第一章 信号与系统的概念

一、根据函数表达式画波形

理解阶跃信号的含义、表示信号的方法。

$$f(t)\left[\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)\right]$$

$$\boldsymbol{f(k)\left[\varepsilon(k-k_1)-\varepsilon(k-k_2)\right]}$$

例

（1）试画出 $f(t)=\delta[\sin \pi t]$的波形。

（2）试画出 $f(t)=\varepsilon[\sin t]$的波形。

（3）试画出 $f(t)=r[\sin 2\pi t]$的波形。

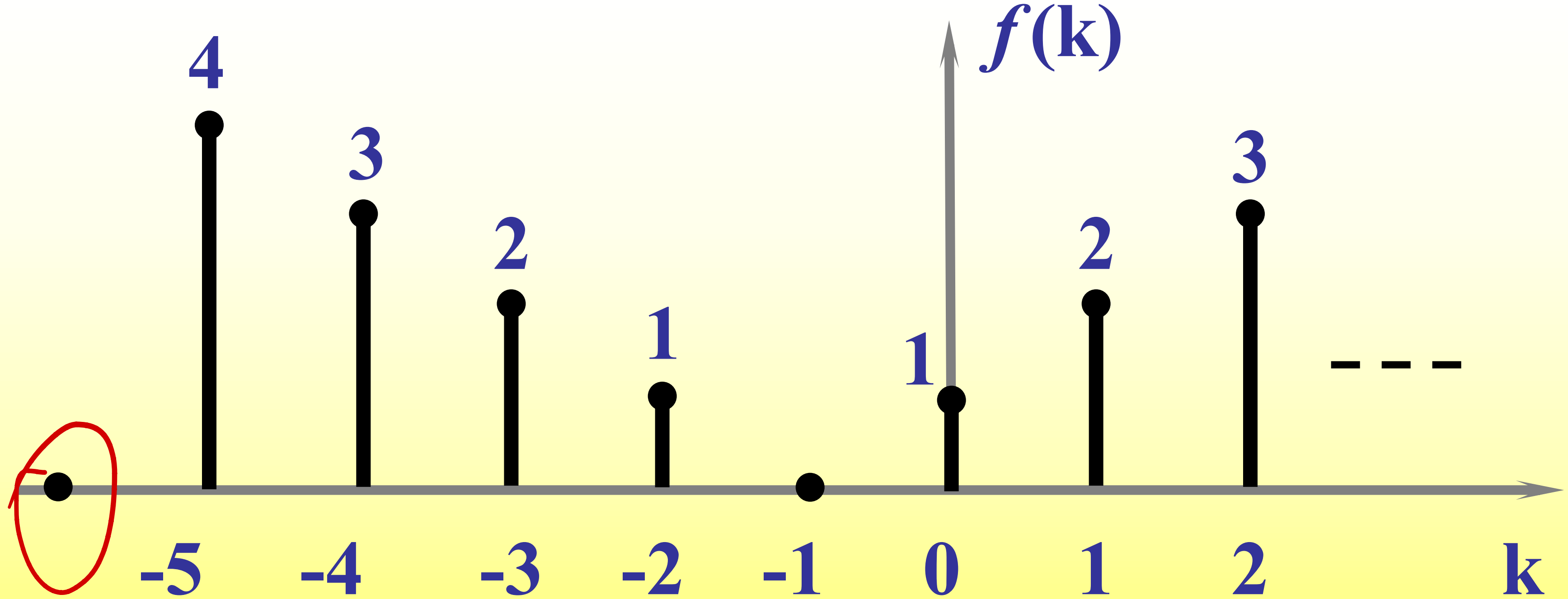
（4）试画出 $f(k)=\varepsilon[2-k^2]$的波形。

例

试画出信号的波形

$$(1)\quad f(k)=|k+1|\varepsilon(k+5)$$

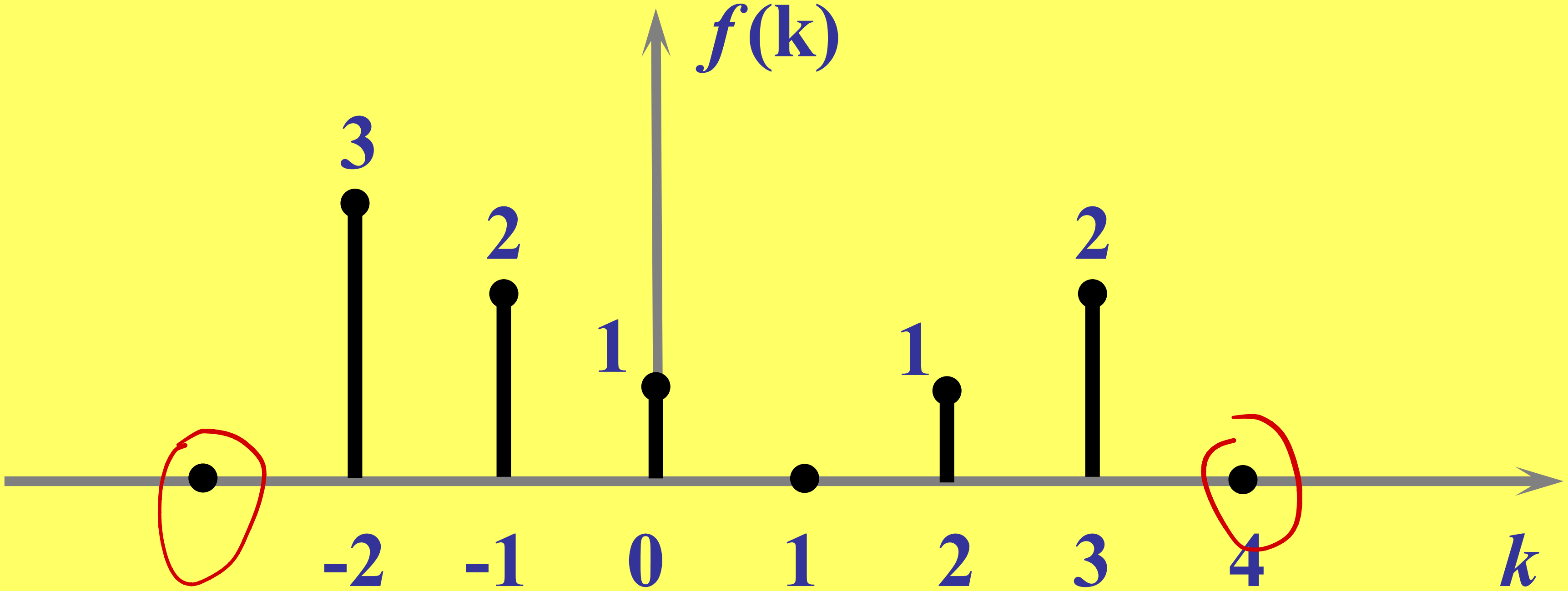
答：



试画出信号的波形

$$(2)\quad f(k)=|k-1|\left[\varepsilon(k+2)-\varepsilon(k-4)\right]$$

答：



二、阶跃信号与冲激信号的关系：

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t)=\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=\varepsilon(t)$$

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t-t_0)=\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)d\tau=\varepsilon(t-t_0)$$

$$\varepsilon(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n)$$

$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

三、冲激信号的性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = \varepsilon(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

☞ 冲激信号的筛选特性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta'(t-t_0)dt = -f'(t_0)$$

性质：

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot\delta(t-t_0)dt=\begin{cases} f(t_0) & t_1\le t_0\le t_2 \\ 0 & t_0<t_1,\ t_0>t_2 \end{cases}$$

性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot\delta'(t-t_0)dt=\begin{cases} -f'(t_0) & t_1\le t_0\le t_2 \\ 0 & t_0<t_1,\ t_0>t_2 \end{cases}$$

☞ 冲激信号的尺度变换特性：

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

例：

$$\int_{-2}^{2} e^{-3t} \cdot \delta(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{-3t} \cdot \delta(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

四、线性系统的性质：

1、均匀性：

$$\boxed{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \quad \to \quad a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)}$$

2、时不变性：

若： $\boxed{f(t) \quad \to \quad y(t)}$

则： $\boxed{f(t-t_0) \quad \to \quad y(t-t_0)}$

3、微、积分特性

若：

$$f(t) \to y(t)$$

$$h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

则：

$$\frac{d}{dt} f(t) \to \frac{d}{dt} y(t)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau \to \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau$$

例

(1) 已知某系统的冲激响应为：$h(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$

求：阶跃响应 $g(t)$ 。

解：$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(x)dx=\int_{0}^{t}e^{-2x}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

(2) 已知某系统的阶跃响应为：$g(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

求：冲激响应 $h(t)$ 。

解：$$h(t)=\frac{d}{dt}g(t)=\frac{d}{dt}[e^{-3t}\varepsilon(t)]=\delta(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$$

例

已知系统的阶跃响应为： $g(k)=(-\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$

求系统的单位样值响应 $h(k)$

解：因为 $\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$

根据系统的线性性质，有 $h(k)=g(k)-g(k-1)$

所以 $$h(k)=(-\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)-(-\frac{1}{2})^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$=\delta(k)+3(-\frac{1}{2})^k\varepsilon(k-1)$$

一、在时域求解连续系统的响应

- 根据系统的微分方程或系统框图，求解系统的零输入和零状态响应；
- 求解单位冲激响应、单位阶跃响应。

差分方程求解!

已知某连续系统的微分 方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=e'(t)+e(t),$$

试求系统的冲激响应和阶跃响应。

二、在时域求解离散系统的响应

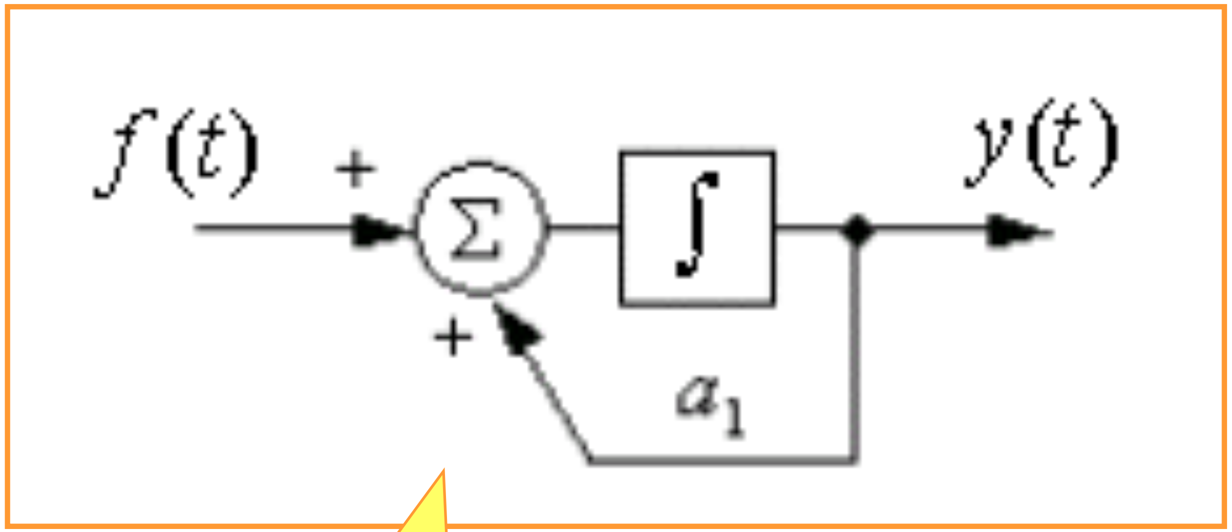
- 根据系统的差分方程或系统框图，求解系统的零输入和零状态响应；
- 求解单位序列响应。

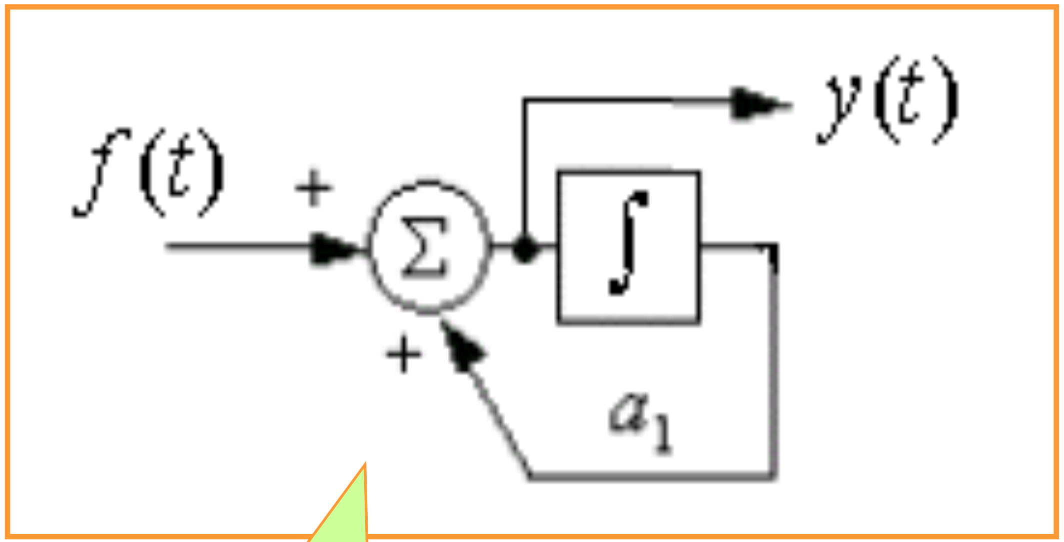
已知某离散系统的差分 方程为

$$y(k)+0.5y(k-1)-y(k-2)=e(k)-e(k-2),$$

求单位序列响应。

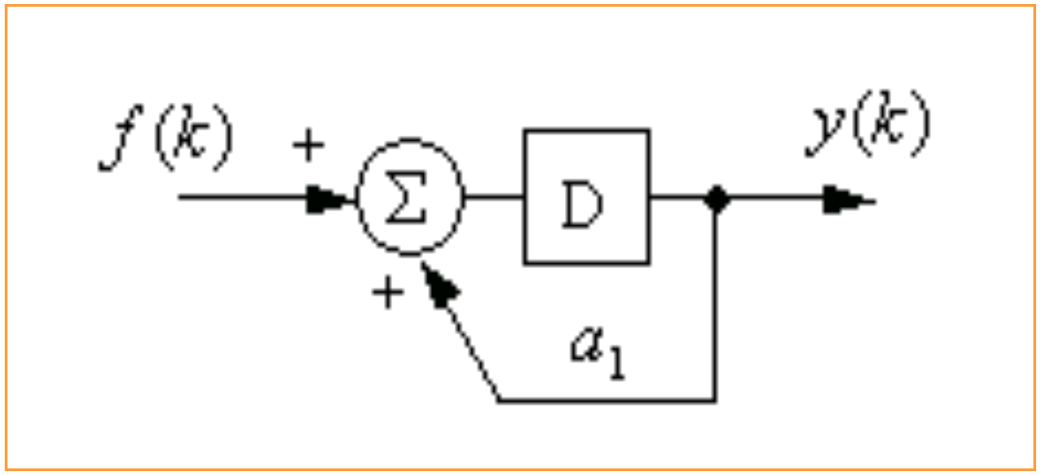
三、系统框图与系统方程之间的关系

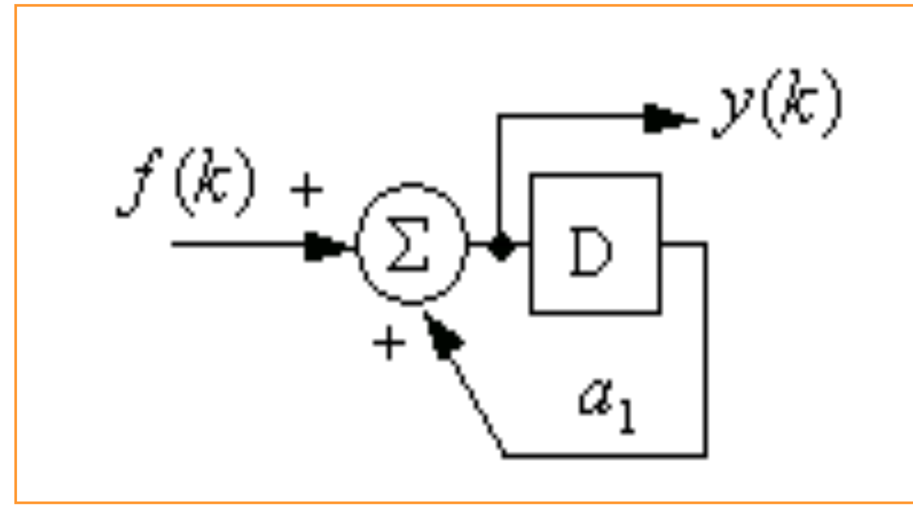




$$y'(t) - a_1 y(t) = f(t)$$

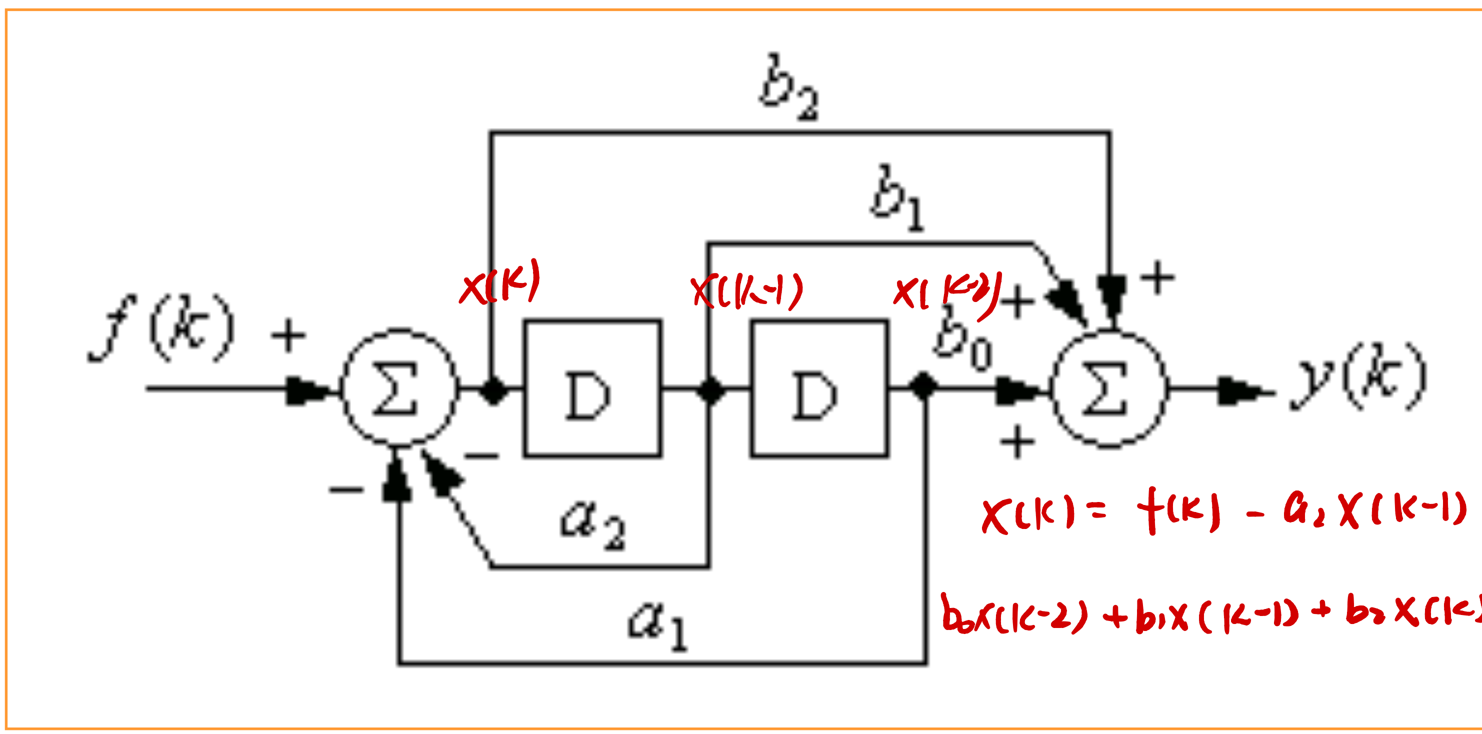
$$y'(t) - a_1 y(t) = f'(t)$$





$$y(k) - a_1 y(k-1) = f(k-1)$$

$$y(k) - a_1 y(k-1) = f(k)$$



$x(k) = f(k) - a_2 x(k-1) - a_1 x(k-2)$

$b_0 x(k-2) + b_1 x(k-1) + b_2 x(k) = y(k)$

$$y(k) + a_2 y(k-1) + a_1 y(k-2) = b_2 f(k) + b_1 f(k-1) + b_0 f(k-2)$$

四、信号的卷积运算

1、连续信号的卷积积分

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) = f(t)}$$

2、离散信号的卷积和

$$\boxed{f_1(k) * f_2(k) = f(k)}$$

例

已知 $f_1(k) = k\left[\varepsilon(k-1) - \varepsilon(k-5)\right]$,

$$f_2(k) = \left[\varepsilon(k+2) - \varepsilon(k-1)\right]$$

求 $y(k) = f_1(k) * f_2(k)$

解:

$$f_1(k) = \{ \underset{k=1}{1}, 2, 3, 4 \}$$

$$f_2(k) = \{ \underset{k=-2}{1}, 1, 1 \}$$

$$y(k) = f_1(k) * f_2(k) = \{ \underset{k=-1}{1}\ 3\ 6\ 8\ 7\ 4 \}$$

3、任意函数与冲激函数的卷积

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

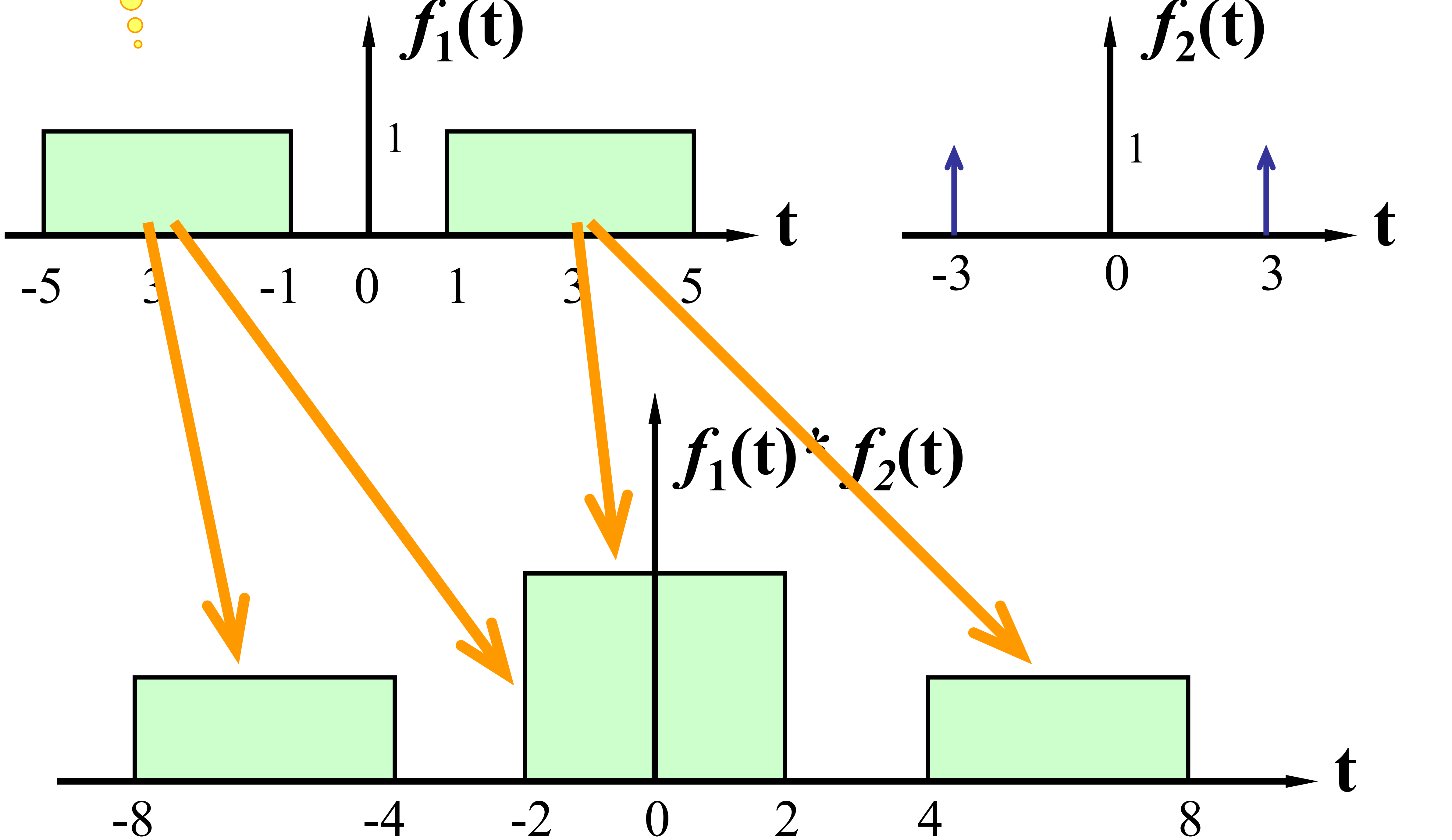
$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$

例

$$\varepsilon(t) * \delta(t) = \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) * \delta(t - t_0) = \varepsilon(t - t_0)$$

例



4、卷积的性质：

$$f_1(t) * f_2(t) = f(t)$$

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$$

$$f_1'(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2'(t) = f'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)d\tau * f_2(t) = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)d\tau * f_2'(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

第三章 连续系统的频域分析

一、周期信号频谱的特点：

离散性　　谐波性　　收敛性

二、周期矩形脉冲信号频谱的特点：

带宽　$B_f = \dfrac{1}{\tau}$

四、熟记一些傅氏变换的基本变换对

(1) $\delta(t) \Leftrightarrow 1$

(2) $1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

(3) $g_\tau(t) \Leftrightarrow \tau Sa(\dfrac{\omega\tau}{2})$

(4) $e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega + \alpha}$

(5) $\cos(\omega_c t) \Leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)\right]$

(6) $\sin(\omega_c t) \Leftrightarrow j\pi\left[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)\right]$

(7) $Sa(\omega_c t) \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{\omega_c} g_{2\omega_c}(\omega)$

$$= \frac{\pi}{\omega_c}\left[\varepsilon(\omega+\omega_c)-\varepsilon(\omega-\omega_c)\right]$$

调制特性

$$(8)\quad f(t)\cdot\cos\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left\{F\left[j(\omega+\omega_c)\right]+F\left[j(\omega-\omega_c)\right]\right\}$$

$$(9)\quad \delta_T(t) \Leftrightarrow \Omega\delta_\Omega(\omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}$$

五、常用的傅氏变换的性质

1、时移性质：

$$f(t \pm t_0) \Leftrightarrow F(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$$

2、频移性质：

$$f(t) \cdot e^{\pm j\omega_0 t} \Leftrightarrow F[j(\omega \mp \omega_0)]$$

3、时域卷积性质：

$$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

4、频域卷积性质：

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]$$

六、系统的无失真传输条件：

时域条件：

$$h(t) = K\delta(t - t_0)$$

因果系统无失真传输的 时域条件是：

$$h(t) = K\delta(t - t_0) \qquad t_0 > 0$$

频域条件：

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$

七、抽样定理

信号的抽样：

$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t)$$

抽样信号的频谱：

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[F(j\omega) * S(j\omega)\right]$$

抽样定理： $f_s \geq 2\, f_m$ 或 $T_s \leq T_m / 2$

抽样频率

被抽样信号的最高频率

注意抽样后信号频谱与抽样频率之间的关系，不失真恢复原信号的条件。

第四章　连续系统的S域分析

一、拉氏变换的基本变换对

(1)　$\delta(t) \Leftrightarrow 1$，　$\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0}$

(2)　$\delta^{(n)}(t) \Leftrightarrow s^n$,

(3)　$\varepsilon(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{s}$

(4)　$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{s+\alpha}$

$$(5)\quad \cos(\omega_c t)\varepsilon(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_c^2}$$

$$(6)\quad \sin(\omega_c t)\,\varepsilon(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_c}{s^2+\omega_c^2}$$

$$(7)\quad e^{-\alpha t}\cos(\omega_c t)\,\varepsilon(t) \Leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_c^2}$$

$$(8)\quad e^{-\alpha t}\sin(\omega_c t)\,\varepsilon(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_c}{(s+\alpha)^2+\omega_c^2}$$

$$(9) \quad t\,\varepsilon(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$(10) \quad t\,e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

二、常用拉氏变换的性质

1、时移性质：

$$f(t-t_0) \Leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

2、频移性质：

$f(t)e^{s_0 t} \Leftrightarrow F(s-s_0)$	$\mathrm{Re}[s] > \sigma_1 + \sigma_0$

3、尺度变换性质：

$f(at) \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} F(\dfrac{s}{a})$	$\mathrm{Re}[s] > a\sigma_0$

4、时域微分性质：

$$f'(t) \Leftrightarrow sF(s) - f(0_-) \qquad \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$$

$$f''(t) \Leftrightarrow s^2 F(s) - s f(0_-) - f'(0_-) \qquad \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$$

5、时域卷积定理：

$$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$$

6、初值、终值定理：

要注意存在条件

当F(s)在虚轴（原点除外）或右半s平面有极点时，其原函数的终值不存在。

(1) $F(s)=\dfrac{s-2}{s^2+3s-4}$ (2) $F(s)=\dfrac{s-2}{s^2+3s}$

(3) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+4}$ (4) $F(s)=\dfrac{s^2-s+2}{s^2+4s+3}$

三、求拉氏逆变换

- 利用基本变换对
- 部分分式展开法

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$$

$$e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

周期信号的拉氏变换：

$$f_T(t) \Leftrightarrow F_0(s)\cdot\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

例

求下列函数的拉氏逆变 换

$$(1)\ F(s)=\frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-4s})}$$

$$(2)\ F(s)=\frac{1}{s(1+e^{-s})}$$

四、利用拉氏变换求系统的响应

解题步骤：

- ☞ 根据微分方程或系统框图求系统函数 H(s)；
- ☞ 求激励信号的拉氏变换 E (s)；
- ☞ 响应信号的拉氏变换 Y (s)=E(s)H(s) ；
- ☞ 对Y (s)求拉氏逆变换得到响应信号 y(t)。

五、线性电路的S域模型及其求解

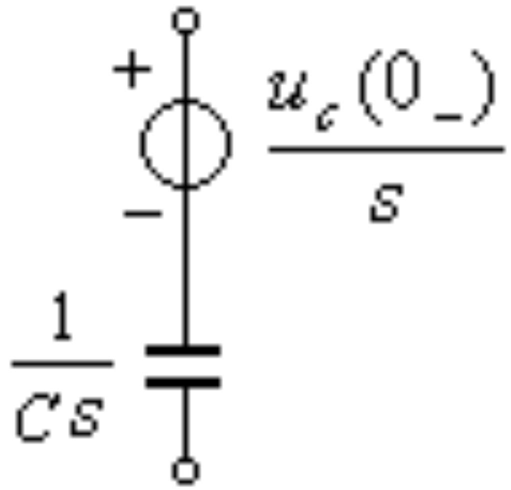
解题步骤：

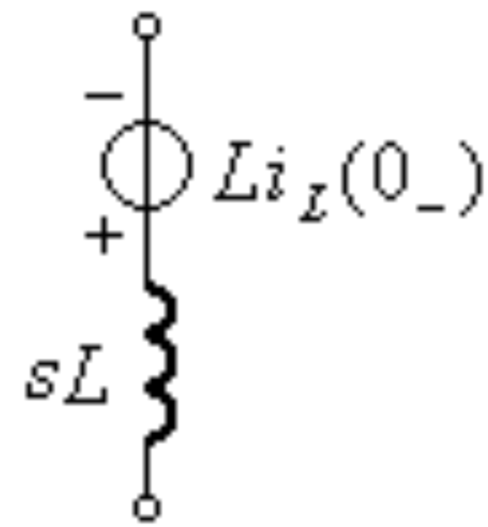
$u_c(0_-), i_L(0_-)$

- ☞ 根据电路求初始条件；
- ☞ 根据电路画 S 域模型；
- ☞ 根据电路的 S 域模型求响应的像函数；
- ☞ 求响应像函数的拉斯逆变换。

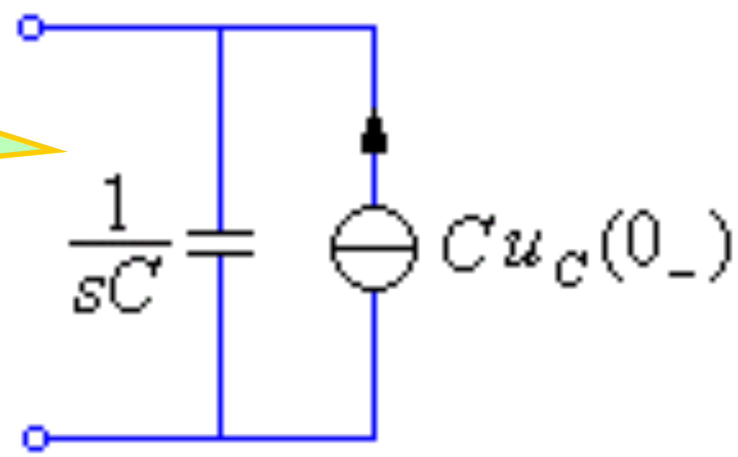
电容、电感的S域模型

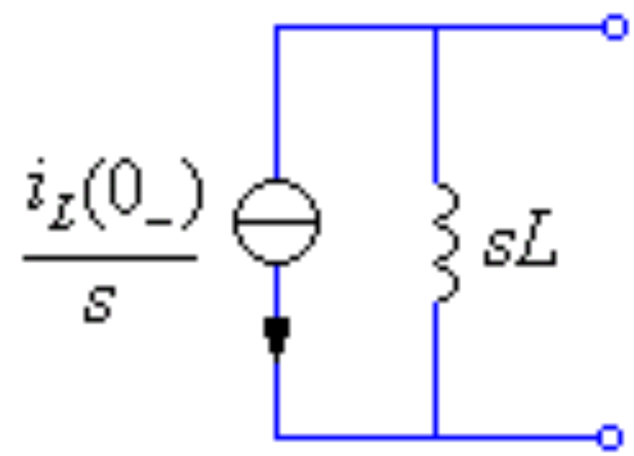
电压源形式

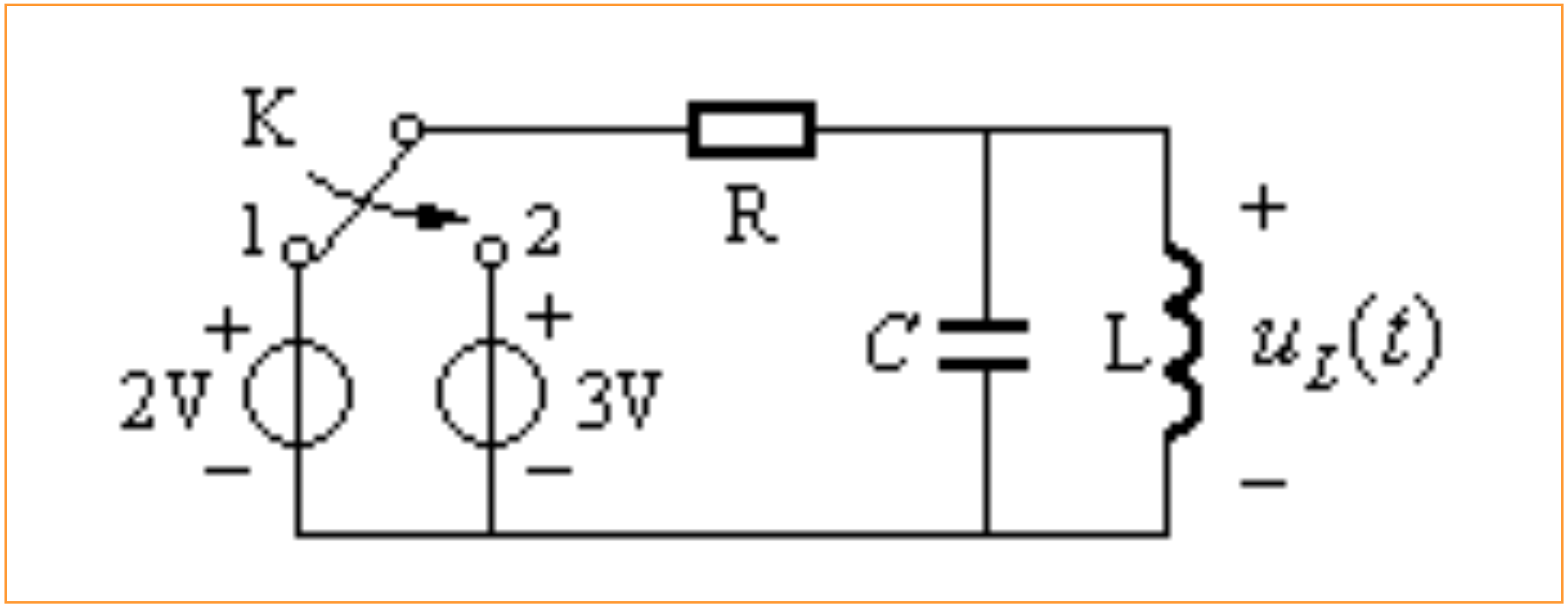




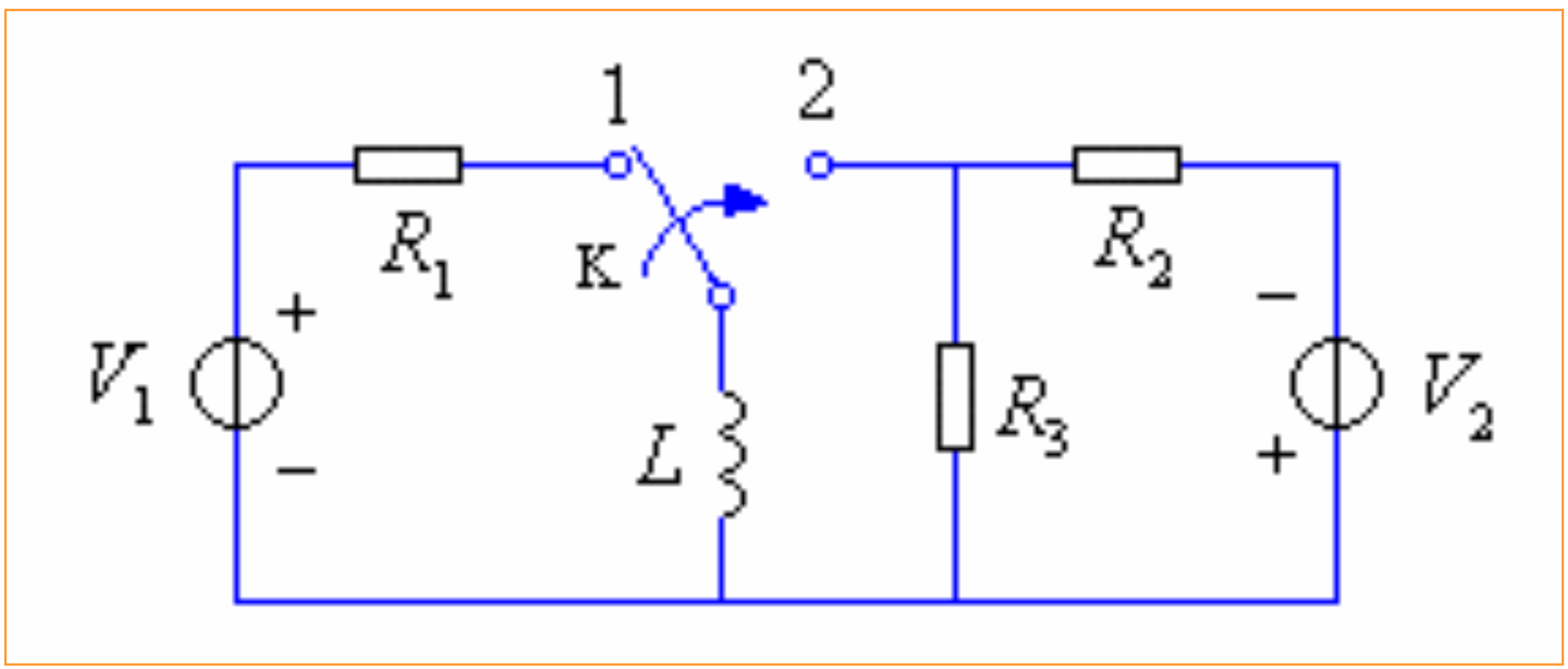
电流源形式







K
1
2
R
+
2V
−
+
3V
−
C
L
+
$u_L(t)$
−



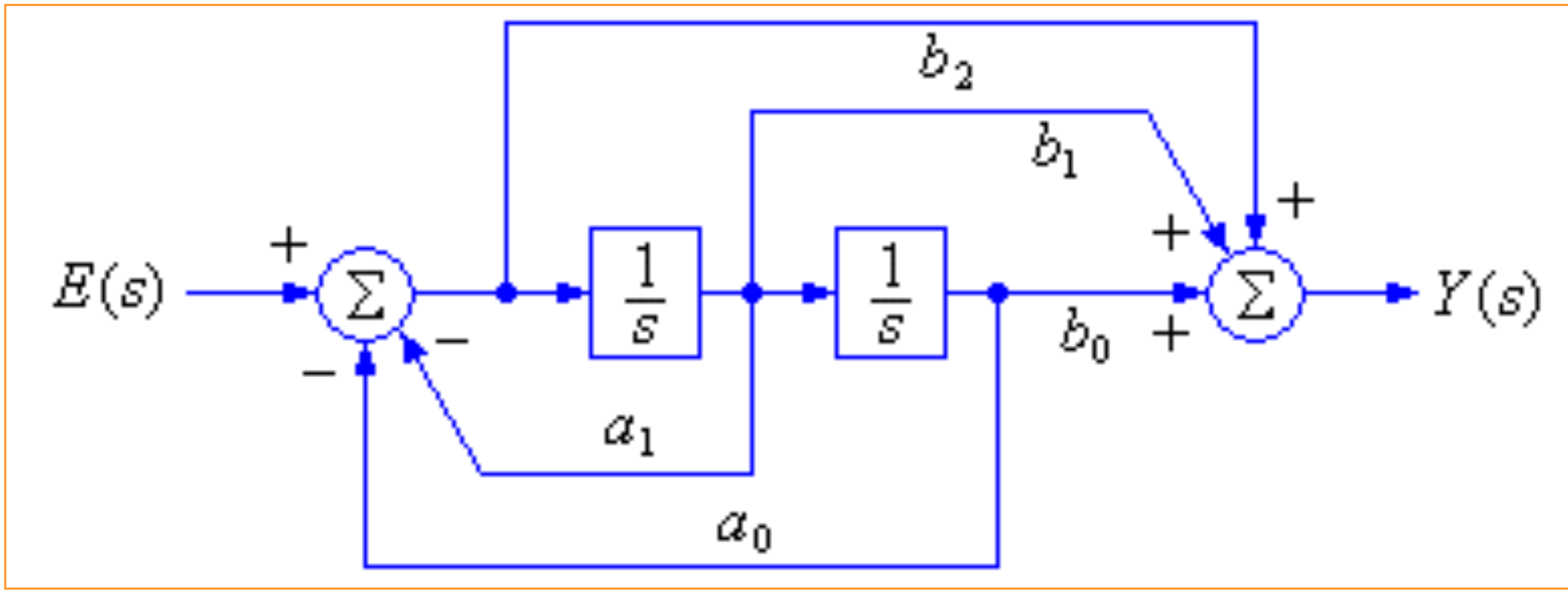
1
2
R_1
K
R_2
+
V_1
−
−
L
R_3
V_2
+

六、系统函数与微分方程的关系

$$H(s)=\frac{Y(s)}{E(s)}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}$$

$\Updownarrow$

$$a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2e''(t)+b_1e'(t)+b_0e(t)$$



$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

七、连续系统的频率响应

$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}$$

正弦稳态响应函数。

连续系统存在稳态响应的条件是什么?

系统函数的收敛域包括虚轴。

(系统函数在虚轴上收敛)

例

已知一个系统的系统函数为$H(s)=\dfrac{s}{s-2}$，

试求当激励为$e(t)=\cos 3t$的稳态响应。

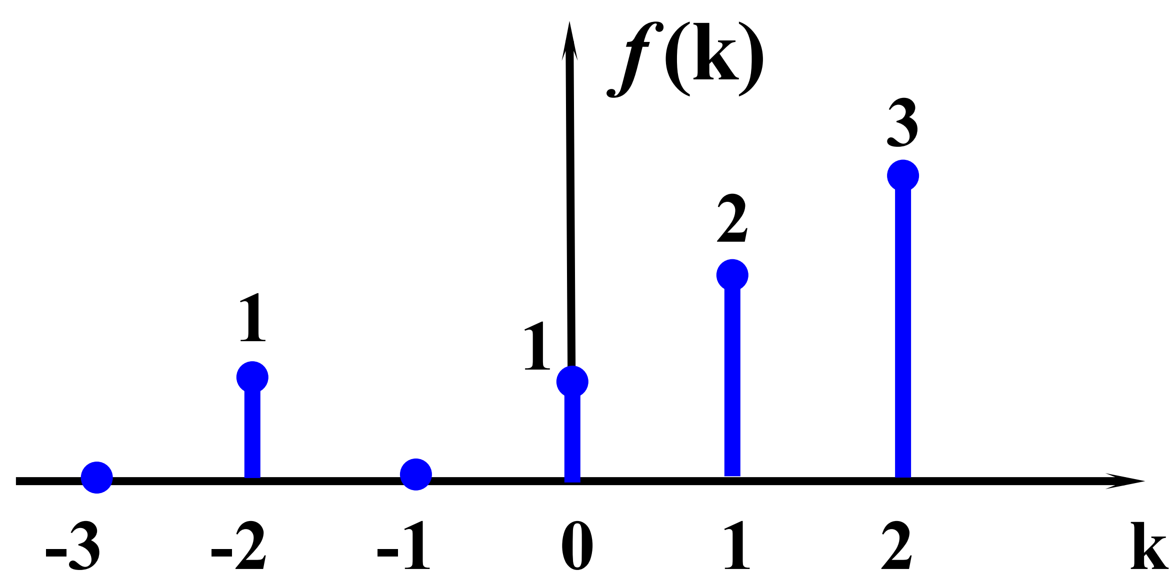
稳态响应为 $y(t)=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\cos(3t-arctg(\dfrac{3}{2}))$

第六章 离散系统的Z域分析

一、z 变换的定义：

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k)\cdot z^{-k}$$

例：



$$F(z)=z^{2}+1+2z+3z^{2}$$

二、z变换的收敛域：

☞ 离散反因果系统，其系统函数H(z)的收敛域为收敛半径（收敛圆）的圆内部分。

☞ 离散因果系统，其系统函数H(z)的收敛域为收敛半径的圆外部分。

☞ 离散因果稳定系统，系统函数H(z)的收敛边界为半径小于1的圆，其收敛域为收敛半径的圆外部分。

三、z 变换的基本变换对：

(1) $\delta(k) \Leftrightarrow 1$,

(2) $\delta(k-k_0) \Leftrightarrow z^{-k_0}$, $\quad |z|>0$

(3) $\varepsilon(k) \Leftrightarrow \dfrac{z}{z-1}$, $\quad |z|>1$

(4) $a^k\varepsilon(k) \Leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$, $\quad |z|>|a|$

(5) $a^k\varepsilon(-k-1) \Leftrightarrow -\dfrac{z}{z-a}$, $\quad |z|<|a|$

四、z 变换的性质：

1、线性性质：

2、移位性质：（单边变换、双边变换）

$f(k-k_0) \Leftrightarrow F(z)z^{-k_0}$	$\alpha <\|z\|< \beta$

因果序列单边z变换

3、z域尺度变换

$a^k f(k) \Leftrightarrow F(\frac{z}{a})$	$\alpha\|a\| <\|z\|< \beta\|a\|$

4、时域卷积性质：

$$f_1(k) * f_2(k) \Leftrightarrow F_1(z) \cdot F_2(z)$$

5、初值、终值

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

存在条件?

$$f(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z)$$

存在条件?

四、z逆变换：

- 利用基本变换对
- 部分分式展开法

例

$$F(z) = z + 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

$$f(k) = \delta(k+1) + \delta(k) + 2\delta(k-1) + 3\delta(k-2) + 4\delta(k-3)$$

$$= \delta(k+1) + (k+1)\left[\varepsilon(k) - \varepsilon(k-4)\right]$$

例

已知 $F(z)=\dfrac{0.8z}{z^2+0.4z-0.6}$， $|z|>1$

求 $F(z)$的原函数$f(k)$。

解：

$$F(z)=\frac{0.8z}{(z+1)(z-0.6)}$$

$$a^k\varepsilon(k)\Leftrightarrow\frac{z}{z-a},|z|>|a|$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-0.6}-\frac{z}{z+1}\right)$$

所以 $f(k)=\dfrac{1}{2}[0.6^k-(-1)^k]\varepsilon(k)$

例

试求 $F(z)=\dfrac{z}{z-0.2}+\dfrac{2z}{z-0.3}$ 的原函数 $f(k)$

(1) $|z|>0.3$ (2) $|z|<0.2$ (3) $0.2<|z|<0.3$

$$(1)\quad f(k)=[0.2^k+2\times0.3^k]\varepsilon(k)$$

$$(2)\quad f(k)=-[0.2^k+2\times0.3^k]\varepsilon(-k-1)$$

$$(3)\quad f(k)=0.2^k\varepsilon(k)-2\times0.3^k\varepsilon(-k-1)$$

五、利用 z 变换求离散系统的响应

- ☞ 根据差分方程或系统框图求系统函数 H(z)；
- ☞ 求激励信号的拉氏变换 E (z)；
- ☞ 响应信号的拉氏变换 Y (z)=E(z)H(z) ；
- ☞ 对Y (z)求逆变换得到响应信号 y(k)。

六、s域与z域的关系

s ~ z 的映射关系：

$$\left.\begin{aligned}\rho &= e^{\sigma T} \\ \theta &= \omega T = 2\pi\frac{\omega}{\omega_s}\end{aligned}\right\}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

点——点，　线——线，　面——面

- ☞ s平面上的虚轴映射到z平面是单位圆；
- ☞ s平面上的实轴映射到z平面是正实轴；
- ☞ s平面的原点映射到z平面上是点$z=1$；
- ☞ s平面的左半平面映射到z平面上是单位圆内部分；
- ☞ s平面的右半平面映射到z平面上是单位圆外部分。

七、离散系统的频率响应

$$H(e^{j\theta}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\theta}}$$

正弦稳态响应函数。

离散系统存在稳态响应的条件是什么?

系统函数的收敛域包括单位圆。

(系统函数在单位圆上收敛)

例

已知一个系统的系统函 数为$H(z)=\dfrac{z}{z-0.5}$,

试求当激励为$f(k)=\cos k\dfrac{\pi}{6}$时的稳态响应。

稳态响应为 $y(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(k\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4})$

第七章 系统函数

一、系统函数H(s)与系统的时域特性

二、系统函数H(z)与系统的时域特性

三、根据系统函数画系统的幅频特性和相频特性曲线

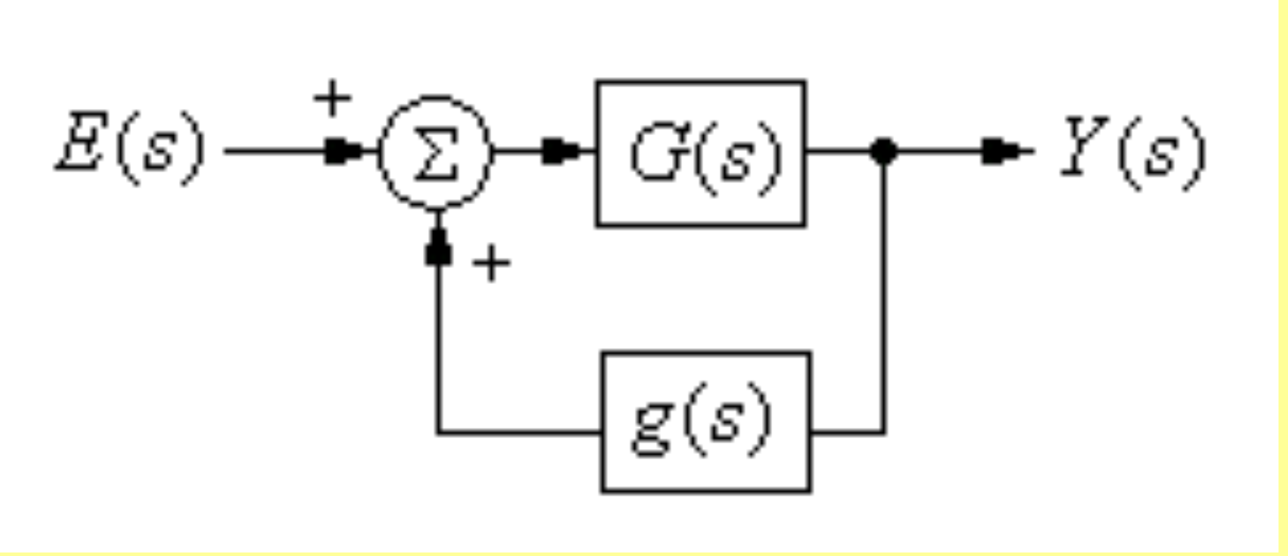
四、系统的稳定性判断

例

一反馈系统如下图所示，已知

$$G(s)=\frac{1}{s^2-ks+5},\quad g(s)=4s$$

为使系统稳定，求k的取值范围。



解：求系统函数的表达式

$$H(s)=\frac{G(s)}{1-g(s)\cdot G(s)}$$

$$H(z)=\frac{b_2 z^2+b_1 z+b_0}{z^2+a_1 z+a_0}$$

二阶离散系统稳定的条件：

$$\left.\begin{aligned} &A(1)>0 \\ &A(-1)>0 \\ &|a_0|<1 \end{aligned}\right\}$$

(1) $H(z)=\dfrac{z}{z^2+\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}}$ (2) $H(z)=\dfrac{z}{z^2+2z-3}$