
Bachelorarbeit

Surface Caching und Lightmapping

Markus Pawellek

markuspawellek@gmail.com

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen und Methoden	2
1.1	Szenenrepresentation	2
1.2	Raytracing	5
1.3	Radiometrie	7
1.4	Reflexionen an Oberflächen	8

1 Grundlagen und Methoden

In den folgenden Kapiteln wird eine grundlegende Einführung und Definition der Verfahren gegeben, die für den weiteren Verlauf dieser Arbeit von Belang sind. Viele dieser Themen können hier nur angerissen werden, da ihre komplette Behandlung den Rahmen und das Ziel des Themas verfehlen würde. Für eine genauere Einführung in die einzelnen Themengebiete, wird dem Leser geraten sich mit den genannten Quellen auseinander zu setzen.

1.1 Szenenrepresentation

Um realistische Bilder zu generieren, benötigen wir als Eingabe gewisse Daten der physikalischen Objekte, die durch den Beobachter oder auch die Kamera betrachtet werden. Für die später betrachteten Algorithmen ist dabei vor allem das Verhalten von Licht auf den Oberflächen dieser Objekte wichtig. Der Einfachheit halber wollen wir davon ausgehen, dass das Licht nur in den oberen Schichten eines Körpers mit dessen Material wechselwirkt. Für uns ist es also ausreichend, nur die Oberflächen der gegebenen Objekte und nicht deren Inneres zu beschreiben.

Die Oberflächen realer physikalischer Objekte sind im Allgemeinen beliebig geformt und können nicht in geschlossener Form durch eine Gleichung beschrieben werden. Dennoch lassen sie sich im analytischen Sinne durch einfachere Hyperflächen im Raum approximieren. Für die Bildgenerierung wählt man für solch eine Fläche meist ein Dreieck. Es ist einfach zu beschreiben und flexibel genug um die meisten Objekte beliebig genau zu approximieren. Dabei wollen wir entartete Dreiecke, die nur aus einem Punkt oder einer Strecke bestehen, ausschließen, da sie für die betrachteten Render-Verfahren nicht darstellbar sind.

DEFINITION 1.1: (Dreieck)

Ein Dreieck Δ wird durch eine Sequenz $(A_\Delta, B_\Delta, C_\Delta)$ von Punkten in \mathbb{R}^3 , für die die Menge $\{B_\Delta - A_\Delta, C_\Delta - A_\Delta\}$ linear unabhängig ist, charakterisiert. Die Menge $S(\Delta)$ der Punkte des Dreiecks ist definiert durch

$$S(\Delta) := \text{im } \varphi_\Delta$$

Dabei stellt (M, φ_Δ) mit den folgenden Definitionen die Standardparametrisierung der Menge $S(\Delta)$ dar.

$$M := \{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid u + v \leq 1\}$$

$$\varphi_\Delta: M \rightarrow S(\Delta), \quad \varphi_\Delta(u, v) := (1 - u - v)A_\Delta + uB_\Delta + vC_\Delta$$

Die baryzentrischen Koordinaten (u, v, w) eines Punktes $x \in S(\Delta)$ sind durch die folgenden Eigenschaften gegeben.

$$(u, v) \in M, \quad w = 1 - u - v, \quad \varphi_\Delta(u, v) = x$$

Die analytische äußere Normale μ_Δ ist gegeben durch den Ausdruck

$$\mu_\Delta := \frac{(B_\Delta - A_\Delta) \times (C_\Delta - A_\Delta)}{\|(B_\Delta - A_\Delta) \times (C_\Delta - A_\Delta)\|}$$

Jedes Dreieck besitzt auf seiner gesamten Fläche eine eindeutige konstante äußere analytische Normale. Für die Simulation von globalen Beleuchtungseffekten ist diese Eigenschaft jedoch ein Nachteil, weil die Beleuchtung eines Objektes stark vom Verlauf seiner Normalen abhängt. Näheren

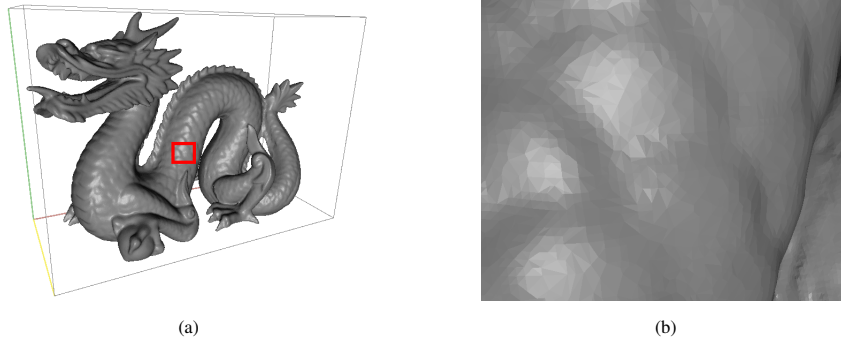


Abbildung 1: Die Bilder zeigen die gerenderte »Dragon«-Szene. Das rechte Bild entspricht dem roten Bereich des Linken. In dieser Szene werden die Normalen des Objektmodells durch die analytischen Normalen der Dreiecke angenähert. Da das Modell sehr fein trianguliert ist, fällt dies im ersten Bild nicht auf. Zoomt man jedoch mit der Kamera heran werden die Fehler durch die Approximation deutlich und die einzelnen Dreiecke sind mit dem menschlichen Auge auszumachen.

wir ein Objekt nun durch $n \in \mathbb{N}$ Dreiecke an, so nähern wir zur Zeit auch den Normalenverlauf des Objektes durch die stückweise konstanten äußeren Normalen der Dreiecke an. Der Fehler dieser Approximation tritt in Form eines facettenhaften Musters auf, welcher für das menschliche Auge gut erkennbar ist. In Abbildung 1 wird dieser Effekt genauer an einem Beispiel demonstriert. Das Problem kann im Allgemeinen durch eine Interpolation, die die Stetigkeit der Normalen erhält, gelöst werden.

DEFINITION 1.2: (Normalen-Funktion)

Seien \triangle ein Dreieck und $\nu: S(\triangle) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann wird ν eine äußere Normalen-Funktion auf \triangle genannt, wenn für alle $x \in S(\triangle)$ die folgenden Eigenschaften gelten.

$$\|\nu(x)\| = 1, \quad \langle \mu_\triangle, \nu(x) \rangle > 0$$

THEOREM 1.1: (Vertex-Normalen-Funktion)

Sei \triangle ein Dreieck und seien Normalen $\mu_A, \mu_B, \mu_C \in \mathbb{R}^3$ an den Punkten des Dreiecks mit den folgenden Eigenschaften für alle $X \in \{A, B, C\}$ gegeben.

$$\|\mu_X\| = 1, \quad \langle \mu_X, \mu_\triangle \rangle > 0$$

Dann definiert die Abbildung $\nu: S(\triangle) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetige Normalen-Funktion auf \triangle , wenn für alle $x \in S(\triangle)$ mit den baryzentrischen Koordinaten (u, v, w) die folgende Aussage gilt.

$$\nu(x) = \nu \circ \varphi_\triangle(u, v) := \frac{w\mu_A + u\mu_B + v\mu_C}{\|w\mu_A + u\mu_B + v\mu_C\|}$$

Wir nennen ν in diesem Falle eine Vertex-Normalen-Funktion.

Durch das Setzen der Normalen an den Eckpunkten eines Dreiecks können wir sicher gehen, dass der Verlauf der Normalen stetig von einem Dreieck zu einem anderen übergeht. Ein beispielhafter

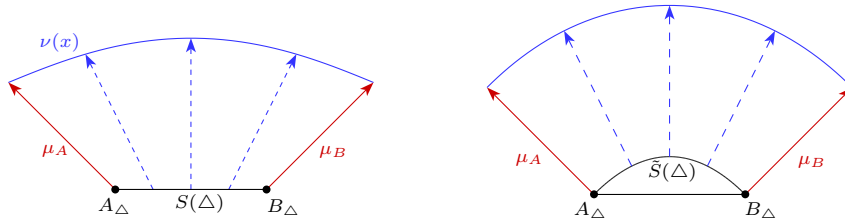


Abbildung 2: Die erste Skizze auf der linken Seite zeigt den Verlauf einer Vertex-Normalen-Funktion ν anhand eines Beispiels. A_Δ und B_Δ sind dabei die Eckpunkte eines Dreiecks Δ . μ_A und μ_B sind die jeweilig gegebenen Vertex-Normalen an den Eckpunkten. Im rechten Bereich der Abbildung ist die durch ν approximierte gekrümmte Fläche $\tilde{S}(\Delta)$, auf der die Normalen $\nu(x)$ senkrecht stehen, eingezeichnet.

Verlauf einer Vertex-Normalen-Funktion wird in Abbildung 2 gezeigt. Für die in dieser Arbeit betrachteten Effekte und Verfahren reicht diese Art der Normalen-Interpolation aus. Dennoch gibt es hier weitere Möglichkeiten, wie zum Beispiel »Normal Maps«, die eine noch genauere Approximation zu Lasten des Speicherverbrauchs ermöglichen.

Die kleinste Hyperfläche, die wir durch geschlossene Gleichungen beschreiben können und aus derer wir alle weiteren Objekte zusammensetzen, nennen wir »Primitiv« (engl.: *primitive*). Es soll in unserem Falle nicht nur die Informationen des Dreiecks beinhalten, sondern auch Aussagen über dessen Material oder Oberflächenstruktur treffen können. Insbesondere muss das Primitiv oder dessen Material also die Reflexion, Absorption, Transmission und Emission des Lichts an der Oberfläche beschreiben. Für physikalische Materialien gibt es aber je nach den betrachteten Effekten verschiedene verallgemeinerte Varianten der mathematischen Beschreibung. Um keine dieser Varianten auszuschließen, soll hier das Primitiv in einer abstrakteren Form definiert werden.

DEFINITION 1.3: (Primitiv)

Sei \mathcal{M} die Menge der Elemente, die Materialien von Objekten charakterisieren. Dann ist ein Primitiv p gerade ein Tupel (Δ_p, ν_p, m_p) , bestehend aus einem Dreieck Δ_p , einer Normalen-Funktion ν_p auf Δ_p und einem Material $m_p \in \mathcal{M}$.

Für die eigentliche Approximation der Oberfläche eines Objektes benötigt man jetzt eine Menge von Primitiven. Solch eine Menge wollen wir auch eine »Szene« (engl.: *scene*) nennen. Häufig benötigt man jedoch neben den Lichtquellen, die durch die Materialien der Primitive gegeben sind, noch weitere anders geartete Lichtquellen, die unabhängig von den eigentlichen Primitiven der Szene bestehen. In unserem Falle wollen wir uns speziell auf die Umgebungsbeleuchtungs-Funktion (engl.: *HDR environment map*) beziehen.

DEFINITION 1.4: (Umgebungsbeleuchtungs-Funktion)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist eine Umgebungsbeleuchtungs-Funktion definiert als eine auf Ω integrierbare Abbildung $f: \Omega \rightarrow [0, \infty)^n$.

Diese Funktion beschreibt das Licht durch $n \in \mathbb{N}$ ausgewählte Koeffizienten, welches von einer Kugeloberfläche mit quasi unendlich großem Radius in die Szene ausgesandt wird. Für einen Punkt der Szene, ist dessen Beleuchtung durch diese Funktion also unabhängig von dessen Position. Diese Tatsache wird in Abbildung 3 wieder an einem Beispiel gezeigt. Die eigentliche Definition soll nun durch eine solche Umgebungsbeleuchtungs-Funktion erweitert werden.

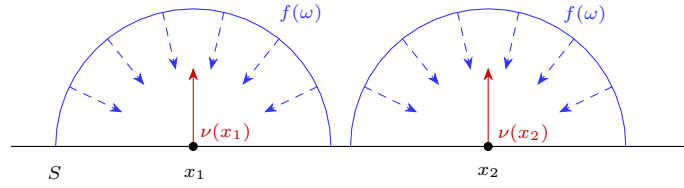


Abbildung 3: Die Darstellung zeigt, dass die Beleuchtung zweier Punkte x_1 und x_2 einer Oberfläche S mit den Normalen $\nu(x_1)$ und $\nu(x_2)$ durch eine Umgebungsbeleuchtungs-Funktion f nur abhängig von der Verdeckung der Punkte und nicht von deren Position ist. Bei x_1 und x_2 sind also in diesem Falle die gleichen Lichtintensitäten zu messen.

DEFINITION 1.5: (Szene)

Eine Szene \mathcal{S} bezeichnet ein Tupel (P_S, E_S) mit einer endlichen Menge P_S von Primitiven und einer Umgebungsbeleuchtungs-Funktion E_S . Die Menge $S(\mathcal{S})$ der Punkte in der Szene \mathcal{S} sei definiert durch

$$S(\mathcal{S}) := \bigcup_{p \in P_S} S(\triangle_p)$$

1.2 Raytracing

Im einfachsten Falle bezeichnet das Wort »Raytracing« (engl.: *ray tracing*) einen Algorithmus zur Ermittlung der Sichtbarkeit von dreidimensionalen Objekten bezüglich eines Ursprungpunktes (engl.: *origin*) im Raum. Häufig versteht man darunter jedoch auch eine Render-Technik für die Generierung eines gesamten Bildes aus einer gegebenen Szene, die auf dem eben genannten Raytracing-Algorithmus basiert.

Grundsätzlich gibt es viele Verfahren, um ein Szene auf ein Bild zu rendern. Die Erfahrung zeigt aber, dass vor allem in Bereichen, in denen die globalen Beleuchtungseffekte realistisch simuliert werden sollen, Raytracing eine wichtige Grundlage darstellt. Der Grund dafür besteht in der Tatsache, dass Raytracing das Sichtbarkeitsproblem löst und durch die Verwendung von Strahlen eine Basis für die Lichtberechnung im Sinne der geometrischen Optik bereitstellt.

DEFINITION 1.6: (Sichtbarkeitsproblem)

Sei \mathcal{S} eine Szene. Dann ist die Sichtbarkeitsfunktion von \mathcal{S} die folgende Abbildung.

$$V_S: \mathbb{R}^3 \times S(\mathcal{S}) \rightarrow \{0, 1\}$$

$$V_S(o, x) = \begin{cases} 1 & : S(\mathcal{S}) \cap \{(1 - \gamma)o + \gamma x \mid \gamma \in (0, 1)\} = \emptyset \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Das Sichtbarkeitsproblem beschreibt dann die Aufgabe diese Funktion für gegebene Szenen und Parameter zu evaluieren.

Die Sichtbarkeitsfunktion gibt an, ob der Oberflächenpunkt x vom Beobachtungspunkt o aus in gerader Linie gesehen werden kann oder ob zwischen diesen Punkten ein Primitiv den Punkt x verdeckt. Daran anknüpfend besteht die Basis des Raytracing-Verfahrens auf dem Aussenden von

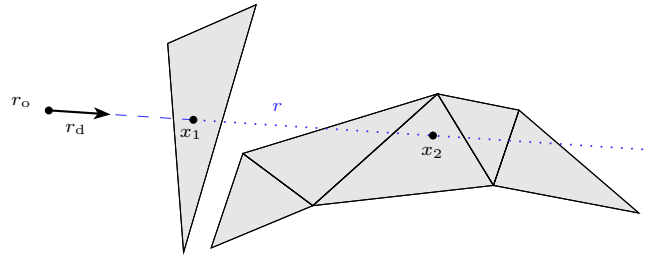


Abbildung 4: Die Abbildung zeigt eine Skizze, welche das Sichtbarkeitsproblem und den Raytracing-Algorithmus verdeutlicht. Die grau melierten Dreiecke sollen die gegebene Szene S darstellen. Der ausgesendete Strahl $r = (r_o, r_d)$ trifft in der Szene genau zwei Punkte x_1 und x_2 . Dabei wird x_2 durch x_1 verdeckt. Es gilt also $V_S(r_o, x_1) = 1$ und $V_S(r_o, x_2) = 0$.

»Strahlen« (engl.: *ray*) bezüglich eines Ursprungspunktes. Für diese Strahlen kann der Schnittpunkt mit der Szene ermittelt werden. Liegt der Schnittpunkt zwischen o und x , so beträgt der Wert der Sichtbarkeitsfunktion 0 ansonsten 1. Die Sichtbarkeitsfunktion kann somit für alle gegebenen Parameter durch Raytracing berechnet werden. Abbildung 4 zeigt diese Methode anhand einer Skizze.

DEFINITION 1.7: (Strahl)

Ein Strahl r sei gerade durch ein Tupel (r_o, r_d) mit einem Ursprungspunkt $r_o \in \mathbb{R}^3$ und einer Richtung $r_d \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ charakterisiert. Die Menge $S(r)$ der Punkte des Strahls ist gegeben durch das Bild der Parametrisierung $([0, \infty), \varphi_r)$

$$S(r) := \text{im } \varphi_r, \quad \varphi_r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi_r(t) := r_o + tr_d$$

Die Menge aller Strahlen sei mit R bezeichnet.

Die vollständige Evaluierung von V_S ist jedoch häufig nicht nötig. In Abbildung 4 ist klar, dass alle Punkte von r , die hinter x_1 liegen von dem Beobachtungspunkt r_o aus nicht sichtbar sind. Beim eigentlichen Raytracing-Algorithmus macht man sich dies zu Nutze und berechnet für eine vorgegebene Richtung nur den nächsten Schnittpunkt. Alle weiteren Schnittpunkte können ignoriert werden, da sie vom Strahl aus nicht erreicht werden.

DEFINITION 1.8: (Raytracing-Funktion)

Sei S eine Szene. Dann ist die Raytracing-Funktion der Szene S gegeben durch die folgende Abbildung.

$$\text{rt}_S: R \rightarrow (0, \infty]$$

$$\text{rt}_S(r) := \begin{cases} \min \{t \in (0, \infty) \mid r(t) \in S(S)\} & : S(S) \cap \varphi_r((0, \infty)) \neq \emptyset \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

Wie bereits erwähnt, erweitert man diesen Algorithmus häufig mit der Berechnung eines gesamten Bildes, indem man für jeden Pixel des Bildes einen oder mehrere Strahlen durch einen analogen virtuellen Pixel im Szenenraum schießt und die Raytracing-Funktion für diese evaluiert. Abbildung

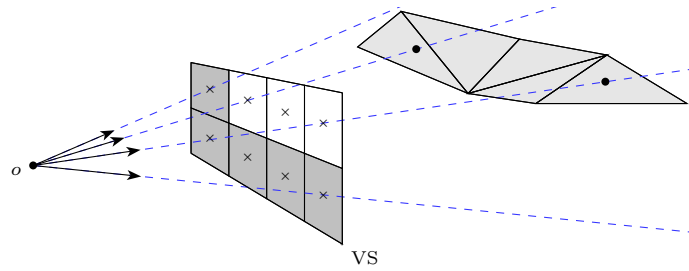


Abbildung 5: In der Skizze ist ein typisches Render-Verfahren auf der Basis des Raytracing-Algorithmus dargestellt. Bezüglich eines Beobachtungspunktes o wird durch jeden Pixel eines virtuellen Bildschirms VS ein Strahl geschossen und dessen Raytracing-Funktion evaluiert. Gibt es keinen Schnittpunkt, so wird der Pixel meistens schwarz gefärbt. Ansonsten kann zum Beispiel die Farbe des getroffenen Objektes angezeigt werden. Der Übersicht wegen sind im Bild nur vier der eigentlich acht Strahlen sichtbar.

5 zeigt dieses Verfahren anhand einer Skizze. Um gleichzeitig das Shading zu ermöglichen, ermittelt man nicht nur den Schnittpunkt, sondern auch in welchem Primitiv sich dieser befindet und welche baryzentrischen Koordinaten er besitzt. Die Implementierung des Raytracing-Verfahrens soll hier nicht gezeigt werden, da eine einfache naive Implementierung meistens einen zu großen Rechenaufwand darstellt und die hier verwendete optimierte Variante weit über das Thema dieser Arbeit hinausgeht.

1.3 Radiometrie

Ein physikalischer Körper K mit der Oberfläche ∂K und äußerer Normalen-Funktion μ sendet aufgrund verschiedener physikalischer Effekte, wie zum Beispiel Reflexion oder Emission, elektromagnetische Wellen aus. Für die Simulation von Beleuchtungseffekten ist es nötig die Abhängigkeit dieser Abstrahlung für verschiedene Wellenlängen $\lambda \in (0, \infty)$, verschiedene Oberflächenpunkte $x \in \partial K$ und verschiedene Richtungen $\omega \in \Omega$ zu betrachten. Dafür führen wir die sogenannte »spektrale Strahldichte« (engl.: *spectral radiance*) ein. Sie gibt an, wie viel Energie pro Zeit, pro Wellenlängenänderung, pro Flächenelement und pro Raumwinkel abgestrahlt beziehungsweise empfangen wird. Sind also messbare Teilmengen $\Lambda \subset (0, \infty)$, $U \subset \partial K$ und $S \subset \Omega$ gegeben, so kann man die spektrale Strahldichte über die abgegebene Strahlungsleistung $\Phi(\Lambda, U, S)$ der Oberfläche U in den Raumwinkelbereich S definieren. Die zugehörige Abbildung ist dann wie folgt gegeben.

$$\mathcal{L}: (0, \infty) \times \partial K \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$$

$$\Phi(\Lambda, U, S) =: \int_{\Lambda} \int_U \int_S \mathcal{L}(\lambda, x, \omega) |\langle \mu(x), \omega \rangle| \, d\omega \, d\sigma(x) \, d\lambda$$

Abbildung 6 zeigt eine Skizze, welche die Struktur dieser Abbildung verdeutlicht. Der Erfahrung nach stellt die spektrale Strahldichte für das menschliche Auge die sinnvollste messbare Größe für die empfundene Helligkeit einer Oberfläche bezüglich eines Beobachtungspunktes dar.

Eine weitere Größe, die wir hier einführen möchten, ist die sogenannte spektrale »Bestrahlungsstärke« oder auch spektrale Irradianz (engl.: *spectral irradiance*). Sie wird vor allem bei der noch folgenden Konstruktion der Irradiance Maps benötigt werden. Wir definieren sie für eine messbare Teilmenge $S \subset \Omega$.

$$\mathcal{E}: (0, \infty) \times \partial K \rightarrow [0, \infty), \quad \mathcal{E}(\lambda, x) := \int_S \mathcal{L}(\lambda, x, \omega) |\langle \mu(x), \omega \rangle| \, d\sigma(\omega)$$

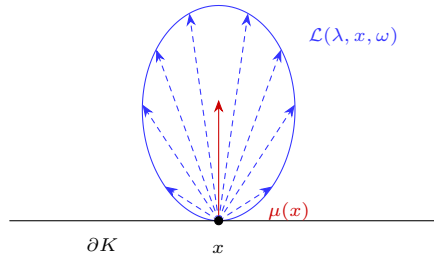


Abbildung 6: Die Skizze stellt ein qualitatives Beispiel einer spektralen Strahldichte \mathcal{L} dar, die an einem Punkt x auf der Oberfläche ∂K und für eine Wellenlänge λ eine Verteilung in Abhängigkeit von ω auf der Einheitskugel besitzt. In der Abbildung ist dabei die Abstrahlung nur erlaubt, wenn $\langle \omega, \mu(x) \rangle > 0$, wobei $\mu(x)$ die äußere Normale im Punkt x beschreibt.

Die spektrale Bestrahlungsstärke quantifiziert die Energie pro Zeit, pro Wellenlängenänderung und pro Flächenelement, die an einem Punkt auf der Oberfläche des Objektes aus dem Raumwinkelbereich S empfangen wird.

Für die weiteren Algorithmen und Implementierungen reicht es entkoppelte Abbildungen zu betrachten, welche für jeden Punkt einer Szene und jede gegebene Richtung der Strahldichte beziehungsweise der Irradianz entsprechen. Später werden dies die Funktionen sein, die wir durch »Path Tracing« simulieren und durch geeignetes »Surface Caching« zwischenspeichern wollen.

DEFINITION 1.9: (Strahldichte- und Irradianz-Funktion)

Sei \mathcal{S} eine Szene. Dann ist eine Strahldichte-Funktion von \mathcal{S} gegeben durch eine integrierbare Abbildung

$$L_{\mathcal{S}}: (0, \infty) \times S(\mathcal{S}) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$$

Die zu $L_{\mathcal{S}}$ gehörige Irradianz-Funktion ist definiert durch

$$E_{L_{\mathcal{S}}}: (0, \infty) \times S(\mathcal{S}) \rightarrow [0, \infty), \quad E_{L_{\mathcal{S}}}(\lambda, x) := \int_{\Theta_{\mu(x)}} L_{\mathcal{S}}(\lambda, x, \omega) \langle \mu(x), \omega \rangle \, d\sigma(\omega)$$

Ist aus dem Kontext klar, um welche Strahldichte-Funktion es sich handelt, schreiben wir auch $E_{\mathcal{S}}$.

1.4 Reflexionen an Oberflächen

Um Primitive zu definieren nutzten wir eine abstrakte Menge \mathcal{M} , welche die Elemente enthielt, die die Materialien unserer Szene charakterisierten. Der Grund dafür war, dass die Beschreibung von Materialien ein komplexes Thema ist, dessen vollständige Behandlung hier nicht möglich ist. Wir wollen uns hier auf eine spezielle Kategorie von Materialien beschränken. Dabei beachten wir nur die Reflexion und Absorption, nicht aber die Transmission von Licht. Die Idee besteht darin, ein Material durch eine geeignete Funktion auf der Oberfläche zu charakterisieren. Diese Funktionen nennt man »Bidirektionale Reflektanzverteilungsfunktionen« (engl.: *bidirectional reflectance distribution function*, BRDF). Sie beschreiben den Anteil des reflektierten Lichtes in Abhängigkeit des Ein- und Ausfallwinkels. In Abbildung 7 wird anhand einer Skizze die folgende Definition dieser verdeutlicht.

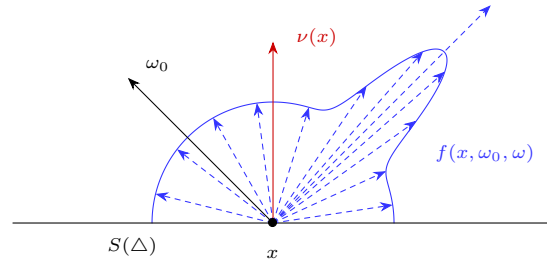


Abbildung 7: Die Abbildung zeigt die typische Verteilung des reflektierten Lichtes über der Hemisphäre einer häufig verwendeten BRDF f bezüglich einer konstanten Einfallrichtung ω_0 an einem Punkt $x \in S(\Delta)$. Auch hier sind Δ ein Dreieck und ν eine Normalen-Funktion auf Δ .

DEFINITION 1.10: (BRDF)

Sei $\mu \in \Omega$ eine Normale. Dann ist eine BRDF bezüglich μ gegeben durch eine integrierbare Abbildung

$$f: \Theta_\mu \times \Theta_\mu \rightarrow [0, \infty)$$

Es handelt sich bei f um eine physikalische BRDF, wenn die folgenden Eigenschaften für alle $\omega_i, \omega_o \in \Theta_\mu$ erfüllt sind.

$$(i) \quad f(\omega_i, \omega_o) = f(\omega_o, \omega_i) \quad (\text{Helmholtz-Reziprozität})$$

$$(ii) \quad \int_{\Theta_\mu} f(\omega_i, \omega) |\langle \mu, \omega \rangle| \, d\sigma(\omega) \leq 1 \quad (\text{Energieerhaltung})$$

Gilt in (ii) die Gleichheit, so nennt man f auch eine ideale physikalische BRDF.

BRDFs sind im Allgemeinen nicht in geschlossener Form notierbar. Aus diesem Grund wollen wir für die Konstruktion realistischer BRDFs verschiedene einzelne Reflexionsmodelle zu Grunde legen. Die daraus entstehenden idealen BRDFs können dann durch eine Linearkombination miteinander verbunden werden, um so reale Materialien nachzuahmen. Zu beachten ist, dass die beiden folgenden eingeführten Beispiele solcher Modelle gewisse auftretende physikalische Effekte, wie zum Beispiel die Fresnel-Reflexion, nicht berücksichtigen.

DEFINITION 1.11: (spezielle BRDFs)

Sei $\mu \in \Omega$ eine Normale. Dann definiert man die folgenden BRDFs bezüglich μ für alle $\omega_i, \omega_o \in \Theta_\mu$.

$$(i) \quad \text{ldr}(\omega_i, \omega_o) := \frac{1}{\pi} \quad (\text{lambertsch diffus})$$

$$(ii) \quad \text{psr}(\omega_i, \omega_o) := \frac{1}{|\langle \mu, \omega_i \rangle|} \delta_{\omega_o} (2 \langle \mu, \omega_i \rangle \mu - \omega_i) \quad (\text{perfekt spiegelnd})$$

Möchte man zusätzlich die Transmission von Licht an einem Punkt mit Normaler $\mu \in \Omega$ betrachten, so lässt sich analog zur Menge der BRDFs bezüglich μ eine Menge von Funktionen auf $\Theta_{-\mu} \times \Theta_{-\mu}$ definieren. Die Funktionen dieser Klasse werden Bidirektionale Transmissionsverteilungsfunktionen (engl.: *bidirectional transmittance distribution function*, BTDF) genannt. Die Zusammenführung einer BRDF und einer BTDF auf Ω führt zur verallgemeinerten Bidirektionalen Streuungsverteilungsfunktion (engl.: *bidirectional scattering distribution function*, BSDF).

Diese Definition zeigt diverse Probleme auf, die bei der Modellierung von Objekten entstehen können. Dreiecke der Primitive in einer Szene dürfen sich im Allgemeinen beliebig schneiden. Dadurch ist es im Allgemeinen nicht möglich jedem Oberflächenpunkt eine eindeutige äußere Normale zuzuordnen. Bei der Generierung der Irradiance Maps werden sich diese Punkte als Fehler äußern.

Die abstrakte Definition ist für die Implementierung leider noch nicht ausreichend.

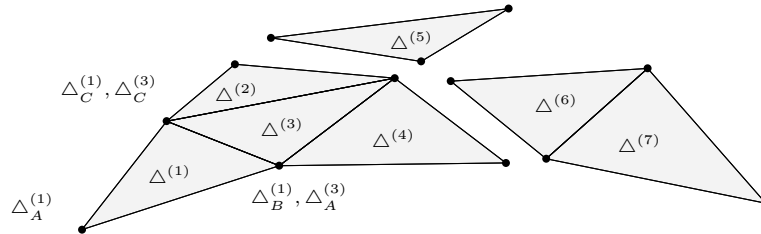


Abbildung 8: Die Abbildung zeigt eine beispielhafte Menge von Dreiecken $\{\Delta^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}, i \leq 7\}$. Verschiedene Gruppen von Dreiecken bilden eine Approximation einer Oberfläche im Raum. Dabei werden die Eckpunkte der Dreiecke geteilt und es gilt zum Beispiel $\Delta_B^{(1)} = \Delta_A^{(3)}$ und $\Delta_C^{(1)} = \Delta_C^{(3)}$.

Aufgrund der Definition von physikalischer BRDFs muss bei Linearkombination eine weitere Bedingung beachtet werden. Das folgende Theorem klärt dies genauer.

THEOREM 1.2: (Linearkombination von BRDFs bildet wieder eine BRDF)

Seien Δ ein Dreieck und ν eine äußere Normalen-Funktion auf Δ . Seien weiterhin $n \in \mathbb{N}$ und für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$ ideale BRDFs f_i und Koeffizienten $\alpha_i \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ gegeben. Dann ist die folgende Funktion wieder eine physikalische BRDF.

$$f := \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$$