表示论在投票理论中的应用

曹永知

北京大学信息科学技术学院计算机系

2019 年 9 月 6 日

目录

投票简介

投票问题

现有 n 个候选人（编号为 $1, 2, \ldots, n$）及若干投票人；
每个投票人对候选人有自己的偏好。

- 称所有选举人的偏好情况为一个 profile（即：每种偏好的人数）。
- 将所有的选票视为一组基，则 profile 构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个向量空间。

投票问题示例

考虑以下情形：有 A, B, C 三名候选人，选票及数量如下：

选票数量	13	0	19	0	17	5
第一顺位	A	A	B	B	C	C
第二顺位	B	C	A	C	A	B
第三顺位	C	B	C	A	B	A

方法 1：只取第一顺位，多数获胜

候选人	A	B	C
票数	13	19	22

此时 C 将获胜

投票问题示例

考虑以下情形：有 A, B, C 三名候选人，选票及数量如下：

选票数量	13	0	19	0	17	5
第一顺位	A	A	B	B	C	C
第二顺位	B	C	A	C	A	B
第三顺位	C	B	C	A	B	A

方法 2：第 $1, 2, 3$ 顺位选票分别计 $1, t, 0$ 分，总分高者获胜

A	B	C
$13+36t$	$19+18t$	22

- $0 < t < 1/6$：C 胜；
- $1/6 < t < 1/3$：B 胜；
- $1/3 < t < 1$：A 胜。

常用的投票规则：位置投票制

位置投票制：按候选人在偏好中所处位置进行打分

取一组 $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{Q}$，$w_i$ 表示一张第 i 顺位选票能给候选人带来的分数；统计各个候选人的分数，分数最高的候选人为胜者。
称 $w = [w_1, \ldots, w_n] \in \mathbb{Q}^n$ 为加权向量。

位置投票制有以下几种常见的特例：

- 多数原则，$w = [1, 0, \ldots, 0]$;
- 反多数原则，$w = [1, \ldots, 1, 0]$;
- Borda 计数，$w = [n-1, n-2, \ldots, 1, 0]$;

投票问题示例

考虑以下情形：有 A, B, C 三名候选人，选票及数量如下：

选票数量	13	0	19	0	17	5
第一顺位	A	A	B	B	C	C
第二顺位	B	C	A	C	A	B
第三顺位	C	B	C	A	B	A

方法 3：孔多塞制

A: B	B: C	A : C
30 : 24	32 : 22	32 : 22

$A > C$，$A > B$

此时 A 将获胜

常见的投票规则：孔多塞制

孔多塞（Condorcet）制：候选人间两两对决

将候选人两两进行比较，只要一个候选人在过半选票中位次高于另一候选人，该候选人即能击败另一者；
击败所有人的候选人即为最终的胜者，称为孔多塞赢家。

- 但孔多塞赢家并非总是存在，不存在的情形意味着存在一个候选人之间互相击败的循环，称为孔多塞悖论；
- 不同投票规则对于孔多塞悖论的解决方法不同，一个简单的办法是最大最小制：被击败次数最少的候选人获胜。

Saari：分割空间

Donald Saari 在一些工作中，利用一些几何方法将 profile 空间分割成了一些子空间：

- **Kernel** 不影响任何投票结果
- **Borda** 影响位置投票和孔多塞投票
- **Condorcet** 导致孔多塞悖论
- **Reversal** 只影响位置投票

$n=3$ 时的情形如下：

	Kernel	Borda b_A	Borda b_B	Borda b_C
ABC	1	1	0	-1
ACB	1	1	-1	0
BAC	1	0	1	-1
BCA	1	-1	1	0
CAB	1	0	-1	1
CBA	1	-1	0	1

Saari：分割空间

Donald Saari 在一些工作中，利用一些几何方法将 profile 空间分割成了一些子空间：

Kernel	不影响任何投票结果
Borda	影响位置投票和孔多塞投票
Condorcet	导致孔多塞悖论
Reversal	只影响位置投票

$n=3$ 时的情形如下：

	Condorcet	Reversal r_A	Reversal r_B	Reversal r_C
ABC	1	1	-2	1
ACB	-1	1	1	-2
BAC	-1	-2	1	1
BCA	1	1	1	-2
CAB	1	-2	1	1
CBA	-1	1	-2	1

这些空间的作用原理如下所示：

1^{st} 2^{nd} 3^{rd}	A B C	A C B	B A C	B C A	C A B	C B A	得分 $w=[1,t,0]$ A	B	C
Ker	1	1	1	1	1	1	$2+2t$	$2+2t$	$2+2t$
b_A	1	1	0	-1	0	-1	2	-1	-1
b_B	0	-1	1	1	-1	0	-1	2	-1
b_C	-1	0	-1	0	1	1	-1	-1	2
Cond	1	-1	-1	1	1	-1	0	0	0
r_A	1	1	-2	1	-2	1	$2-4t$	$-1+2t$	$-1+2t$
r_B	-2	1	1	1	1	-2	$-1+2t$	$2-4t$	$-1+2t$
r_C	1	-2	1	-2	1	1	$-1+2t$	$-1+2t$	$2-4t$

这些空间的作用原理如下所示：

1st 2nd 3rd	A B C	A C B	B A C	B C A	C A B	C B A	$A>B$ vs. $A<B$	$B>C$ vs. $B<C$	$C>A$ vs. $C<A$
Ker	1	1	1	1	1	1	0	0	0
b_A	1	1	0	-1	0	-1	4	0	-4
b_B	0	-1	1	1	-1	0	-4	4	0
b_C	-1	0	-1	0	1	1	0	-4	4
Cond	1	-1	-1	1	1	-1	2	2	2
r_A	1	1	-2	1	-2	1	0	0	0
r_B	-2	1	1	1	1	-2	0	0	0
r_C	1	-2	1	-2	1	1	0	0	0

Zajj Daugherty 等人在 Saari 的基础上进行了进一步的研究：

- 引入 tabloid 等组合对象来描述投票；
- 利用表示论中的一些结果来分析计票的过程：
    - 主要集中在位置投票和孔多塞投票

杨图、杨表和 tabloid

定义 (分解与划分)

设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$，其中 $\lambda_i \in \mathbb{Z}^+$，$\forall i$。
若 $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = n$，则称 λ 为 n 的一个分解；
进一步，若 $\lambda_i \geqslant \lambda_{i+1}$，$\forall i$，则称 λ 为 n 的一个划分。

设 λ 是 n 的一个分解，定义：

- 形状为 λ 的杨图：共 m 行，第 i 行 λ_i 个方块
- 形状为 λ 的杨表：将 $1, \ldots, n$ 不重复地填入杨图中所得到的数字表
    - 杨表的等价：形状相同，且每行的数字集都相同
- 形状为 λ 的 tabloid：上述等价关系的一个等价类，记为 λ-tabloid

例如：$\begin{array}{|c|c}\hline 1 & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \hline\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c}\hline 1 & \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \hline\end{array}$ 是等价的杨表，对应的 tabloid 为 $\begin{array}{|cc}\hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline\end{array}$

Tabloid 与偏好

设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ 是 n 的一个分解

偏好是对 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的排序，我们将其分为全序和部分序考虑：

部分序：允许多个元素位次一致

用形状为 λ 的 tabloid 来表示部分序

- λ-tabloid 的全体记为 X^λ
- λ-tabloid 共有 $\frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_m!}$ 种
- 其 profile 为 $\mathbb{Q}X^\lambda$ 中的元素

全序：$\{1, 2, \ldots, n\}$ 的完整排列

我们用 S_n 中的元素来表示全序

- 排列的全体为 S_n
- n 元集的全序共 $n!$ 种
- 其 profile 为 $\mathbb{Q}S_n$ 中的元素

考虑 $\sigma \in S_n$ 在 X^λ 上的左乘作用，即对 tabloid 中的元素施加 σ 变换。例如：设 $\sigma = (1\ 2\ 3) \in S_3$，则

$$\sigma \cdot \begin{array}{|cc}\hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|cc}\hline \sigma(1) & \\ \hline \sigma(2) & \sigma(3) \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|cc}\hline 2 & \\ \hline 3 & 1 \\ \hline\end{array}$$

我们称 $\mathbb{Q}X^\lambda$ 为 λ 对应的置换模（permutation module），记作 M^λ。

Tabloid 与偏好

M^λ 是 $\mathbb{Q}S_n$-模，我们用两个例子来说明：

- 若 $\lambda=(n)$，则 M^λ 作为 $\mathbb{Q}S_n$-模与 $\mathbb{Q}$ 同构，此时偏好只有一种，即将所有候选人都排在相同的位次；
- 若 $\lambda=(1,1,\ldots,1)$，则 M^λ 作为 $\mathbb{Q}S_n$-模与 $\mathbb{Q}S_n$ 同构，此时的偏好为全序。

注

注意，对于任一 n 的分解 λ，M^λ 总是与 $M^{\sigma(\lambda)}$ 同构，其中 $\sigma\in S_m$.

例如：

- $M^{(1,n-1)}\cong M^{(n-1,1)}$;
- $M^{(1,1,n-2)}\cong M^{(1,n-2,1)}\cong M^{(n-2,1,1)}$.

用 Tabloid 描述投票

我们主要关注以下三种情形：

$\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$

此时 X^λ 中的一个 tabloid 对应 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的一个全序，因此对应于一张将所有候选人排序的选票。

$\lambda = (1, 1, n-1)$

此时 X^λ 中的一个 tabloid 对应 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中的一个有序二元组，因此对应于孔多塞投票中第一行元素的顺位高于第二行元素的情形。

$\lambda = (1, n-1)$

此时 X^λ 中的一个 tabloid 对应 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中的一个一元子集，因此对应于一个投票结果（胜者）。

一个例子

我们用一个例子来说明 X^λ 与投票的关系：

例

设有 $n=4$ 个候选人，则所有选票的情形共有 24 种：

$$X^{(1,1,1,1)}=\left\{\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 4\\\hline 3\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline 2\\\hline 4\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline 4\\\hline 2\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 4\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 4\\\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array},\ \cdots\right\}.$$

位置投票所能产生的所有情形共有 4 种：

$$X^{(1,3)}=\left\{\begin{array}{|ccc|}\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{2}{c}{} \\\hline 2 & 3 & 4\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|ccc|}\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{2}{c}{} \\\hline 1 & 3 & 4\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|ccc|}\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{2}{c}{} \\\hline 1 & 2 & 4\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|ccc|}\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{4} & \multicolumn{2}{c}{} \\\hline 1 & 2 & 3\\\hline\end{array}\right\}.$$

一个例子

我们用一个例子来说明 X^λ 与投票的关系：

例

设有 $n=4$ 个候选人，则所有选票的情形共有 24 种：

$$X^{(1,1,1,1)}=\left\{\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 4\\\hline 3\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline 2\\\hline 4\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline 4\\\hline 2\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 4\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 4\\\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array},\ \ldots\right\}.$$

孔多塞投票所能产生的所有情形共有 12 种：

$$X^{(1,1,2)}=\left\{\begin{array}{|c|c}\cline{1-1} 1 & \\\cline{1-1} 2 & \\\hline 3 & \multicolumn{1}{c|}{4}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c}\cline{1-1} 2 & \\\cline{1-1} 1 & \\\hline 3 & \multicolumn{1}{c|}{4}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c}\cline{1-1} 1 & \\\cline{1-1} 3 & \\\hline 2 & \multicolumn{1}{c|}{4}\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c}\cline{1-1} 3 & \\\cline{1-1} 1 & \\\hline 2 & \multicolumn{1}{c|}{4}\\\hline\end{array},\ \ldots\right\}.$$

接下来我们用表示论来分析 M^λ 的结构以及上述两种投票的计票过程

M^λ 的结构

定理 (Maschke's Theorem)

令 G 是一个有限群，F 是一个域，其特征不能整除 $|G|$. 若 M 是一个非平凡 FG-模，则 M 可以分解为若干不可约模的直和：

$$M \cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_k.$$

在我们的讨论中：

- $G = S_n$ 为有限群；
- $F = \mathbb{Q}$，即 $\mathrm{ch}\ F = 0$，显然不整除任何 S_n 的阶。

因此，由上述定理可知：M^λ 可分解为若干不可约 $\mathbb{Q}S_n$-模的直和。并且，在同构意义下，这种分解是唯一的。

M^λ 的结构

我们使用 Specht 模来分解 M^λ，其中 μ 为 n 的划分：

$$M^\lambda \cong \bigoplus_\mu \kappa_{\mu\lambda} S^\mu$$

其中 $\kappa_{\mu\lambda}$ 是 Kostka 数，记录每个模在 M^λ 中的重数。
我们所关注的一些 M^λ 的结构如下：

$$\begin{aligned}
M^{(1,\dots,1)} &\cong \bigoplus_\mu (\dim S^\mu) S^\mu \\
&\cong S^{(n)} \oplus (n-1)S^{(n-1,1)} \oplus 2(n-3)S^{(n-2,2)} \oplus \cdots \oplus S^{(1,\dots,1)} \\
M^{(1,n-1)} &\cong S^{(n)} \oplus S^{(n-1,1)} \\
M^{(1,1,n-2)} &\cong S^{(n)} \oplus 2S^{(n-1,1)} \oplus S^{(n-2,2)} \oplus S^{(n-2,1,1)} \\
M^{(n)} &\cong S^{(n)}
\end{aligned}$$

与 Saari 工作的关系

特别地，$n=3$ 时，有：

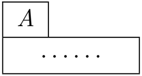
$$M^{(1,1,1)} \cong S^{(3)} \oplus 2S^{(2,1)} \oplus S^{(1,1,1)}$$

其中：

- $S^{(3)}$ 对应于 $\mathbb{Q}^3$ 中向量 $(1,1,1)$ 生成的空间，因此对应于 Saari 划分的 Kernel 空间；
- $S^{(1,1,1)}$ 的维数为 1，对应于 Saari 划分的 Condorcet 空间；
- 剩下的两个空间维数均为 2，因此都对应于 $S^{(2,1)}$.

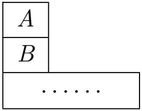
孔多塞投票与位置投票的计票规则

- 对于位置投票，结果应是一名胜者，即 $M^{(1,n-1)}$ 中的元素：



$\longrightarrow$ A 获胜

- 对于孔多塞投票，结果应是候选人之间的两两比较，即 $M^{(1,1,n-2)}$ 中的元素：



$\longrightarrow$ A 的顺位高于 B

孔多塞投票的矩阵表示

若我们固定一个 X^λ 内部的顺序，则我们可以将其上的 profile 视为 $\mathbb{Q}^{|X^\lambda|}$ 中的向量。如此我们即可用矩阵来表示计数映射。

例如：$n=3$ 时，若我们规定 X^λ 的顺序为：

$$\boxed{\begin{array}{c}A\\ \hline B\\ \hline C\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{c}A\\ \hline C\\ \hline B\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{c}B\\ \hline A\\ \hline C\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{c}B\\ \hline C\\ \hline A\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{c}C\\ \hline A\\ \hline B\end{array}},\ \boxed{\begin{array}{c}C\\ \hline B\\ \hline A\end{array}}$$

则孔多塞投票可表示为矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \to \text{对应 } A>B \text{ 情形} \\ \to \text{对应 } A>C \text{ 情形} \\ \to \text{对应 } B>A \text{ 情形} \\ \to \text{对应 } B>C \text{ 情形} \\ \to \text{对应 } C>A \text{ 情形} \\ \to \text{对应 } C>B \text{ 情形} \end{array}$$

位置投票的矩阵表示

若我们固定一个 X^λ 内部的顺序，则我们可以将其上的 profile 视为 $\mathbb{Q}^{|X^\lambda|}$ 中的向量。如此我们即可用矩阵来表示计数映射。

例如：$n=3$ 时，若我们规定 X^λ 的顺序为：

$$\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline B\\\hline C\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline A\\\hline C\\\hline B\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline B\\\hline A\\\hline C\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline B\\\hline C\\\hline A\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline C\\\hline A\\\hline B\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline C\\\hline B\\\hline A\\\hline\end{array}$$

设加权向量为 $w=[1,t,0]$，则位置投票可表示为矩阵

$$T_w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 1 & 1 & 0 & t \\ 0 & t & 0 & t & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{对应候选人 } A \\ \to \text{对应候选人 } B \\ \to \text{对应候选人 } C \end{array}$$

中立性：模同态

利用一些代数方法，可证明下述定理：

定理

任何孔多塞投票映射和位置投票映射都是 $\mathbb{Q}S_n$-模同态。

因此我们可以利用 Schur 引理来处理计票的过程：

定理 (Schur's Lemma)

任何不可约模之间的非零同态是同构。

另一方面，投票映射是模同态意味着这两种投票是中立的：

投票的中立性

若一个投票机制的胜者总是与候选人的编号方式无关，则称其为中立的。

这是因为：

$$\forall a \in \mathbb{Q}S_n, \quad T(a \cdot f) = a \cdot T(f).$$

孔多塞投票

孔多塞投票可以视为一个同态 P:

$$P: \quad M^{(1,\ldots,1)} \cong S^{(n)} \oplus (n-1)S^{(n-1,1)} \oplus 2(n-3)S^{(n-2,2)} \oplus \binom{n-1}{2} S^{(n-2,1,1)} \oplus \cdots$$
$$\to M^{(1,1,n-2)} \cong S^{(n)} \oplus 2S^{(n-1,1)} \oplus S^{(n-2,2)} \oplus S^{(n-2,1,1)}$$

位置投票

位置投票可以视为一个同态 T_w:

$$T_w: \quad M^{(1,\ldots,1)} \cong S^{(n)} \oplus (n-1)S^{(n-1,1)} \oplus \cdots$$
$$\to M^{(1,n-1)} \cong S^{(n)} \oplus S^{(n-1,1)}$$

孔多塞投票与位置投票

对比以上两个同态的左右两端，应用 Schur 引理可得：

- 只有 $S^{(n)}$，$S^{(n-1,1)}$，$S^{(n-2,2)}$，$S^{(n-2,1,1)}$ 中的选票对孔多塞投票 P 有实际作用；
- 只有 $S^{(n)}$ 和 $S^{(n-1,1)}$ 中的选票对 T_w 决定的位置投票有实际作用。

对于位置投票，有如下定理成立：

定理

令 $n \geqslant 2$，$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ 为 n 的一个划分。设 $w_1, \dots, w_k$ 是 $\mathbb{Q}^m$ 上的一个线性无关向量组。若 $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Q}^n$ 为一组和零向量，则存在无穷多个 *profile* $p \in M^\lambda$，*s.t.* $T_{w_i}(p) = r_i$，$\forall 1 \leqslant i \leqslant k$.

换言之，位置投票可以通过调整加权向量 w 来在一定程度上控制投票的结果。

孔多塞投票与位置投票

至此，孔多塞投票与位置投票有诸多不同。但我们希望能找到一个合适的 w，使得 w 决定的位置投票与孔多塞投票的冲突尽可能小：

我们希望：若 p 在其中一者的 $\ker$ 中，则也在另一者的 $\ker$ 中

- 若 p 对于两种投票而言都为平局，且 p 不在二者的 $\ker$ 中，则 p 只能在 $S^{(n)}$ 中；
- 若 p 对于二者不都是平局，则其必在 $S^{(n-1,1)}$ 中。

$M^{(1,1,n-2)}$ 的直和分解提示我们，在 P 的像空间中，$S^{(n-1,1)}$ 的重数可能为 2. 但事实上并非如此：

引理 (同态 P 的像)

若 $P: M^{(1,\dots,1)} \to M^{(1,1,n-2)}$ 是一个孔多塞投票，则

$$\mathrm{Im}\ P \cong S^{(n)} \oplus S^{(n-1,1)} \oplus S^{(n-2,1,1)}.$$

孔多塞投票与位置投票

因此，为了使两个映射的核之间的重叠最大化：

我们需要找到一个 w，使得在 $\ker T_w$ 的正交补中只包含一重的 $S^{(n-1,1)}$.

下面的引理保证了唯一性：

引理

令 T_w 为加权向量 w 决定的位置投票，则 $\ker T_w = \ker T_{w'} \iff w = w'$.

由此我们得到：

- 若存在一个能够最小化孔多塞投票与位置投票冲突的 w，则这个 w 是唯一的。

位置投票与孔多塞投票

我们希望找到 w，使得存在 ζ 使得下列图表交换：

$$\begin{tikzcd}
M^{(1,\dots,1)} \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "T_w"'] & M^{(1,1,n-2)} \arrow[d, "\zeta"] \\
& M^{(1,n-1)}
\end{tikzcd}$$

即存在 $\zeta : M^{(1,1,n-2)} \to M^{(1,n-1)}$，s.t.

$$\zeta \circ P(p) = T_w(p), \quad \forall p \in M^{(1,\dots,1)}$$

我们考虑这样的 ζ：
对于候选人 A，记 profile 中 A 的顺位高于另一候选人 X 的次数为 $\alpha(A, X)$，构造 ζ 如下：

$$\zeta = \left[\frac{\sum\limits_{X \in X^{(1,1,n-2)}} \alpha(A, X)}{n-1}, \frac{\sum\limits_{X \in X^{(1,1,n-2)}} \alpha(B, X)}{n-1}, \dots \right]$$

Borda 计数

事实上，对于 Borda 计数与上述 ζ 有如下结论成立：

引理

令 P 为一个孔多塞投票，ζ 是上文中定义的映射，T_w 为 *Borda* 计数，则：

$$\zeta \circ P(p) = T_w(p), \quad \forall p \in M^{(1,\ldots,1)}.$$

进一步，有如下定理：

定理

对于全序情形，*Borda* 计数是唯一能最小化位置投票与孔多塞投票冲突的位置投票机制。

部分序情形

上文中的讨论始终是基于全序（即 $1, 2, \ldots, n$ 的排列）的，事实上，这些结果可以推广到部分序的情形：

部分序

在部分序中，只给 n 个候选人中的 k 个进行排序，剩下的候选人被视为等同。

即：考虑形状为 $\lambda = (1, \ldots, 1, n-k)$ 的 tabloid.

我们可以将部分序转化为全序：

$$\begin{array}{|cc|}\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{1} & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} = \left(\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right)$$

部分序下的投票

在部分序下，也可定义位置投票和广义孔多塞投票：

位置投票 T_w^λ

令 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ 为 n 的分解，此时的加权向量为 $w = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$，即给所有处在第 i 行的候选人均等地记 w_i 分，这样的投票机制称为位置投票。

广义孔多塞投票 P_t

对于候选人 A 而言：

- A 每在一张选票中严格高于另一候选人 X，记 1 分；
- A 每在一张选票中与另一人 X 位次相同，记 t 分；
- 其余情况记 0 分。

将所有人的得分统计出，这样的投票机制称为广义孔多塞投票。

部分序下的结果

在部分序下，我们可以得到一些类似于全序情形的结果：

引理

考虑 $\lambda = (1, \ldots, 1, n-k)$ 的情形。令 T_w^λ 为 w 决定的位置计数映射，则：

$$\ker T_w^\lambda = \ker T_{w'}^\lambda \iff w = w'.$$

定理

在 $\lambda = (1, \ldots, 1, n-k)$ 情形下，能最小化位置投票与广义孔多塞投票冲突的类似 *Borda* 计数的唯一方法就是给第 i 顺位 $1 - \frac{2(i-1)}{n+k-1}$ 分，$1 \leqslant i \leqslant k$，其余候选人 0 分。

参考文献：表示论与投票

- Barcelo, H., Bernstein, M., Bockting-Conrad, S., Mcnicholas, E., Nyman, K., Viel, S. (2018). Algebraic voting theory and representations of $S_m \wr S_n$. *arXiv:1807.03743v1 [math.CO] 6 Jul 2018.*
- Crisman, K. D., Orrison, M. E. (2017). Representation theory of the symmetric group in voting theory and game theory. *Algebraic and Geometric Methods in Discrete Mathematics*, 685, 97.
- Daugherty, Z., Eustis, A. K., Minton, G., Orrison, M. E. (2009). Voting, the symmetric group, and representation theory. *The American Mathematical Monthly*, 116(8), 667-687.
- Saari, D. G. (1999). Explaining all three-alternative voting outcomes. *Journal of Economic Theory*, 87(2), 313-355.
- Saari, D. G. (2000). Mathematical structure of voting paradoxes. *Economic Theory*, 15(1), 1-53; 55-102

- Arnold, F., Steinberg, B. (2006). Synchronizing groups and automata. *Theoretical Computer Science*, 359(1-3), 101-110.
- Fellah, A., Jürgensen, H., Yu, S. (1990). Constructions for alternating finite automata. *International Journal of Computer Mathematics*, 35(1-4), 117-132.
- Rees, S. (2008). The automata that define representations of monomial algebras. *Algebras and Representation Theory*, 11(3), 207-214.

- Botero, A. (2016). Quantum information and the representation theory of the symmetric group. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 50(2), 191-209.
- Brylinski, J. L., Brylinski, R. (2002). Universal quantum gates. *In Mathematics of Quantum Computation* (pp. 117-134). Chapman and Hall/CRC.
- Hallgren, S., Russell, A., Ta-Shma, A. (2000). Normal subgroup reconstruction and quantum computation using group representations. In Proceedings of *the Thirty-Second Annual ACM symposium on Theory of Computing* (pp. 627-635). ACM.
- Woit, P. (2016). Quantum Theory, Groups and Representations: An Introduction (under construction). *Columbia University*. March, 13.

谢　谢!