都是从  $U$  到  $\varphi_a(U)$  上的一个微分同胚。

**9.1. 引理.** 设  $\alpha$  是  $M$  上的一个微分  $p$ -形式， $X$  是  $M$  上的一个向量场， $\varphi: I \times U \rightarrow M$  是由  $X$  产生的一个流，则为使  $U$  上的  $p$ -形式  $\varphi_a^*(\alpha)$  不依赖于参数  $a \in I$ ，充分必要条件是在  $\varphi(I \times U)$  上有  $\theta(X)\alpha = 0$ 。

证. 由微分形式

$$\varphi_a^*(\alpha), a \in I,$$

所构成的族可以看作是  $I \times U$  上的微分形式

$$i \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) (dt \wedge \varphi^*(\alpha)).$$

但是我们有

$$\begin{aligned}
 & \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt \wedge \varphi^*(\alpha)) \\
 &= i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt \wedge \varphi^*(\alpha)) \\
 &= i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt \wedge \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi^*(\alpha)) \\
 &= i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt \wedge \varphi^*\theta(X)\alpha).
 \end{aligned}$$

所以若  $\theta(X)\alpha = 0$ , 则  $\varphi_a^*(\alpha)$  不依赖于  $a \in I$ . 反之, 若  $\varphi_a^*(\alpha)$  不依赖于  $a$ , 则根据上面的计算, 我们有

$$\varphi^*\theta(X)\alpha = dt \wedge r, \quad r \in \Omega^{p-1}(I \times U).$$

从而对任意的  $a \in I$  有

$$\varphi_a^*\theta(X)\alpha = \lambda_a^* \varphi^*\theta(X)\alpha = \lambda_a^*(dt) \wedge \lambda_a^*(r) = 0.$$

又由于全部  $\varphi_a$  都是子浸入, 因此在  $\varphi(I \times U)$  上有  $\theta(X)\alpha = 0$ . 证完.

**9.2. 定义.** 设  $(M, \omega)$  是一辛流形, 若  $M$  上的一个向量场  $X$  满足  $\theta(X)\omega = 0$ , 则我们称它为辛向量场.

因为  $d\omega = 0$ , 所以向量场  $X$  为一辛向量场当且仅当 1-形式  $i(X)\omega$  是闭的. 根据引理 9.1 可知, 若  $X$  是辛向量场, 则对任意一个由  $X$  产生的流

$$\varphi: I \times U \rightarrow M,$$

和任意的  $a \in I$ , 我们有

$$\varphi_a^*(\omega) = \varphi_0^*(\omega) = \omega|U.$$

从而  $\varphi_a$  是从  $(U, \omega|U)$  到  $(\varphi(U), \omega|\varphi(U))$  上的一个同构.

下面我们把辛流形  $(M, \omega)$  上所有的辛向量场所构成的集合记为  $S(M, \omega)$ . 因为映射

$$X \mapsto \theta(X)$$

是一实线性映射, 所以由辛向量场的定义可知  $S(M, \omega)$  是  $M$  的向量场空间的一个子空间. 又因为

$$\theta([X, Y]) = [\theta(X), \theta(Y)],$$

所以若  $X, Y$  是辛向量场, 则  $[X, Y]$  也是辛向量场. 于是  $S(M, \omega)$  是  $M$  上的向量场所构成的 Lie 代数的一个子代数. 若  $X \in S(M, \omega)$ , 则对任一开集  $U \subset M$ , 有

$$X|_U \in S(U, \omega|_U).$$

注意到映射

$$X \mapsto i(X)\omega, \quad X \text{ 是 } M \text{ 上的向量场},$$

是一双射, 所以利用它可定义辛向量场空间  $S(M, \omega)$  到  $M$  的闭 1-形式所构成的向量空间上的一个标准同构. 为了更好地研究这一同构的性质, 我们先简单回顾一下 de Rham 群的定义. 设  $Z^p(M)$  是映射

$$d: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

的核, 即  $Z^p(M)$  是  $M$  上所有的闭  $p$ -形式所构成的空间. 设  $B^p(M)$  是

$$d: \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$$

的象, 则  $B^p(M) \subset Z^p(M)$ . 于是我们可定义

$$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M), \quad 0 \leq p \leq n.$$

这里  $n = \dim M$ . 我们把  $H^p(M)$  称为  $M$  的  $p$  维 de Rham 群. 为了明确  $H^p(M)$  是  $R$ -模, 我们也把它写成  $H^p(M, R)$ . 容易知道  $H^0(M, R) = R$ , 若  $M$  是连通的.

现对任意的  $X \in S(M, \omega)$ , 令  $X$  与  $i(X)\omega$  所代表的  $H^1(M, R)$  中的上同调类对应, 我们就得到一个标准满线性映射

$$\rho: S(M, \omega) \rightarrow H^1(M, R).$$

下面我们来定义一个从空间  $C^\infty(M)$  到空间  $S(M, \omega)$  内的标准线性映射  $H$ . 对任一函数  $f \in C^\infty(M)$ , 令  $f$  对应于  $M$  上的向量场  $H_f$ , 使得  $i(H_f)\omega = df$ . 于是  $H_f$  是唯一确定的. 因为  $df$  是闭的, 所以  $H_f$  是一个辛向量场. 又根据定义知  $H$  的核与  $d$  的核重合. 从而该核就是  $M$  上的局部为常数的函数空间  $H^0(M, R)$ . 前面说过, 若  $M$  是连通的, 则  $H^0(M, R) = R$ . 对任意的  $f \in C^\infty(M)$ ,  $i(H_f)\omega$  都是一正合形式, 于是  $\rho(H_f) = 0$ . 反之, 若  $X \in S(M, \omega)$  且  $\rho(X) = 0$ , 则存在  $f \in C^\infty(M)$  使  $i(X)\omega = df$ ,  $X = H_f$ . 于

是我们得到一标准正合列

$$(9.3) \quad (0) \rightarrow H^0(M, R) \rightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{H} S(M, \omega) \\ \xrightarrow{\rho} H^1(M, R) \rightarrow (0).$$

**9.4. 定义.** 辛流形  $(M, \omega)$  上的形如  $H_f$  ( $f \in C^\infty(M)$ ) 的向量场称为 Hamilton 向量场.

根据定义可知, 所有的 Hamilton 向量场都是辛向量场. 若  $H^1(M, R) = 0$ , 特别地若  $M$  单连通, 则由 (9.3) 知所有的辛向量场都是 Hamilton 向量场. 一般地, 对  $H^1(M, R) \neq 0$  的情形, 因为每一个闭的 1-形式都局部地重合于一个正合 1-形式, 所以任一辛向量场都局部地重合于一个 Hamilton 向量场.

**例1.** 考虑经典力学的动力系统. 可以把它看作是某一流形  $Q$  (称  $Q$  为组态空间, 参看文献[2]和[9]) 的切丛  $TQ$  上的一组向量场. 而 Lagrange 动力系统则是在定义了辛结构的  $TQ$  上的一组 Hamilton 向量场. 例如, 描述质量为  $m$  的质点在欧氏空间  $Q = \mathbb{R}^3$  中的运动的动力系统, 在势  $U$  的作用下, 具有下面的形式:

$$X = \sum_{i=1}^3 q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i},$$

其中  $q_1, q_2, q_3$  是  $\mathbb{R}^3$  中的自然坐标, 而  $\dot{q}_i = dq_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是  $TR^3$  上的函数. 质量为  $m$  的质点的轨迹是  $X$  的积分曲线在  $\mathbb{R}^3$  上的投影.

设

$$\omega = m \sum_{i=1}^3 dq_i \wedge d\dot{q}_i,$$

则  $\omega$  是  $TR^3$  上的一个辛结构. 若设

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m\dot{q}_i^2 - U$$

为“动-势能”函数, 则有

$$df = \sum_{i=1}^3 m\dot{q}_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i,$$

而且  $i(X)\omega = df$ . 于是  $X = H_f$ .

例 2. 设  $\omega = dx_1 \wedge dx_2$  是  $R^2$  上的标准辛结构, 令

$$C = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

则对  $R^2$  上任一可微函数  $f$  有

$$\begin{aligned} d(i(fC)\omega) &= \theta(fC)\omega \\ &= 2f\omega + df \wedge \omega = (2f + Cf)\omega. \end{aligned}$$

所以, 为使  $fC$  是一辛向量场, 充分必要条件是  $Cf + 2f = 0$ . 在一般情形下, 这个条件在 0 点的邻域内不能保证. 例如, 若  $f = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ , 则向量场  $fC$  是  $R^2 \setminus (0)$  上的一个辛向量场. 但是这时我们有

$$i(fC)\omega = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

这不是正合微分形式, 所以向量场  $fC$  不是 Hamilton 向量场.

**Hamilton 向量场和辛向量场的一些整体性质.** 设  $(M, \omega)$  是一辛流形,  $f \in C^\infty(M)$ , 则 Hamilton 向量场  $H_f$  在点  $x \in M$  处为 0 的充分必要条件是  $df_x = 0$ , 即  $x$  是  $f$  的一个临界点. 若  $M$  是紧流形 (维数  $> 0$ ), 则  $M$  上每一 Hamilton 向量场在  $M$  上至少有两个零点, 而对于不是 Hamilton 场的辛向量场, 则可能在任一点处都  $\neq 0$ .

例. 设  $f$  是  $R^{2n}$  上的一个非零线性型. 由于  $df$  以及  $R^{2n}$  上的标准辛结构都在平移下不变, 所以  $H_f$  也在平移下不变. 令  $x$  是  $H_f$  在环面  $R^{2n}/Z^{2n}$  上的投影, 则在  $R^{2n}/Z^{2n}$  的商辛结构下,  $X$  是一辛向量场 (比较 §6, 例 2). 这一辛向量场恒不为 0.

若  $(M, \omega)$  是一紧辛流形而且  $H^1(M, R) = \{0\}$ , 则  $(M, \omega)$  的所有由某一辛向量场所产生的流所给出的自同构  $\varphi$  至少有两个不动点. 事实上, 这时辛向量场是 Hamilton 向量场, 而它的零点就是  $\varphi$  的不动点. 这一性质对  $(M, \omega)$  的恒等映射的  $C^1$  逼近 ( $C^1$ -proche) 自同构也成立 (参看文献 [29]).

设  $(M, \omega)$  是一  $2n$  维的辛流形,  $U$  是  $M$  上的体积有限的连通开集, 即

$$\int_U \omega^n < \infty.$$

(例如, 相对紧开集.) 设  $X$  是  $(M, \omega)$  上的一个辛向量场且设  $\varphi: I \times U \rightarrow M$  是由  $X$  产生的一个流. 于是对任意的  $a \in I$ ,  $\varphi_a^*(\omega) = \omega|_U$ , 所以

$$\int_{\varphi_a(U)} \omega^n = \int_U \omega^n.$$

若  $\varphi_a(U) \subset U$ , 则必有  $\varphi_a(U) = U$ . 设  $S$  是  $U$  的边界, 若  $S$  是  $M$  的一个超曲面, 则不可能对每一  $y \in S$ , 向量  $X_y$  都横截于  $S$  (transverse à  $S$ ). 特殊地, 若  $X = H_f$ , 则  $f$  在  $S$  上的限制的临界点就是所有使得  $X_y \in T_y S$  的点  $y$ .

**9.5. 引理.** 设  $X, Y$  是辛流形  $(M, \omega)$  上的两个辛向量场, 则

$$[X, Y] = H_{\omega(X, Y)}.$$

证. 事实上,

$$\begin{aligned} i([X, Y])\omega &= \theta(X)i(Y)\omega - i(Y)\theta(X)\omega \\ &= \theta(X)i(Y)\omega = (di(x) + i(x)d)i(Y)\omega \\ &= d(i(X)i(Y)\omega) = d\omega(Y, X), \end{aligned}$$

再由  $H_{\omega(X, Y)}$  的定义便知引理成立. 证完.

**9.6. 引理.** 设  $X$  是  $(M, \omega)$  上的一个辛向量场,  $f \in C^\infty(M)$ , 则

- (i)  $Xf = \omega(H_f, X)$ ,
- (ii)  $[X, H_f] = H_{Xf}$ .

证 事实上,

$$Xf = df(X) = (i(H_f)\omega)(X) = \omega(H_f, X).$$

而 (ii) 是 (i) 和引理 9.5 的直接推论. 证完.

**9.7. 定义.** 设  $(M, \omega)$  是一辛流形. 我们称从  $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$  到  $C^\infty(M)$  内的实双线性映射

$\{\cdot, \cdot\}: (f, g) \mapsto \{f, g\} = H_f g$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$ , 为 Poisson 括号.

**9.8. 引理.** 设  $f, g$  是辛流形  $(M, \omega)$  上的两个可微函数, 则有

$$\{f, g\} = \omega(H_g, H_f), \quad [H_f, H_g] = H_{\{f, g\}},$$

其中 $[,]$ 是 $M$ 上的向量场 Lie 代数通常的括号.

证. 事实上,

$$\{f, g\} = H_f g \Rightarrow i(H_f)dg = i(H_f)i(H_g)\omega = \omega(H_g, H_f),$$

所以第一个等式成立. 再利用引理 9.5 便可证明第二式. 证完.

9.9. 命题. Poisson 括号满足下列等式:

$$(i) \quad \{f, g\} + \{g, f\} = 0,$$

$$(ii) \quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

$$(iii) \quad \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\},$$

其中  $f, g, h \in C^\infty(M)$ .

证. (i) 可由  $\{f, g\} = \omega(H_g, H_f)$  导出. 利用引理 9.8, 我们有

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= H_f H_g h = [H_f, H_g]h + H_g H_f h \\ &= H_{[f, g]}h + \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}. \end{aligned}$$

再利用 (i) 便得 (ii). 最后,

$$\begin{aligned} \{f, gh\} &= H_f(gh) = (H_f g)h + g(H_f h) \\ &= \{f, g\}h + g\{f, h\}. \end{aligned}$$

证完.

命题 9.9 里的关系式 (i) 和 (ii) 表明,  $C^\infty(M)$  对 Poisson 括号构成  $R$  上的一个 Lie 代数.

9.10. 命题. 若在  $H^0(M, R)$  和  $H^1(M, R)$  上定义零括号使它们成为 Lie 代数, 则正合序列 (9.3)

$$(0) \rightarrow H^0(M, R) \rightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{H} S(M, \omega) \xrightarrow{\rho} H^1(M, R) \rightarrow (0)$$

成为一 Lie 代数正合列.

证. 若  $f, g \in H^0(M, R)$ , 则因函数  $g$  在局部上是常数, 所以有  $\{f, g\} = H_f g = 0$ . 于是内射  $H^0(M, R) \rightarrow C^\infty(M)$  是一 Lie 代数同态. 根据引理 9.8 可知

$$H: C^\infty(M) \rightarrow S(M, \omega)$$

也是 Lie 代数同态. 设  $X, Y \in S(M, \omega)$  是两个辛向量场, 根据引

理 9.5, 我们有

$$i([X, Y])\omega = i(H_{\omega(Y, X)})\omega = d(\omega(Y, X)).$$

于是  $[X, Y]$  在  $H^1(M, R)$  中的象是零, 所以映射

$$\rho: S(M, \omega) \rightarrow H^1(M, R)$$

是 Lie 代数同态. 证完.

我们已经知道, 辛向量场集  $S(M, \omega)$  是  $M$  的向量场 Lie 代数的一个 Lie 子代数, 而根据引理 9.8, 我们知道 Hamilton 向量场的全体构成  $S(M, \omega)$  的一个 Lie 子代数.

**9.11. 命题.** 由 Poisson 括号所定义的 Lie 代数  $C^\infty(M)$  的中心是  $M$  上的局部常数函数空间  $H^0(M, R)$ .

证. 事实上, 若  $f \in C^\infty(M)$  且对任意的  $g \in C^\infty(M)$  有  $\{f, g\} = 0$ , 则  $H_f g - \{f, g\} = 0$  对所有的  $g \in C^\infty(M)$  都成立. 于是  $H_f = 0$ . 又我们已经知道  $H^0(M, R)$  是  $H$  的核, 所以  $f \in H_0(M, R)$ . 反之, 对任意的  $f \in H^0(M, R)$  当然有  $\{f, g\} = 0, \forall g \in C^\infty(M)$ . 证完.

设  $(P, \omega_P)$  和  $(Q, \omega_Q)$  是两个辛流形且设

$$\varphi: P \rightarrow Q$$

是一可微映射. 因为映射

$$X \mapsto i(X)\omega_P$$

是从  $P$  上的向量场模到模  $Q^1(P)$  上的一个同构, 所以对  $Q$  上任一向量场  $Y$ , 存在  $P$  上唯一的一个向量场  $\varphi^*(Y)$  使下式成立:

$$i(\varphi^*(Y))\omega_P = \varphi^*(i(Y)\omega_Q).$$

映射  $\varphi^*: Y \mapsto \varphi^*(Y)$  是一实线性映射. 若  $g \in C^\infty(M)$ , 则有

$$\varphi^*(gY) = \varphi^*(g)\varphi^*(Y).$$

**9.12. 引理.**  $(P, \omega_P), (Q, \omega_Q)$  同上. 设  $Y$  是  $Q$  上的一个辛向量场, 则  $\varphi^*(Y)$  是  $P$  上的一个辛向量场并且对任意的  $g \in C^\infty(Q)$  都有

$$\varphi^*(H_g) = H_{\varphi^*(g)}.$$

证. 事实上, 若  $Y$  是一辛向量场, 则

$$di(\varphi^*(Y))\omega_P = d\varphi^*(i(Y)\omega_Q) = \varphi^*(di(Y)\omega_Q) = 0,$$

所以由  $\theta(\varphi^*(Y))$  的定义知

$$\theta(\varphi^*(Y))\omega_P = di(\varphi^*(Y))\omega_P + i(\varphi^*(Y))d\omega_P = 0.$$

于是  $\varphi^*(Y)$  是辛向量场. 又对任意的函数  $g \in C^\infty(Q)$  有

$$i(\varphi^*(H_g))\omega_P = \varphi^*(i(H_g)\omega_Q) = \varphi^*(dg) = d\varphi^*(g),$$

所以  $\varphi^*(H_g) = H_{\varphi^*(g)}$ . 证完.

**9.13. 引理.** 设  $(P, \omega_P)$  和  $(Q, \omega_Q)$  是两辛流形,

$$\varphi: (P, \omega_P) \rightarrow (Q, \omega_Q)$$

是一辛流形同态, 则对任一点  $x \in P$  和任意的  $Q$  上的向量场  $Y$ , 向量

$$\varphi^T(\varphi^*(Y)_x) = Y_{\varphi(x)}$$

对于  $(\omega_Q)_{\varphi(x)}$  与  $\varphi^T(T_x P)$  正交.

证. 事实上, 因为  $\omega_P = \varphi^*(\omega_Q)$ , 所以对任一向量  $v \in T_x P$ , 我们有

$$\begin{aligned} \omega_Q(\varphi^T(\varphi^*(Y)_x, \varphi^T v)) &= \omega_P(\varphi^*(Y)_x, v) \\ &= (i(\varphi^*(Y))\omega_P)(v) = (\varphi^*(i(Y)\omega_Q))(v) \\ &= (i(Y)\omega_Q)(\varphi^T v) = \omega_Q(Y_{\varphi(x)}, \varphi^T v). \end{aligned}$$

因此结论成立. 证完.

**9.14. 命题.** 设  $(P, \omega_P)$  和  $(Q, \omega_Q)$  是两辛流形,  $\varphi: (P, \omega_P) \rightarrow (Q, \omega_Q)$  是一辛流形同态. 若  $\dim P = \dim Q$ , 则对任意的  $f, g \in C^\infty(Q)$  有

$$\varphi^*\{f, g\} = \{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\}.$$

并且对  $Q$  上的任意两个向量场  $X, Y$  有

$$\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*(X), \varphi^*(Y)].$$

证. 因为  $\dim P = \dim Q$ , 所以  $\varphi$  在局部上是一辛流形同构, 注意到 Poisson 括号的定义是局部性的, 便知第一个等式自然成立. 下面我们给出一个直接的证明. 根据引理 9.13, 我们有  $\varphi^T \circ \varphi^*(Y) = Y \circ \varphi$ , 从而  $\varphi^*(Y)\varphi^*(g) = \varphi^*(Yg)$  对  $Q$  上任一向量场  $Y$  和任意的  $g \in C^\infty(Q)$  成立. 于是, 若  $f, g \in C^\infty(Q)$ , 则由引理 9.12 得

$$\begin{aligned}
& \{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\} \\
&= H_{\varphi^*(f)}\varphi^*(g) = \varphi^*(H_f)\varphi^*(g) \\
&= \varphi^*(H_fg) = \varphi^*\{f, g\}.
\end{aligned}$$

现设  $X, Y$  是  $Q$  上的两个向量场,  $g \in C^\infty(Q)$ , 则有

$$\begin{aligned}
& (\varphi^*[X, Y])\varphi^*(g) = \varphi^*([X, Y]g) \\
&= \varphi^*(X)\varphi^*(Yg) - \varphi^*(Y)\varphi^*(Xg) \\
&= [\varphi^*(X), \varphi^*(Y)]\varphi^*(g).
\end{aligned}$$

因为  $\varphi$  是一子浸入, 所以必有

$$\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*(X), \varphi^*(Y)].$$

证完.

在命题 9.14 的假定下, 映射

$$\varphi^*: C^\infty(Q) \rightarrow C^\infty(P)$$

是一 Lie 代数同态(利用 Poisson 括号把它们定义为 Lie 代数). 要注意, 不是局部同胚的辛流形的同态不具有这个性质.

例. 设  $(P, \omega_P) = (R^2, dy_1 \wedge dy_2)$  而

$$(Q, \omega_Q) = (R^4, dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4),$$

则浸入:

$$\varphi: (a_1, a_2) \rightarrow (a_1, 0, a_2, 0)$$

是一辛流形同态. 我们有

$$\varphi^*(x_1x_4) = \varphi^*(x_1x_2) = 0.$$

下面我们来计算  $\{x_1x_4, x_1x_2\}$ . 现在

$$\omega_Q = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4,$$

所以有

$$\begin{aligned}
i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\omega &= dx_3, & i\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\omega &= dx_4, \\
i\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\omega &= -dx_1, & i\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\omega &= -dx_2.
\end{aligned}$$

根据  $H_{x_i}$  的定义有

$$i(H_{x_i})\omega = dx_i,$$

所以

$$H_{x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad H_{x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad H_{x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad H_{x_4} = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

于是得(利用命题9.9)

$$\begin{aligned}\{x_1x_4, x_1x_2\} &= \{x_1x_4, x_1\}x_2 + \{x_1x_4, x_2\}x_1 \\&= \{x_1, x_1\}x_4x_2 + \{x_4, x_1\}x_1x_2 + \{x_1, x_2\}x_1x_4 + \{x_4, x_2\}x_1^2 \\&= x_1^2.\end{aligned}$$

而且

$$\varphi^*\{x_1x_4, x_1x_2\} = \varphi^*(x_1^2) = y_1^2 \neq 0.$$

所以  $\varphi^*$  不是 Lie 代数同态.

## § 10. 辛坐标下的 Poisson 括号

设  $(M, \omega)$  是一辛流形, 由于在这一节中, 我们只限于考虑局部的性质, 所以我们不妨假定  $x_1, \dots, x_{2n}$  是整个  $(M, \omega)$  上的一个辛坐标系. 于是, 若把  $R^{2n}$  中的开集看作是具有标准辛结构的辛流形, 则  $x_1, \dots, x_{2n}$  定义了一个从  $(M, \omega)$  到  $R^{2n}$  的某一开集上的一个同构. 因为

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i},$$

若

$$X = \sum_{i=1}^{2n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

是  $M$  上的一个向量场, 则有

$$i(X)\omega = \sum_{i=1}^n (a_i dx_{n+i} - a_{n+i} dx_i).$$

因此, 如果  $f \in C^\infty(M)$  且  $i(X)\omega = df$ , 则

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_{n+i}}, \quad a_{n+i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

于是知道, 函数  $f \in C^\infty(M)$  所对应的 Hamilton 向量场  $H_f$  有表达式

$$H_f = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_{n+i}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \right),$$

而对  $f, g \in C^\infty(M)$ , 我们有

$$(10.1) \quad \{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_{n+i}} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_{n+i}} \right).$$

特别地,对于坐标函数有

$$H_{x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_{n+i}}, \quad H_{x_{n+i}} = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned} \{x_i, x_{n+i}\} &= \{x_{n+i}, x_{n+i}\} = 0, \\ \{x_i, x_{n+j}\} &= -\delta_{ij}, \end{aligned}$$

其中  $i, j = 1, \dots, n$ .

现假定  $(M, \omega) = (R^{2n}, \omega)$ , 其中

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$$

是  $R^{2n}$  上的标准辛结构. 设  $P$  是由  $C^\infty(R^{2n})$  中的多项式函数所构成的子代数. 对任整数  $r \geq 0$ , 记  $P_r$  为  $r$  次齐次多项式所构成的空间. 根据式 (10.1), 对任意  $r, s \geq 0$  有

$$\{P_r, P_s\} \subset P_{r+s-2}.$$

令  $\mathfrak{g}_r = P_{r+2}$ , 则有

$$\{\mathfrak{g}_r, \mathfrak{g}_s\} \subset \mathfrak{g}_{r+s}.$$

将  $P$  按  $\mathfrak{g}_r$  在  $Z$  中分级后, 我们就得到一个分级 Lie 代数. 这个分级 Lie 代数的中心是  $\mathfrak{g}_{-2}$ , 即常数函数空间. 空间  $\mathfrak{g}_{-1}$  由  $R^{2n}$  上的线性函数构成, 而空间  $\mathfrak{g}_0$  则由二次型构成.  $\mathfrak{g}_0$  是一维数为  $n(2n+1)$  的 Lie 子代数. 利用映射  $f \mapsto H_f$ , 我们可以定义从  $\mathfrak{g}_{-1}$  到常向量场 (在  $R^{2n}$  的平移作用下不变的向量场) 所构成的空间上的一个同构. 利用同一映射, 我们还可以得到从  $\mathfrak{g}_0$  到  $S(R^{2n}, \omega)$  中的一次辛向量场所构成的 Lie 子代数上的一个同构. 该子代数同构于 §4 中介绍过的辛群  $Sp(n)$  的 Lie 代数  $sp(R^{2n}, \omega_0)$ . 事实上, 设  $\alpha$  是  $R^{2n}$  上的一个自同态, 令  $L_\alpha$  为  $R^{2n}$  上满足

$$L_\alpha \cdot x_i = -x_i \circ \alpha, \quad i = 1, \dots, 2n,$$

的向量场. 对任意的  $\xi \in R^{2n}$ , 记  $L_\xi$  为满足

$$L_\xi x_i = x_i(\xi), \quad i = 1, \dots, 2n,$$

的向量场, 则有

$$[L_\alpha, L_\xi] = L_{\alpha(\xi)}.$$

于是对任意的  $\xi, \eta \in R^{2n}$ ,

$$\begin{aligned} & (\theta(L_\alpha)\varphi)(L_\xi, L_\eta) \\ &= L_\alpha \varphi(L_\xi, L_\eta) - \varphi([L_\alpha, L_\xi], L_\eta) - \varphi(L_\xi, [L_\alpha, L_\eta]) \\ &= \varphi(L_{\alpha(\xi)}, L_\eta) + \varphi(L_\xi, L_{\alpha(\eta)}) \\ &= \omega_0(\alpha(\xi), \eta) + \omega_0(\xi, \alpha(\eta)), \end{aligned}$$

其中

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n x_i \wedge x_{n+i} \in A^2(R^{2n}).$$

于是向量场  $L_\alpha$  为辛向量场当且仅当  $\alpha \in sp(R^{2n}, \omega_0)$ .

**10.2. 引理.** 若  $f \in P_1$  且  $f \neq 0$ , 则  $P$  的自同态映射

$$g \mapsto \{f, g\}, \quad g \in P,$$

是满自同态.

证. 事实上, 设  $u_1, \dots, u_{2n}$  是辛空间  $(R^{2n}, \omega_0)$  的一组辛基使得  $f(u_i) = \delta_{1i}$ , 又设  $y_1, \dots, y_{2n}$  为  $u_1, \dots, u_{2n}$  的对偶基, 则  $y_1, \dots, y_{2n}$  是流形  $(R^{2n}, \omega)$  上的辛坐标, 并且等式

$$\{f, g\} = - \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}$$

对任意的  $g \in P$  成立, 故结论成立. 证完.

**10.3. 引理.** Lie 代数  $P$  中仅有的理想子代数是  $(0)$ ,  $P_0$  (零次多项式集合) 和  $P$ .

证. 事实上, 设  $\mathfrak{a}$  为 Lie 代数  $P$  的一个含有次数  $> 0$  的多项式函数的理想, 因为对所有的  $i$  有  $\{x_i, \mathfrak{a}\} \subset \mathfrak{a}$ , 从而  $\mathfrak{a}$  在  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  的作用下不变. 于是  $\mathfrak{a}$  中含这样一个多项式函数  $f = f_0 + f_1$ , 这里  $f_0 \in P_0$ ,  $f_1 \in P_1 \setminus (0)$ . 所以对任意的  $g \in P$ , 我们有  $\{f, g\} = \{f_1, g\}$ . 又由于映射

$$g \mapsto \{f_1, g\}, \quad g \in P,$$

是满射 (引理 10.2), 所以有  $\mathfrak{a} = P$ . 又  $(0)$  和  $P_0$  显然是理想. 证完.

**形式辛向量场 Lie 代数.** 设  $(M, \omega)$  为一辛流形,  $x \in M$ . 记

$m_x^*$  为由  $C^\infty(M)$  中在点  $x$  处的值为零的函数构成的极大理想. 设

$$m_x^* = \bigcap_{p>0} m_x^p.$$

根据命题 9.9, 对任意的  $f \in C^\infty(M)$ , 映射

$$g \mapsto \{f, g\}, \quad g \in C^\infty(M),$$

是  $C^\infty(M)$  的一个导子. 所以对任意的  $p > 0$ , 有  $\{f, m_x^p\} \subset m_x^{p+1}$ , 并且  $\{f, m_x^p\} \subset m_x^p$ . 这说明  $m_x^*$  不但对结合代数结构是  $C^\infty(M)$  的一个理想, 而且对由 Poisson 括号所定义的 Lie 代数结构也是一个理想. 于是我们可以定义商代数. 我们把商代数

$$J_x(M) = C^\infty(M)/m_x^*$$

称为点  $x$  处的射流 (jet) 代数. 它是一 Lie 代数. 我们仍然把  $J_x(M)$  的 Lie 代数括号称为 Poisson 括号并记为  $\{, \}$ .

10.4. 命题. (0),  $R$  和  $J_x(M)$  是 Lie 代数  $J_*(M)$  中仅有的理想.

证. (0) 和  $R$  显然是  $J_*(M)$  的理想. 我们证明  $J_x(M)$  中除 (0) 和  $R$  外仅有的理想是  $J_x(M)$  本身. 为此, 在  $x$  的某一邻域内选定在点  $x$  处为零的辛坐标系, 于是就把所考虑的情形化为考虑辛流形  $(R^{2n}, \omega)$  在原点处的函数射流代数  $J_0(R^{2n})$ , 这里  $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$  是标准辛结构. 作为结合代数,  $J_0(R^{2n})$  等同于关于  $x_1, \dots, x_{2n}$  的形式序列代数 (l'algèbre des séries formelles en  $x_1, \dots, x_{2n}$ ). 若

$$f = \sum_{p>0} f_p, \quad f_p \in P_p; \quad g = \sum_{p>0} g_p, \quad g_p \in P_p,$$

则

$$\{f, g\} = \sum_{p, q>0} \{f_p, g_q\}.$$

设  $\mathfrak{a}$  为 Lie 代数  $J_0(R^{2n})$  的一个不包含于  $R = P_0$  中的理想. 因为  $\{x_i, \mathfrak{a}\} \subset \mathfrak{a}$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ ,  $\mathfrak{a}$  在偏导  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ , 的作用下不变. 于是  $\mathfrak{a}$  中至少含一个这样的元素

$$h = \sum_{p>0} h_p, \quad h_p \in P_p,$$

其中  $h_1$  是  $P_1$  中的非零元素。于是映射

$$g \mapsto \{h, g\}, \quad g \in J_0(R^{2n}),$$

是  $J_0(R^{2n})$  的一个满同态。事实上，若

$$g = \sum_{p>0} g_p \in J_0(R^{2n}),$$

则  $\{h, g\}$  在  $P_r$  中的项是

$$\{h, g\}_r = \{h_1, g_{r+1}\} + \{h_2, g_r\} + \cdots + \{h_{r+1}, g_1\}.$$

于是根据引理 10.2，对任意的

$$f = \sum_{r>0} f_r \in J_0(R^{2n}),$$

我们可以逐步地定义  $g_p$  使

$$f_r = \{h_1, g_{r+1}\} + \cdots + \{h_{r+1}, g_1\}$$

对任意的  $r$  成立。令  $g = \sum_{p>0} g_p$ ，则有  $\{h, g\} = f$ 。但是  $h \in \mathfrak{a}$ ，

所以  $f \in \mathfrak{a}$ 。由  $f$  的任意性便得  $\mathfrak{a} = J_0(R^{2n})$ 。证完。

设  $X$  是流形  $M$  上的一个向量场，则 Lie 导子

$$\theta(X): f \mapsto Xf$$

保持  $m_x^{\omega}$  不变，通过作商，便在射流代数  $J_x(M)$  上诱导出一个导子  $J_x(X)$ ，我们称它为向量场  $X$  在点  $x$  处的射流 (jet)。若  $(M, \omega)$  是一辛流形，则下面的两个映射

$$f \mapsto H_f \quad \text{和} \quad X \mapsto J_x(X)$$

的复合映射是一个从 Lie 代数  $C^\infty(M)$  到由  $J_x(M)$  的导子构成的 Lie 代数内的一个同态。因为任一辛向量场都在  $x$  的某个邻域内与一 Hamilton 向量场重合，所以同态映射  $f \mapsto J_x(H_f)$  的象是辛向量场在点  $x$  处的射流 Lie 代数。若  $f \in m_x^{\omega}$ ，则有

$$H_f C^\infty(M) \subset m_x^{\omega},$$

于是  $J_x(H_f) = 0$ 。通过作商，我们得到从 Lie 代数  $J_x(M)$  到辛向量场在点  $x$  处的射流所构成的 Lie 代数上的一个满同态。若  $f \in C^\infty(M)$  且  $J_x(H_f) = 0$ ，则有  $H_f C^\infty(M) \subset m_x^{\omega}$ ，于是对所有的  $g \in$

$C^\infty(M)$  都有  $\{f, g\} \in m_x^*$ . 这表明  $f - f(x) \in m_x^*$ . 于是,  $J_x(f)$  是常数  $f(x)$  的射流. 总起来, 我们得到一正合序列

$$(0) \rightarrow R \rightarrow J_x(M) \rightarrow J_x(S(M, \omega)) \rightarrow 0.$$

10.5. 命题. 辛流形上所有辛向量场在某一点处的射流全体构成的 Lie 代数是一单 Lie 代数.

证. 因为  $J_x(S(M, \omega))$  同构于  $J_x(M)/R$ , 所以这个命题实际上是命题 10.4 的另一种叙述形式. 证完.

## § 11. 辛流形的子流形

设  $(M, \omega)$  是一辛流形并设  $N$  是  $M$  的一个子流形. 若  $x \in N$ , 则  $T_x N$  是辛向量空间  $(T_x M, \omega_x)$  的一个向量子空间.

11.1. 定义. 辛流形  $(M, \omega)$  的子流形  $N$  称为是迷向子流形(或余迷向子流形, Lagrange 子流形, 辛子流形), 如果对任一  $x \in N$ , 空间  $T_x N$  都是辛空间  $(T_x M, \omega_x)$  的一个迷向(或余迷向, Lagrange, 辛)子空间.

对于从某一流形  $P$  到辛流形  $(M, \omega)$  内的浸入映射, 我们也使用同样的术语. 例如, 浸入映射  $\varphi: P \rightarrow M$  称为 Lagrange 浸入, 若对任意的  $y \in P$ ,  $\varphi^*$  都把  $T_y P$  映为  $(T_{\varphi(y)} M, \omega_{\varphi(y)})$  的一个 Lagrange 子空间.

不论  $(M, \omega)$  的子流形  $N$  是迷向的, 余迷向的, Lagrange 的或是辛的,  $\omega$  在  $N$  上的拉回  $\omega|N$  都是一常秩 2-形式. 若  $N$  是余迷向的, 则  $\omega|N$  的秩等于  $2 \dim N - \dim M$ . 若  $N$  是  $M$  的 Lagrange 子流形, 则  $\dim N = \frac{1}{2} \dim M$ .

设  $N$  是  $M$  的一个子流形,  $i: N \rightarrow M$  为内射, 则  $TM$  的逆象是底空间  $N$  上的向量丛, 我们把它记为  $T_N M$ . 对任一  $x \in N$ ,  $T_x N M$  在点  $x$  上的纤维可等同于  $T_x M$ , 从而它具有一辛向量空间结构. 把  $TN$  看作  $T_N M$  的一个子向量丛, 并把  $T_N M$  的在点  $x$  上的纤维是  $(T_x N)^{\perp}$  的子向量丛记为  $TN^{\perp}$ . 于是, 为使子流形  $N$  是迷

向的(或者余迷向的),充分必要条件是  $TN \subset TN^\perp$  (或  $TN \supset TN^\perp$ );为使  $N$  是 Lagrange 的,充分必要条件是  $TN = TN^\perp$ ;而若  $TN \cap TN^\perp = \{0\}$ ,则  $N$  是辛子流形.

11.2. 扩充引理 (A. Weinstein). 设  $M$  是一  $2n$  维流形,  $N$  是  $M$  的一个闭子流形. 设  $\omega_0, \omega_1$  是  $M$  上的两个辛结构, 它们在  $\Lambda^2(T_N M)$  上的限制相同. 则存在  $N$  在  $M$  中的两个开邻域  $U_0$  和  $U_1$ , 以及从  $U_0$  到  $U_1$  上的微分同胚  $\varphi_1$  使  $\varphi_1$  在  $N$  上的限制是恒等映射且  $\omega_0 = \varphi_1^*(\omega_1)$ .

证. 我们需要引用 Poincaré 引理的一个一般形式(参看文献 [29]): 因为  $N$  是闭子流形, 所以存在  $N$  在  $M$  中的一个开邻域  $V$  和  $V$  上的 1-形式  $\beta$  使  $\beta$  在  $T_N M$  上为零且  $d\beta = (\omega_0 - \omega_1)|V$ . 记从  $R \times M$  到  $R$  上的投影映射为  $\pi$ , 把  $M$  上的微分形式和由投影所定义的它们在  $R \times M$  上的拉回视为相同的, 则我们可以假设

$$\tilde{\omega} = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) \in \Omega^2(R \times M).$$

这个微分形式在  $R \times N$  的任意一点处的秩都是  $2n$ . 因而在  $R \times N$  在  $R \times M$  中的某一开邻域上, 它的秩也是  $2n$ , 我们设  $V'$  是这样的一个开邻域. 因为  $R \times V'$  是  $R \times N$  的一个开邻域, 所以我们可选取  $V'$  使得  $V' \subset R \times V$ . 根据  $\beta$  的定义和  $V'$  的选取, 我们知道  $\beta|V'$  的核是  $TV'$  的一个由向量场  $\frac{\partial}{\partial t}$  所生成的子向量

丛. 因为  $i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\beta = 0$ , 所以存在  $V'$  上的向量场  $X$  使得  $i(X)\tilde{\omega} = \beta|V'$ . 而且我们可以选取  $X$  使得  $i(X)dt = 0$ , 这是可以做到的, 因为这相当于选取  $N$  的邻域上的向量场使它依赖于参数  $t$ . 因为  $\beta$  在  $T_N M$  上为零, 所以向量场  $X$  在  $R \times N$  上恒为零. 于是, 存在  $[0, 1] \times N$  在  $R \times M$  中的一个开邻域  $W$  和可微映射

$$\varphi: W \rightarrow R \times M,$$

使得

$$(i) \quad \varphi^T \circ \frac{\partial}{\partial t} = \left(X + \frac{\partial}{\partial t}\right) \circ \varphi,$$

$$(ii) \quad \varphi(0, x) = x, \text{ 对 } \forall (0, x) \in W.$$

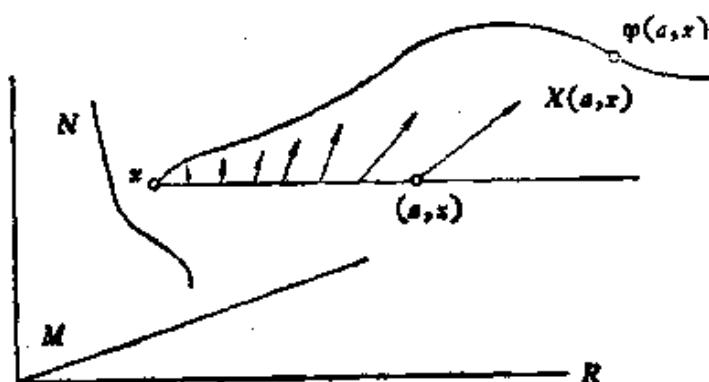
注意到在  $\Omega(\varphi(W))$  上, 条件(i) 等价于

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \theta\left(X + \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

把它应用到函数  $t$  上得

$$\frac{\partial}{\partial t}(t \circ \varphi) = 1.$$

于是在  $[0, 1] \times N$  的某一邻域上有  $t \circ \varphi = t$  (参看下图).



对任意的  $x \in N$ , 根据  $W$  的定义知道, 有  $x$  在  $M$  中的一个开邻域  $V_x$ , 使得  $[0, 1] \times V_x \subset W$ . 于是有  $N$  在  $M$  中的开邻域  $U_x$ , 使得  $[0, 1] \times U_x \subset W$ . 对任一  $a \in [0, 1]$ , 定义从  $U_x$  到  $M$  内的映射  $\varphi_a$  为

$$\varphi(a, x) = (a, \varphi_a(x)), \forall x \in U_x.$$

我们证明  $U_x$  上的微分形式族  $\varphi_a^*(\omega)$  不依赖于  $a$ . 注意到该微分形式族实际上就是

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt \wedge \varphi^*(\omega)),$$

用  $\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$  作用得

$$\begin{aligned} & \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt \wedge \varphi^*(\omega)) \\ &= i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(dt \wedge \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi^*(\omega)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi^*(\tilde{\omega}) \\
&= \varphi^* \theta \left( X + \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{\omega} \\
&= \varphi^*(di(X)\tilde{\omega} + \omega_1 - \omega_0) \\
&= d\beta + \omega_1 - \omega_0 = 0.
\end{aligned}$$

所以  $\varphi_i^*(\tilde{\omega})$  不依赖于参数  $a \in [0, 1]$ , 从而

$$\varphi_1^*(\omega_1) = \varphi_0^*(\omega_0).$$

因为  $\varphi_0$  是恒等映射, 所以我们有  $\varphi_1^*(\omega_1) = \omega_0$ , 也就是说,  $\varphi_1$  是从  $(U_0; \omega_0)$  到  $(\varphi_1(U_0), \omega_1)$  上的一个同构. 又因为  $X$  在  $R \times N$  上等于 0, 所以  $\varphi_1$  在  $N$  上的限制是恒等映射. 证完.

注1. 由于我们假定了  $\omega_0$  和  $\omega_1$  在  $\Lambda^2 T_N M$  上相等而不仅仅是在  $\Lambda^2 TN$  上相等, 所以我们能够在  $N$  的某一邻域上选取 1-形式  $\beta$  使  $d\beta = \omega_0 - \omega_1$ . 并且我们可以选取这样的  $\beta$ , 使得不但对任意的  $x \in N$  都有  $\beta_x = 0$ , 而且  $\beta$  在  $N$  的任一点处的一阶射流也等于零. 当  $\beta$  具有这些性质时, 相应的微分同胚  $\varphi_1$  就给出一个在  $T_N M$  上为恒等映射的切丛映射  $\varphi_1^*$  (参看文献 [29]).

注2. 把引理 11.2 应用于  $N = \{x\}$ , 则可推出在点  $x \in M$  的某一邻域上存在辛坐标系.

11.3. 命题. 设  $(M, \omega)$  是一辛流形,  $N$  是  $(M, \omega)$  的一个闭的 Lagrange 子流形, 则对任一点  $x \in N$ , 存在  $x$  的开邻域  $V$  和  $V$  上的辛坐标系  $y_1, \dots, y_{2n}$  使得  $N \cap V$  是  $V$  中满足  $y_1 = \dots = y_n = 0$  的点集.

证. 事实上, 设  $U$  是  $x$  的一个开邻域且设  $x_1, \dots, x_{2n}$  是  $U$  上的坐标系使得对  $N \cap U$  中的点, 等式  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  成立. 把引理 11.2 应用于辛结构  $\omega_0 = \omega|_U$  和  $\omega_1 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$ , 便得到具有所求性质的辛坐标  $y_i = \varphi_i^*(x_i)$ . 证完.

辛流形的 Lagrange 子流形在辛流形理论中占有重要的地位, 许多内容的讨论都与它有关联. 我们先来看几个例子, 然后给

出一个构造 Lagrange 子流形的基本方法.

**例 1.** 设  $(M, \omega)$  是一 2 维辛流形, 则它的所有 Lagrange 子流形都是 1 维的, 从而都是曲线, 因为  $\omega$  是反对称形式, 所以  $M$  的任意一条曲线都是 Lagrange 子流形.

**例 2.**  $(R^{2n}, \omega)$  的 Lagrange 子流形. 我们设  $x_1, \dots, x_{2n}$  是  $R^{2n}$  上的辛坐标使得

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}.$$

设  $U$  是  $R^n$  的一个开子集且设

$$\varphi: x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

是从  $U$  到  $R^n$  内的一个可微映射. 令

$$N_\varphi = \{(x, \varphi(x)): x \in U\},$$

则  $N_\varphi$  称为  $\varphi$  在  $U \times R^n \subset R^{2n}$  中的图形. 为使  $N_\varphi$  是  $(R^{2n}, \omega)$  的一个 Lagrange 子流形, 充分必要条件是浸入

$$x \mapsto (x, \varphi(x)), x \in U,$$

是一迷向浸入. 这个条件可以表达为

$$\sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\varphi_i = 0.$$

换句话说, 为使  $N_\varphi$  为一 Lagrange 子流形, 充分必要条件是 1- 形式  $\sum_{i=1}^n \varphi_i dx_i$  是一闭形式. 如果  $\sum_{i=1}^n \varphi_i dx_i$  是某一函数  $f: U \rightarrow R$  的全微分, 则它当然就是闭的. 在这种特殊情形, 我们称  $f$  为 Lagrange 子流形  $N_\varphi$  的一个生成函数.

设

$$\psi: (x, y) \mapsto (\psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y))$$

是从  $U \times R^n$  到  $R^n$  内的一个可微映射. 我们利用  $\psi$  定义一个映射  $\phi$

$$\phi: (x, y) \mapsto (x, y + \phi(x, y)), (x, y) \in U \times R^n,$$

则  $\phi$  是从  $U \times R^n$  到其自身的可微映射. 为使  $\phi$  是辛流形  $(U \times R^n, \omega)$  的一个自同态, 充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\phi_i = 0.$$

这相当于要求  $\phi(x, y)$  不依赖于  $y$  并且  $\sum_{i=1}^n \phi_i dx_i$  是  $U$  上的闭形式. 若  $\phi$  满足这两条, 则  $\phi$  是辛流形  $(U \times R^n, \omega)$  的一个自同构. 反之, 若  $\sum_{i=1}^n \phi_i dx_i$  是  $U$  上的任意一个闭的微分 1-形式, 则我们可以利用  $dx_i$  的系数  $\phi_i (i = 1, \dots, n)$  来定义上面的  $\phi$ , 从而得到  $(U \times R^n, \omega)$  到其自身上的一个同构. 于是, 在  $U$  上的闭的微分 1-形式加法群和辛流形  $(U \times R^n, \omega)$  的保持纤维  $R^n$  不变的自同构群之间存在一标准同构, 该自同构群的元素限制在纤维  $\{x\} \times R^n$  上是一平移变换. 相应的 Lagrange 子流形  $N_\phi$  是 Lagrange 子流形  $U \times \{0\}$  在  $\phi$  下的象.

11.4. 命题. 设  $(M_1, \omega_1)$  和  $(M_2, \omega_2)$  是两个辛流形,  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  是一可微映射, 则  $\varphi$  是一辛流形同态的充分必要条件是:  $\varphi$  的图形

$$\{(x, \varphi(x)): x \in M_1\}$$

是辛流形  $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$  的一个迷向子流形.

证. 事实上, 设  $\tilde{\varphi}$  是由映射

$$x \mapsto (x, \varphi(x)), x \in M_1,$$

所定义的  $M_1$  到  $M_1 \times M_2$  内的浸入, 则我们有

$$\tilde{\varphi}^*(pr_1^*(\omega_1) - pr_2^*(\omega_2)) = \omega_1 - \varphi^*(\omega_2).$$

于是  $\varphi$  是辛流形同态等价于  $\varphi$  的图形是  $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$  的一个迷向子流形. 证完.

若  $\dim M_1 = \dim M_2$ , 则从  $(M_1, \omega_1)$  到  $(M_2, \omega_2)$  内的一个辛流形同态的图形是  $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$  的一个 Lagrange 子流形, 因为这时该同态的图形是  $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$  的一个维数为  $\dim M_1$  的迷向子流形. 但是  $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$  的 Lagrange 子流形不一定是某一同态的图形.

用收缩法构造 Lagrange 子流形. 设  $(M, \omega)$  是一辛流形,

$N \subset M$  是  $M$  的一个余迷向子流形. 又设  $(M', \omega')$  是另一辛流形,

$$\varphi: N \rightarrow M'$$

是一子浸入使得

$$\varphi^*(\omega') = \omega|N.$$

因为  $N$  是一余迷向子流形, 故  $\omega|N$  是常秩的. 所以根据命题 8.3 的推论, 我们总可以找到这样的一个辛流形  $(M', \omega')$  和一子浸入  $\varphi$  使得它在  $N$  的某个点的某一邻域内满足上面的条件.

设  $L$  为  $(M, \omega)$  的一个 Lagrange 子流形. 我们假设  $L$  和  $N$  有一个“适用交”(bonne intersection), 即

(1)  $L \cap N$  是  $M$  的一个子流形,

(2)  $T(L \cap N) = TL \cap TN.$

设  $x \in L \cap N$ . 因为  $T_x N$  是  $(T_x M, \omega_x)$  的一个余迷向子空间, 所以子空间  $T_x L \cap T_x N + T_x N^\perp$  是  $(T_x N, (\omega|N)_x)$  的一个 Lagrange 子空间(命题 1.5).

因为

$$\varphi_x^T: T_x N \rightarrow T_{\varphi(x)} M'$$

是一满射且

$$\varphi^*(\omega') = \omega|N,$$

所以子空间

$$\varphi_x^T(T_x L \cap T_x N + T_x N^\perp)$$

是  $(T_{\varphi(x)} M', \omega'_{\varphi(x)})$  的一个 Lagrange 子空间. 但是

$$TN^\perp \subset \text{Ker } \varphi^T \text{ 且 } T_x L \cap T_x N = T_x(L \cap N),$$

于是对任意的  $x \in M$ ,  $\varphi^T(T_x(L \cap N))$  是

$$(T_{\varphi(x)} M', \omega'_{\varphi(x)})$$

的一个 Lagrange 子空间. 这证明了  $\varphi$  在  $L \cap N$  上的限制是常秩  $\frac{1}{2} \dim M'$  的, 在  $N$  的局部上, 该限制分解为到  $M'$  内的一个 Lagrange 浸入的一个连续子浸入 (se factorise en une submersion suivie d'une immersion Lagrangienne dans  $M'$ ).

于是, 对任意的  $x \in L \cap N$ , 存在  $x$  在  $N$  中的一个邻域  $V$  使得  $\varphi(V)$  是  $(M', \omega')$  的一个 Lagrange 子流形. 我们把这样构造出

来的 $(M', \phi')$ 的 Lagrange 子流形称为是由 Lagrange 子流形  $L$  收缩而得到的.

下面我们来看一个例子.

例. 设

$$z_i = x_i + iy_i, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

是  $C^{n+1}$  上的自然坐标并设

$$h = \sum_{j=1}^{n+1} dz_j d\bar{z}_j$$

是标准 Hermite 型,  $h$  的虚部是

$$- \sum_{i=1}^{n+1} dx_i \wedge dy_i.$$

这是  $C^{n+1}$  上的一个辛结构. 若记  $p$  为从  $C^{n+1} \setminus \{0\}$  到投影空间  $CP^n$  上的标准投影, 则由 §6 中的例 5, 可知在  $CP^n$  上存在辛结构  $\omega$  使得

$$p^*(\omega) = -\frac{1}{r} \sum_i dx_i \wedge dy_i + \frac{1}{2} \frac{dr}{r^2} \sum_i (x_i dy_i - y_i dx_i),$$

其中  $r = \sqrt{\sum_i z_i \bar{z}_i}$ . 设  $S^{2n+1}$  为由  $r = 1$  所定义的球面. 因为它的余维数等于 1, 所以它是  $(C^{n+1}, -\sum_i dx_i \wedge dy_i)$  的一个余迷向子流形. 我们有

$$p^*(\omega)|_{S^{2n+1}} = -\sum_i dx_i \wedge dy_i|_{S^{2n+1}}.$$

把  $p$  限制在  $S^{2n+1}$  上, 我们就得到利用辛流形

$$(C^{n+1}, -\sum_i dx_i \wedge dy_i)$$

的 Lagrange 子流形用收缩法构造  $CP^n$  的 Lagrange 子流形所需要的条件. 例如, 若  $E$  是辛空间

$$(C^{n+1}, \sum_i x_i \wedge y_i)$$

的一个 Lagrange 向量子空间, 则它是辛流形

$$(C^{n+1}, -\sum_i dx_i \wedge dy_i)$$

的一个 Lagrange 子流形, 而且它与  $S^{2n+1}$  的交  $E \cap S^{2n+1}$  是一维

珠面.

标准投影映射  $p$  在  $E \cap S^{2n+1}$  上的限制是一浸入, 通过作商, 由它可以得到一个从由  $E$  所决定的实投影空间到  $CP^n$  的某一 Lagrange 子流形上的微分同胚.

**Poisson 括号和余迷向子流形.** 设  $(M, \omega)$  是一辛流形且设  $N$  是  $(M, \omega)$  的一个余迷向子流形. 若函数  $f \in C^\infty(M)$  在  $N$  上的限制是一常数, 则对任一向量  $v \in TN$  有

$$(i(H_f)\omega)(v) = df(v) = 0.$$

于是对任意的  $x \in N$  有  $(H_f)(x) \in TN^\perp$ . 因为  $N$  是余迷向的, 所以有  $TN^\perp \subset TN$ , 于是对任意的  $x$  有  $(H_f)(x) \in TN$ . 所以, 由在  $N$  上为常数的函数所定义的 Hamilton 向量场与  $N$  相切.

现设  $f, g \in C^\infty(M)$  且  $f, g$  在  $N$  上的限制均是常数. 那么, 因为  $H_f$  与  $N$  相切, 所以对任意的  $x \in N$  有

$$\{f, g\}(x) = (H_{fg})(x) = 0.$$

这说明  $M$  上的所有限制在  $N$  上为常数的可微函数在 Poisson 括号下构成  $C^\infty(M)$  的一个 Lie 子代数.

我们现在进一步假定  $N$  的余维数是  $k$ . 设

$$f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M)$$

是一组在  $N$  上等于零且在  $N$  的所有的点上都有

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \neq 0$$

的函数, 则对任一  $x \in N$ , 向量

$$(H_{f_1})(x), \dots, (H_{f_k})(x)$$

是  $T_x N^\perp$  的一组基而且  $T_x N$  是  $(T_x M, \omega_x)$  中由

$$(H_{f_1})(x), \dots, (H_{f_k})(x)$$

所张成的子空间的正交补.

**习题. Lagrange 叶结构 (feuilletages).** 设  $(M, \omega)$  是一辛流形且设  $E$  是  $TM$  的一个可积子丛, 我们假定  $E$  是 Lagrange 子丛, 也就是说, 对所有的  $x \in M$ ,  $E_x$  都是  $(T_x M, \omega_x)$  的一个 Lagrange 子空间. 设  $P$  是  $M$  的一个子流形, 若  $P$  满足下面两条:

- (i)  $T_x P = E_x, \forall x \in P,$

(ii) 在包含关系下,  $P$  是  $M$  中所有满足 (i) 的子流形所构成的集合的一个极大元,

则我们称  $P$  为  $E$  的一片积分叶子. 因为  $E$  是一 Lagrange 子丛, 所以  $E$  的每一积分叶子都是  $(M, \omega)$  的一个 Lagrange 子流形. 我们说  $E$  在  $(M, \omega)$  上定义了一个 Lagrange 叶结构.

试证明: 若  $X, Y$  是  $E$  的两个可微截面, 则在  $M$  上存在唯一的一个向量场  $\nabla_X Y$  使得对  $M$  上任意的向量场  $Z$  都有

$$\omega(\nabla_X Y, Z) = X\omega(Y, Z) - \omega(Y, [X, Z]),$$

而且  $\nabla_X Y$  是  $E$  的一个截面. 并证明, 对  $E$  的任意两个可微截面  $X, Y$ , 有(参看文献 [28])

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

$$\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) = \nabla_{[X, Y]} Z,$$

其中  $Z$  是  $M$  上的一个向量场.

由此导出, 对  $E$  的任一积分叶子  $P$ , 在  $P$  上存在一线性连络  $\nabla$ , 它的曲率和挠率都是零, 并且可以这样来刻划它: 若  $X$  和  $Y$  是  $E$  的两个可微截面, 则

$$\nabla_X|_P(Y|_P) = (\nabla_X Y)|_P.$$

我们将在 §12 中利用余切丛来给出 Lagrange 叶结构的例子.

### 第三章 余切丛

#### § 12. Liouville 形式和余切丛上的标准辛结构

在这节里, 我们用  $P$  来表示一个流形,  $P$  上的余切丛用  $T^*P$  表示。向量丛  $T^*P$  在任意一点  $x \in P$  处的纤维  $T_x^*P$  是向量空间  $T_xP$  的对偶空间,  $T_x^*P$  中的元素是点  $x$  处的余切向量。我们分别用  $\pi$  和  $\pi_*$  来表示向量丛  $TP$  和  $T^*P$  在  $P$  上的投影。我们用  $T(T^*P)$  来表示余切丛  $T^*P$  上的切丛并用  $\pi_0$  表示  $T(T^*P)$  在底空间  $T^*P$  上的投影。把  $\pi_*$  所定义的切空间映射记为  $\pi_*^T$ , 则

$$\pi_*^T: T(T^*P) \longrightarrow TP.$$

不难看出下面的图是可交换的

$$\begin{array}{ccc} & T(T^*P) & \\ \pi_0 \swarrow & & \searrow \pi_*^T \\ T^*P & & TP \\ \pi_* \swarrow & & \searrow \pi \\ P & & * \end{array}$$

因此, 由下式所定义的映射  $\varphi_1$

$$\varphi_1: v \mapsto (\pi_0(v), \pi_*^T(v)), v \in T(T^*P),$$

是从  $T(T^*P)$  到纤维丛积

$$T^*P \times_P TP$$

内的一个可微映射, 按通常的方法, 定义从

$$T^*P \times_P TP$$

到  $R$  内的映射  $\varphi_2$  如下:

$$\varphi_2: (\xi, u) \mapsto \xi(u), (\xi, u) \in T^*P \times_P TP,$$

则  $\varphi_2$  也是一可微映射。 $\varphi_1$  与  $\varphi_2$  的合成映射  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  是从  $T(T^*P)$  到  $R$  内的一个可微映射, 它在每一纤维  $T_\xi(T^*P)$  ( $\xi \in T^*P$ ) 上的

限制是线性映射,因此,它是流形  $T^*P$  上的微分 1-形式,这是一个十分重要的 1-形式. 为方便起见,若  $(\xi, u) \in T^*P \times TP$ , 我们把实数  $\xi(u)$  记为  $\langle \xi, u \rangle$ .

12.1 定义 在余切丛  $T^*P$  上定义一个微分 1-形式  $\alpha$  如下: 对任意的  $v \in T(T^*P)$ , 令

$$(12.2) \quad \alpha(v) = \langle \pi_0(v), \pi_*^T(v) \rangle,$$

我们称  $\alpha$  为  $T^*P$  上的一个 Liouville 形式.

显然,若  $\alpha$  是  $T^*P$  上的 Liouville 形式,则有

$$\ker \alpha \supset \ker \pi_*^T.$$

把  $T(T^*P)$  中满足  $\pi_*^T(v) = 0$  的向量  $v$  称为垂直向量. 于是, Liouville 形式在  $T(T^*P)$  的垂直向量上为零.

设  $X$  是  $P$  上的任意一个向量场, 我们利用  $X$  来定义  $T^*P$  上的一个可微函数  $f_X$  如下:

$$f_X(\xi) = \langle \xi, X(\pi_*(\xi)) \rangle, \quad \forall \xi \in T^*P,$$

其中  $X(\pi_*(\xi))$  代表向量场  $X$  在点  $\pi_*(\xi) \in P$  的值. 于是  $f_X = 0$  当且仅当  $X = 0$ . 所以映射

$$F: X \mapsto f_X, \quad X \text{ 是 } P \text{ 的向量场},$$

是一实线性内射. 它的象是  $C^\infty(T^*P)$  的一个子空间, 这个子空间的每一函数在  $T^*P$  的纤维上的限制都是线性的. 若  $g \in C^\infty(P)$  且若  $X$  是  $P$  上的一个向量场, 则有

$$f_{gX} = (g \circ \pi_*) f_X.$$

设  $U$  是  $P$  的一个开集,  $x_1, \dots, x_n$  是  $U$  上的坐标. 令

$$y_i = f_{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

则函数组

$$(x_1 \circ \pi_*), \dots, (x_n \circ \pi_*), y_1, \dots, y_n,$$

是  $\pi_*^{-1}(U) = T^*U$  上的坐标. 为了简化记号, 下面我们把  $C^\infty(P)$  中的元素  $g$  等同于  $C^\infty(T^*P)$  中的元素  $g \circ \pi_*$ . 根据这一假定,

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$$

就是  $\pi_*^{-1}(U)$  上的坐标. 若向量场  $X$  在  $U$  上的坐标表达式是

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

则在  $\pi_*^{-1}(U)$  上有

$$(12.3) \quad f_x = \sum_{i=1}^n a_i y_i.$$

对任意的  $x \in P$ ,  $\xi \in T_x^*P$  和  $v \in T_\xi(T^*P)$ , 我们有

$$\pi_*^T(v) = \sum_{i=1}^n dx_i(\pi_*^T(v)) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x,$$

从而, 利用  $\pi_0(v) = \xi$  得

$$\alpha(v) = \langle \pi_0(v), \pi_*^T(v) \rangle = \sum_{i=1}^n y_i(\xi) dx_i(\pi_*^T(v)).$$

其中  $y_i(\xi) = \left\langle \xi, \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \right\rangle$ . 但是,

$$\begin{aligned} dx_i(\pi_*^T(v)) &= (\pi_*^T dx_i)(v) \\ &= (d(x_i \circ \pi_*))(v) \\ &= dx_i(v), \end{aligned}$$

所以在  $\pi_*^{-1}(U)$  上我们有

$$(12.4) \quad \alpha = \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

12.5. 命题. 设  $\alpha$  是余切丛  $T^*P$  上的一个 Liouville 形式, 则 2-形式  $\omega = -d\alpha$  是  $T^*P$  上的一个辛结构.

证. 事实上, 根据 (12.4), 若  $x_1, \dots, x_n$  是  $P$  的一个坐标邻域  $U$  上的坐标, 则在  $\pi_*^{-1}(U)$  上有坐标  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  使

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i,$$

于是  $\omega$  在  $T^*P$  的每一点处的秩都是  $2n$ . 又因为它是一个闭形式, 所以它是一个辛结构. 证完.

我们称 2-形式  $\omega = -d\alpha$  为  $T^*P$  上的标准辛结构. 设  $U \subset P$  是  $P$  的一个坐标邻域,  $x_1, \dots, x_n$  是  $U$  上的坐标, 则

$$x_i = x_i \circ \pi_* \text{ 和 } y_i = f \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

是  $\pi_*^{-1}(U)$  上的辛坐标。我们把它称为  $T^*P$  上由坐标  $x_1, \dots, x_n$  诱导出的局部辛坐标。

标准辛结构在经典力学中起着很重要的作用。利用 Legendre 变换使我们能把某一切丛  $TQ$  上的 Lagrange 动力系统（参看 §9，例 1）换为具有标准辛结构的余切丛  $T^*Q$  上的一个 Hamilton 向量场（参看文献[2]）。

我们知道，流形  $P$  上的任意一个微分 1-形式对应着向量丛  $T^*P$  的一个可微截面。对任意的  $\beta \in \Omega^1(P)$ ，我们把相应的截面记为  $\bar{\beta}$ 。

**12.6. 命题。**  $T^*P$  上的 Liouville 形式  $\alpha$  可用下列性质来刻划：对  $P$  上任意的微分 1-形式  $\beta$  有

$$\beta = \alpha \circ \bar{\beta}^T \quad (-\bar{\beta}^*(\alpha)).$$

证。设  $u \in T_x P$  且设  $\beta \in \Omega^1(P)$ 。因为  $\pi_* \circ \bar{\beta}$  是  $P$  的恒等映射，我们有

$$(\pi_*^T \circ \bar{\beta}^T)(u) = u.$$

另一方面，因为

$$\pi_0 \circ \bar{\beta}^T = \bar{\beta} \circ \pi,$$

于是由公式(12.2)得

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \bar{\beta}^T)(u) &= \langle (\pi_0 \circ \bar{\beta}^T)(u), (\pi_*^T \circ \bar{\beta}^T)(u) \rangle \\ &= \langle \bar{\beta}(x), u \rangle = \beta(u), (x = \pi_*(u)). \end{aligned}$$

于是证明了  $\beta = \alpha \circ \bar{\beta}^T$ 。又因为对任意一点  $\xi \in T_x^*P$ ，切空间  $T_\xi(T^*P)$  由这样的向量  $\bar{\beta}^T(T_x P)$  生成，其中  $\beta \in \Omega^1(P)$  且  $\bar{\beta}(x) = \xi$ ，所以  $\alpha$  由等式  $\beta = \alpha \circ \bar{\beta}^T$  唯一确定。证完。

设  $P$  和  $Q$  是两个流形，并设

$$\varphi: P \longrightarrow Q$$

是一可微映射。下面我们假定  $\varphi$  在局部上是一微分同胚。于是，对任意的  $x \in P$ ， $\varphi_x^T$  是从  $T_x P$  到  $T_{\varphi(x)} Q$  上的一个同构。于是我们有逆同构

$$(\varphi_x^T)^{-1}: T_{\varphi(x)} Q \longrightarrow T_x P.$$

上面这个同构的共轭映射定义了同构

$$T_x^*\varphi: T_x^*P \longrightarrow T_{\varphi(x)}^*Q.$$

于是我们可以定义一个从  $T^*P$  到  $T^*Q$  上的可微映射  $T^*\varphi$ , 使  $T^*\varphi$  在每一纤维  $T_x^*P$  上的限制就是上面的  $T_x^*\varphi$ .

于是, 对任意的  $x \in P$ ,  $u \in T_x P$  和  $\xi \in T_x^*P$ , 我们有

$$(12.7) \quad \langle (T^*\varphi)(\xi), \varphi^*(u) \rangle = \langle \xi, u \rangle.$$

若  $\beta \in \Omega^1(Q)$ , 则有

$$\langle (T^*\varphi)((\varphi^*\beta)_x), \varphi^*(u) \rangle = \langle (\varphi^*\beta)_x, u \rangle = \langle \beta_{\varphi(x)}, \varphi^*(u) \rangle.$$

于是有,

$$(T^*\varphi) \circ \overline{(\varphi^*\beta)} = \beta \circ \varphi.$$

**12.8. 命题.** 设  $P$  和  $Q$  是两个流形,  $\alpha_p$  和  $\alpha_q$  分别是  $T^*P$  和  $T^*Q$  上的 Liouville 形式. 设

$$\varphi: P \longrightarrow Q$$

是一可微映射, 并设  $\varphi$  在局部上是微分同胚, 则有

$$\alpha_p = \alpha_q \circ (T^*\varphi)^T.$$

**证.** 事实上, 由 (12.2) 和 (12.7), 对任意的  $\xi \in T^*P$  和  $v \in T_{\xi}(T^*P)$  有

$$\begin{aligned} & (\alpha_q \circ (T^*\varphi)^T)(v) \\ &= \langle (\pi_0 \circ (T^*\varphi)^T)(v), (\pi_*^T \circ (T^*\varphi)^T)(v) \rangle \\ &= \langle (T^*\varphi)(\xi), (\varphi^T \circ \pi_*^T)(v) \rangle \\ &= \langle \xi, \pi_*^T(v) \rangle \\ &= \langle \pi_0(v), \pi_*^T(v) \rangle = \alpha_p(v). \end{aligned}$$

所以等式成立. 证完.

**推论.**  $T^*\varphi: T^*P \longrightarrow T^*Q$  是一辛同态.

**例.** 利用作为辛流形的余切丛, 我们就得到一批 Lagrange 叶结构的例子. 事实上, 设  $P$  是一流形, 我们取标准辛结构使  $T^*P$  成为辛流形. 取  $P$  的一个坐标邻域  $U$ , 设  $x_1, \dots, x_n$  是  $U$  的坐标, 则在  $T^*P$  的子流形  $\pi_*^{-1}(U)$  上有由  $x_1, \dots, x_n$  诱导的辛坐标  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ . 把  $\pi_*^{-1}(U)$  看作辛流形. 令

$$E = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \ker dx_i,$$

则  $E$  是  $T(\pi_*^{-1}(U))$  的一个可积 Lagrange 子丛,  $\pi_*^{-1}(U)$  的每一

纤维空间都是  $E$  的一片积分叶子，并且是  $\pi_*^{-1}(U)$  的一个 Lagrange 子流形，所以  $E$  在  $\pi_*^{-1}(U)$  上定义了一个 Lagrange 叶结构。

### § 13. 余切丛上的辛向量场

在这节中， $P$  表示一个流形， $\alpha$  表示  $T^*P$  上的 Liouville 形式， $\omega$  表示标准辛结构  $-d\alpha$ 。设  $U$  是  $P$  的一个坐标邻域， $x_1, \dots, x_n$  是  $U$  上的坐标。设  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  是由  $x_1, \dots, x_n$  诱导的  $\pi_*^{-1}(U)$  上的辛坐标。令

$$C = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

则  $C$  是  $\pi_*^{-1}(U)$  上的一个向量场并且有  $\pi_*^T C = 0$ ，即  $C$  是一垂直向量场。显然，我们可以在  $P$  上定义一向量场，使该向量场在局部上具有上面的表达式。我们仍把这个向量场记为  $C$ 。

**13.1. 引理.** 符号不变，我们有

$$\begin{aligned} i(C)\omega &= -\alpha, \quad i(C)\alpha = 0, \\ \theta(C)\alpha &= \alpha, \quad \theta(C)\omega = \omega. \end{aligned}$$

证。为验证第一个式子，可以选取局部辛坐标  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ ，使  $\alpha = \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ （参看 §12），然后直接计算便可。

利用第一式有

$$i(C)\alpha = -i(C)^2\omega = -\omega(C, C) = 0.$$

因此第二个式子成立。又利用已证的一、二式有

$$\theta(C)\alpha = di(C)\alpha + i(C)d\alpha = -i(C)\omega = \alpha.$$

因此三式得证。最后，利用  $\theta \circ d = d \circ \theta$  得

$$\theta(C)\omega = -\theta(C)d\alpha = -d\theta(C)\alpha = -d\alpha = \omega.$$

证完。

**13.2. 引理.** 对  $P$  上任一向量场  $X$  都有

$$C f_x = f_{X*}.$$

这里  $f_x$  如 §12 所定义。

证。我们利用公式(12.3), 在  $P$  上选取局部坐标  $x_1, \dots, x_n$  和  $T^*P$  上的局部辛坐标  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ , 使在局部上有

$$f_x = \sum_{i=1}^n a_i y_i,$$

其中  $a_i$  是  $P$  上的函数在  $T^*P$  上的拉回。由  $C$  的定义有  $C a_i = 0$ , 因此

$$C f_x = \sum_{i=1}^n a_i C y_i = f_x.$$

证完。

13.3. 命题. 设  $X$  是  $T^*P$  上的一个辛向量场, 则

(i) 向量场  $X + [C, X]$  是一 Hamilton 向量场而且

$$X + [C, X] = H_{\alpha(X)},$$

(ii)  $[C, X]$  是一辛向量场

证. 根据引理 13.1 有  $\theta(C)\omega = \omega$ ,  $i(C)\omega = -\alpha$ , 所以我们有

$$\begin{aligned} & i(X + [C, X])\omega \\ &= i(X)\omega + \theta(C)i(X)\omega - i(X)\theta(C)\omega \\ &= \theta(C)i(X)\omega \\ &= di(C)i(X)\omega + i(C)di(X)\omega. \end{aligned}$$

其中第一步等式我们利用了第二章的公式

$$i([X, Y]) = \theta(X)\circ i(Y) - i(Y)\circ \theta(X).$$

又因为

$$di(X) = \theta(X) - i(X)d,$$

且  $X$  是一辛向量场, 所以  $i(C)di(X)\omega = 0$ . 再利用等式  $i(C)i(X) + i(X)i(C) = 0$  得

$$\begin{aligned} i(X + [C, X])\omega &= -di(X)i(C)\omega \\ &= di(X)\alpha = d(\alpha(X)). \end{aligned}$$

于是  $X + [C, X] = H_{\alpha(X)}$  是一 Hamilton 向量场。而由 Hamilton 向量场的性质(§9)知它是一辛向量场, 于是  $[C, X]$  是一辛向量场。证完。

**推论 1.** 对任一函数  $f \in C^\infty(T^*P)$ , 我们有

$$\alpha(H_f) = Cf, [C, H_f] = B_{(Cf-n)}.$$

证。事实上, 直接计算得

$$\begin{aligned}\alpha(H_f) &= i(H_f)\alpha = -i(H_f)i(C)\omega \\ &= i(C)i(H_f)\omega = i(C)d_f = Cf.\end{aligned}$$

再根据命题 13.3 有

$$[C, H_f] = H_{\alpha(H_f)} - H_f = H_{(Cf-n)}.$$

证完。

**推论 2.** 对任意的  $f, g \in C^\infty(T^*P)$ , 我们有

$$C\{f, g\} = \{Cf, g\} + \{f, Cg\} - \{f, g\}.$$

其中  $\{\cdot, \cdot\}$  是 Poisson 括号。

证。事实上,

$$\begin{aligned}C\{f, g\} &= C(H_f g) = [C, H_f]g + H_f Cg \\ &= \{Cf, g\} - \{f, g\} + \{f, Cg\}.\end{aligned}$$

证完。

对任意的整数  $r$ , 令  $E_r$  是  $C^\infty(T^*P)$  中所有满足

$$Cf = (r+1)f$$

的函数  $f$  所构成的集合。于是, 由  $E_r$  的定义知,  $E_r$  中的元素是  $T^*P$  上这样的可微函数, 它们在每一纤维  $T_x^*P$  上的限制是  $r+1$  次的齐次多项式。因此, 若  $r < -1$ , 则我们有  $E_r = \{0\}$ 。而空间  $E_{-1}$  则是在每一纤维上为常数的函数所构成的空间, 也就是  $C^\infty(P)$  的所有元素在  $T^*P$  上的拉回所构成的空间。任给两个整数  $r, s$ , 我们有

$$E_r E_s \subset E_{r+s+1}.$$

又根据命题 13.3 的推论 2, 对  $\forall f \in E_r, \forall g \in E_s$  有

$$\begin{aligned}C\{f, g\} &= (r+1)\{f, g\} + (s+1)\{f, g\} - \{f, g\} \\ &= (r+s+1)\{f, g\}.\end{aligned}$$

所以

$$\{E_r, E_s\} \subset E_{r+s}.$$

因此, 所有  $E_r$  的和是  $C^\infty(T^*P)$  的一个子代数, 无论是对于结合代数结构或是对于由 Poisson 括号定义的 Lie 代数结构都对。

而且它是一 $Z$ -分级 Lie 代数。

设  $S(T^*P, \omega)$  是辛流形  $(T^*P, \omega)$  上的辛向量场集。对任意的整数  $r$ , 记  $S_r$  为  $S(T^*P, \omega)$  中满足

$$[C, X] = rX$$

的辛向量场  $X$  所构成的空间。

设  $U$  为  $P$  的一个开邻域,  $x_1, \dots, x_n$  为  $U$  上的坐标,  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  是  $\pi_*^{-1}(U)$  上由  $x_1, \dots, x_n$  诱导出的辛坐标。取  $X \in S_r$ , 并设在  $\pi_*^{-1}(U)$  上  $X$  有表达式

$$X = \sum_{i=1}^n \left( f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + g_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

于是, 在  $T^*P$  的开集  $\pi_*^{-1}(U)$  中, 由  $C$  的定义有

$$[C, X] = \sum_{i=1}^n (Cf_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n (Cg_i - g_i) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

但是  $[C, X] = rX$ , 所以有

$$Cf_i = rf_i, \quad Cg_i = (r+1)g_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

于是推出  $f_i$  和  $g_i$  限制在  $T^*P$  的含于  $\pi_*^{-1}(U)$  中的纤维上分别是  $r$  和  $r+1$  次的齐次多项式函数。特别地, 这证明了, 若  $r < -1$ , 则  $S_r = \{0\}$ 。

**13.4. 命题.** 对任意的  $r \geq -1$  和任意的  $f \in E_r$ , 我们有  $H_f \in S_r$ 。

证. 事实上, 由命题 13.3 的推论 1 有

$$[C, H_f] = H_{(Cf)-r} = H_{rf} = rH_f,$$

所以  $H_f \in S_r$ . 证完。

**13.5. 命题.** 对任意的整数  $r > -1$ , 映射

$$H: f \mapsto H_f, \quad f \in C^\infty(T^*P),$$

(参看 §9) 诱导出从  $E_r$  到  $S_r$  上的一个同构。该同构的逆同构是

$$X \mapsto \frac{1}{r+1} \alpha(X), \quad X \in S_r.$$

证. 事实上, 若  $f \in E_r$ , 则有

$$\alpha(H_f) = Cf = (r+1)f.$$

因为  $r > -1$ , 所以  $r+1 \neq 0$ , 所以该映射是一内射。它也是满射, 这是因为若  $X \in S_r$ , 则有

$$\begin{aligned} C\alpha(X) &= \theta(C)i(X)\alpha \\ &= i([C, X])\alpha + i(X)\theta(C)\alpha \\ &= (r+1)\alpha(X), \end{aligned}$$

所以  $\alpha(X) \in E_r$ , 又根据命题 13.3 有

$$H_{\alpha(X)} = X + [C, X] = (1+r)X.$$

证完。

**空间  $E_{-1}$  和  $S_{-1}$** . 我们讨论一下两个特殊的空间:  $E_{-1}$  和  $S_{-1}$ . 由  $E_{-1}$  的定义不难看出,  $T^*P$  上的局部是常数的函数空间  $H^0(T^*P, R)$  包含在  $E_{-1}$  中。利用正合序列 (9.3)

$$\begin{aligned} (0) \longrightarrow H^0(T^*P, R) &\longrightarrow C^\infty(T^*P) \xrightarrow{H} S(T^*P, \omega) \\ &\longrightarrow H^1(T^*P, R) \longrightarrow (0), \end{aligned}$$

得一序列

$$(13.6) \quad (0) \longrightarrow H^0(T^*P, R) \longrightarrow E_{-1} \xrightarrow{H} S_{-1} \longrightarrow H^1(T^*P, R) \longrightarrow (0).$$

我们有下面的结论:

13.7. 命题. 序列 (13.6) 是一正合序列。

证. 根据命题 13.3, 对任意的  $X \in S_{-1}$ , 有

$$H_{\alpha(X)} = 0.$$

于是函数  $\alpha(X)$  在局部上是常数。因为  $\alpha$  在  $T^*P$  的零截面上为零, 所以有  $\alpha(X) = 0$ . 若  $X \in S_{-1}$ , 且  $X$  在  $H^1(T^*P, R)$  中的象为 0, 则存在  $f \in C^\infty(T^*P)$  使  $H_f = X$ . 又根据命题 13.3 的推论 1,

$$Cf = \alpha(H_f) = 0.$$

因此, 序列 (13.6) 在  $S_{-1}$  处是正合的。现证映射

$$S_{-1} \longrightarrow H^1(T^*P, R)$$

是满射。令  $\sigma$  为向量丛  $T^*P$  的零截面。映射  $\sigma \circ \pi_*$  在  $T^*P$  上同伦于单位映射。于是同态

$$H^1(\pi_*): H^1(P, R) \longrightarrow H^1(T^*P, R)$$

实际上对任意的  $i$  都是同构。所以在  $H^*(T^*P, R)$  中出现的每一上同调类都含这样的一个形式  $r$ , 它是  $P$  上某一闭 1-形式在  $(\pi_*)^*$  下的象。因为  $C$  是一垂直向量场, 所以  $\theta(C)r = 0$ 。所以若  $X$  为  $T^*P$  上满足  $i(X)\omega = r$  的辛向量场, 则有

$$i([C, X])\omega = \theta(C)r - i(X)\theta(C)\omega = -i(X)\omega,$$

于是  $[C, X] = -X$  且  $X \in S_{-1}$ 。所以  $r$  的上同调类是  $S_{-1}$  的某一元素的象。又序列在  $E_{-1}$  和  $H^*(T^*P, R)$  处的正合性是显然的。证完。

注。正合序列 (13.6) 同构于下面的正合序列 (0)  $\rightarrow$

$$H^0(P, R) \rightarrow C^\infty(P) \xrightarrow{d} Z^1(P) \rightarrow H^1(P, R) \rightarrow (0),$$

其中  $Z^1(P)$  是  $P$  上的闭 1-形式所构成的空间, 而映射  $Z^1(P) \rightarrow H^1(P, R)$  是一个把闭 1-形式映为它所代表的上同调类的映射。事实上, 我们定义空间  $\Omega^1(P)$  到  $T^*P$  上的向量场空间的一个标准同构使对  $\forall Y \in T(T^*P)$  有

$$[C, Y] = -Y$$

如下: 对任意的  $\beta \in \Omega^1(P)$ , 定义  $T^*P$  上的向量场  $X_\beta$  使

$$i(X_\beta)\omega = (\pi_*)^*(\beta).$$

这个映射导出  $Z^1(P)$  到  $S_{-1}$  上的一个同构, 把它记为  $\rho$ , 则不难验证下图是一交换图(习题):

$$\begin{array}{ccccccc} (0) & \longrightarrow & H^0(T^*P, R) & \longrightarrow & E_{-1} & \xrightarrow{H} & S_{-1} \longrightarrow H^1(T^*P, R) \longrightarrow (0) \\ & & \uparrow H^0(\pi_*) & & \uparrow (\pi_*)^* & & \uparrow \rho & \uparrow H^1(\pi_*) \\ (0) & \longrightarrow & H^0(P, R) & \longrightarrow & C^\infty(P) & \longrightarrow & Z^1(P) \longrightarrow H^1(P, R) \longrightarrow (0). \end{array}$$

**Lie 代数**  $E_0$  和  $S_0$ 。设  $D(P)$  是  $P$  上的向量场所构成的 Lie 代数。在 §12 中, 我们定义了从  $D(P)$  到  $C^\infty(T^*P)$  内的一个线性映射

$$F: X \mapsto f_X, \quad X \in D(P).$$

这是从  $D(P)$  到  $E_0$  上的一个线性空间同构。

**13.8. 引理。** 我们把  $C^\infty(P)$  等同于  $E_{-1}$ 。则对任意的  $X \in D(P)$  和任意的  $g \in C^\infty(P)$ , 有

$$\{f_X, g\} = Xg.$$

证. 事实上, 设  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  是由  $P$  上的局部坐标诱导出的  $T^*P$  上的局部坐标, 并且设

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

则

$$f_x = \sum_{i=1}^n a_i y_i.$$

从而

$$\{f_x, g\} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = Xg.$$

证完.

因为  $\{E_0, E_0\} \subset E_0$ , 所以  $E_0$  对于由 Poisson 括号所定义的代数结构是一 Lie 代数.

### 13.9. 命题. 从 $D(P)$ 到 $E_0$ 上的同构

$$F: X \mapsto f_x$$

是一 Lie 代数同构.

证. 事实上, 设  $X, Y \in D(P)$ ,  $g \in C^\infty(P)$ , 则

$$\begin{aligned} & \{\{f_x, f_y\}, g\} \\ &= \{f_x, \{f_y, g\}\} - \{f_y, \{f_x, g\}\} \\ &= X(Yg) - Y(Xg) - [X, Y]g = \{f_{[X, Y]}, g\}. \end{aligned}$$

这里, 同引理 13.8 一样, 我们把  $C^\infty(P)$  等同于  $E_{-1}$ . 由  $F$  的定义可知, 在局部坐标下有

$$\{f_x, f_y\} = f_{[X, Y]} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

因此, 由上面的计算可知

$$\{f_x, f_y\} = f_{[X, Y]}$$

含于 Lie 代数  $C^\infty(T^*P)$  的中心里, 从而它是  $T^*P$  上的局部常数函数. 又因为它含于  $E_0$  中, 所以它等于 0, 也就是说,  $F$  是一 Lie 代数同构. 证完.

设  $X \in D(P)$ , 我们定义  $T^*P$  上的一个 Hamilton 向量场  $T^*(X)$  为

$$T^*(X) = H_{f_X}.$$

根据命题 13.5 和 13.9, 映射

$$T^*: X \mapsto T^*(X), X \in D(P),$$

是从 Lie 代数  $D(P)$  到 Lie 代数  $S_0$  上的一个同构. 对任一  $g \in C^\infty(P)$ , 我们有

$$T^*(X)g = H_{f_X}g = Xg, X \in D(P).$$

于是  $T^*(X)$  是  $P$  上的一个可投影 (Projectable) 向量场, 而且它的投影是  $X$ . 我们把向量场  $T^*(X)$  称为  $X$  在  $T^*P$  中的拓展 (prolongement). 根据命题 13.3 的推论 1, 对任意的  $X \in D(P)$  都有

$$\alpha(T^*(X)) = Cf_X = f_X.$$

13.10. 命题. 设  $Y$  是  $T^*P$  上的一个向量场, 则  $Y$  为  $P$  上某一向量场的拓展的充分必要条件是

- (i)  $[C, Y] = 0$ ,
- (ii)  $\theta(Y)\alpha = 0$ .

证. 设  $Y$  是  $P$  上的向量场  $X$  的拓展, 即有  $Y = T^*(X)$ . 那么,  $Y \in S_0$ , 从而  $[C, Y] = 0$ . 又

$$\begin{aligned}\theta(Y)\alpha &= d\iota(Y)\alpha + \iota(Y)d\alpha \\ &= d(\alpha(Y)) + \iota(Y)d\alpha \\ &= df_X - \iota(H_{f_X})\omega = 0.\end{aligned}$$

于是必要性得证. 反之, 若  $Y$  是  $T^*P$  上满足条件 (i) 和 (ii) 的向量场, 则有

$$C\alpha(Y) = (\theta(C)\alpha)(Y) + \alpha([C, Y]) = \alpha(Y),$$

所以  $\alpha(Y) \in E_0$ . 另一方面, 因为  $\theta(Y)\alpha = 0$ , 我们有

$$d\alpha(Y) = \iota(Y)\omega.$$

于是

$$Y = H_{\alpha(Y)} \in S_0,$$

所以  $Y$  是  $P$  上某一向量场的拓展. 证完.

例. 设  $x_1, \dots, x_n$  是  $R^n$  上的自然坐标,  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  是  $T^*R^n$  上由  $x_1, \dots, x_n$  诱导出的辛坐标. 若

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

是  $R^n$  上的一个向量场，则它在  $T^*R^n$  上的拓展是

$$T^*(X) = \sum_{i=1}^n \left( a_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial a_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

注，若  $X \in D(P)$ ，则由  $T^*(X)$  所产生的任意一个流都是由  $T^*P$  的辛同构所构成的集合。这些辛同构保持 Liouville 形式不变。若  $\varphi_t$  是由  $X$  所产生的一个流，根据 §12 的讨论可知  $T^*\varphi_t$  是  $T^*P$  上由  $T^*(X)$  产生的一个流。

**空间  $E_1$  和  $S_1$ .**  $E_1$  由  $T^*P$  上这样的函数构成，这些函数在每一纤维  $T_x^*P$  上的限制是二次齐次多项式。如果对任意的  $x \in P$ ， $g \in E_1$  在  $T_x^*P$  上的限制都是非退化的，则可将它看作  $P$  上的一个伪 Riemann 度量，并且我们可以用它来定义从余切丛  $T^*P$  到切丛  $TP$  上的一个同构如下：设  $\xi \in T^*P$ ，并设  $*_*(\xi) = x$ ，定义  $T_x^*P$  中的元素  $g_\xi$  为

$$g_\xi: v \mapsto g(\xi, v), \quad \forall v \in T_x^*P,$$

则映射

$$\varphi: \xi \mapsto g_\xi, \quad \forall \xi \in T^*P,$$

就是从  $T^*P$  到  $TP$  上的一个同构。若通过同构  $\varphi$  把  $TP$  等同于  $T^*P$ ，则 Hamilton 向量场  $Hg (\in S_1)$  称为由度量  $g$  激起的浪花 (spray)。 $P$  上的测地线是  $Hg$  的轨道在  $P$  上的投影。注意到  $Hgg = \{g, g\} = 0$ ，可知向量场切于由方程  $g = a (a \in R)$  所定义的超曲面。

## §14. 余切丛的 Lagrange 子流形

设  $P$  是一流形， $\beta \in \Omega^1(P)$ 。与 §12 一样，我们用  $\tilde{\beta}$  来表示余切丛上相应于  $\beta$  的截面，则  $\tilde{\beta}$  是从  $P$  到  $T^*P$  内的一个浸入。

### 14.1. 命题. 浸入

$$\tilde{\beta}: P \longrightarrow T^*P$$

是一 Lagrange 浸入的充分必要条件是  $\beta$  是一个闭 1-形式。

证，事实上，根据命题 12.6 我们有

$$\beta = \bar{\beta}^*(\alpha),$$

所以

$$d\beta = \bar{\beta}^*(d\alpha) = -\bar{\beta}^*(\omega).$$

其中  $\alpha$  是  $T^*P$  的 Liouville 形式，因此，浸入  $\bar{\beta}$  是迷向浸入当且仅当  $d\beta = 0$ . 又因为

$$\dim P = \frac{1}{2} \dim T^*P,$$

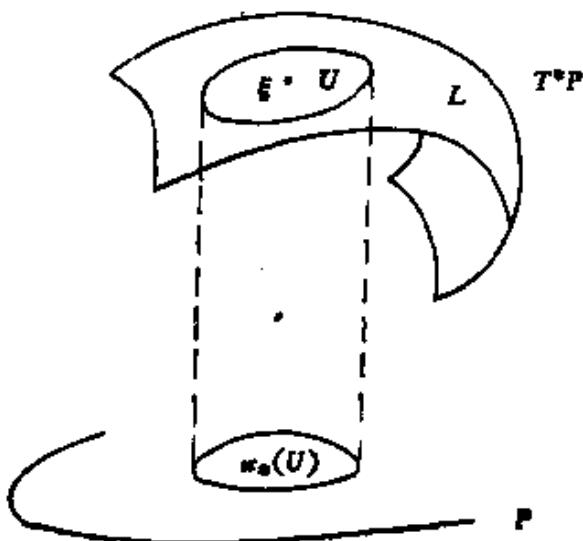
所以从  $P$  到  $T^*P$  内的迷向浸入必是 Lagrange 浸入。于是  $\bar{\beta}$  是一 Lagrange 浸入的充分必要条件是  $d\beta = 0$ . 证完。

命题 14.1 的一个特殊的情形是，对任一函数  $f \in C^\infty(P)$ ，都有  $T^*P$  的一个 Lagrange 子流形与之相对应，即  $\overline{df}$  的象。我们把  $\overline{df}$  的象称为是由  $f$  生成的 Lagrange 子流形，而称  $f$  为该子流形的一个母函数 (fonction génératrice)。

设  $L$  是  $T^*P$  的一个 Lagrange 子流形， $\xi$  是  $L$  的一个点使得  $T_\xi L$  横截于  $T_\xi(T^*P)$  的垂直向量空间，则映射

$$\pi_*: T^*P \longrightarrow P$$

限制在  $L$  所得到的映射  $\pi_*|L = \pi_1$  在点  $\xi$  的切空间映射  $(\pi_1^T)_\xi$  是一切空间同构。于是知道有  $\xi$  在  $L$  中的一个开邻域  $U$  使限制映射  $\pi_1|U$  是从  $U$  到  $P$  的开集  $\pi_*(U)$  上的一个微分同胚 (参看下面的示意图)。



设  $\beta$  是  $\pi_*(U)$  上的一个微分 1-形式使映射  $\bar{\beta} \circ \pi_*$  为  $U$  上的单位映射，则  $\bar{\beta}$  是从  $\pi_*(U)$  到  $U$  上的 Lagrange 浸入。根据命题 14.1， $d\beta = 0$ 。于是存在点  $\pi_*(\xi)$  在  $P$  中的一个开邻域  $V$  以及函数  $f \in C^\infty(V)$  使得

$$df = \beta|_V.$$

因此， $\overline{d\beta}(V)$  是  $\xi$  在  $L$  中的一个邻域，在这个邻域中， $f$  是一母函数。

大家自然要问，是不是  $T^*P$  中任意的 Lagrange 子流形在局部上都可以由一母函数生成？答案是否定的。在  $T^*P$  中存在这样的 Lagrange 子流形，它们不是  $T^*P$  的截面，因而不能，即便是局部地，也不能由某一函数生成。例如， $T^*P$  的每一纤维都是  $T^*P$  的一个 Lagrange 子流形。事实上，Liouville 形式在每一纤维上的拉回等于零，所以  $\omega$  在每一纤维上的拉回也是零，又每一纤维的维数都是  $T^*P$  的维数的一半，因而是 Lagrange 子流形。这些 Lagrange 子流形不能由函数生成。

利用  $P$  上的一个函数来构造  $T^*P$  的 Lagrange 子流形的方法可推广如下。我们不妨假定在  $P$  上存在整体的坐标  $x_1, \dots, x_n$ ，不然，我们可以取  $P$  的一个坐标邻域来进行讨论。设  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  为  $T^*P$  上由  $x_1, \dots, x_n$  诱导出的辛坐标。设  $s$  是一正整数， $a_1, \dots, a_s$  是  $R^s$  上的自然坐标。我们考虑积流形  $P \times R^s$ 。令

$$pr_1: P \times R^s \longrightarrow P$$

是投影映射，又设

$$F: P \times R^s \longrightarrow R$$

是  $P \times R^s$  上的一个可微函数。我们来定义投影  $pr_1$  的一个提升 (relèvement)

$$\gamma: P \times R^s \longrightarrow T^*P$$

使得

$$\pi_* \circ \gamma = pr_1,$$

$$y_i \circ \gamma = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

则  $\gamma$  是一可微映射.

令  $N_F$  为  $P \times R^s$  中由下列方程所定义的点集:

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\partial F}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial a_s} = 0.$$

我们假定在  $N_F$  上恒有

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{\partial F}{\partial a_s}\right) \neq 0.$$

于是,  $N_F$  是  $P \times R^s$  的一个  $n$  维闭子流形, 而且  $\gamma$  在  $N_F$  上的限制是一浸入. 事实上, 对任意的  $x \in N_F$ ,  $P \times R^s$  上的一个向量场  $X$  在点  $x$  处与  $N_F$  相切的条件是

$$X_x \left( \frac{\partial F}{\partial a_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

换句话说,  $X_x$  属于下面  $s$  个 1-形式的核的交集:

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right), \dots, d\left(\frac{\partial F}{\partial a_s}\right).$$

于是, 根据  $\gamma$  的定义,  $(\gamma|N_F)^T$  的核是下列 1-形式的核的交集:

$$dx_i, \quad d\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right), \quad d\left(\frac{\partial F}{\partial a_j}\right), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, s.$$

也就是下列 1-形式的核的交集:

$$dx_i, \quad \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial a_k} da_k, \quad \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 F}{\partial a_j \partial a_k} da_k,$$

$$i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, s.$$

因为在  $N_F$  上

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial a_j}\right), \quad j = 1, \dots, s,$$

是无关的, 因此下面的  $s \times (n+s)$  阶矩阵

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial a_k}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a_j \partial a_k} \right)$$

在  $N_F$  上的秩恒等于  $s$ . 于是知道  $(\gamma|N_F)^T$  的核是下列 1-形式的核的交:

$$dx_1, \dots, dx_n, da_1, \dots, da_s.$$

这就推出  $(\gamma|N_F)^T$  的核仅含零向量, 也即  $\gamma|N_F$  是一浸入.

另一方面, 对  $T^*P$  的 Liouville 形式

$$\alpha = \sum_{i=1}^n y_i dx_i,$$

有

$$\gamma^*(\alpha) = \gamma^* \left( \sum_{i=1}^n y_i dx_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i.$$

于是  $\gamma^*(\alpha)$  在  $N_F$  上的拉回与  $dF$  在  $N_F$  上的拉回相同. 于是

$$\gamma^*(\omega)|N_F = \gamma^*(-d\alpha)|N_F = -d\gamma^*(\alpha)|N_F = 0.$$

所以  $\gamma$  在  $N_F$  上的限制是  $N_F$  到  $T^*P$  内的一个 Lagrange 浸入. 一般说来, 这个浸入不是内射 (参看例 2). 如果是内射, 则它的象  $L$  是  $T^*P$  的 Lagrange 子流形,  $\alpha|L$  是一正合 1-形式. 这时, 我们也说  $F$  是  $L$  的一个母函数.

注. 考虑投影

$$pr_1: P \times \mathbb{R}^s \longrightarrow P$$

在  $N_F$  上的限制  $pr_1|N_F$ . 易知  $(pr_1|N_F)^T$  的核是下列 1-形式的核的交:

$$dx_1, \dots, dx_n, d\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right), \dots, d\left(\frac{\partial F}{\partial a_s}\right).$$

所以它最多是  $s$  维的. 如果我们把 Lagrange 浸入

$$\gamma: N_F \longrightarrow T^*P$$

和自然投影

$$\pi_*: T^*P \longrightarrow P$$

合起来, 则得到一个在任意一点的秩至少是  $n-s$  的映射.

例 1. 设  $S = n$ . 设  $p \in P$ ,  $p$  点的坐标是  $(p_1, \dots, p_n)$ . 又设

$$F = \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) a_i,$$

则

$$N_F = \{p\} \times \mathbb{R}^n \subset P \times \mathbb{R}^n,$$

并且

$$y_i \circ \gamma = a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

也就是说,  $\gamma|_{N_p}$  是从  $N_p$  到纤维  $T_p^*P$  上的同构.

例2. 设  $P = R$  并且设  $s = 1$ , 而

$$F = F(x, a) = \frac{a^3}{3} + (x^2 - 1)a,$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x^2 + a^2 - 1.$$

于是  $N_p$  是含于  $P \times R = R^2$  中的单位圆. 对任意的  $(p, t) \in R^2$ , 我们有

$$\gamma(p, t) = (p, 2pt),$$

并且

$$\gamma(0, 1) = \gamma(0, -1) = (0, 0).$$

所以映射

$$\gamma: N_p \longrightarrow T^*R$$

不是内射.

我们知道, 一般说来,  $T^*P$  的 Lagrange 子流形即使在局部上也不一定能由  $C^\infty(P)$  的某一函数生成, 即在局部上也不一定是某一个  $f$  的象, 这里  $f \in C^\infty(P)$ . 但是, 若  $L$  是  $T^*P$  的一个闭的 Lagrange 子流形, 则在局部上, 它可由我们刚才所叙述的方法构造出来. 事实上, 设  $\xi \in L$  是任意的一点. 根据命题 11.3, 存在  $\xi$  在  $T^*P$  中的一个开邻域  $U$  和  $U$  上的辛坐标  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ , 使得  $v_1, \dots, v_n$  在  $L \cap U$  上全为 0. 根据引理 11.2, 我们可以假定坐标  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$  有这样的性质, 在  $U$  上任一点处

$$dx_1, \dots, dx_n, du_1, \dots, du_n$$

都是无关的. 其中  $x_1, \dots, x_n$  是  $P$  上的坐标. 设  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  是  $P$  上由  $x_1, \dots, x_n$  诱导出的辛坐标, 则因为  $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n$  和  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  (限制在  $U$  上) 都是  $U$  上的辛坐标, 所以形式

$$\sum_{i=1}^n (y_i dx_i - v_i du_i)$$

是  $U$  上的一个闭形式。因为任一闭形式在局部上都是正合的，所以我们可以假定存在  $T^*P$  上的可微函数  $F$  使在  $U$  上（必要时可将  $U$  适当缩小）有

$$dF|_U = \sum_{i=1}^n (y_i dx_i - v_i du_i).$$

于是在  $U$  上有

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = - \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial u_j}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

因为在  $L \cap U$  上  $v_1, \dots, v_n$  全为 0，所以在  $L \cap U$  上

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

又

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial y_i} dv_j - \sum_{j=1}^n v_j d\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right),$$

所以在  $L \cap U$  上有

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial y_i} dv_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

但因为

$$dx_1, \dots, dx_n, \quad dy_1, \dots, dy_n$$

在  $U$  上无关，所以  $n \times n$  阶矩阵

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right)$$

在  $U$  的任意一点处都可逆，所以形式

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

在  $L \cap U$  上是无关的。利用辛坐标  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  把  $T^*P$  等同于  $P \times \mathbb{R}^n$ ，则构造出来的映射

$$\gamma: P \times \mathbb{R}^n \longrightarrow T^*P$$

是一 Lagrange 浸入。又由于在  $L \cap U$  上有

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = y_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

所以映射  $\gamma$  在  $N_F$  的开集  $L \cap U$  上是单位映射。

正如 Weinstein 在文献[29]中所阐明的那样，通过  $P \times \mathbb{R}^s$  上的一个可微函数来构造  $T^*P$  的 Lagrange 子流形的方法，是另一具有更为直观的几何意义的构造方法的特殊情形。下面我们简述一下这一方法，想了解详细论证的读者可参看有关的文献。

设  $Q$  是一个流形，

$$\varphi: Q \longrightarrow P$$

是一子浸入。设  $N$  是  $T^*Q$  中所有具有形式  $\xi \circ \varphi^*$  ( $\xi \in T^*P$ ) 的余切向量所构成的集合，则  $N$  是  $T^*Q$  的一个子向量丛。若  $\dim P = n$  且  $\dim Q = n + s$ ，则  $\dim N = 2n + s$ 。设

$$\mu: N \longrightarrow T^*P$$

是一可微映射使得

$$\mu(\eta) \circ \varphi^* = \eta$$

对所有的  $\eta \in N$  成立，则可以证明：

1) 若  $\alpha_P$  和  $\alpha_Q$  分别是  $T^*P$  和  $T^*Q$  上的 Liouville 形式，则

$$\alpha_Q|_N = \mu^*(\alpha_P).$$

又若  $\omega_P$  和  $\omega_Q$  分别是  $T^*P$  和  $T^*Q$  上的辛结构，则有

$$\mu^*(\omega_P) = \omega_Q|_N.$$

2)  $N$  对于辛结构  $\omega_Q$  来说，是余迷向的。

设  $F$  是  $Q$  上的一个可微函数， $L$  是  $\overline{dF}$  ( $dF$  所对应的  $T^*Q$  的截面) 在  $T^*Q$  中的象，则  $L$  是  $T^*Q$  的一个 Lagrange 子流形。若  $L$  和  $N$  有一“适用交”，则可用收缩法在  $T^*P$  中构造一 Lagrange 子流形（参看 §11）。对任意的  $\eta \in L \cap N$ ，存在  $\eta$  在  $L \cap N$  中的一个开邻域  $V$  使  $\mu(V)$  是  $T^*P$  的一个 Lagrange 子流形。

## 第四章 辛 G-空间

在这章里, 我们用  $G$  来表示一个 Lie 群, 即  $G$  同时是一抽象群和一实解析流形, 并且  $G$  的群运算与  $G$  的解析结构是相容的。所谓相容的, 意思是指由

$$(x, y) \mapsto xy^{-1}, \quad x, y \in G,$$

所定义的从  $G \times G$  到  $G$  上的映射是一实解析映射。

**定义 1.** 设  $M$  是一流形, 如果可微映射

$$\gamma: G \times M \rightarrow M$$

满足下面的两条:

- (i)  $\gamma(e, x) = x, \quad \forall x \in M, e$  是  $G$  的单位元,
- (ii) 若  $s_1, s_2 \in G$ , 则

$$\gamma(s_1, \gamma(s_2, x)) = \gamma(s_1 s_2, x), \quad \forall x \in M,$$

则我们说  $G$  可微地作用在  $M$  上。

通常我们把  $G$  在  $M$  上的作用  $\gamma$  写成乘积的形式

$$\gamma(s, x) = sx, \quad s \in G, x \in M.$$

若把  $T(G \times M)$  等同于  $TG \times TM$ , 则 Lie 群  $G$  在  $M$  上的可微作用的切空间映射  $\gamma^T$  可以看作是从  $TG \times TM$  到  $TM$  内的可微映射, 容易看出, 这是群  $TG$  在流形  $TM$  上的一个作用, 我们同样把它写成乘积的形式. 我们把  $M$  (或  $G$ ) 等同于  $TM$  (或  $TG$ ) 的零截面的象. 在这些假定下, 若  $s \in G, x \in M, a \in T_x G, v \in T_x M$ , 则有

$$sv = \gamma^T(s, v) \in T_{sx} M,$$

$$ax = \gamma^T(a, x) \in T_{sx} M.$$

把  $G$  在单位元  $e$  处的切空间记为  $\mathfrak{g}$ , 则对任意的  $a \in \mathfrak{g}$  和  $x \in M$ , 我们有  $a_x \in T_x M$ . 映射

$$x \mapsto ax, \quad x \in M,$$

对固定的  $a$  是  $M$  上的一个向量场，我们把它记为  $\Gamma_a$ 。特别地，若  $M = G$  且

$$\gamma: G \times G \rightarrow G$$

就是 Lie 群  $G$  的乘积，则对  $a \in \mathfrak{g}$ ，

$$\Gamma_a: s \mapsto as, s \in G,$$

是  $G$  上的一个右不变向量场，我们用专门的记号  $R_a$  来表示它。显然， $R_a(e) = a$ 。在  $\mathfrak{g}$  上定义一括号运算  $[,]$  使对任意的  $a, b \in \mathfrak{g}$  有

$$R_{[a,b]} = [R_a, R_b] (= R_a R_b - R_b R_a),$$

则向量空间  $\mathfrak{g}$  成为一实 Lie 代数，我们称它为  $G$  的 Lie 代数。

**定义2.** 设  $M$  是一流形， $G$  是一 Lie 群， $\mathfrak{h}$  是任意的一个有限维实 Lie 代数，则

(i) 若  $G$  可微地作用在  $M$  上，我们称  $M$  为一  $G$ -空间。

(ii) 若存在从 Lie 代数  $\mathfrak{h}$  到  $M$  的向量场 Lie 代数内的一个同态，我们称  $M$  为一  $\mathfrak{h}$ -空间。

若  $\mathfrak{g}$  是  $G$  的 Lie 代数，则对任一  $G$ -空间  $M$ ，映射

$$\Gamma: a \mapsto \Gamma_a, a \in \mathfrak{g},$$

是从  $\mathfrak{g}$  到  $M$  的向量场 Lie 代数  $D(M)$  内的一个同态，从而  $M$  是一  $\mathfrak{g}$ -空间。我们把  $M$  的这一  $\mathfrak{g}$ -空间结构称为伴随  $\mathfrak{g}$ -空间结构。

注。通常我们也从 Lie 群  $G$  上的左不变向量场出发来定义  $G$  的 Lie 代数，它和由右不变向量场定义的  $G$  的 Lie 代数没有什么本质的区别。

## § 15. 定义和例子

**15.1. 定义.** 设  $M$  是一  $G$ -空间。若在  $M$  上有一在  $G$  的作用下不变的辛结构  $\omega$ ，则我们称  $M$  为一辛  $G$ -空间。

根据定义，若辛流形  $(M, \omega)$  是一辛  $G$ -空间，则对任意的  $s \in G$ ，微分同胚

$$s: x \mapsto sx, x \in M,$$

是  $(M, \omega)$  的一个辛自同构。

**15.2. 定义.** 设  $\mathfrak{h}$  是一有限维实 Lie 代数, 流形  $M$  是一  $\mathfrak{h}$ -空间。若  $M$  上存在辛结构  $\omega$  使对任意的  $a \in \mathfrak{h}$ , 向量场

$$\Gamma_a: x \mapsto ax, x \in M,$$

都是  $(M, \omega)$  的辛向量场, 则我们称  $\mathfrak{h}$ -空间  $M$  为一辛  $\mathfrak{h}$ -空间。

设  $\mathfrak{g}$  是  $G$  的 Lie 代数,  $M$  是一  $G$ -空间,  $\omega$  是  $M$  上的一个辛结构。因为  $M$  是一  $G$ -空间, 所以  $M$  是一  $\mathfrak{g}$ -空间。若  $(M, \omega)$  是一辛  $G$ -空间, 则它也是一辛  $\mathfrak{g}$ -空间。事实上, 任取  $a \in \mathfrak{g}$ , 设

$$F: R \rightarrow G$$

是相应于  $a$  的  $G$  的单参数子群, 即  $F$  是从实数加法 Lie 群  $R$  到  $G$  内的一个 Lie 群同态。对任意的  $x \in M$ , 令

$$\varphi: (t, x) \mapsto F(t)x, t \in R,$$

则映射

$$\varphi: R \times M \rightarrow M$$

满足条件

$$(i) \quad \varphi(0, x) = x, \forall x \in M,$$

(ii) 映射:  $t \mapsto \varphi(t, x)$ ,  $t \in R$ , 对  $\forall x \in M$  都是向量场

$$\Gamma_a: x \mapsto ax, x \in M,$$

的一条积分曲线。

事实上, 对任意的  $t \in R$  有

$$\Gamma_a: \varphi(t, x) = aF(t)x.$$

又因为

$$F: R \rightarrow G$$

是相应于  $a$  的单参数子群, 所以

$$\frac{dF(t)}{dt} = aF'(t).$$

于是有

$$\frac{d\varphi(t, x)}{dt} = \frac{dF(t)}{dt}x = aF'(t)x.$$

于是  $\varphi$  是由  $\Gamma_a$  产生的一个流。因为  $\omega$  是  $G$  不变的, 所以

$\varphi_t^*(\omega)$  不依赖于参数  $t \in R$ . 根据引理 9.1 得

$$\theta(\Gamma_s)\omega = 0.$$

即  $\Gamma_s$  对任意的  $s \in g$  都是一辛向量场. 这就证明了  $(M, \omega)$  也是一辛  $g$ -空间. 反之, 若  $(M, \omega)$  是一辛  $g$ -空间, 则在  $G$  是一连通 Lie 群时,  $(M, \omega)$  也是一辛  $G$ -空间.

**例 1.** 设  $P$  是  $G$ -空间, 并设

$$\gamma : G \times P \rightarrow P$$

是相应的作用. 对任意的  $s \in G$ ,

$$\gamma_s : x \mapsto sx, \quad x \in P,$$

是  $P$  的一个微分同胚. 采用 §12 中的记号, 映射

$$T^*\gamma_s : T^*P \rightarrow T^*P$$

满足关系

$$\langle (T^*\gamma_s)(\xi), \gamma^s(u) \rangle = \langle \xi, u \rangle, \quad \forall \xi \in T_x^*P, u \in T_x P.$$

于是映射

$$T^*\gamma : (s, \xi) \mapsto (T^*\gamma_s)(\xi), \quad s \in G, \quad \xi \in T^*P,$$

定义了  $G$  在  $T^*P$  上的一个作用, 我们也把它写成乘积的形式

$$T^*\gamma : (s, \xi) \mapsto s\xi, \quad s \in G, \quad \xi \in T^*P.$$

于是, 对任意的  $(\xi, v) \in T_x^*P \times T_p^*P$  和  $s \in G$  有

$$\langle s\xi, sv \rangle = \langle \xi, v \rangle.$$

所以, 上面所定义的  $G$  在  $T^*P$  上的作用实际上是唯一满足这一等式的作用. 根据命题 12.8, 我们知道  $T^*P$  上的 Liouville 形式  $\alpha_P$  在  $G$  的这一作用下不变. 因此, 若  $\omega_P = -d\alpha_P$  是  $T^*P$  上的标准辛结构, 则  $(T^*P, \omega_P)$  就是一辛  $G$ -空间.

**例 2.** 设  $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$  是  $R^{2n}$  上的标准辛结构. 在辛群  $Sp(2n)$  的自然作用下, 辛流形  $(R^{2n}, \omega)$  便是一辛  $Sp(2n)$ -空间. 同样把  $R^{2n}$  看作 Lie 群, 则在平移变换作用下,  $(R^{2n}, \omega)$  是一辛  $R^{2n}$ -空间.

若  $(M, \omega)$  是一辛  $G$ -空间,  $\omega$  在  $G$  的每一轨道上的拉回都是一常秩闭 2-形式. 但在一般情形下, 该闭形式不一定是轨道上的

辛结构。我们有下面的引理。

**15.3. 引理.** 设  $(V, \omega)$  是一实辛向量空间,  $H$  是  $Sp(V, \omega)$  的一个紧子群, 设  $V^H$  是由  $V$  中的  $H$  不动向量所构成的子空间, 则  $V^H$  是  $(V, \omega)$  的一个辛子空间。

证。设  $x_1, \dots, x_{2n}$  是  $V$  的一组辛基, 定义  $V$  的一个线性映射  $j$  使

$$\begin{aligned} j(x_i) &= x_{n+i}, & i &= 1, \dots, n, \\ j(x_{n+i}) &= -x_i, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

再定义  $V$  上的一个双线性型  $b$  如下:

$$b(x_1, x_2) = \omega(x_1, j(x_2)), \quad \forall x_1, x_2 \in V,$$

则  $b$  是  $V$  上的一个正定对称双线性型。因为  $H$  是  $Sp(V, \omega)$  的一个紧子群, 所以由 §5 的结果知  $b$  在  $H$  的作用下不变, 即对任意的  $s \in H$  有

$$b(x_1, x_2) = b(sx_1, sx_2), \quad \forall x_1, x_2 \in V.$$

令  $F$  是  $V$  中由

$$\{sx - x : s \in H, x \in V\}$$

所张成的子空间。因为  $H \subset Sp(V, \omega)$ , 所以对任意的  $x, y \in V$  和  $s \in H$  有

$$\omega(sx - x, y) = \omega(x, s^{-1}y - y).$$

特别地, 若  $y \in V^H$ , 则有

$$\omega(sx - x, y) = 0.$$

因此,  $F$  是  $V^H$  在  $V$  中对于  $\omega$  的正交补。同样, 由于  $b$  在  $H$  下不变, 所以我们也有

$$b(sx - x, y) = b(x, s^{-1}y - y), \quad \forall x, y \in V, s \in H.$$

于是, 对于  $b$  来说,  $F$  也与  $V^H$  正交。设  $V^H$  在  $V$  中对于  $b$  的正交补是  $(V^H)^\perp$ , 则

$$(V^H)^\perp = F.$$

于是

$$V^H \cap (V^H)^\perp = V^H \cap F = (0).$$

所以  $V^H$  是一辛子空间。证完。

15.4. 命题. 设  $(M, \omega)$  是一辛  $G$ -空间. 若  $G$  是一紧 Lie 群, 则  $G$  不动点集

$$M^G = \{x \in M : sx = x \text{ 对所有 } s \in G\}$$

是  $(M, \omega)$  的一个辛子流形.

证. 因为  $G$  是紧的, 所以在  $M$  上可定义一个在  $G$  的作用下不变的 Riemann 度量  $g$ . 对于  $g$ , 我们可以在  $TM$  的零截面的一个开邻域  $U$  上定义一个指数映射 (参看文献[12])

$$\exp: U \rightarrow M.$$

因为  $g$  在  $G$  的作用下不变, 所以对任意的  $s \in G$  和  $v \in U$  有

$$\exp(sv) = s(\exp v).$$

设  $x \in M^G$ ,  $W_x$  是  $x$  在  $T_x M$  中的一个开邻域使  $W_x \subset U$  并且使  $\exp$  在  $W_x$  上的限制是从  $W_x$  到  $\exp(W_x)$  上的一个微分同胚, 则

$$M^G \cap \exp(W_x) = \exp((T_x M)^G \cap W_x),$$

这里  $(T_x M)^G$  是  $T_x M$  中的  $G$  不动子空间. 于是  $M^G$  是  $M$  的一个子流形, 并且对任意的  $x \in M^G$  有

$$T_x(M^G) = (T_x M)^G.$$

因为  $(M, \omega)$  是一  $G$ -空间, 所以对任意的  $s \in G$  和  $x \in M^G$ ,  $T_x M$  的线性变换

$$v \mapsto sv, v \in T_x M,$$

是  $Sp(T_x M, \omega_x)$  的一个元素. 于是由引理 15.3 知

$$T_x M^G = (T_x M)^G$$

是  $(T_x M, \omega_x)$  的一个辛子空间. 所以  $M^G$  是  $(M, \omega)$  的一个辛子流形. 证完.

## § 16. Hamilton $\mathfrak{g}$ -空间和矩射

下面我们用  $\mathfrak{g}$  来表示一个有限维实 Lie 代数.

16.1. 定义. 设  $(M, \omega)$  是一辛  $\mathfrak{g}$ -空间, 若对任意的  $a \in \mathfrak{g}$ , 向量场

$$\Gamma_a: x \mapsto ax, x \in M,$$

都是一 Hamilton 向量场，则称  $(M, \omega)$  为一 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间。

若  $(M, \omega)$  是一辛流形，则我们有一 Lie 代数正合序列 (9.3)

$(0) \rightarrow H^0(M, R) \rightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{H} S(M, \omega) \xrightarrow{\rho} H^1(M, R) \rightarrow (0)$ ，  
而  $M$  上的 Hamilton 向量场就是属于  $H$  的象集的  $M$  的辛向量场。  
因此，辛流形  $(M, \omega)$  上的一个 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间结构，实际上是  
这样一个同态

$$\Gamma: \mathfrak{g} \rightarrow S(M, \omega),$$

它满足关系式

$$\rho \circ \Gamma = 0.$$

所以，若  $H^1(M, R) = (0)$ ，则上式恒成立， $(M, \omega)$  上所有的辛  $\mathfrak{g}$ -空间结构都是 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间结构。因为作为 Lie 代数， $H^1(M, R)$  的括号运算是零运算，所以若  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ ，则从  $\mathfrak{g}$  到  $H^1(M, R)$  内的任一 Lie 代数同态都是零同态。因此，若  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ ，则  $(M, \omega)$  上的所有辛  $\mathfrak{g}$ -空间结构也都是 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间结构。

设映射

$$\iota: \mathfrak{g} \rightarrow S(M, \omega)$$

是一 Lie 代数同态，则  $\Gamma$  是辛流形  $(M, \omega)$  上的一个 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间结构的充要条件也可叙述为：存在从  $\mathfrak{g}$  到  $C^\infty(M)$  内的一个线性映射  $\tilde{\Gamma}$  使

$$\Gamma = H \circ \tilde{\Gamma}.$$

如果  $\tilde{\Gamma}$  是任意一个从  $\mathfrak{g}$  到  $C^\infty(M)$  的线性映射，则我们可以定义从  $C^\infty(M)$  到  $\mathfrak{g}$  的对偶空间  $\mathfrak{g}^*$  内的一个可微映射  $\mu$  如下：对任意的  $a \in \mathfrak{g}$ ， $\mu(x)$  ( $x \in M$ ) 在  $a$  处的值为

$$\langle \mu(x), a \rangle = \tilde{\Gamma}(a)(x).$$

容易看出  $\mu(x)$  是一意确定的。于是，我们可以把  $a \in \mathfrak{g}$  在  $\tilde{\Gamma}$  下的象看作是下式所定义的  $M$  上的函数

$$\langle \mu, a \rangle: x \mapsto \langle \mu(x), a \rangle, \forall x \in M.$$

若  $\Gamma$  是一 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间结构，则有

$$H_{\mu, \omega} = \Gamma_a, \forall a \in \mathfrak{g}.$$

16.2. 定义. 设  $(M, \omega)$  是一 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间. 我们把任一满足关系式

$$H_{(\mu, a)} = \Gamma_a, \quad \forall a \in \mathfrak{g}$$

的可微映射

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

称为  $\mathfrak{g}$ -空间  $(M, \omega)$  的一个矩射.

16.3. 引理. 设

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间  $(M, \omega)$  的一个矩射, 则下面的等式

- (i)  $d\langle \mu, a \rangle = \langle d\mu, a \rangle = i(\Gamma_a)\omega,$
- (ii)  $\langle d\mu(ax), b \rangle = \omega(bx, ax),$
- (iii)  $\langle d\mu(ax), b \rangle = \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\}(x)$

对任意的  $a, b \in \mathfrak{g}$  和  $x \in M$  都成立.

证. 由定义有

$$i(\Gamma_a)\omega = i(H_{(\mu, a)})\omega = d\langle \mu, a \rangle = \langle d\mu, a \rangle,$$

所以 (i) 成立. 由 (i) 有

$$\langle d\mu(ax), b \rangle = d\langle \mu, b \rangle(ax) = i(\Gamma_b)\omega(ax) = \omega(bx, ax),$$

所以 (ii) 成立. 又根据引理 9.8 有

$$\{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} = \omega(H_{(\mu, a)}, H_{(\mu, b)}) = \omega(\Gamma_b, \Gamma_a),$$

所以

$$\{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\}(x) = \omega(bx, ax),$$

于是 (iii) 成立. 证完.

设  $\mu_1$  和  $\mu_2$  是 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间  $(M, \omega)$  上的两个矩射, 则对任意的  $a \in \mathfrak{g}$  都有

$$\langle d(\mu_1 - \mu_2), a \rangle = 0,$$

所以  $d(\mu_1 - \mu_2) = 0$ . 于是  $\mu_1 - \mu_2$  在局部是常值映射. 所以  $(M, \omega)$  的矩射之间只差一局部常值映射. 若  $\mu$  是一矩射, 而

$$\varphi: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是一局部常值映射, 则因为  $H_{(\varphi, a)} = 0, \forall a \in \mathfrak{g}$ , 所以

$$H_{(\mu + \varphi, a)} = H_{(\mu, a)} = \Gamma_a, \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

因此  $\mu + \Psi$  是一矩射。如果  $(M, \omega)$  是一连通 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间，则  $(M, \omega)$  的任意两个矩射只差  $\mathfrak{g}^*$  的一个平移变换。

**16.4 命题.** 设  $\mu$  是 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间  $(M, \omega)$  上的一个矩射，则对任意的  $a, b \in \mathfrak{g}$ ，函数

$$\{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} - \langle \mu, [a, b] \rangle$$

是  $M$  上的一个局部常数函数。

证。事实上，根据引理 9.8 得

$$H_{\{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\}} = \Gamma_{[a, b]} = [\Gamma_a, \Gamma_b] = [H_{\langle \mu, a \rangle}, H_{\langle \mu, b \rangle}] = H_{\langle \mu, [a, b] \rangle},$$

所以结论成立。证完。

根据命题 16.4，对 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间  $(M, \omega)$  的任意一个矩射  $\mu$ ，我们可以在  $\mathfrak{g}$  上定义一个取值于  $H^0(M, R)$  中的反对称双线性映射  $c_\mu$  如下：

$$c_\mu(a, b) = \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} - \langle \mu, [a, b] \rangle, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

因为 Poisson 括号满足 Jacobi 恒等式，所以有

$$c_\mu([a, b], c) + c_\mu([b, c], a) + c_\mu([c, a], b) = 0, \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{g}.$$

把  $H^0(M, R)$  看作一个平凡  $\mathfrak{g}$ -模，则上面的等式表明  $c_\mu$  是  $\mathfrak{g}$  上取值于  $H^0(M, R)$  中的 2-闭上链。若  $\mu' = \mu + \varphi$ ， $\varphi \in H^0(M, R)$ ，是  $M$  的另一矩射，则对任意的  $a, b \in \mathfrak{g}$  有

$$c_{\mu'}(a, b) = c_\mu(a, b) - \langle \varphi, [a, b] \rangle.$$

这表明  $c_\mu - c_{\mu'}$  是  $\mathfrak{g}$  上取值于  $H^0(M, R)$  中的，由等式

$$f(a) = \langle \varphi, a \rangle, \quad \forall a \in \mathfrak{g},$$

所定义的 1-上链的上边缘。于是知道，作为  $H^2(\mathfrak{g}, H^0(M, R))$  中的一个元素，2-闭上链  $c_\mu$  所对应的上同调类不依赖于  $\mu$  的选取，它由  $(M, \omega)$  的  $\mathfrak{g}$ -空间结构决定。我们把它记为

$$c(M, \omega).$$

**16.5. 定义.** 设  $(M, \omega)$  是一辛  $\mathfrak{g}$ -空间，若同态

$$\Gamma: \mathfrak{g} \rightarrow S(M, \omega)$$

具有形式  $H \circ \tilde{\Gamma}$ ，其中

$$H: C^\infty(M) \rightarrow S(M, \omega)$$

如 (9.3)，而  $\tilde{\Gamma}$  是从  $\mathfrak{g}$  到 Lie 代数  $C^\infty(M)$  (对于 Poisson 括号) 内

的一个同态，则称  $(M, \omega)$  为 Poisson  $\mathfrak{g}$ -空间，或强 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间。

为使一辛  $\mathfrak{g}$ -空间  $(M, \omega)$  是 Poisson 的，充分必要条件是存在  $(M, \omega)$  的一个矩射  $\mu$  使  $c_\mu = 0$ ，也就是  $c(M, \omega)$  是 0。

若  $\mathfrak{g}$  是一实半单 Lie 代数，则任一辛  $\mathfrak{g}$ -空间都是 Poisson 的。事实上，这时任一辛  $\mathfrak{g}$ -空间都是 Hamilton 的。根据 Whitehead 第二引理，

$$H^2(\mathfrak{g}, R) = (0)$$

(参看文献[13])。所以

$$H^2(\mathfrak{g}, H^0(M, R)) = H^2(\mathfrak{g}, R) \otimes H^0(M, R) = (0).$$

于是  $c(M, \omega) = 0$ 。

**16.6. 命题.** 设  $(M, \omega)$  是一辛  $\mathfrak{g}$ -空间。若在  $M$  上存在一微分 1-形式  $\alpha$  使对任意的  $a \in \mathfrak{g}$  都有

$$\theta(\Gamma_a)\alpha = 0, \quad \omega = -d\alpha,$$

则  $(M, \omega)$  是一 Poisson  $\mathfrak{g}$ -空间。

证。事实上，对任意的  $a \in \mathfrak{g}$  我们有

$$d(\alpha(\Gamma_a)) = di(\Gamma_a)\alpha = \theta(\Gamma_a) - i(\Gamma_a)d\alpha = i(\Gamma_a)\omega,$$

所以  $\Gamma_a$  是一 Hamilton 向量场，并且我们可以把  $\Gamma$  写成

$$\Gamma = H \circ \tilde{\Gamma},$$

其中  $\tilde{\Gamma}$  是满足

$$\tilde{\Gamma}_a = \alpha(\Gamma_a), \quad \forall a \in \mathfrak{g},$$

的从  $\mathfrak{g}$  到  $C^\infty(M)$  内的一个线性映射。因此，利用第二章一开头我们引用的公式，得

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{[a,b]} &= i(\Gamma_{[a,b]})\alpha \\ &= i([\Gamma_a, \Gamma_b])\alpha \\ &= \theta(\Gamma_a)i(\Gamma_b)\alpha - i(\Gamma_b)\theta(\Gamma_a)\alpha \\ &= \theta(\Gamma_a)\alpha(\Gamma_b) = -\omega(\Gamma_a, \Gamma_b) = \{\tilde{\Gamma}_a, \tilde{\Gamma}_b\}, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

所以  $\tilde{\Gamma}$  是一 Lie 代数同态，因而  $(M, \omega)$  是 Poisson 的。证完。

**推论.** 设  $P$  是一  $\mathfrak{g}$ -空间。记  $T^*(\Gamma_a)$  为  $\Gamma_a (a \in \mathfrak{g})$  在  $T^*P$  上的拓展，则映射

$$\Gamma^*: a \mapsto T^*(\Gamma_a), a \in \mathfrak{g},$$

是余切丛  $T^*P$  上的一个 Poisson  $\mathfrak{g}$ -空间结构.

证. 利用命题 13.10 和命题 16.6. 证完.

**例 1.** 取  $\mathfrak{g} = R^2$ ,  $\mathfrak{g}$  的括号运算定义为零运算, 并且利用关系式( $x, y$  是  $R^2$  上的自然坐标)

$$\Gamma_{(a,b)} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}, a, b \in R,$$

在  $(R^2, dx \wedge dy)$  上定义一辛  $\mathfrak{g}$ -空间结构, 则因为

$$\Gamma_{(a,b)} = H_{ay-bx},$$

所以这是  $(R^2, dx \wedge dy)$  上的一个 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间结构. 由等式

$$\mu(x, y) = (y, -x)$$

所定义的从  $\mathfrak{g} = R^2$  到  $\mathfrak{g}^* = R^2$  内的映射是一矩射. 对任意的  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathfrak{g}$ , 我们有

$$\begin{aligned} c_\mu((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\ = & \{ \langle \mu, (a_1, b_1) \rangle, \langle \mu, (a_2, b_2) \rangle \} \\ = & \omega(\Gamma_{(a_1, b_1)}, \Gamma_{(a_2, b_2)}) \\ = & a_2 b_1 - a_1 b_2. \end{aligned}$$

这是因为  $\mathfrak{g}$  是一交换 Lie 代数. 又  $c_\mu$  与矩射的选取无关, 故  $c_\mu$  非零. 所以  $\mathfrak{g}$ -空间  $(R^2, dx \wedge dy)$  不是 Poisson 的.

**例 2.** 设

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$$

是  $R^{2n}$  上的标准辛结构, 而

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n x_i \wedge x_{n+i}$$

是  $R^{2n}$  上的一个反对称双线性型.

对  $R^{2n}$  的任一自同态  $a$ , 令  $\Gamma_a$  为  $R^{2n}$  上的线性向量场, 使对  $R^{2n}$  上任意的线性型  $f$  都有

$$\Gamma_a f = f \circ a,$$

则对任意的  $a, b \in \text{End}(R^{2n})$  和  $f$  有

$$[\Gamma_a, \Gamma_b]f = \Gamma_a \Gamma_b f - \Gamma_b \Gamma_a f = f \circ b \circ a - f \circ a \circ b \\ = \Gamma_{(b \circ a - a \circ b)} f,$$

所以

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = \Gamma_{(b \circ a - a \circ b)}.$$

对  $R^{2n}$  的任一自同态  $a$ , 由  $\Gamma_a$  的定义有

$$i(\Gamma_a)\omega = \sum_{i=1}^n ((x_i \circ a)dx_{n+i} - (x_{n+i} \circ a)dx_i).$$

因为

$$di(\Gamma_a)\omega = \theta(\Gamma_a)\omega,$$

所以  $i(\Gamma_a)\omega$  是一闭 1-形式当且仅当  $a$  属于辛群  $Sp(2n)$  的 Lie 代数  $sp(2n)$ , 也就是说, 对任意的  $x, y \in R^{2n}$  有 (参看 §4)

$$\omega_0(a(x), y) + \omega_0(x, a(y)) = 0.$$

因此, 映射

$$\Gamma: a \mapsto \Gamma_a, a \in sp(2n),$$

是  $(R^{2n}, \omega)$  上的一个辛  $sp(2n)$ -空间结构。因为  $sp(2n)$  是一实半单 Lie 代数, 所以  $\Gamma$  也是 Hamilton  $sp(2n)$ -空间和 Poisson  $sp(2n)$ -空间结构。设  $e_1, \dots, e_{2n}$  是  $R^{2n}$  的自然坐标, 则对任意的  $a \in sp(2n)$  有

$$i(\Gamma_a)\omega = d \left( \sum_{j,k=1}^{2n} \omega_0(a(e_j), e_k) x_j x_k \right).$$

这也直接证明了  $(R^{2n}, \omega)$  是一 Hamilton  $sp(2n)$ -空间。又我们有一二次矩射

$$\mu: R^{2n} \rightarrow (sp(2n))^*,$$

使得对任意的  $x \in R$  有

$$\langle \mu(x), a \rangle = \omega_0(ax, x).$$

**例 3.** 设  $Q = R^3$  是 3 维欧氏空间,  $q_1, q_2, q_3$  是  $Q$  上的自然坐标。于是在切丛  $TQ$  上有坐标

$$q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1 = dq_1, \dot{q}_2 = dq_2, \dot{q}_3 = dq_3,$$

参看 §9 的例 1。若我们通过 Riemann 度量  $\sum_i dq_i^2$  把  $TQ$  等同于

$T^*Q$ , 则  $T^*Q$  上的 Liouville 形式可写成

$$\alpha_Q = \sum_{i=1}^3 q_i dq_i.$$

在  $TQ$  上取辛结构  $-md\alpha_Q$ , 这里  $m \in R$ . 令  $gl(3)$  为  $Q$  的自同态所构成的 Lie 代数, 则我们在  $Q$  中有一自然的  $gl(3)$ -空间结构. 对任意的  $a \in gl(3)$ , 我们有

$$\Gamma_a = \sum_{i=1}^3 (q_i \circ a) \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

根据命题 16.6 的推论, 对任一  $a \in gl(3)$ , 在  $T^*Q = TQ$  中有相应于  $\Gamma_a$  的一个拓展  $T^*(\Gamma_a)$ , 并且可以在  $(TQ, -md\alpha_Q)$  上定义一Poisson 空间结构使

$$\begin{aligned} & i(T^*(\Gamma_a))(-md\alpha_Q) \\ &= m d i(T^*(\Gamma_a)) \alpha_Q \\ &= md \left( \sum_{i=1}^3 (q_i \circ a) q_i \right). \end{aligned}$$

于是我们有一矩射

$$\mu: TQ \rightarrow gl(3)^*,$$

它由下式决定

$$\langle \mu, a \rangle = m \sum_{i=1}^3 (q_i \circ a) q_i, \forall a \in gl(3).$$

如果我们只考虑  $Q$  的正交群的 Lie 代数  $so(3)$ , 即仅限于考虑具有形状

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3 \in R,$$

的  $gl(3)$  的元素的集合, 则我们在  $TQ$  上有一 Poisson  $so(3)$ -空间结构, 而且对任意的  $a \in so(3)$  有

$$\begin{aligned} \langle \mu, a \rangle &= m(a_1(q_2q_3 - q_3q_2) + a_2(q_3q_1 - q_1q_3) \\ &\quad + a_3(q_1q_2 - q_2q_1)). \end{aligned}$$

其中  $a_i (i = 1, 2, 3)$  的系数就是所谓的动力矩分量, 这里的动力矩指的是位置和速度都可由  $TQ$  中的一个点来表示的, 质量为  $m$

的质点关于原点的动力矩。我们所采用的矩射这一术语就来源于这个特殊情形。

例4. 设  $z_i = x_i + ix_{n+i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 是  $C^n$  的自然坐标,  $G = T^*$  是  $U(n)$  中由形如

$$\begin{pmatrix} e^{-ia_1} & & & \\ & e^{-ia_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-ia_n} \end{pmatrix}, \quad a_1, \dots, a_n \in R,$$

的对角形矩阵所构成的子群, 则可以把  $G$  的 Lie 代数等同于具有零括号运算的 Lie 代数  $R^n$ 。对应于  $G$  在  $C^n$  上的自然作用, 在流形  $C^n$  上有一伴随  $\mathfrak{g}$ -空间结构 ( $\mathfrak{g} = R^n$  是  $G$  的 Lie 代数)。若

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{g},$$

则有

$$\Gamma_a = \sum_{j=1}^n a_j \left( x_{n+j} \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} \right).$$

在  $C^n$  上取辛结构

$$\omega = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dx_{n+j}.$$

因为  $\omega$  在  $U(n)$  的作用下不变, 从而它在  $G$  的作用下不变。对任一  $a \in \mathfrak{g}$ , 我们有

$$\begin{aligned} i(\Gamma_a)\omega &= \sum_{j=1}^n a_j (x_j dx_j + x_{n+j} dx_{n+j}) \\ &= \frac{1}{2} d \left( \sum_{j=1}^n a_j |z_j|^2 \right). \end{aligned}$$

因此  $(C^n, \omega)$  是一 Hamilton  $\mathfrak{g}$ -空间。若把  $\mathfrak{g}^*$  也等同于  $R^n$ , 则我们有矩射

$$\mu(z) = \frac{1}{2} (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2), \quad z \in C^n.$$

设

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (x_{n+j} dx_j - x_j dx_{n+j}),$$

则有

$$d\alpha = -\omega,$$

而且

$$i(\Gamma_s)\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i |z_i|^2, \quad \forall a \in g.$$

于是

$$\theta(\Gamma_s)\alpha = di(\Gamma_s)\alpha - i(\Gamma_s)\omega = 0.$$

根据命题 16.6,  $(C^*, \omega)$  是一 Poisson  $g$ -空间.

16.7. 命题. 设  $(M, \omega)$  是一 Hamilton  $g$ -空间,

$$\mu: M \rightarrow g^*$$

是  $(M, \omega)$  的一个矩射, 则对任意的  $x \in M$ ,  $d\mu_x$  的核是辛向量空间  $(T_x M, \omega_x)$  中子空间

$$gx = \{ax: a \in g\}$$

的对于  $\omega_x$  的正交补. 为使  $\mu$  在点  $x$  处是一浸入, 充分必要条件是  $gx = T_x M$ .

证. 根据引理 16.3, 对任意的  $a \in g$  和  $v \in T_x M$ , 有

$$\langle d\mu(v), a \rangle = \omega(ax, v),$$

于是命题成立. 证完.

若  $(M, \omega)$  的一个  $g$ -空间结构是某一辛  $G$ -空间结构的伴随结构, 则空间  $gx$  是点  $x$  的轨道  $G(x)$  在  $x$  处的切空间. 为使  $gx = T_x M$ , 充分与必要条件是点  $x$  的轨道  $G(x)$  是  $M$  的一个开集. 为使点  $x \in M$  是矩射  $\mu$  的一个平稳点, 即要使  $d\mu_x = 0$ , 充分必要条件是  $gx = \{0\}$ . 若  $gx = \{0\}$ , 则点  $x$  在  $G$  的单位连通分支的作用下不动. 于是矩射在任一由  $G$  的不动点所构成的  $M$  的子流形上是常值映射.

16.8 命题. 设  $(M, \omega)$  是一 Hamilton  $g$ -空间,

$$\mu: M \rightarrow g^*$$

是一矩射, 则对任意的  $x \in M$ ,  $d\mu_x$  在  $g^*$  中的象是空间

$$gx = \{a \in g: ax = 0\}$$

根据对偶在  $g^*$  中的正交补. 为使  $\mu$  在点  $x$  处为一子浸入, 充分与

必要条件是  $gx = (0)$ .

证. 同命题 16.7 一样, 利用

$$\langle d\mu(v), a \rangle = \omega(ax, v)$$

便可证明这个命题. 证完.

若一  $\mathfrak{g}$ -空间结构是某一辛  $G$ -空间的附属结构, 则  $gx$  是点  $x$  的迷向子群

$$G_x = \{s \in G: sx = x\}$$

的 Lie 代数. 为使  $gx = (0)$ , 充分与必要条件是  $G_x$  是  $G$  的一个离散子群.

注. 设  $G$  是一紧 Lie 群,  $(M, \omega)$  是一连通的 Hamilton  $G$ -空间, 则  $M$  所有的使  $G$  的轨道  $G(x)$  具有极大维数的点  $x$  所构成的集合是  $M$  的一个稠开子集, 设为  $U$ .  $(M, \omega)$  的任一矩射在  $U$  上是常秩的, 其秩就等于  $U$  中点的轨道的维数. 若  $G$  还是可换的, 并且在  $M$  上的作用有效, 则对任一  $x \in U$  有

$$\dim G(x) = \dim G,$$

从而  $(M, \omega)$  的矩射在  $U$  上的限制是子浸入 (比较例 1 和例 4).

如果  $G$  是一连通的紧交换 Lie 群 (即一环面), 而且  $(M, \omega)$  是一连通的紧 Hamilton  $G$ -空间, 则  $M$  的  $G$  不动点集  $M^G$  只有有限个连通分支, 设它们是

$$K_1, \dots, K_r.$$

若  $\mu$  是  $(M, \omega)$  的一个矩射, 则它在每一  $K_i$  上是常值映射. 可以证明 (参看文献 [3], [8], [11]), 这时  $\mu$  的象是点集

$$\mu(K_i), i = 1, \dots, r,$$

在  $\mathfrak{g}^*$  中的凸包络.

## § 17. 矩射的等价不变性

设  $G$  是一 Lie 群,  $\mathfrak{g}$  是  $G$  的 Lie 代数, 设  $Ad$  是  $G$  通常的在  $\mathfrak{g}$  上的伴随表示, 即

$$Ad(s)a = sas^{-1}, s \in G, a \in \mathfrak{g}.$$

设  $ad$  是  $\mathfrak{g}$  在  $\mathfrak{g}$  上的伴随表示, 即

$$ad(a)b = [a, b], \quad a, b \in \mathfrak{g}.$$

我们定义  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  中的一个余伴随表示  $Ad^*$  如下:

$$Ad^*(s) = {}^t Ad(s^{-1}), \quad s \in G.$$

因为  $\mathfrak{g}$  的括号是用  $G$  上的右不变向量场的括号来定义的, 所以有

$$Ad(\exp a) = \exp(-ad(a)), \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

其中  $\exp$  表示  $G$  的指数映射。于是

$$Ad^*(\exp a) = \exp'(-ad(a)), \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

设  $(M, \omega)$  是一辛  $G$ -空间。若伴随的  $\mathfrak{g}$ -空间结构是 Hamilton (或 Poisson) 的, 则我们称  $(M, \omega)$  为 Hamilton (或 Poisson)  $G$ -空间。

若  $M$  是一  $G$ -空间, 对任一  $s \in G$ , 我们把  $M$  的微分自同胚

$$x \mapsto sx, \quad x \in M,$$

记为  $s_M$ 。

17.1. 引理. 设  $(M, \omega)$  是一 Hamilton  $G$ -空间且设

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是一矩射, 则对任意的  $s \in G$ , 映射

$$\mu \circ s_M - Ad^*(s) \circ \mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是一局部常值映射。

证. 对任意的  $a \in \mathfrak{g}$  有

$$\begin{aligned} d\langle Ad^*(s) \circ \mu, a \rangle &= \langle Ad^*(s)d\mu, a \rangle \\ &= \langle d\mu, Ad(s^{-1})a \rangle. \end{aligned}$$

又根据引理 16.3 的 (i), 对任意的  $x \in M$  和  $v \in T_x M$  我们有

$$\begin{aligned} &\langle d\mu(v), Ad(s^{-1})a \rangle \\ &= \omega(s^{-1}asx, v) = \omega(asx, sv) \\ &= \langle d\mu(sv), a \rangle = (d\langle \mu \circ s_M, a \rangle)(v). \end{aligned}$$

于是对任意的  $a \in \mathfrak{g}$  有

$$d\langle Ad^*(s) \circ \mu, a \rangle = \langle d(\mu \circ s_M), a \rangle,$$

因此映射

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s) \circ \mu$$

在局部上是常值的。证完。

17.2. 命题. 设  $(M, \omega)$  是一连通的 Hamilton  $G$ -空间,

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是  $(M, \omega)$  的一个矩射, 则

(i) 对任意的  $s \in G$ ,

$$\varphi_\mu(s) = \mu(sx) - Ad^*(s)\mu(x)$$

是  $\mathfrak{g}^*$  中不依赖于点  $x \in M$  的一个元素。

(ii) 对任意的  $s, t \in G$  有

$$\varphi_\mu(st) = \varphi_\mu(s) + Ad^*(s)\varphi_\mu(t).$$

(iii) 对任意的  $a, b \in \mathfrak{g}$  有

$$c_\mu(a, b) = \langle d\varphi_\mu(a), b \rangle,$$

$c_\mu$  的定义见 §16.

证. 因为  $M$  是连通的, 利用引理 17.1 便可证明 (i). 根据 (i) 得

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(st) &= \mu(stx) - Ad^*(st)\mu(x) \\ &\rightsquigarrow \varphi_\mu(s) + Ad^*(s)\mu(tx) - Ad^*(s)Ad^*(t)\mu(x) \\ &= \varphi_\mu(s) + Ad^*(s)\varphi_\mu(t), \quad \forall s, t \in G, \end{aligned}$$

于是 (ii) 成立。微分定义  $\varphi_\mu$  的等式得

$$d\mu(ax) = 'ad(a)\mu(x) + d\varphi_\mu(a), \quad x \in M, a \in \mathfrak{g}.$$

从而对任意的  $x \in M$  和  $a, b \in \mathfrak{g}$  有

$$\langle d\mu(ax), b \rangle = \langle \mu(x), [a, b] \rangle + \langle d\varphi_\mu(a), b \rangle.$$

但是根据引理 16.3 有

$$\langle d\mu(ax), b \rangle = \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\}(x),$$

因此

$$\begin{aligned} c_\mu(a, b) &= \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} - \langle \mu, [a, b] \rangle \\ &= \langle d\varphi_\mu(a), b \rangle, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

证完。

推论. 从  $G \times \mathfrak{g}^*$  到  $\mathfrak{g}^*$  内的映射

$$(s, \xi) \mapsto s\xi = Ad^*(s)\xi + \varphi_\mu(s), \quad s \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

是 Lie 群  $G$  在向量空间  $\mathfrak{g}^*$  上的一个仿射作用.

对于  $\mathfrak{g}^*$  的这一  $G$ -空间结构, 矩射

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是  $G$ -等价不变的, 即

$$\mu(sx) = s\mu(x) = Ad^*(s)\mu(x) + \varphi_\mu(s), \quad \forall s \in G, x \in M.$$

证. 设  $e$  是  $G$  的单位元, 则由定义有

$$\begin{aligned} (e, \xi) &\mapsto e\xi = Ad^*(e)\xi + \varphi_\mu(e) \\ &= \xi + \mu(x) - \mu(x) = \xi, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \end{aligned}$$

又由等式 (ii) 有

$$\begin{aligned} (s_1s_2)\xi &= Ad^*(s_1s_2)\xi + \varphi_\mu(s_1s_2) \\ &= Ad^*(s_1)Ad^*(s_2)\xi + \varphi_\mu(s_1) + Ad^*(s_1)\varphi_\mu(s_2) \\ &= Ad^*(s_1)(Ad^*(s_2)\xi + \varphi_\mu(s_2)) + \varphi_\mu(s_1) \\ &= s_1(s_2\xi), \quad \forall s_1, s_2 \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*. \end{aligned}$$

所以推论的前半部分成立. 而后半部分由  $\varphi_\mu$  的定义便得. 证完.

注. 命题 17.2 表明  $\varphi_\mu$  是  $G$  上取值于  $\mathfrak{g}^*$  中的一个 1-闭上链. 这种用矩射来定义的闭上链是一类特殊的闭上链(参看 §20). 一般说来,  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  上的一个作用即使其线性部分是  $Ad^*$ , 也不一定能由某一矩射得到.

17.3. 命题. 设  $(M, \omega)$  是一连通的 Hamilton  $G$ -空间, 则  $(M, \omega)$  是一 Poisson 空间的一个充分条件是存在  $(M, \omega)$  的一个矩射  $\mu$  使得对任意的  $s \in G$  都有

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s) \circ \mu.$$

若  $G$  是连通的, 则该条件也是必要的.

证. 事实上, 若存在  $M$  的矩射  $\mu$  使

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s)\mu, \quad \forall s \in G,$$

则对任一  $s \in G$  有

$$\varphi_\mu(s) = 0.$$

于是根据命题 17.2 的 (iii) 得  $c_\mu = 0$ . 所以  $(M, \omega)$  是一 Poisson  $G$ -空间. 反之, 若  $(M, \omega)$  是一 Poisson  $G$ -空间, 则存在  $(M, \omega)$  的一个矩射  $\mu$  使  $c_\mu = 0$ . 根据命题 17.2 的 (iii) 得

$$d\varphi_\mu(a) = 0, \forall a \in \mathfrak{g}.$$

又由命题 17.2 的 (ii) 得

$$d\varphi_\mu(sa) = Ad^*(s)d\varphi_\mu(a) = 0$$

对任意的  $s \in G$  和  $a \in \mathfrak{g}$  成立, 所以  $d\varphi_\mu = 0$ . 若  $G$  连通, 则映射  $\varphi_\mu$  是常值的. 但根据命题 17.2 的 (ii), 若  $e$  是  $G$  的单位元, 则

$$\varphi_\mu(e) = \varphi_\mu(ee) = \varphi_\mu(e) + Ad^*(e)\varphi_\mu(e) = 2\varphi_\mu(e).$$

所以  $\varphi_\mu(e) = 0$ ,  $\varphi_\mu = 0$ . 所以

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s) \circ \mu.$$

证完.

注 1. 若  $G$  是一交换 Lie 群, 则对任意的  $s \in G$  都有

$$Ad^*(s) = id.$$

因此, 对任一矩射  $\mu$ ,  $\varphi_\mu$  都是从  $G$  到加法群  $\mathfrak{g}^*$  内的可微同态. 若  $G$  还是紧连通的 (即  $G$  是一环面), 则  $\varphi_\mu = 0$  且

$$\mu(sx) = \mu(x), \forall s \in G, x \in M.$$

因为矩射在每一  $G$  的轨道上是常值的, 对任意的  $x \in M$ , 有

$$gx = \{ax: a \in \mathfrak{g}\} \subset \text{Ker } d\mu_x.$$

根据命题 16.7 有

$$\text{Ker } d\mu_x = (gx)^\perp.$$

所以  $G$  的轨道是迷向子流形.

注 2. 若  $(M, \omega)$  是一齐性 Hamilton  $G$ -空间, 也就是说, 对  $M$  的任意的两点  $x_1, x_2$ , 存在  $G$  的一个元素  $s$  使  $sx_1 = x_2$  ( $G$  在  $M$  上可递),  $\mu$  是  $M$  的一个矩射, 则根据命题 16.7,  $\mu$  是一浸入. 由命题 17.2 的推论可知, 这时映射

$$\mu: M \rightarrow \mu(M)$$

是  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  上的仿射作用 (由  $\mu$  定义) 的某一轨道的一个覆盖 (revêtement).

注 3. 有关本节的内容请读者参看文献 [17], [23].

## 第五章 Poisson 流形

### § 18. Poisson 流形的结构

Schouten-Nijenhuis 括号. 设  $M$  是一流形, 记  $M$  上的  $p$  阶反对称反变可微张量场空间为  $D_p(M)$ . 于是每一空间  $D_p(M)$  都是向量丛  $\wedge^p TM$  的可微截面空间. 我们有

$$D_0(M) = C^\infty(M).$$

在外积  $\wedge$  所定义的运算下,

$$D_*(M) = \bigoplus_{p \geq 0} D_p(M)$$

是一  $Z$ -分级结合代数. 对任意的  $u \in D_p(M)$  和  $v \in D_q(M)$ , 外积  $\wedge$  满足下面的  $Z_2$ -交换律:

$$u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u.$$

我们在  $D_*(M)$  上定义一个括号  $[,]$ , 即双线性映射

$$[,]: D_*(M) \times D_*(M) \rightarrow D_*(M),$$

$$[,]: (u, v) \mapsto [u, v], \quad u, v \in D_*(M),$$

要求它满足下列条件:

$$(1) \quad [f, g] = 0,$$

$$(2) \quad [f, X_1 \wedge \cdots \wedge X_p]$$

$$= (-1)^p [X_1 \wedge \cdots \wedge X_p, f]$$

$$= \sum_{i=1}^p (-1)^i (X_i \cdot f) X_1 \wedge \cdots \hat{X}_i \cdots \wedge X_p,$$

$$(3) \quad [X_1 \wedge \cdots \wedge X_p, Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_q]$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \hat{X}_i \cdots \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge \cdots \hat{Y}_j \cdots \wedge Y_q.$$

其中  $f, g \in D_0(M) = C^\infty(M)$  和

$$X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q \in D_1(M)$$

都是任意的, 符号  $\mathfrak{X}$  表示把  $X$  去掉。这样定义的括号是唯一的, 我们把它称为 Schouten-Nijenhuis 括号(参看文献[20]), 它限制在

$$D_1(M) \times D_1(M)$$

上与通常的向量场括号一样。若  $X$  是一向量场且若  $f \in D_0(M)$ , 则

$$[X, f] = Xf.$$

对任意的整数  $p, q \geq 0$ , 若  $u \in D_p(M)$  且  $v \in D_q(M)$ , 则有

$$[u, v] \in D_{p+q-1}(M),$$

而且

$$[u, v] = (-1)^{(p-1)(q-1)}[v, u].$$

对任意的  $u \in D_p(M)$ , 映射

$$adu: v \mapsto [u, v], v \in D_*(M),$$

是分级结合代数  $D_*(M)$  的一个  $p-1$  阶的  $Z_*$ -导子, 即对任意的  $v \in D_q(M)$  和  $w \in D_s(M)$  有

$$[u, v \wedge w] = [u, v] \wedge w + (-1)^{(p-1)q} v \wedge [u, w].$$

Schouten-Nijenhuis 括号满足一带变号的 Jacobi 恒等式

$$[u, [v, w]] = [[u, v], w] + (-1)^{(p-1)(q-1)}[v, [u, w]],$$

$$\forall u \in D_p(M), v \in D_q(M), w \in D_s(M).$$

把  $D_*(M)$  的分级移动一位, 即把  $D_p(M)$  中的元素定义为  $p-1$  级元素, 则在  $D_*(M)$  上得到一 Lie 超代数结构, 它是一  $Z$ -分级代数(参看定义 7.2)。

如果  $u \in D_p(M)$  且  $f \in D_0(M)$ , 则

$$-[f, u] = i(df)u.$$

若  $p > 0$ , 而且对使得  $df_1, \dots, df_n$  能生成 1-形式模  $\mathcal{Q}^1(M)$  的一组

$$f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M),$$

有

$$[f_i, u] = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

则必有  $u = 0$ .

在以后的讨论中,  $\omega$  恒表示  $D_1(M)$  中的一个元素, 若无特别声明, 总假设  $\omega$  是取定的.

根据 Schouten-Nijenhuis 括号的性质, 对任意的  $f \in C^\infty(M)$  有

$$H_f := [f, \omega] = [\omega, f],$$

于是映射

$$H: f \mapsto H_f, \quad f \in C^\infty(M),$$

是从  $C^\infty(M)$  到向量场空间  $D_1(M)$  内的一个线性映射. 又对任意的  $X \in D_1(M)$  和  $f \in C^\infty(M)$  有

$$(18.1) \quad [X, H_f] = [X, [f, \omega]] = [Xf, \omega] + [f, [X, \omega]],$$

从而有

$$(18.2) \quad [X, H_f] = H_{Xf} + [f, [X, \omega]].$$

定义一个双线性映射

$$\{, \}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

为

$$\{f, g\} = H_f g \quad (= [[\omega, f], g]), \quad \forall f, g \in C^\infty(M),$$

则对任意的  $f, g, h \in C^\infty(M)$  有

$$(18.3) \quad \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

因为对任意的  $f, g \in C^\infty(M)$  有

$$[f, g] = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} \{f, g\} + \{g, f\} &= [H_f, g] - [f, H_g] \\ &= [[\omega, f], g] - [f, [\omega, g]] \\ &= [\omega, [f, g]] = 0. \end{aligned}$$

所以得

$$(18.4) \quad \{f, g\} = -\{g, f\}.$$

若  $X, Y$  是  $M$  上的两个向量场, 则对任意的  $f \in C^\infty(M)$  和  $\alpha \in \Omega^k(M)$  有

$$\begin{aligned}\langle \alpha, [f, X \wedge Y] \rangle &= \langle \alpha, [X \wedge Y, f] \rangle \\ &= \langle \alpha, (Y_f)X - (X_f)Y \rangle \\ &= \langle \alpha \wedge df, X \wedge Y \rangle.\end{aligned}$$

所以对任意的  $f \in C^\infty(M)$  和  $\alpha \in \Omega^1(M)$  有

$$(18.5) \quad \langle \alpha, [f, \omega] \rangle = \langle \alpha \wedge df, \omega \rangle.$$

因此, 对任意的  $f, g \in C^\infty(M)$  有

$$\{f, g\} = [f, \omega]g = \langle dg, [f, \omega] \rangle = \langle dg \wedge df, \omega \rangle,$$

即

$$(18.6) \quad \{f, g\} = \langle dg \wedge df, \omega \rangle.$$

设  $U$  是  $M$  的坐标邻域,  $x_1, \dots, x_n$  是  $U$  上的坐标。设  $\omega$  在  $U$  上的坐标表达式是

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad c_{ii} = -c_{ii},$$

则对任意的  $f, g \in C^\infty(M)$ , 在  $U$  上有

$$\begin{aligned}H_f &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ \{f, g\} &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},\end{aligned}$$

并且

$$c_{ij} = \{x_i, x_j\}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

18.7. 引理. 下列条件是等价的:

(i) 对任意的  $f, g, h \in C^\infty(M)$ ,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

(ii) 对任意的  $f, g \in C^\infty(M)$ ,

$$H_{(f,g)} = [H_f, H_g].$$

(iii) 对任意的  $f \in C^\infty(M)$ ,

$$[H_f, \omega] = 0.$$

(iv)  $[\omega, \omega] = 0$ .

证. 直接计算得

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}$$

$$\begin{aligned} &= H_f(H_g h) + H_g(-H_f h) - H_{f,g} h \\ &= [H_f, H_g] h - H_{f,g} h. \end{aligned}$$

因此(i)和(ii)等价。

若  $f \in C^\infty(M)$ , 则

$$[H_f, \omega] \in D_2(M).$$

若对任意的  $g \in C^\infty(M)$  有

$$[g, [H_f, \omega]] = 0,$$

则必有  $[H_f, \omega] = 0$ . 利用

$$\begin{aligned} &[H_f, H_g] - H_{f,g} \\ &= [H_f, [g, \omega]] - [H_f g, \omega] \\ &= [g, [H_f, \omega]], \end{aligned}$$

便知(ii)和(iii)等价。最后,根据等式

$$\begin{aligned} [f, [\omega, \omega]] &= [[f, \omega], \omega] - [\omega, [f, \omega]] \\ &= 2 [[f, \omega], \omega] = 2[H_f, \omega], \end{aligned}$$

得(iii)和(iv)等价。证完。

注。设

$$\mathcal{B} \subset C^\infty(M)$$

是一函数组,  $\mathcal{B}$  中所有函数的微分生成模  $\Omega^*(M)$  (例如, 由  $M$  的坐标函数所构成的函数组), 则引理 18.7 中的(i), (ii) 和 (iii) 只要求对  $\mathcal{B}$  中的函数  $f, g, h$  成立。若  $[\omega, \omega] = 0$ , 则根据(18.4) 和引理 18.7, 括号  $\{\cdot, \cdot\}$  在  $C^\infty(M)$  上定义了一 Lie 代数结构。若  $M$  是一辛流形, 即  $\omega = \omega$ , 等式(18.3) 表明, 这一括号对  $C^\infty(M)$  的函数积的作用和 Poisson 括号一样。

18.8. 定义。设  $M$  是一流形,  $\omega$  是  $M$  上的一个反对称反变 2 阶张量, 若  $\omega$  满足

$$[\omega, \omega] = 0,$$

则称  $\omega$  为  $M$  上的一个 Poisson 结构。若  $\omega$  是  $M$  上的一个 Poisson 结构, 则称  $(M, \omega)$  为 Poisson 流形。

流形  $M$  上任一 Poisson 结构  $\omega$  都在  $C^\infty(M)$  中定义了一个括号  $\{\cdot, \cdot\}_\omega$ 。设  $(M_1, \omega_1)$  和  $(M_2, \omega_2)$  是两个 Poisson 流形,

$$\varphi: M_1 \rightarrow M_2$$

是一可微映射。若对任意的  $f, g \in C^\infty(M_1)$  都有

$$\varphi^*\{f, g\}_{\omega_1} = \{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\}_{\omega_2},$$

则  $\varphi$  称为从  $(M_1, \omega_1)$  到  $(M_2, \omega_2)$  内的一个同态。

注。若  $\omega$  是流形  $M$  上的一个 Poisson 结构，则对任意的  $f \in C^\infty(M)$ ，根据引理 18.7 有

$$[H_f, \omega] = 0,$$

这个等式说明， $M$  上由向量场  $H_f$  所生成的微分同胚流保持张量  $\omega$  不变。

## § 19. Poisson 流形的叶子

设  $\omega$  是流形  $M$  上的一个 Poisson 结构。对任意的  $x \in M$ ，定义线性映射

$$\gamma_x: T_x^*M \rightarrow T_xM,$$

使对任意的  $\xi, \eta \in T_x^*M$  有

$$\langle \xi, \gamma_x(\eta) \rangle = \langle \xi \wedge \eta, \omega_x \rangle.$$

把  $\gamma_x$  的象记为  $L_x$ ，则对任一  $x \in M$ ， $L_x$  是  $T_xM$  的一个维数等于  $\omega_x$  的秩的向量子空间。 $L_x$  的维数一般说来依赖于点  $x$ ，但总是偶数。我们保留 §18 中的记号。

19.1. 引理。对任意的  $f \in C^\infty(M)$  和  $x \in M$ ，我们有

$$H_f(x) \in L_x.$$

证。事实上，根据 (18.6)，对任意的  $g \in C^\infty(M)$  有

$$\begin{aligned} (H_f g)(x) &= \{f, g\}(x) = \langle dg \wedge df, \omega \rangle(x) \\ &= \langle dg, \gamma_x(df_x) \rangle, \end{aligned}$$

所以

$$H_f(x) = \gamma_x(df_x) \in L_x.$$

证完。

若  $\omega$  在  $M$  上秩恒等于  $2p$ ，则对任意的  $x \in M$ ，向量空间  $L_x$  是由所有  $H_f(f \in C^\infty(M))$  所生成的  $TM$  的一个可微子丛的纤维。

具体来说,若

$$f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$$

在点  $x \in M$  的某一邻域上是不相关的,则对该邻域里的任意一点  $y, L_y$  都是由

$$H_{f_i(y)}, i = 1, \dots, n,$$

所生成的  $T_x M$  的向量子空间. 因为对任意的  $f, g \in C^\infty(M)$ , 根据引理 18.7 有

$$[H_f, H_g] = H_{\{f, g\}}.$$

所以该向量子丛,记为  $L$ , 是  $TM$  的一个可积子丛. 因此,  $M$  是  $L$  的积分叶子的并集,即  $M$  是这样的子流形  $F$  的并集,这些  $F$  满足

$$T_x F = L_x, \forall x \in F,$$

并且在包含关系下,它们在  $M$  的所有满足这个等式的子流形中是极大的(参看文献[4]).

类似地,在  $\omega$  不是常秩的情形,我们也把  $M$  的任一满足

$$T_x F = L_x, \forall x \in F,$$

的极大子流形称为 Poisson 流形  $(M, \omega)$  的一片叶子.

19.2. 命题. 设  $F$  是 Poisson 流形  $(M, \omega)$  的一片叶子, 则存在唯一的一个 2-形式  $\omega_F \in \Omega^2(F)$  使对任意的  $f, g \in C^\infty(M)$  有

$$\omega_F(H_f|_F, H_g|_F) = \{g, f\}|_F.$$

又  $\omega_F$  是  $F$  上的一个辛结构, 对任意的  $f \in C^\infty(M)$ ,  $H_f|_F$  是对应于函数  $f|_F$  的  $F$  上的 Hamilton 向量场.

证. 对任意的  $x \in F$  和任意的  $\xi, \eta \in T_x^* M$ , 由  $\gamma_x$  的定义我们有

$$\langle \xi \wedge \eta, \omega_x \rangle = \langle \xi, \gamma_x(\eta) \rangle = -\langle \eta, \gamma_x(\xi) \rangle.$$

因此,当  $\xi$  和  $\eta$  中至少有一个属于映射

$$\gamma_x: T_x^* M \rightarrow T_x M$$

的核时,

$$\langle \xi \wedge \eta, \omega_x \rangle = 0.$$

因为

$$L_x = \gamma_x \text{ 的象},$$

所以我们可以在  $L_x$  上定义一个反对称双线性型  $\omega_x$  如下：对任意的  $u, v \in L_x$ , 设

$$u = \gamma_x(\xi), v = \gamma_x(\eta), \xi, \eta \in T_x^*M,$$

则  $\omega_x$  在  $(u, v)$  的值定义为

$$\omega_x(\gamma_x(\xi), \gamma_x(\eta)) = \langle \xi \wedge \eta, \omega_x \rangle.$$

显然该值与  $\xi, \eta$  的选取无关, 只依赖于

$$u = \gamma_x(\xi) \text{ 和 } v = \gamma_x(\eta).$$

因为对任意的  $x \in F$  都有

$$L_x = T_x F,$$

所以在  $F$  上存在唯一的一个微分 2-形式  $\omega_F$  使对任意的  $x \in F$  有

$$(\omega_F)_x = \omega_x.$$

事实上, 根据 (18.6), 对任意的  $f, g \in C^\infty(M)$ . 我们有

$$\omega_F(H_f|_F, H_g|_F) = \langle df \wedge dg, \omega \rangle|_F = \{g, f\}|_F.$$

因为  $F$  上的向量场模由形如  $H_f|_F (f \in C^\infty(M))$  的向量场所生成, 所以上式唯一地确定了  $\omega_F$ . 而且该等式表明  $\omega_F$  是一微分形式, 即

$$\omega_F \in \Omega^2(F).$$

对任意的  $x \in M$ , 根据  $\gamma_x$  的定义,  $\text{Ker } \gamma_x$  是  $T_x^*M$  上的双线性型

$$b: (\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta, \omega_x \rangle, \xi, \eta \in T_x^*M,$$

的核. 因此  $\omega_F$  的秩在  $F$  的任一点  $x$  处都等于  $\dim F = \dim L_x$ .

下面我们证明  $\omega_F$  是一闭微分形式. 任取  $f, g, h \in C^\infty(M)$ . 为简化符号, 把向量场  $H_f, H_g, H_h$  在  $F$  上的限制记为  $\underline{H}_f, \underline{H}_g, \underline{H}_h$ . 于是有

$$\begin{aligned} & (\theta(\underline{H}_f)\omega_F)(\underline{H}_g, \underline{H}_h) \\ &= \underline{H}_f\omega_F(\underline{H}_g, \underline{H}_h) - \omega_F([\underline{H}_f, \underline{H}_g], \underline{H}_h) - \omega_F(\underline{H}_g, [\underline{H}_f, \underline{H}_h]) \\ &= \{f, \{h, g\}\} - \{h, \{f, g\}\} - \{\{f, h\}, g\} = 0. \end{aligned}$$

所以对任意的  $f \in C^\infty(M)$  有

$$\theta(\underline{H}_f)\omega_F = 0.$$

另一方面, 对任意的  $f, g \in C^\infty(M)$  我们有

$$(i(\underline{H}_f)\omega_F)(\underline{H}_g) = \{g, f\}|_F = (df(H_g))|_F.$$

于是对任意的  $f \in C^\infty(M)$  有

$$(19.3) \quad i(H_f)\omega_F = (df)|_F = d(f|_F).$$

因此

$$i(H_f)d\omega_F = \theta(H_f)\omega_F = 0, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

因为  $H_f (f \in C^\infty(M))$  生成  $F$  的向量场模, 所以上式表明

$$d\omega_F = 0,$$

即  $\omega_F$  是闭的. 于是我们证明了  $\omega_F$  是叶子  $F$  上的一个辛结构. 又等式 (19.3) 说明  $H_f|_F$  是  $F$  上相应于函数  $f|_F$  的 Hamilton 向量场. 证完.

**推论.** 对任意的  $f, g \in C^\infty(M)$  有

$$\{f, g\}|_F = \{f|_F, g|_F\}_F,$$

其中等式左边的括号是  $M$  上由  $\omega$  所定义的 Poisson 括号, 而右边的括号是叶子  $F$  上由辛结构  $\omega_F$  所定义的 Poisson 括号.

**证.** 事实上,

$$\begin{aligned} \{f, g\}|_F &= \omega_F(H_f|_F, H_g|_F) \\ &= \omega_F(H_f|_F, H_g|_F) \\ &= \{f|_F, g|_F\}_F. \end{aligned}$$

证完.

若  $\omega$  是流形  $M$  上秩恒等于  $\dim M$  的 Poisson 结构, 则

$$L = TM,$$

而且  $M$  是 Poisson 流形  $(M, \omega)$  的唯一的一片叶子, 从而  $\omega_M$  是  $M$  上的一个辛结构. 由这一辛结构所定义的括号运算同由 Poisson 结构定义的括号运算是一样的. 反之, 若  $\omega$  是流形  $M$  上的一个辛结构, 则可利用它定义从  $TM$  到  $T^*M$  上的一个同构:

$$\varphi: v \mapsto i(v)\omega, \quad v \in TM.$$

从而导出从  $D_\omega(M)$  到  $\Omega^2(M)$  上的一个同构. 在这一同构下,  $\omega$  的逆象是  $M$  上的一个秩恒等于  $\dim M$  的 Poisson 结构  $\omega$ ,  $\omega$  在叶子  $M$  上导出的辛结构与  $\omega$  重合.

所以, 辛结构是 Poisson 结构的特殊情形. 命题 19.2 的推论表明, 对 Poisson 流形  $(M, \omega)$  的任一片叶子  $F$ , 恒等内射

$$i: F \rightarrow M$$

是一 Poisson 流形同态 (在  $F$  上取由辛结构  $\omega_F$  所定义的 Poisson 结构).

可以证明 (参看文献[15]), 任一 Poisson 流形都是它的积分叶子的并集.

例. 设  $X, Y$  是流形  $M$  上的两个向量场, 并令

$$\omega = X \wedge Y \in D_1(M).$$

于是

$$\begin{aligned} [\omega, \omega] &= [X \wedge Y, X \wedge Y] = X \wedge [Y, X] \wedge Y + Y \wedge [X, Y] \wedge X \\ &= 2[X, Y] \wedge X \wedge Y. \end{aligned}$$

若  $[X, Y] = 0$ , 则  $(M, \omega)$  是一 Poisson 流形. 此时, 对任意的  $f, g \in C^\infty(M)$  有

$$\{f, g\} = (Yf)(Xg) - (Xf)(Yg),$$

而且

$$H_f = (Yf)X - (Xf)Y.$$

在一般情况下, 在  $M$  上存在两种类型的叶子: 退化为一点的叶子和 2 维叶子. 第一种类型的叶子是  $M$  的使

$$(X \wedge Y)_x = 0$$

的点  $x$ , 第二种类型的叶子构成了  $M$  的开集

$$U = \{x \in M : (X \wedge Y)_x \neq 0\}$$

上的一个叶结构.

## § 20. Lie 代数的对偶上的 Poisson 结构

在这节中, 我们记  $\mathfrak{g}$  为一  $n$  维实 Lie 代数, 记  $a_1, \dots, a_n$  为  $\mathfrak{g}$  的一组基. 我们把  $\mathfrak{g}$  等同于它自身的两次对偶  $(\mathfrak{g}^*)^*$ , 于是可把空间  $\mathfrak{g}$  看成  $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  的一个子空间, 而把  $a_1, \dots, a_n$  看作  $\mathfrak{g}^*$  上的坐标. 令

$$(20.1) \quad \omega = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n [a_i, a_j] \frac{\partial}{\partial a_i} \wedge \frac{\partial}{\partial a_j},$$

为了避免符号混淆, 我们用  $[\cdot, \cdot]_s$  表示  $D_s(\mathfrak{g}^*)$  中的 Schouten-

Nijenhuis 括号, 而  $\mathfrak{g}$  自身的括号仍然用  $[,]$  表示.

20.2. 引理. 由式(20.1)定义的张量  $\omega$  是  $\mathfrak{g}^*$  上的一个 Poisson 结构, 而且, 对由  $\omega$  定义的  $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  中的 Poisson 括号  $\{, \}$  和任意的  $b, c \in \mathfrak{g}$  有

$$\{b, c\} = [[\omega, b]_s, c]_s = [b, c].$$

证. 设

$$\xi_1, \dots, \xi_n$$

是  $\mathfrak{g}^*$  的一组对偶于  $a_1, \dots, a_n$  的基, 则对任意的  $b \in \mathfrak{g}$  有

$$\frac{\partial}{\partial a_i} b = \langle \xi_i, b \rangle, \quad i = 1, \dots, n,$$

于是有

$$\begin{aligned} & [\omega, b]_s \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n ([a_i, a_j] \langle \xi_i, b \rangle \frac{\partial}{\partial a_i} - [a_i, a_j] \langle \xi_i, b \rangle \frac{\partial}{\partial a_j}) \\ &= \sum_{i=1}^n [b, a_i] \frac{\partial}{\partial a_i}. \end{aligned}$$

因此对任意的  $b, c \in \mathfrak{g}$ ,

$$\{b, c\} = [[\omega, b]_s, c]_s = [b, c].$$

再根据  $\mathfrak{g}$  中的 Jacobi 恒等式可推出  $\{, \}$  也满足 Jacobi 恒等式, 由引理 18.7 和它下面的注可知

$$[\omega, \omega]_s = 0,$$

所以  $\omega$  是  $\mathfrak{g}^*$  的一个 Poisson 结构. 证完.

我们可以用下面的条件来刻画张量  $\omega$  (比较 (18.6)): 对任意的  $b, c \in \mathfrak{g}$  有

$$\langle db \wedge dc, \omega \rangle = [c, b].$$

所以  $\omega$  不依赖于基  $a_1, \dots, a_n$  的选择, 我们称它为  $\mathfrak{g}^*$  上的标准 Poisson 结构.

设  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  是两个 Lie 代数且设

$$\phi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$$

是一 Lie 代数同态. 如果我们在  $\mathfrak{g}_1^*$  和  $\mathfrak{g}_2^*$  上同取标准 Poisson 结

构，则由

$$\langle \phi(a), \xi \rangle = \langle a, \phi^*(\xi) \rangle, \quad \forall a \in g_i, \xi \in g_i^*,$$

定义的映射

$$\phi^*: g_i^* \rightarrow g_i^*$$

是一 Poisson 流形同态。特别，若  $g$  是 Lie 群  $G$  的 Lie 代数，则  $g^*$  上的标准 Poisson 结构在  $G$  的余伴随表示下不变。

20.3. 命题。设  $g$  是 Lie 群  $G$  的 Lie 代数并设  $G$  连通，则  $G$  的余伴随表示的全部轨道就是  $g^*$  的标准 Poisson 结构的全部叶子。

证。对任意的  $a, b \in g$  和  $\xi \in g^*$ ，我们有

$$\begin{aligned} & b(Ad^*(\exp(ta))\xi) \\ &= \langle \exp'(ad(ta))\xi, b \rangle \\ &= \langle \xi, b \rangle + t\langle \xi, [a, b] \rangle + t^2(\dots). \end{aligned}$$

对  $a \in g$ ，设  $\Gamma_a$  是  $g^*$  上相应于  $a$  的，在  $G$  的余伴随作用下的向量场

$$\Gamma_a: \xi \mapsto a\xi, \quad \xi \in g^*,$$

则对任意的  $b \in g$  有（把  $b$  看作  $g^*$  上的函数）

$$\Gamma_a b = [a, b].$$

但由引理 20.2 有

$$[a, b] = \{a, b\} = H_a b.$$

因此，对任一  $a \in g$  有

$$\Gamma_a = H_a.$$

对任意的  $\xi \in g^*$ ，由形如

$$H_f(\xi), f \in C^\infty(g^*),$$

的向量构成的线性空间  $L_\xi$  与所有向量

$$\Gamma_a(\xi), a \in g,$$

构成的线性空间相重合，即重合于轨道  $Ad^*(G)\xi$  在点  $\xi$  的切空间。于是推出标准 Poisson 结构的任一片叶子在  $Ad^*(G)$  的作用下不变，而且对  $Ad^*(G)$  的任一轨道  $\theta$  和任意的  $\xi \in \theta$  有

$$T_\xi \theta = L_\xi.$$

由于  $G$  是连通的，所以  $Ad^*(G)$  的所有轨道便是所有的叶子。证完。

**推论.** 设  $G$  是一连通 Lie 群, 则  $G$  的余伴随表示的任一轨道  $F$  都具有唯一的一个辛结构  $\omega_F$  使恒等浸入

$$i: F \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

对于  $\mathfrak{g}^*$  上的标准 Poisson 结构是一 Poisson 流形同态, 又  $\omega_F$  是  $G$  不变辛结构.

证. 直接应用命题 19.2 和它的推论便可.

证完.

在以下的讨论中, 我们把上面推论里的辛结构  $\omega_F$  称为轨道  $F$  上的标准辛结构.

**20.4. 命题.** 设  $G$  是一连通 Lie 群且设  $F$  是  $G$  的余伴随表示的一个轨道. 设  $\omega_F$  是  $F$  上的标准辛结构, 则辛  $G$ -空间  $(F, \omega_F)$  是一 Poisson  $G$ -空间, 而且恒等浸入

$$\mu: F \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是  $(F, \omega_F)$  的一个矩射.

证. 事实上, 根据命题 19.2, 对任意的  $a \in \mathfrak{g}$ , 我们有

$$H_{(\mu, \omega)} = H_a|_F = H_a|_F = \Gamma_a|_F.$$

于是对任意的  $\xi \in F$ ,

$$H_{(\mu, \omega)}(\xi) = \Gamma_a(\xi).$$

这说明  $(F, \omega_F)$  是一 Hamilton  $G$ -空间且  $\mu$  是一矩射. 又显然  $\mu$  是  $G$ -等价不变的, 所以由命题 17.3 得  $(F, \omega_F)$  是一 Poisson  $G$ -空间. 证完.

**20.5. 命题.** 设  $(M, \omega)$  是一 Poisson  $G$ -空间, 且设

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是  $(M, \omega)$  的一个矩射使对任意的  $s \in G$  和  $x \in M$  有

$$\mu(sx) = Ad^*(s)\mu(x),$$

则对于  $\mathfrak{g}^*$  上的标准 Poisson 结构,  $\mu$  是一 Poisson 流形同态.

证. 事实上, 由假设  $\mu$  是  $G$ -等价不变的, 根据命题 17.2, 2 组闭上链  $c_s = 0$ . 于是对任意的  $a, b \in \mathfrak{g}$  有

$$\begin{aligned} \{\mu^*(a), \mu^*(b)\} &= \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} \\ &= \langle \mu, [a, b] \rangle = \mu^*[a, b] = \mu^*\{a, b\}. \end{aligned}$$

因为  $\mathfrak{g}$  的一组基可看作  $\mathfrak{g}^*$  上的一个坐标系, 所以由上式有

$$\mu^*\{f, h\} = \{\mu^*(f), \mu^*(h)\}, f, h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

证完.

下面我们要证明, 当  $(M, \omega)$  只是一个 Hamilton  $G$ -空间而不一定是 Poisson 空间, 在把  $\mathfrak{g}^*$  上的标准 Poisson 结构换为由  $G$ -空间  $(M, \omega)$  所确定的一个 Poisson 结构的条件下, 上述结论仍然成立(参看文献[17], [23]).

同前面一样, 我们用  $a_1, \dots, a_n$  来表示  $\mathfrak{g}$  的一组基. 我们把映射

$$\varphi: \xi \mapsto \sum_{i=1}^n \langle \xi, a_i \rangle \frac{\partial}{\partial a_i}, \quad \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

称为从  $\mathfrak{g}^*$  到  $\mathfrak{g}^*$  的向量场空间内的一个标准线性映射. 由定义知  $\varphi$  在  $\mathfrak{g}^*$  的平移变换下不变.

映射  $\varphi$  可以扩充为从外代数  $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$  到  $\mathfrak{g}^*$  的反对称反变张量代数  $D_*(\mathfrak{g}^*)$  内的一个标准内射同态, 使  $\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)$  在这一同态下的象是  $\mathfrak{g}^*$  上的在平移下不变的  $p$  阶反对称反变张量场空间. 事实上, 若把  $\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)$  等同于  $\mathfrak{g}$  的反对称  $p$ -形式空间  $A^p(\mathfrak{g})$ , 则  $p$ -形式

$$\beta \in A^p(\mathfrak{g})$$

对应着一个张量场

$$\tilde{\beta} \in D_p(\mathfrak{g}^*),$$

$\tilde{\beta}$  的坐标表达式是

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \beta(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \frac{\partial}{\partial a_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial a_{i_p}},$$

其中指标  $i_1, \dots, i_p$  遍取所有整数  $1, \dots, n$ .

对任意的  $\alpha \in A^p(\mathfrak{g})$  和  $\beta \in A^q(\mathfrak{g})$  我们有

$$[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]_s = 0.$$

我们指出, 对代数  $A(\mathfrak{g})$  的 +1 级  $Z_s$ -导子  $d$  有等式

$$(d\beta)(a, b) = -\beta([a, b]),$$

其中  $\beta \in A^1(\mathfrak{g})$  和  $a, b \in \mathfrak{g}$  都是任意的. 事实上, 该等式是下面

熟知的等式的直接结果：

$$(d\beta)(a, b) = a\beta(b) - b\beta(a) - \beta([a, b]).$$

$d$  是  $\mathfrak{g}$  上取值于  $R$  中的上链复形的上边缘运算(参看文献[13])。

20.6 命题. 对任意的  $p \geq 0$  和  $\beta \in A^p(\mathfrak{g})$  我们有

$$[\omega, \tilde{\beta}]_s = -\widetilde{(d\beta)}.$$

其中  $\omega$  由 (20.1) 定义。

证. 因为映射

$$\rho: u \mapsto [\omega, u]_s, \quad u \in D_*(\mathfrak{g}^*),$$

是代数  $D_*(\mathfrak{g}^*)$  的一个  $Z_s$ -导子, 而

$$\varphi: \beta \mapsto \tilde{\beta}, \quad \beta \in A(\mathfrak{g}),$$

是从代数  $A(\mathfrak{g})$  到  $D_*(\mathfrak{g}^*)$  内的同态, 所以只需对  $\beta = \xi \in \mathfrak{g}^*$  来验证等式。若  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , 则有

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^n \langle \xi, a_i \rangle \frac{\partial}{\partial a_i}, \\ [\omega, \xi]_s &= -[\xi, \omega]_s \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \langle \xi, [a_i, a_j] \rangle \frac{\partial}{\partial a_i} \wedge \frac{\partial}{\partial a_j} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n d\xi(a_i, a_j) \frac{\partial}{\partial a_i} \wedge \frac{\partial}{\partial a_j} \\ &= -\widetilde{(d\xi)}. \end{aligned}$$

证完。

注. 我们有

$$2\tilde{d}^2\beta = 2[\omega, [\omega, \tilde{\beta}]_s]_s = [[\omega, \omega]_s, \tilde{\beta}_s] = 0.$$

因此关系式  $d^2 = 0$  只是  $[\omega, \omega] = 0$  的另一种形式。

推论. 设  $\beta \in A^2(\mathfrak{g})$  是  $\mathfrak{g}$  上的一个 2-上链, 为使  $\omega - \tilde{\beta}$  是  $\mathfrak{g}^*$  上的一个 Poisson 结构, 充分必要条件是  $\beta$  是一 2-闭上链, 即  $d\beta = 0$ .

证. 事实上, 我们有

$$[\omega - \tilde{\beta}, \omega - \tilde{\beta}]_s = [\omega, \omega]_s - [\omega, \tilde{\beta}]_s - [\tilde{\beta}, \omega]_s$$

$$= -2[\omega, \tilde{\beta}]_s \\ = 2\widetilde{(d\beta)},$$

所以

$$\omega - \tilde{\beta}, \omega - \tilde{\beta}]_s = 0$$

的充要条件是  $d\beta = 0$ . 证完.

于是  $\mathfrak{g}$  上每一 2-闭上链  $\beta$  都对应着  $\mathfrak{g}^*$  上的一个 Poisson 结构  $\omega - \tilde{\beta}$ , 我们把  $\omega - \tilde{\beta}$  在  $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  中所定义的括号记为  $\{\cdot, \cdot\}_\beta$ . 它可以由下式来刻划:

$$\begin{aligned}\{a, b\}_\beta &= [a, b] - [[\tilde{\beta}, a]_s, b]_s \\ &= [a, b] + \beta(a, b), \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

设  $G$  是一 Lie 群, 而  $\mathfrak{g}$  是  $G$  的 Lie 代数,  $\beta$  是  $\mathfrak{g}$  上的 2-闭上链, 则在一般情形下, Poisson 结构  $\omega - \tilde{\beta}$  不一定是在  $G$  的余伴随表示的作用下不变的. 我们将看到, 若  $G$  是单连通的, 则  $\omega - \tilde{\beta}$  在  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  上的某一仿射作用下是不变的, 该仿射作用的线性部分是  $G$  的一个余伴随表示.

20.7. 引理. 设  $\beta \in A^2(\mathfrak{g})$  是  $\mathfrak{g}$  上取值于  $R$  中的 2-闭上链. 定义线性映射

$$\underline{\beta}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

使

$$\langle \underline{\beta}(a), b \rangle = \beta(a, b), \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

再利用对偶关系定义  $\mathfrak{g}$  在  $\mathfrak{g}^*$  上的表示  $ad^*$  为

$$\begin{aligned}-\langle ad^*(a)\xi, b \rangle &= \langle \xi, ad(a)b \rangle, \\ \forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g},\end{aligned}$$

则对任意的  $a, b \in \mathfrak{g}$  有

$$ad^*(a)\underline{\beta}(b) - ad^*(b)\underline{\beta}(a) - \underline{\beta}([a, b]) = 0.$$

证. 事实上, 根据定义对任意的  $c \in \mathfrak{g}$  有

$$\begin{aligned}&\langle ad^*(a)\underline{\beta}(b) - ad^*(b)\underline{\beta}(a) - \underline{\beta}([a, b]), c \rangle \\ &= -\beta(b, [a, c]) + \beta(a, [b, c]) - \beta([a, b], c) \\ &= (d\beta)(a, b, c) = 0.\end{aligned}$$

所以等式成立. 证完.

这个引理表明,若 $\beta$ 是一2-闭上链,则 $\beta$ 是 $\mathfrak{g}$ 上取值于由 $ad^*$ 所定义的 $\mathfrak{g}$ 模 $\mathfrak{g}^*$ 中的1-闭上链。注意到对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$\langle \beta(a), a \rangle = 0.$$

一般说来,在 $\mathfrak{g}$ 上存在取值于 $\mathfrak{g}^*$ 中的1-闭上链不满足这一条件,例如,当 $\mathfrak{g}$ 是一可换Lie代数时, $\mathfrak{g}$ 上便存在这样的1-闭上链。

20.8. 引理。设 $\mathfrak{g}$ 是单连通Lie群 $G$ 的Lie代数, $\chi$ 是 $\mathfrak{g}$ 上取值于 $\mathfrak{g}$ 模 $\mathfrak{g}^*$ (表示是 $ad^*$ )中的1-闭上链,则存在唯一的一个可微映射:

$$f: G \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

使对任意的 $s, t \in G$ 和 $a \in \mathfrak{g}$ 都有

- (i)  $f(st) = f(s) + Ad^*(s)f(t)$ ,
- (ii)  $df(a) = \chi(a)$ .

证。对任一 $a \in \mathfrak{g}$ ,令 $L_a$ 为 $G$ 上对应于 $a$ 的左不变向量场

$$L_a: s \mapsto sa, \forall s \in G.$$

设 $\alpha$ 是 $G$ 上一个取值于 $\mathfrak{g}^*$ 中的微分1-形式使对任意的 $s \in G$ 和任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$\alpha(sa) = Ad^*(s)\chi(a),$$

则我们有

$$\begin{aligned} \alpha(s\exp(ta)b) &= Ad^*(s)Ad^*(\exp(ta))\chi(b) \\ &= Ad^*(s)\chi(b) - tAd^*(s)ad^*(a)\chi(b) + t^2\dots. \end{aligned}$$

从而在点 $s \in G$ 处,

$$L_a\alpha(L_b) - L_b\alpha(L_a)$$

等于

$$-Ad^*(s)(ad^*(a)\chi(b) - ad^*(b)\chi(a)).$$

因为 $\chi$ 是一1-闭上链,所以我们有

$$\begin{aligned} L_a\alpha(L_b) - L_b\alpha(L_a) \\ = -\alpha(L_{[a,b]}) = \alpha([L_a, L_b]). \end{aligned}$$

于是推出

$$\begin{aligned} (d\alpha)(L_a, L_b) &= L_a\alpha(L_b) - L_b\alpha(L_a) - \alpha([L_a, L_b]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

这一等式对任意的  $a, b \in \mathfrak{g}$  都成立, 所以  $da = 0$ . 又因为  $G$  是单连通的, 所以存在唯一的一个从  $G$  到  $\mathfrak{g}^*$  内的可微映射  $f$  使  $df = a$  且  $f(e) = 0$  ( $e$  是  $G$  的单位元). 现对任意的  $s \in G$  和  $a \in \mathfrak{g}$  有

$$df(sa) - Ad^*(s)df(a) = a(sa) - Ad^*(s)a(a) = 0.$$

这说明

$$f(st) - f(s) - Ad^*(s)f(t)$$

与  $t$  无关, 又当  $t = e$  时它等于 0, 所以  $f$  满足条件 (i) 和 (ii).

反之, 若  $f$  满足 (i) 和 (ii), 则

$$df(sa) = Ad^*(s)df(a) = Ad^*(s)\chi(a),$$

且  $f(e) = 0$ , 由此便导出唯一性. 证完.

20.9. 引理. 设  $\mathfrak{g}$  是 Lie 群  $G$  的 Lie 代数且设

$$f: G \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是一可微映射使对任意的  $s, t \in G$  有

$$f(st) = f(s) + Ad^*(s)f(t),$$

则

(i) 对任意的  $a \in \mathfrak{g}$  和  $t \in G$  有

$$ad^*(a)f(t) = df(a) - Ad^*(t)df(Ad(t^{-1})a).$$

(ii) 对由关系式

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + f(s)$$

所定义的  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  上的仿射作用有

$$\Gamma_{ab} = [a, b] + \langle df(a), b \rangle, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

证. 将等式

$$f(st) = f(s) + Ad^*(s)f(t)$$

分别对  $s$  和  $t$  求微分得

$$df(at) = df(a) - ad^*(a)f(t),$$

$$df(sa) = Ad^*(s)df(a), \quad \forall s, t \in G, \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

在第二式中把  $s$  换为  $t$ , 把  $a$  换为  $Ad(t^{-1})a$  得

$$df(at) = Ad^*(t)df(Ad(t^{-1})a).$$

再利用第一式便推出 (i).

把  $\mathfrak{g}$  中的元素看作  $\mathfrak{g}^*$  上的函数, 由等式

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + f(s),$$

得

$$b(s\xi) = \langle s\xi, b \rangle = \langle Ad^*(s)\xi + f(s), b \rangle, \forall s \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

对  $s$  求微分得

$$\begin{aligned} (\Gamma_b)(\xi) &= db(a\xi) \\ &= \langle -ad^*(a)\xi + df(a), b \rangle \\ &= \langle \xi, [a, b] \rangle + \langle df(a), b \rangle \\ &= ([a, b])(\xi) + \langle df(a), b \rangle, \end{aligned}$$

对任意的  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  和  $a, b \in \mathfrak{g}$  成立. (ii) 得证. 证完.

现设  $\mathfrak{g}$  是单连通 Lie 群  $G$  的 Lie 代数. 设  $\beta$  是  $\mathfrak{g}$  的取值于  $R$  中的 2-闭上链, 设  $\beta$  为  $\mathfrak{g}$  上取值于  $\mathfrak{g}^*$  中的 1-维上链使对任意的  $a, b \in \mathfrak{g}$  有

$$\langle \beta(a), b \rangle = \beta(a, b).$$

根据引理 20.8, 存在唯一的一个从  $G$  到  $\mathfrak{g}^*$  中的可微映射  $f_\beta$ , 使对任意的  $s, t \in G$  和  $a \in \mathfrak{g}$  有

$$f_\beta(st) = Ad^*(s)f_\beta(t) + f_\beta(s),$$

和

$$df_\beta(a) = \beta(a).$$

于是可由等式

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + f_\beta(s), \forall s \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*$$

来定义  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  中的一个仿射作用. 我们称这样定义的  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  中的仿射作用为附属于 2-闭上链  $\beta$  的作用. 另一方面, 根据命题 20.6 的推论, 我们知道, 由 2-闭上链  $\beta$  能决定一张量  $\tilde{\beta} \in D_2(\mathfrak{g}^*)$  使  $\omega - \tilde{\beta}$  是  $\mathfrak{g}^*$  上的一个 Poisson 结构.

20.10. 命题. 设  $\mathfrak{g}$  是 Lie 群  $G$  的 Lie 代数且设  $\beta$  是  $\mathfrak{g}$  上取值于  $R$  中的 2-闭上链. 若  $G$  是单连通的, 则在  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  中的, 附属于  $\beta$  的仿射作用下,  $\mathfrak{g}^*$  上的 Poisson 结构  $\omega - \tilde{\beta}$  是不变的.

证. 对任意的  $s \in G$ , 令

$$s_*: \xi \mapsto Ad^*(s)\xi + f_\beta(s), \forall \xi \in \mathfrak{g}^*$$

为  $\mathfrak{g}^*$  中相应于  $s$  的仿射自同构. 记  $\{\cdot, \cdot\}_\beta$  为  $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  中由

Poisson 结构  $w - \tilde{\beta}$  所定义的括号, 则对任意的  $s \in G$  和  $a \in \mathfrak{g}$  有  
 $s_a^*(a) = Ad(s^{-1})a + \langle f_\beta(s), a \rangle$ .

在上式中我们已把  $s_a^*(a)$  当作  $\mathfrak{g}^*$  上的函数, 并利用了定义(见 §17)

$$Ad^*(s) = {}^t Ad(s^{-1}), s \in G.$$

于是, 根据引理 20.8 的(ii) 有

$$\begin{aligned} & \{s_a^*(a), s_b^*(b)\}_\beta \\ &= \{Ad(s^{-1})a, Ad(s^{-1})b\}_\beta \\ &= Ad(s^{-1})[a, b] + \beta(Ad(s^{-1})a, Ad(s^{-1})b) \\ &= Ad(s^{-1})[a, b] + \langle \beta(Ad(s^{-1})a, Ad(s^{-1})b) \rangle \\ &= Ad(s^{-1})\{a, b\} + \langle Ad^*(s)df_\beta(Ad(s^{-1})a), b \rangle. \end{aligned}$$

又根据引理 20.9 的(i) 得

$$Ad^*(s)df_\beta(Ad(s^{-1})a) = df_\beta(a) - ad^*(a)f_\beta(s).$$

因此对任意的  $s \in G$  和  $a, b \in \mathfrak{g}$  有

$$\begin{aligned} & \{s_a^*(a), s_b^*(b)\}_\beta \\ &= Ad(s^{-1})[a, b] + \langle df_\beta(a), b \rangle + \langle f_\beta(s), [a, b] \rangle \\ &= s_a^*([a, b]) + \langle df_\beta(a), b \rangle \\ &= s_a^*([a, b] + \beta(a, b)) \\ &= s_a^*\{a, b\}_\beta. \end{aligned}$$

这就证明了对任意的  $s \in G$ ,  $s_a^*$  都是 Poisson 流形  $(\mathfrak{g}^*, w - \tilde{\beta})$  的一个自同构。所以 Poisson 结构  $w - \tilde{\beta}$  对于  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  上的附属于  $\beta$  的仿射作用是不变的。证完。

**20.11. 命题.** 条件与命题 20.10 相同。 $\mathfrak{g}^*$  的由 Poisson 结构  $w - \tilde{\beta}$  所定义的全部叶子就是  $G$  的附属于  $\beta$  的作用所给出的全部轨道。

证. 事实上, 根据引理 20.8 我们有

$$\begin{aligned} T_a b &= [a, b] + \langle df(a), b \rangle \\ &= [a, b] + \beta(a, b) \\ &= \{a, b\} = H_a b, \forall a, b \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

这说明

$$\Gamma_s = H_s, \quad \forall s \in g.$$

余下的证明和命题 20.3 的证明完全一样, 证完.

**推论.** 对于由  $G$  的附属于  $\beta$  的仿射作用所给出的  $g^*$  中的任一轨道  $F$ , 都有唯一的一个辛结构  $\omega_F$  使恒等浸入

$$\mu: F \rightarrow g^*$$

对于  $g^*$  上的 Poisson 结构  $\omega - \bar{\beta}$  是一 Poisson 同态. 该辛结构  $\omega_F$  在  $G$  的作用下不变. 又辛  $G$ -空间  $(F, \omega_F)$  是 Hamilton 的,  $\mu$  是一矩射.

证. 证明和  $\beta = 0$  时的证明类似(命题 20.3 的推论及命题 20.4). 证完.

设  $(M, \omega)$  是一 Hamilton  $G$ -空间, 并设

$$\mu: M \rightarrow g^*$$

是矩射. 在 §16 中, 我们曾用  $\mu$  定义了  $g$  上取值于  $R$  中的一个 2-闭上链  $c_\mu$ ,

$$c_\mu(a, b) = \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} - \langle \mu, [a, b] \rangle \quad \forall a, b \in g.$$

20.12. 命题. 在  $g^*$  上取 Poisson 结构  $\omega - \bar{c}_\mu$ , 则矩射

$$\mu: M \rightarrow g^*$$

是一 Poisson 流形同态(参看文献[15], [17]).

证. 事实上, 对任意的  $a, b \in g$  我们有

$$\begin{aligned} \{\mu^*(a), \mu^*(b)\} &= \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} \\ &= \langle \mu, [a, b] \rangle + c_\mu(a, b) \\ &= \mu^*([a, b]) + c_\mu(a, b) \\ &= \mu^*\{a, b\}_{c_\mu}. \end{aligned}$$

证完.

我们已经知道(§17), 若  $G$  按下面定义的方式作用在  $g^*$  上: 对任意的  $s \in G$  和  $\xi \in g^*$ ,

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + \varphi_\mu(s),$$

其中

$$\varphi_\mu(s) = \mu(sx) - Ad^*(s)\mu(x), \quad x \in M,$$

则矩射

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是  $G$ -等价不变的。又根据命题 17.2 我们有

$$c_\mu(a, b) = \langle d\varphi_a(a), b \rangle, \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

所以

$$d\varphi_a = c_{\mu_a}$$

这说明如果  $G$  是连通的，则  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  上的仿射作用可由  $G$  的单连通覆盖群的附属于闭上链  $c_\mu$  的仿射作用通过作商而得到。

习题 1. 完成命题 20.11 及其推论的证明。

习题 2. 设  $\mathfrak{g}$  是单连通 Lie 群  $G$  的 Lie 代数且设  $\beta$  是  $\mathfrak{g}$  上取值于  $R$  中的 2-闭上链。

1) 证明  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  中的附属于  $\beta$  的仿射作用的由  $\mathfrak{g}^*$  的原点给出的轨道  $f_\beta(G)$  的维数等于  $\beta$  的秩。

2) 设  $\beta$  的秩等于  $\dim \mathfrak{g}$ 。在  $G$  上取左不变辛结构  $\omega$  使对任意的  $a, b \in \mathfrak{g}$  有

$$\omega(a, b) = \beta(a, b).$$

证明  $(G, \omega)$  是一 Hamilton  $G$ -空间而且映射

$$f_\beta: G \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是  $(G, \omega)$  的一个矩射。

3) 仍假定  $\beta$  的秩等于  $\dim \mathfrak{g}$ 。定义  $\mathfrak{g}$  中的乘积

$$(a, b) \mapsto ab, a, b \in \mathfrak{g},$$

使

$$\beta(ab, c) = -\beta(b, [a, c]), \forall a, b, c \in \mathfrak{g}.$$

证明对任意的  $a, b, c \in \mathfrak{g}$  有

$$ab - ba = [a, b],$$

$$a(bc) - b(ac) = (ab)c - (ba)c.$$

即对于这一乘积， $\mathfrak{g}$  在 Vinberg 的定义下是一“左辛”代数(参看文献[25])。

## 第六章 一个分级情形

### § 21. $(0, n)$ 维超流形 (参看文献 [18], [19])

在这节里, 我们把辛结构的观念推广到超流形上, 下面先给出超流形, 或者按 B. Kostant (参看文献 [18]) 的说法, 称为分级流形的定义.

21.1. 定义. 设  $M_0$  是一  $n_0$  维的流形, 设  $A$  是  $M_0$  上具有下列性质的一个  $R$ -代数簇

(1) 对任意的开集  $U \subset M_0$ ,  $A(U)$  是一  $Z_2$ -分级代数

$$A(U) = A(U)_0 + A(U)_1,$$

其中 0 和 1 表示  $Z_2$  中仅有的两个元素;

(2) 簇  $A$  局部同构于  $M_0$  上的可微函数簇和看作  $Z_2$ -分级代数的外代数  $\Lambda(R^{n_1})$  ( $n_1 \in Z^+$ ) 在  $R$  上所作的张量积;

则我们把  $M = (M_0, A)$  称为一个  $(n_0, n_1)$  维的超流形,  $M_0$  称为底空间.

根据定义, 当开集  $U$  充分小时, 我们有从  $A(U)$  到  $C^\infty(U) \oplus \Lambda(R^{n_1})$  上的一个同构, 它将  $A(U)_\rho$  ( $\rho \in Z_2$ ) 映到

$$C^\infty(U) \otimes \sum_{\rho \equiv \ell \pmod{2}} \Lambda^\rho(R^{n_1})$$

上.

下面我们仅限于讨论底流形  $M_0$  退缩为一个点  $e$  的特殊情形, 这时  $M = (e, A)$  的维数有形式  $(0, n)$ . 这样的一个超流形由一个点  $e$  和一个同构于  $\Lambda(R^n)$  的  $Z_2$ -分级代数  $A$  构成. 对这种特殊的超流形, 所涉及的只是纯代数问题, 因此我们可以用任一特征为 0 的域  $k$  来代替  $R$  进行讨论.

我们把同构于  $\Lambda(k^n)$  的一个  $Z_2$ -分级  $k$ -代数称为  $k$  上的秩

为  $n$  的 Grassman 代数。因此，一个 Grassman 代数是一维数为  $2^n$  的  $Z_2$ -交换代数，它可由一组满足

$$x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$$

的 1 级元素  $x_1, \dots, x_n$  所生成。

设  $M = (e, A)$  是一  $(0, n)$  维超流形。我们称满足

$$x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$$

的  $A_1$  中的元素组  $x_1, \dots, x_n$  为  $M$  上的坐标系。若  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $M$  上的一个坐标系，则  $x_1, \dots, x_n$  生成代数  $A$ 。所以选定一个坐标系相当于给出从  $A$  到  $\Lambda(k^n)$  上的一个同构。设  $m$  是  $A$  的极大理想，即由  $A_1$  或  $M$  上的一个坐标系所生成的理想。我们把向量空间  $m/m^2$  称为  $M$  上的余向量空间，并把它记为  $T_x^*M, T_x^*M$  是一  $n$  维空间，它的所有元素都是 1 级的。 $T_x^*M$  的对偶空间

$$T_x M = (m/m^2)^*$$

称为  $M$  上的向量空间。设  $\text{Der } A$  是由  $A$  的  $Z_2$ -导子所构成的左  $A$ -模，则  $\text{Der } A$  的元素称为  $M$  上的向量场。对任一  $X \in \text{Der } A$  和  $a \in A$ ，记  $Xa$  为  $a$  在  $X$  下的象。作为  $k$  上的向量空间， $\text{Der } A$  也是  $Z_2$ -分级的。若  $p \in Z_2$ ，则  $(\text{Der } A)_p$  是  $A$  中满足

- (1)  $XA_q \subset A_{p+q}$ ,  $q = 0, 1$ ,
- (2)  $X(ab) = (Xa)b + (-1)^{pq}(Xb)$ ,  $\forall a \in A_0$ ,  $\forall b \in A$ ,

的  $k$ -自同态  $X$  的集合。作为  $A$  上的左模， $\text{Der } A$  是一分级  $A$ -模。也就是说，对任意的  $p, q \in Z_2$  有

$$A_p(\text{Der } A)_q \subset (\text{Der } A)_{p+q}.$$

我们在  $\text{Der } A$  上定义一括号  $[,]$  如下

$$[X, Y] = X \circ Y - (-1)^{pq} Y \circ X,$$

$$\forall X \in (\text{Der } A)_p, Y \in (\text{Der } A)_q,$$

则  $\text{Der } A$  成为  $k$  上的一个 Lie 超代数（参看 7.5）。

设  $x_1, \dots, x_n$  是  $M = (e, A)$  上的坐标系，则对  $i = 1, \dots, n$ ，存在唯一的一个  $P_i \in (\text{Der } A)_1$  使

$$P_i x_j = \delta_{ij}.$$

我们把  $P_i$  记为  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ . 于是,  $Z_1$ -导子

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

构成  $A$ -模  $\text{Der}A$  的一组基, 并且对  $i, j = 1, \dots, n$  有

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0.$$

设  $A$  是  $k$  上的一个 Grassmann 代数(在我们的意义下), 且设  $E$  是一  $Z_1$ -分级左  $A$ -模. 因为  $A$  是  $Z_1$ -交换代数, 所以我们可以 在  $E$  上定义一右  $A$  模结构使

$$xa = (-1)^{t_q} ax, \quad \forall x \in E_p, a \in A_q.$$

于是对任意的  $a, b \in A$  和  $x \in E$  有

$$a(xb) = (ax)b.$$

因此, 所有  $Z_1$ -分级左  $A$ -模都可定义成  $(A, A)$  上的双边模.

设  $E$  是一  $Z_2$ -分级左  $A$ -模, 我们用  $\text{Hom}_A(E, A)$  来表示这样的一个  $Z_2$ -分级  $k$  向量空间, 它里边的  $q$  级元素是满足下列条件的从  $E$  到  $A$  的  $k$ -线性映射  $\varphi$ :

$$(1) \quad \varphi(E_q) \subset A_{p+q},$$

$$(2) \quad \varphi(ax) = (-1)^{t_q} a \varphi(x), \quad \forall q \in Z_2, a \in A_q, x \in E.$$

我们可以在  $\text{Hom}_A(E, A)$  上定义一  $Z_2$ -分级左  $A$  模结构使

$$(a\varphi)(x) = a(\varphi(x)), \quad \forall a \in A, x \in E, \varphi \in \text{Hom}_A(E, A).$$

我们称  $Z_2$ -分级  $A$  模

$$\Omega^1(M) = \text{Hom}_A(\text{Der}A, A)$$

为超流形  $M = (e, A)$  的微分 1-形式模. 可以证明存在唯一的一个  $k$ -线性映射

$$d: A \rightarrow \Omega^1(M)$$

使对任意的  $a \in A_p$  和任意的  $X \in (\text{Der}A)_q$  都有

$$(da)(x) = (-1)^{t_q} Xa.$$

我们有

$$dA_q \subset \Omega^1(M)_p.$$

又对任意的  $a, b \in A$  有

$$d(ab) = (da)b + a(db).$$

这里, 若  $a \in A_p$ , 且  $b \in A_q$ , 则记

$$(da)b = (-1)^{p+q}b(da),$$

可以证明, 若  $x_1, \dots, x_n$  是  $M$  上的坐标系, 则  $dx_1, \dots, dx_n$  是  $A$  模  $\Omega^1(M)$  的一组基.

现在我们来定义超流形  $TM$  和  $T^*M$ . 若  $A$  是一 Grassmann 代数, 则任一  $Z_2$ -分级左  $A$  模都是一双边模, 所以对任意的  $p \geq 1$ , 我们可以定义张量幂

$$\overset{p}{\otimes} E = \underbrace{E \otimes E \otimes \cdots \otimes E}_{p \text{ 项}}$$

把所有  $\overset{p}{\otimes} E$  的直和记为  $\otimes E$  并赋予它通常的乘法, 则  $\otimes E$  也称为张量代数. 这是一双分级的代数, 它是在  $Z \times Z_2$  中分级的.

级数为  $(p, q)$  的元素是  $\overset{p}{\otimes} E$  中由下列形式的元素

$$u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p$$

其中  $u_i \in E_{q(i)}$  且

$$\sum_{1 \leq i \leq p} q(i) = q$$

所张成的向量子空间中的元素.

设  $I$  是张量代数  $\otimes E$  中由下列元素生成的双边理想:

$$u \otimes v - (-1)^{p+q}v \otimes u, \quad u \in E_p, \quad v \in E_q.$$

令

$$S(E) = \otimes E / I,$$

则我们称代数  $S(E)$  是  $Z_2$ -分级的,  $A$  模  $E$  的对称代数. 由于  $\otimes E$  是双分级的, 所以  $S(E)$  也是一双分级代数, 它既在  $Z$  中有一分级, 也在  $Z_2$  中有一分级. 对于  $Z_2$  分级, 它是  $Z_2$ -交换的.

若  $A$  是一秩为  $n$  的 Grassmann 代数,  $E$  是一个具有由  $r$  个 1 级 ( $Z_2$ -分级) 元素构成的一组基的自由  $Z_2$ -分级  $A$  模, 则对称代数  $S(E)$  对于在  $Z_2$  中的分级, 是一秩为  $n+r$  的 Grassmann 代数. 特别地,  $S(\text{Der } A)$  和  $S(\text{Hom}_A(\text{Der } A, A))$  是两个秩为  $2n$

的 Grassman 代数。

若  $M = (\epsilon, A)$  是一  $(0, n)$  维的超流形，则我们称超流形  $(\epsilon, S(\Omega^1(M)))$  为  $M$  的切超流形并把它记为  $TM$ ，而把超流形  $(\epsilon, S(\text{Der}A))$  称为  $M$  的余切超流形并把它记为  $T^*M$ 。超流形  $TM$  和  $T^*M$  都是  $(0, 2n)$  维的。标准内射同态

$$A \rightarrow S^0(\text{Der}A) \subset S(\text{Der}A)$$

可看作超流形  $M$  和  $TM$  之间的同态，而标准内射

$$A \rightarrow S^0(\Omega^1(M)) \subset S(\Omega^1(M))$$

可以看作超流形  $M$  和  $T^*M$  之间的同态。

我们现在来定义超流形  $M = (\epsilon, A)$  上的微分形式线丛 (complexe)  $\Omega(M)$ 。令

$$\Omega^0(M) = A,$$

$$\Omega^1(M) = \text{Hom}_A(\text{Der}A, A).$$

对于  $p > 1$ ，定义  $\Omega^p(M)$  如下：

(1)  $\Omega^p(M)$  是  $\text{Hom}_A(\bigotimes^p \text{Der}A, A)$  的一个子模，

(2) 对  $1 \leq i \leq p$ ，若  $\varphi \in \Omega^p(M)$ ，则

$$\begin{aligned} \varphi(X_1 \otimes \cdots \otimes X_i \otimes X_{i+1} \otimes \cdots \otimes X_p) \\ = -(-1)^{p_i(p_i+1)} \varphi(X_1 \otimes \cdots \otimes X_{i+1} \otimes X_i \otimes \cdots \otimes X_p) \end{aligned}$$

对任意的  $X_1, \dots, X_p \in \text{Der}A$  ( $X_i, 1 \leq i \leq p$ ，的  $Z_2$  级数是  $p_i$ ) 成立。我们把  $\varphi \in \Omega^p(M)$  看作从  $(\text{Der}A)^p$  到  $A$  内的映射并记

$$\varphi(X_1 \otimes \cdots \otimes X_p) = \varphi(X_1, \dots, X_p).$$

$A$  模  $\Omega^p(M)$  是  $\text{Hom}_A(\bigotimes^p \text{Der}A, A)$  的一个  $Z_2$ -分级子模，我们记  $\Omega_p^p(M)$  为由  $\Omega^p(M)$  的  $Z_2$ -级数是  $p$  的元素构成的子空间。于是  $\Omega_p^p(M)$  中的元素是  $(p, p)$  级的微分形式。

我们可以在

$$\Omega(M) = \bigoplus_p \Omega^p(M)$$

中定义一结合乘积

$$(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi, \quad \varphi, \psi \in \Omega(M)$$

定义的方法类似于定义两个反对称形式的外积（参看文献 [18]），

[21]). 在这一乘积下,  $\Omega(M)$  是一  $Z \times Z_1$ - 分级代数, 即有

$$\Omega_p^q(M) \wedge \Omega_q^r(M) \subset \Omega_{p+q}^{q+r}(M).$$

若

$$a \in A_p = \Omega_p^0(M), \quad \phi \in \Omega_q^q(M),$$

则我们有

$$a \wedge \phi = (-1)^{pq} \phi \wedge a = a\phi.$$

若

$$\varphi \in \Omega_p^p(M), \quad \psi \in \Omega_q^q(M),$$

则我们有

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq+pq} \psi \wedge \varphi.$$

设  $x_1, \dots, x_n$  是  $M$  上的坐标。作为  $k$  上的代数,  $\Omega(M)$  由下列元素生成:

$$x_1, \dots, x_n \in \Omega_1^1, \quad dx_1, \dots, dx_n \in \Omega_1^1,$$

它们满足下列关系式:

$$x_i x_j + x_j x_i = 0,$$

$$x_i dx_j + dx_j x_i = 0,$$

$$dx_i \wedge dx_j - dx_j \wedge dx_i = 0.$$

这表明, 作为左  $A$  模,  $\Omega(M)$  同构于

$$A \otimes_k k[T_1, \dots, T_n],$$

其中  $k[T_1, \dots, T_n]$  是域  $k$  上不定元  $T_1, \dots, T_n$  的多项式代数。不难看出, 若  $n \neq 0$ , 则对任意的  $p \geq 0$  有  $\Omega^p(M) \neq (0)$ .

若  $\Omega(M)$  的一个  $k$  自同态  $\gamma$  满足

$$\gamma(\Omega_q^r(M)) \subset \Omega_{p+q}^{p+q}(M), \quad \forall (q, r) \in Z \times Z_1,$$

则我们称它为  $\Omega(M)$  的一个  $(p, p)$  级自同态。若一个  $(p, p)$  级的自同态  $\gamma$  满足

$$\gamma(\varphi \wedge \psi) = \gamma(\varphi) \wedge \psi + (-1)^{pq+pq} \varphi \wedge \gamma(\psi),$$

$$\forall \varphi \in \Omega_q^q(M), \quad \psi \in \Omega(M),$$

则称其为  $\Omega(M)$  上的  $Z \times Z_1$  导子。可以证明  $\Omega(M)$  中存在唯

一的一个 $(1, 0)$ 级的  $Z \times Z$  导子  $d$  使得

$$(1) \quad d^2 = 0,$$

$$(2) \quad (da)(X) = (-1)^{q+1} X a, \quad \forall a \in A_p, X \in (\text{Der}A)_q.$$

这个导子可以扩充为前面所定义的映射

$$d: A \rightarrow Q^1(M).$$

由  $d$  所定义的合成列是零调的, 即序列

$$0 \rightarrow k \rightarrow A = Q^0(M) \xrightarrow{d} Q^1(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

是一正合序列.

## § 22. $(0, n)$ 维辛超流形

设  $M = (e, A)$  是一  $(0, n)$  维超流形, 设微分形式  $\omega \in Q_0^2(M)$  满足下面的条件:

- (1) 若  $X \in \text{Der}A$  使  $\omega(X, Y) = 0, \forall Y \in \text{Der}A$ , 则  $X = 0$ ,
- (2)  $d\omega = 0$ ,

则我们称  $\omega$  为  $M$  上的一个辛结构.

设  $X \in (\text{Der}A)_p$ , 记  $i(X)$  为  $Q(M)$  的一个由下式所定义的  $(-1, p)$  级同态:

$$(i(X)\varphi)(Y_1, \dots, Y_{q-1}) = (-1)^{pq}\varphi(X, Y_1, \dots, Y_{q-1}),$$

其中  $\varphi \in Q_q(M)$ ,  $Y_1, \dots, Y_{q-1} \in \text{Der}A$  均是任意的. 可以证明  $i(X)$  是一  $(-1, p)$  级的  $Z \times Z$  导子. 上面的条件(1)表明, 对于辛结构  $\omega$ , 映射

$$X \mapsto i(X)\omega, \quad \forall X \in \text{Der}A,$$

是一内射. 因此, 若条件(1)成立, 则映射

$$X \mapsto i(X)$$

是从  $A$  模  $\text{Der}A$  到  $A$  模  $Q^1(M)$  上的一个同构.

设  $\omega$  是  $M$  上的一个辛结构, 则它在  $T_e M$  上导出一反对称双线性型  $\omega_e$ , 而且根据条件(1),  $\omega_e$  是非退化的.

22.1. 命题. 设  $\omega$  是  $M = (e, A)$  上的一个辛结构, 则在  $M$  上存在坐标系  $x_1, \dots, x_n$  以及一个  $n \times n$  阶的域  $k$  上的对称矩

阵  $(\lambda_{ij})$  使

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

又  $\det(\lambda_{ij}) \neq 0$ .

这一结论类似于 Darboux 定理 (§8), 是文献 [18] 中定理 5.3 的一个基本的并且是特殊的情形.

我们称  $M$  上的一个向量场  $X \in \text{Der } A$  为 辛向量场, 若它满足  $di(X)\omega = 0$ .  $M$  上的辛向量场全体构成 Lie 超代数  $\text{Der } A$  的一个 Lie 子超代数  $S$ . 可以证明 (参看文献 [14]), 若  $n \geq 4$ , 则  $S$  是一单 Lie 超代数, 也就是说,  $S$  和  $(0)$  是  $S$  仅有的两个理想.

对任意的  $a \in A$ , 存在唯一的一个  $H_a \in \text{Der } A$  使

$$i(H_a)\omega = da.$$

$H_a$  是一辛向量场. 序列

$$(0) \rightarrow k \rightarrow A \xrightarrow{H} S \rightarrow (0)$$

是一正合列.

在  $A$  上定义一 Poisson 括号如下:

$$\{a, b\} = H_b a, \forall a, b \in A.$$

在这一括号下,  $A$  成为一 Lie 超代数, 它的中心是  $k$ . 映射

$$H: a \mapsto H_a, a \in A,$$

是一 Lie 超代数同态. 对任意的  $a \in A_0$ ,  $b \in A_0$  和  $c \in A$  有

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{\deg b} b \{a, c\}.$$

设  $x_1, \dots, x_n$  是  $M$  上的坐标, 使得

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_i,$$

则对任意的  $i$  有

$$i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\omega = 2 dx_i,$$

$$H_{x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

于是对  $1 \leq i, j \leq n$  有

$$\{x_i, x_j\} = \frac{1}{2} \delta_{ij}.$$

$T^*P$  上的标准辛结构. 设  $P = (e, A)$  是一  $(0, n)$  维超流形. 任意的

$$X \in \text{Der}A = S^1(\text{Der}A)$$

都可等同于 Grassmann 代数  $S(\text{Der}A)$  的一个元素. 另一方面, 对任意的  $X \in (\text{Der}A)_p$ , 存在  $S(\text{Der}A)$  的唯一的一个  $Z_2$ -分级级数是  $p$  的  $Z_2$ -导子  $\tilde{X}$  使

- (1)  $\tilde{X}(a) = Xa, \forall a \in A = S^0(\text{Der}A),$
- (2)  $\tilde{X}(Y) = [X, Y], \forall Y \in \text{Der}A = S^1(\text{Der}A).$

导子  $\tilde{X}$  对于  $Z$ -分级是零级的. 又因为

$$T^*P = (e, S(\text{Der}A)),$$

所以  $\tilde{X}$  是  $T^*P$  上的一个向量场 (即  $X$  的拓展). 若  $x_1, \dots, x_n$  是  $P$  上的坐标, 我们把  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  看作  $S(\text{Der}A)$  中的元素并令

$$y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

则  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  是  $T^*P$  上的坐标且

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} y_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

在  $T^*P$  上存在唯一的一个微分形式

$$\alpha \in \Omega^1(T^*P),$$

使对任意的  $X \in \text{Der}A$  有

$$\alpha(\tilde{X}) = X.$$

这一形式类似于 Liouville 形式. 在坐标  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  下, 我们有

$$\alpha = \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

微分形式

$$\omega = -d\alpha = \sum_{i=1}^n -dy_i \wedge dx_i$$

是  $T^*P$  上的一个标准辛形式。形式  $\omega_c$  是标准同构于向量空间  $T_c P + (T_c P)^*$  的向量空间  $T_c(T^*P)$  上的对偶的中性形式 (La forme  $\omega_c$  est la forme neutre de dualité sur l'espace  $T_c(T^*P)$  qui est canoniquement isomorphe à  $T_c P + (T_c P)^*$ ).

## 参考文献

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, Foundations of mechanics, 2nd edition, Benjamin Cummings Reading, 1978.
- [2] V. I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics. Nauka, Moscow, 1974.
- [3] M. F. Atiyah, Convexity and commuting hamiltonians, *Bull. London Math. Soc.*, 14, 1—15, 1982.
- [4] N. Bourbaki, Variétés différentielles et analytiques, Hermann, Paris, 1971.
- [5] C. Chevalley, Theory of Lie groups, Princeton Univ. Press, 1946.
- [6] G. Darboux, Sur le problème de Pfaff, *Bull. des Sc. math.*, 1882.
- [7] J. J. Duistermaat, Fourier integral operators, *Courant Inst. of Math. Sci.*, New York, 1973.
- [8] —————, On the momentum map, IUTAM-ISIMM, Symposium on modern developments in analytical mechanics, Torino, 1982.
- [9] C. Godbillon, Géometrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969.
- [10] V. Guillemin, S. Sternberg, The momentum map and collective motion, *Annals of Physic*, 127, 220—253, 1980.
- [11] —————, Convexity properties of the momentum mapping, *Invent. Math.*, 67, 491—513, 1982.
- [12] S. Helgason, Differential geometry on symmetric spaces, Academic Press, New York, 1962.
- [13] N. Jacobson, Lie algebras, Interscience Publishers, Wiley, New York, 1962.
- [14] V. Kac, Lie superalgebras, *Adv. Math.* 26, 8—96, 1977.
- [15] A. A. Kirillov, Local Lie algebras, *Uspekhi Math. Nauk*, 31, 4, 55—76, 1976.
- [16] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of differential geometry, Interscience Publishers, New York, 1969.
- [17] B. Kostant, Quantization and unitary representations, *Lectures Notes in Math.*, 170, Springer, Berlin, 1970.
- [18] —————, Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization, *Lectures Notes in Math.*, 570, Springer Berlin, 1977.
- [19] A. Leites, Introduction to the theory of supermanifolds, *Uspekhi Math. Nauk*, 35, 1, 3—57, 1980.
- [20] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Diff. Geom.*, 12, 253—300, 1977.
- [21] M. Scheunert, The theory of Lie superalgebras, *Lectures Notes in Math.*, 716, Springer, 1979.

- [22] C. L. Siegel, Symplectic geometry, *Amer. J. Math.*, 1—86, 1943.
- [23] J. M. Souriau, Structures des systemes dynamiques, Dunod Paris, 1969.
- [24] W. W. Symes, Hamiltonian group actions and integrable systems, *Physica*, 1, D, 339—374, 1980.
- [25] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, *Moscow Math. Soc.*, 12, 1963.
- [26] N. R. Wallach, Symplectic geometry and Fourier analysis, Math. Sci. Press, Brookline, Mass, 1977.
- [27] A. Weil, Variétés kaehleriannes, Hermann, Paris, 1958.
- [28] A. Weinstein, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, *Adv. Math.*, 6, 329—346, 1971.
- [29] —————, Lectures on symplectic manifolds, C. B. M. S. régional conference series, 29, A. M. S. Rhode Island, 1977.
- [30] H. Weyl, Classical groups, Princeton University Press, 1946.
- [31] 严志达, 半单纯李群李代数表示论, 上海科学技术出版社, 1963.

# 名词索引

## 三 面

- 三维 Lie 代数 10  
上边缘 95  
上边缘运算 121  
上链复形 121

## 四 面

- 分级代数 1  
分级流形 129  
分级  $A$ -模 130  
双射 5

## 五 面

- 正交性 3  
正交群 22  
正合序列 44  
外积 1  
外代数 120  
可积子丛 37  
可微作用 87  
生成函数 60  
母函数 80  
左外积 31  
左不变向量场 88  
左辛代数 128  
右不变向量场 88  
半单表示 34  
平稳点 101  
代数簇 129  
对称代数 132  
对偶的中性形式 138

## 六 面

- 动力矩 99  
仿射作用 105

- 伪 Hermite 型 20  
伪 Riemann 形式 27  
伪 Kähler 形式 27  
收缩法 61  
曲率 65  
合成列 135  
齐性空间 106

## 七 面

- 余迷向子空间 4  
余迷向子流形 56  
余伴随表示 103  
伴随表示 103  
辛空间, 辛形式 8  
辛子空间 4  
辛基 9  
辛空间同构 13  
辛群 14  
辛复结构 20  
辛流形 24  
辛流形同态 25  
辛流形同构 25  
辛坐标 40  
辛向量场 42  
辛子流形 56  
辛  $G$ -空间 88  
辛  $h$ -空间 89  
辛结构 24  
向量空间 9  
流形 24  
余切丛 69  
张量代数 132  
酉群 22  
形式辛向量场 Lie 代数 53

## 八 面

单子模 13  
单代数 34  
垂直向量 67  
环面 106  
线性连络 65  
线丛 133  
拓展 78

## 九 西

标准辛空间 8  
适应复结构 21  
适用交 62  
迷向子空间 4  
迷向子流形 56  
迷向补子空间 6  
复投影空间 27  
复结构 20  
指数映射 20  
临界点 45  
挠率 65

## 十 西

流 41  
射流 55  
射流代数 54  
浪花 79  
积分叶子 65  
积分曲线 41  
素元素 12  
矩射 94

## 十一 西 以 上

提升 81  
强 Hamilton g-空间 96  
超流形 129  
等价不变 105  
零调 135  
稳定子 16  
覆盖 106

## 其 他

Cayley 参数化 19  
Darboux 定理 39  
de Rham 群 43  
Frobenius 定理 37

Grassmann 代数 130  
G-空间 88  
Hamilton 向量场 44  
Hamilton g-空间 93  
Hamilton G-空间 103  
 $\hbar$ -空间 88  
Kähler 形式 27  
Lagrange 子空间 4  
Lagrange 迷向补 6  
Lagrange 补 8  
Lagrange 子流形 56  
Lagrange 叶结构 64  
Lie 导子 24  
Lie 超代数 32  
Lie 群 87  
Lie 代数 88  
Liouville 形式 67  
 $p$ -形式 1  
Poisson 括号 46  
Poisson g-空间 96  
Poisson G-空间 103  
Poisson 结构 111  
Poisson 流形 111  
Schouten-Nijenhuis 括号 107  
 $Z_\varepsilon$ -交换 1  
 $Z_\varepsilon$ -导子 2

## 记号

|                   |                             |
|-------------------|-----------------------------|
| $\mathbf{Z}$      | 整数环                         |
| $\mathbf{Z}^+$    | 非负整数集                       |
| $\mathbf{R}$      | 实数域                         |
| $\mathbf{C}$      | 复数域                         |
| $\mathbf{Z}_2$    | 整数模 2 同余类环                  |
| $TM$              | 流形 $M$ 的切丛                  |
| $T^*M$            | 流形 $M$ 的余切丛                 |
| $C^\infty(M)$     | 流形 $M$ 上 $C^\infty$ 实可微函数全体 |
| $\longrightarrow$ | 集合间的对应                      |
| $\mapsto$         | 元素间的对应                      |