第二章　连续时间系统的时域分析

时域分析：对系统的分析与计算均以时间t为变量

优点：直观、物理概念清楚

缺点：对高阶系统或复杂激励计算复杂

2.1 系统微分方程的经典解

$$e(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$$

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t)$$

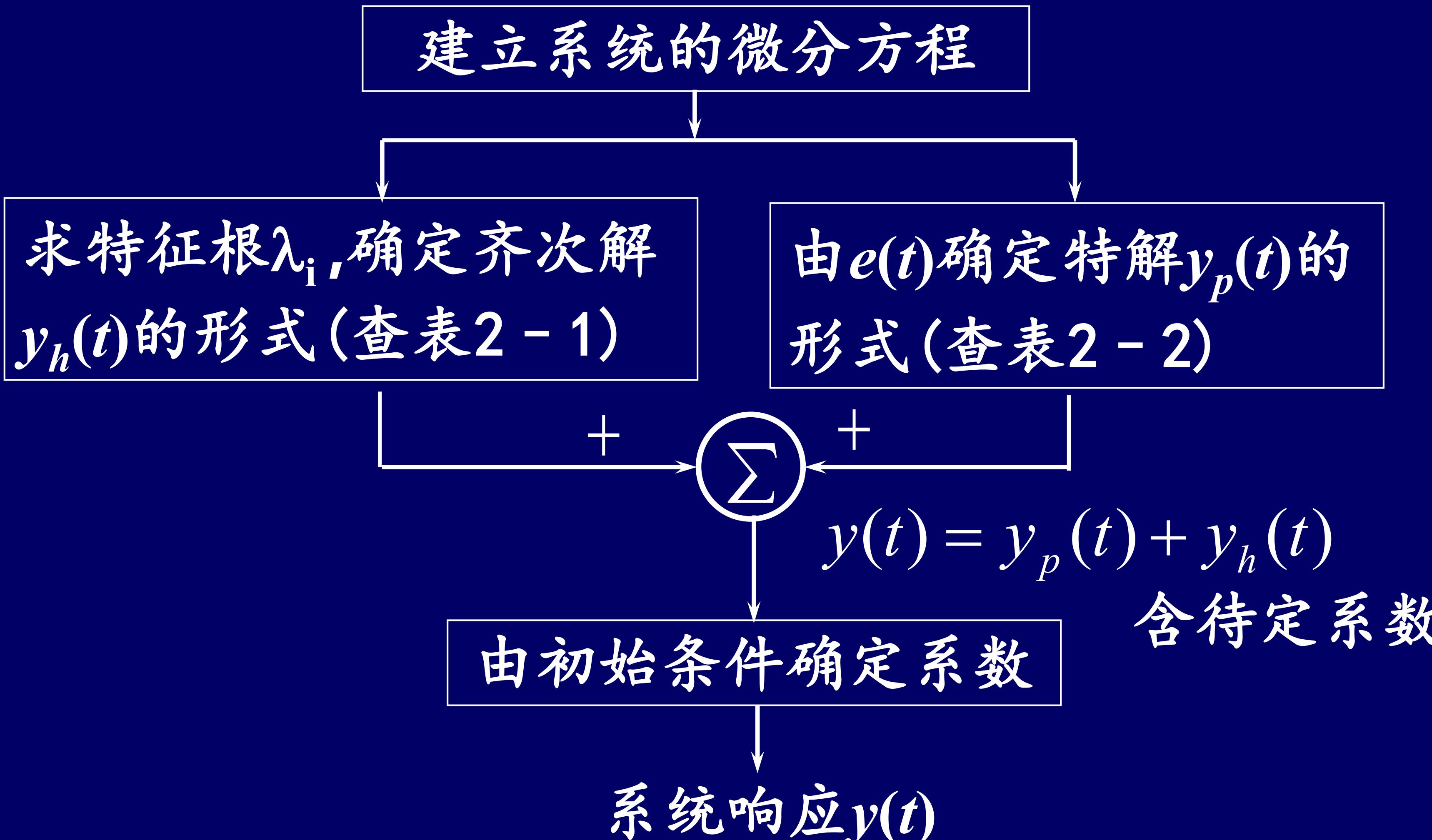
$$= b_m e^{(m)}(t) + b_{m-1} e^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

全解：$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ ***homogeneous***

齐次解 特解 ***particular***

2.1.1 微分方程的经典解

用时域法求解连续系统的流程图



1、微分方程的齐次解$y_h(t)$

齐次方程 $y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0$

特征方程 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0$

n阶微分方程有n个特征根： $\lambda_i(i=1,2,\ldots,n)$

齐次解$y_h(t)$的形式由特征根的形式决定→查P_{34}表2-1

例：求下列方程的齐次解

(1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2e'(t)$ $y_h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

(2) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=e(t)$ $y_h(t)=C_1te^{-t}+C_2e^{-t}$

(3) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=2e(t)$ $(\lambda+1)^2+4=0$

$$y_h(t)=e^{-t}[C_1\cos 2t+C_2\sin 2t]=Ae^{-t}\cos(2t-\theta)$$

2、微分方程的特解$y_p(t)$

特解$y_p(t)$的形式由激励$e(t)$的形式决定→查P_{34}表2-2

说明：通常认为激励$e(t)$是在t=0时刻加入系统的，因此特解$y_p(t)$存在的时间为 $t>0$

例:某系统微分方程 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2e'(t)+e(t)$

求激励为1) $e(t)=\varepsilon(t)$ 2) $e(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$ 时的特解

解 (1) $e(t)=\varepsilon(t)$ $\qquad y_p(t)=P=\frac{1}{2}\varepsilon(t)$

存在时间>0

∴不写 $\varepsilon(t)$

限定范围

(2) $e(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$ $\qquad y_p(t)=Pe^{-3t}\varepsilon(t)=-\frac{5}{2}e^{-3t}\varepsilon(t)$

默认t>0

3、微分方程的全解$y(t)$

全解：$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

齐次解　特解

齐次解中的待定系数C_i在全解中由初始条件确定，n阶微分方程需要n个初始条件

某系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=e(t)$

激励为$e(t)=2\varepsilon(t)$，计算当$y(0_+)=0, y'(0_+)=0$ 的全响应

解：1）齐次解$y_h(t)$ 特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=0$

特征根$\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$ 齐次解 $y_h(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

2）特解$y_p(t)$ $y_p(t)=P=1$

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+1 \quad (t>0)$$

代入初始条件 $y(0_+)=0, y'(0_+)=0$ 避免冲击函数

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=c_1+c_2+1=0 \\ y'(0)&=-c_1-2c_2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-2 \\ c_2=1 \end{cases}$$

$$y(t)=(-2e^{-t}+e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$$

例、某*LTI*系统的数学模型为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=e(t) \quad e(t)=10\cos t$$

计算当 $y(0_+)=2, y'(0_+)=0$ 的全响应

解：1）齐次解$y_h(t)$ 特征方程 $\lambda^2+5\lambda+6=0$

特征根 $\lambda_1=-2, \lambda_2=-3$ 齐次解 $y_h(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$

2）特解$y_p(t)$

查表**2-2**，可设特解为 $y_p(t)=P\cos t+Q\sin t$

将 y_p'', y_p', y_p 代入方程，整理得到

$$y_p'(t)=-P\sin t+Q\cos t \quad y_p''(t)=-P\cos t-Q\sin t$$

$$(5P+5Q)\cos t+(5Q-5P)\sin t=10\cos t$$

$$\therefore \begin{cases} 5P+5Q=10 \\ -5P+5Q=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \therefore \begin{cases} P=1 \\ Q=1 \end{cases} \quad y_p(t)=\cos t+\sin t$$

3）全解$y(t)$

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\cos t+\sin t$$

代入初始条件 $y(0_+)=2, y'(0_+)=0$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1+c_2+1=2 \\ y'(0) &= -2c_1-3c_2+1=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1=2 \\ c_2=-1 \end{cases}$$

特解有存在

$$y(t)=2e^{-2t}-e^{-3t}+\cos t+\sin t, \quad \underline{t>0} \text{ 区间}$$

$$y(t)=(2e^{-2t}-e^{-3t}+\cos t+\sin t)\varepsilon(t)$$

$$y(t) = (\underbrace{2e^{-2t} - e^{-3t}}_{\text{齐次解}} + \underbrace{\cos t + \sin t}_{\text{特解}})\varepsilon(t)$$

齐次解 特解

自由响应 强迫响应

y:

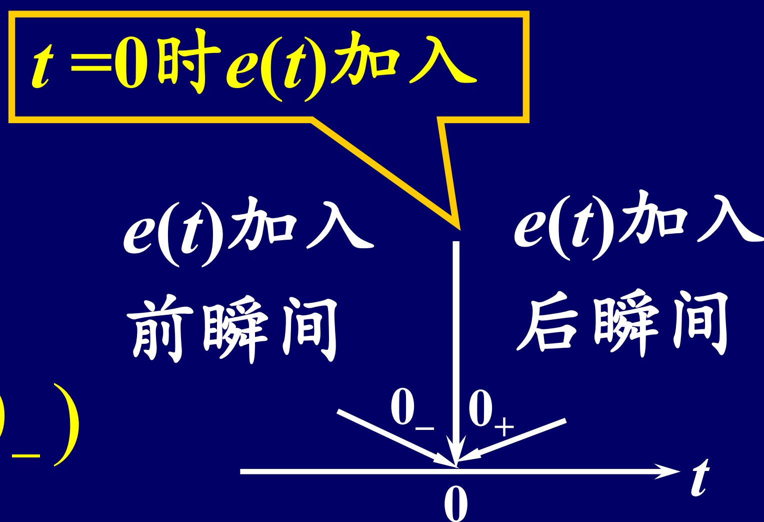
λ_i

$$\begin{cases} \text{暂态响应} \\ \text{稳态响应} \end{cases}$$

2.1.2 关于系统在$t=0_-$与0_+状态的讨论（难点）

1. 初始状态（第二类初始条件）与初始条件（第一类初始条件）

使用条件



$y^{(i)}(0_-)$

初始状态反映历史信息而与激励无关

$y^{(i)}(0_+)$

初始条件由初始状态和激励共同决定（用于确定齐次解待定系数）

从 $0_- \to 0_+$ $y^{(i)}(t)$ 可能发生跳变

2、跳变量的确定方法 [δ函数平衡法(δ匹配法)]

基本思路：

在$t=0$时刻，方程两边所含有的δ(t)及其各阶导数应相同，从而判断系统响应在t=0时刻是否有跳变

例．已知LTI系统 $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=e''(t)+2e'(t)$

激励为 $e(t)=\varepsilon(t)$ 系统的初始状态为 $y'(0\_)=1$ $y(0\_)=0$

求系统的初始条件 $y'(0_+)$ $y(0_+)$ 求跳变量

$y(t)$在$t=0$处跳变量为 1 $y(0_+)=y(0\_)+1=1$

$y'(t)$在$t=0$处跳变量为 -2 $y'(0_+)=y'(0\_)-2=-1$

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=e''(t)+2e'(t) \quad e(t)=\varepsilon(t)$$

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

$y''(t)$	$\delta'(t)-2\delta(t)$	$y''(t)$	$\delta'(t)-2\delta(t)$
$4y'(t)$	$4\delta(t)$	$y'(t)$	$\delta(t)\ \underbrace{-2\varepsilon(t)}$
$3y(t)$		$y(t)$	$\underbrace{\varepsilon(t)}$ 跳变量

只关心冲击函数

$$\forall y(0)=1$$

$$\forall y'(0)=-2$$

返回

总结：用δ函数平衡法求跳变量时，应注意：

1）只匹配$\delta(t)$及其各阶导数

2）先使方程右边$\delta(t)$最高次导数项与方程左边$y^{(i)}(t)$的最高阶次项得到平衡

3）当平衡低次$\delta(t)$项时，若方程两边不能平衡时，由方程左边$y^{(i)}(t)$的最高阶次项来补偿

4）平衡后，$y^{(i)}(t)$中含有的$\varepsilon(t)$项系数即为跳变量

发生跳变的条件：微分方程右端含δ(t)及其各阶导数

例、 $y'(t)+3y(t)=3\delta'(t)$ 求$y(t)$在t=0时刻的跳变量

$2\delta(t)$

例、 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2e'(t)+6e(t)$

已知 $e(t)=\varepsilon(t)$ $y(0\_)=2$ $y'(0\_)=0$ 求 $y(0_+)$ $y'(0_+)$

例、 $y'''(t)+4y''(t)+5y'(t)+2y(t)=\delta''(t)+3\delta(t)$

求 $y(t)$ $y'(t)$ $y''(t)$ 在t=0时刻的跳变量

$y'''(t)$ $\delta''(t)-4\delta'(t)$

$4y''(t)$ $4\delta'(t)$ $-16\delta(t)$

$5y'(t)$ $5\delta(t)$

$2y(t)$

y''' $\delta''(t)-4\delta'(t)+14\delta(t)$

y'' $\delta'(t)-4\delta(t)+14\varepsilon(t)$

y' $\delta(t)-4\varepsilon(t)$

y $\varepsilon(t)$

返回

2.2 零输入响应和零状态响应

2.2.1 零输入响应 $y_{zi}(t)$ *zero-input*

没有外加激励的作用，仅由初始状态所引起的响应

对应齐次方程：$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$

解的形式由特征根决定：

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_{xi} e^{\lambda_i t} \quad t \ge 0$$ λ为单实根时

初始条件 = 初始状态，即没有跳变(因为没有输入)

$$y_{zi}^{(i)}(0_+) = y_{zi}^{(i)}(0_-) = y^{(i)}(0_-)$$

例：$y''(t)+5y'+4y(t)=2e(t)$

已知 $y(0\_)=1, y'(0\_)=2$ 计算系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$

$$y_{zi}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-4t}$$

$$y_{zi}(t)=(2e^{-t}-e^{-4t})\varepsilon(t)$$

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ -c_1-4c_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=2 \\ c_2=-1 \end{cases}$$

例：$y''(t)+3y'+2y(t)=2e''(t)+6e(t)$

冗余

已知 $e(t)=\varepsilon(t), y(0\_)=1, y'(0\_)=3$

计算系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$

$$y_{zi}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t} \qquad y_{zi}(t)=(5e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ -c_1-2c_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=5 \\ c_2=-4 \end{cases}$$

2.2.2 零状态响应$y_{zs}(t)$ *zero-state* ☆

系统的初始状态为0，仅由输入信号$e(t)$所引起的响应

对应非齐次方程：$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_{zs}^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j e^{(j)}(t)$$

解由$y_h(t)$和$y_p(t)$组成：

$$y_{zs}(t) = y_h(t) + y_p(t) = \sum C_{si} e^{\lambda_i t} + y_p(t)$$

λ为单实根时

初始条件

$$y^{(j)}(0_-) = 0 \qquad (j = 0,1,..,n-1)$$

= 初始状态 (0)

+ 跳变量

$$y_{zs}^{(j)}(0_+) = \vee y^{(j)}(0) \qquad (j = 0,1,..,n-1)$$

初始条件 = 跳变量

例：$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2e''(t)+6e(t)\ \ y(0_-)=1,\ y'(0_-)=3$

已知 $e(t)=\varepsilon(t)$，计算系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 冗余

混淆视听

要谢罪

解 $y_{zs}(t)=y_h(t)+y_p(t)\ =c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+3$ $t>0$

$y(0_+)=\ 2\quad ,y'(0_+)=-6$

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta'(t)+6\varepsilon(t)$$

$y''(t)\ 2\delta'(t)-6\delta(t)$ $\qquad$ $y''(t)\ 2\delta'(t)-6\delta(t)$

$3y'(t)\ 6\delta(t)$ $\qquad$ $y'(t)\ \ 2\delta(t)-\underbrace{6\varepsilon(t)}$

$2y(t)$ $\qquad$ $y(t)\ \ \underbrace{2\varepsilon(t)}$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=\ c_1+c_2+3=2\\ y'(0)&=-c_1-2c_2=-6\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}c_1=-8\\ c_2=7\end{cases}$$

$$y_{zs}(t)=\left(-8e^{-t}+7e^{-2t}+3\right)\varepsilon(t)$$

2.2.3 全响应$y(t)$

由初始状态和激励$e(t)$共同作用引起的响应

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$\underbrace{\sum C_i e^{\lambda_i t}}_{\text{初始条件=初始状态+跳变量}} + y_p(t) \qquad \underbrace{\sum C_{xi} e^{\lambda_i t}}_{\text{初始条件 = 初始状态}} + \underbrace{\sum C_{si} e^{\lambda_i t}}_{\text{初始条件 = 跳变量}} + y_p(t)$$

例:$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2e''(t)+6e(t)$

已知 $e(t)=\varepsilon(t), y(0_-)=1, y'(0_-)=3$

计算系统的全响应 $y(t)$

$y(0_-)=1, y'(0_-)=3$

解 $y_{zi}(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t})\varepsilon(t)=(5e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$

$y_{zs}(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3)\varepsilon(t)=(-8e^{-t}+7e^{-2t}+3)\varepsilon(t)$

$\forall y(0)=2, \forall y'(0)=-6$

$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(-3e^{-t}+3e^{-2t}+3)\varepsilon(t)$

$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3)\varepsilon(t)$

$=(-3e^{-t}+3e^{-2t}+3)\varepsilon(t)$ $y(0_+)=3, y'(0_+)=-3$

返回

复　习

微分方程的经典解：齐次解$y_h(t)$ + 特解$y_p(t)$

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \qquad c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 \qquad (c_1 t + c_2) e^{\lambda \cdot t}$

$\lambda_{12} = \alpha \pm j\beta \qquad e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$

$e(t) = E \qquad y_p(t) = P \qquad e(t) = e^{\alpha t} \qquad y_p(t) = Pe^{\alpha t}$

若与通解相同 $(c_1 t + c_2) e^{\alpha t}$

$e(t) = \cos \omega t \qquad y_p(t) = p_1 \cos \omega t + p_2 \sin \omega t$

跳变量的计算方法

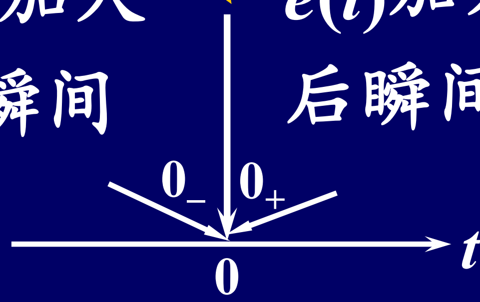
零输入响应 $y_{zi}(t)$　　零状态响应 $y_{zs}(t)$

跳变量的计算方法（δ函数平衡法）

$t=0$时$e(t)$加入

$y^{(i)}(0_-)$ 初始状态 　 $e(t)$加入前瞬间

$e(t)$加入后瞬间 　 $y^{(i)}(0_+)$ 初始条件



初始条件 = 初始状态 + 跳变量

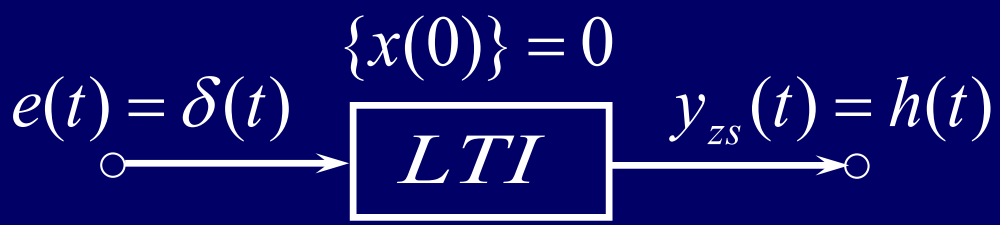
没激励→没跳变

零输入响应 $y_{zi}(t)$ *zero-input* 初始条件 = 初始状态

零状态响应 $y_{zs}(t)$ *zero-state* 初始条件 = 跳变量

2.3 冲激响应和阶跃响应

2.3.1 冲激响应 $h(t)$ 专用符号



$$h(t) \overset{def}{=} T\left[0,\{\delta(t)\}\right]$$

此时系统方程的一般形式为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i h^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \delta^{(j)}(t)$$

由于激励信号δ(t)在 $t>0$ 时为零，所以冲激响应$h(t)$解的形式与齐次解的形式基本相同

例：某*LTI*系统的数学模型为

$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=e'(t)+2e(t)$ 求系统的冲激响应 → 激励为冲击函数

解 $h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta'(t)+2\delta(t) \quad h'(0_-)=h(0_-)=0$

$h(t)=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t})\varepsilon(t)$ 利用冲激函数平衡法得

$h''(t) \quad \delta'(t)-3\delta(t)$

$5h'(t) \quad 5\delta(t)$

$6h(t)$

$h''(t) \quad \delta'(t)-3\delta(t)$

$h'(t) \quad \delta(t)-\underbrace{3\varepsilon(t)}$

$h(t) \quad \underbrace{\varepsilon(t)}$

$h(0_+)=1, \quad h'(0_+)=-3$

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -2C_1-3C_2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=1 \end{cases} \quad h(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$$

求解冲激响应$h(t)$时系统方程的一般形式为：

$$\sum_{i=0}^{n} a_i h^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \delta^{(j)}(t)$$

当$n > m$时 $h(t) = \sum C_i e^{\lambda_i t} \varepsilon(t)$

当$n = m$时 $h(t) = \sum C_i e^{\lambda_i t} \varepsilon(t) + C_0 \delta(t)$

当$n < m$时 $h(t) = \sum C_i e^{\lambda_i t} \varepsilon(t) + C_0 \delta(t) + C_0' \delta'(t) + \cdots$

例6：某系统的数学模型为

$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=e''(t)+2e'(t)$ 求$\boldsymbol{h(t)}$

冲激响应$\boldsymbol{h(t)}$ $e(t)=\delta(t)$ ➡ $y_{zs}(t)=h(t)$

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)$$

$\boldsymbol{h(t)}=(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{e}^{-2t}+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{e}^{-3t})\varepsilon(\boldsymbol{t})+C_0\delta(t)$ 平衡法求跳变量

$h''(t)$ $\delta''(t)$ $-3\delta'(t)$ $+9\delta(t)$

$5h'(t)$ $5\delta'(t)$ $-15\delta(t)$

$6h(t)$ $6\delta(t)$

$h''(t)$ $\delta''(t)$ $-3\delta'(t)$ $+9\delta(t)$

$h'(t)$ $\delta'(t)$ $-3\delta(t)$ $+\underbrace{9\varepsilon(t)}$

$h(t)$ $\delta(t)$ $-\underbrace{3\varepsilon(t)}$

$$\begin{cases} h(0_+)=-3 \\ h'(0_+)=9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2&=-3 \\ -2\boldsymbol{C}_1-3\boldsymbol{C}_2&=9 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{C}_1=0 \\ \boldsymbol{C}_2=-3 \end{cases}$$

$C_0=1$

$$h(t)=\delta(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$$

例7：某系统的数学模型为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=e'''(t)+2e'(t)$$ 求$h(t)$

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta'''(t)+2\delta'(t)$$

$$h(t)=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t})\varepsilon(t)+C_3\delta(t)+C_4\delta'(t)$$

$$h''(t)\quad \delta'''(t)-5\delta''(t)+21\delta'(t)-75\delta(t)$$

$$5h'(t)\quad 5\delta''(t)-25\delta'(t)+105\delta(t)$$

$$6h(t)\quad 6\delta'(t)-30\delta(t)$$

$$h''(t)\quad \delta'''(t)-5\delta''(t)+21\delta'(t)-75\delta(t)$$

$$h'(t)\quad \delta''(t)-5\delta'(t)+21\delta(t)-\underbrace{75\varepsilon(t)}$$

$$h(t)\quad \delta'(t)-5\delta(t)+\underbrace{21\varepsilon(t)}$$

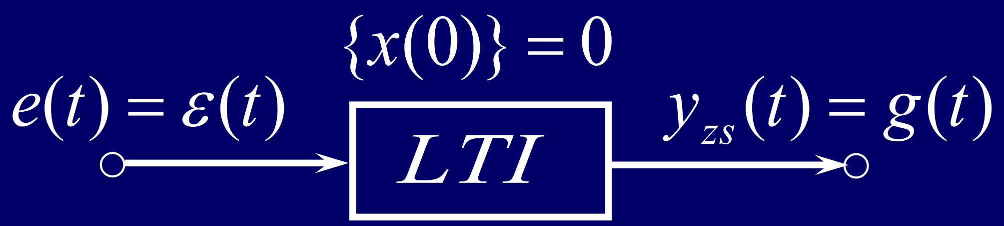
$$\begin{cases} h(0_+)=21 \\ h'(0_+)=-75 \end{cases}$$

$$C_3=-5$$

$$C_4=1$$

$$h(t)=\delta'(t)-5\delta(t)+(-12e^{-2t}+33e^{-3t})\varepsilon(t)$$

2.3.2 阶跃响应 $g(t)$



$$g(t)\overset{def}{=}T\left[0,\{\varepsilon(t)\}\right]$$

系统方程的一般形式为 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_i g^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j\varepsilon^{(j)}(t)$

求解时，一般带有特解

$$\delta(t)\leftrightarrow\varepsilon(t)$$

***h*(*t*) 与 *g*(*t*)的关系** $\because\ \delta(t)=\dfrac{d}{dt}\varepsilon(t)\qquad\therefore\ h(t)=\dfrac{d}{dt}g(t)$

$$\because\ \varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau\qquad\therefore\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

例：某系统的数学模型为

$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=e''(t)+2e'(t)$ 求系统的阶跃响应$g(t)$

$$g''(t)+5g'(t)+6g(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

平衡法

$$g(t)=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}+P)\varepsilon(t) \quad g(0_+)=1, g'(0_+)=-3$$

$$g(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$$

例：某系统的数学模型为

$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=e''(t)+2e'(t)$ 求$h(t)$

$$h(t)=\frac{d}{dt}g(t)=\left(e^{-3t}\varepsilon(t)\right)'=-3e^{-3t}\varepsilon(t)+\delta(t)$$

例：某LTI系统的数学模型为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=-e'(t)+2e(t)$$ 求$h(t)$和$g(t)$

解 方法一、先求$g(t)$，然后求$h(t)$

$$g''(t)+3g'(t)+2g(t)=-\delta(t)+2\varepsilon(t)$$

$$g(t)=(c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+P)\varepsilon(t) \quad g(0_+)=0 \quad g'(0_+)=-1$$

$$g(t)=(-3e^{-t}+2e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$$

$$h(t)=g'(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$$

方法二、先求$h(t)$，然后求$g(t)$

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=-e'(t)+2e(t)$$

$$h''(t)+3h'(t)+2h(t)=-\delta'(t)+2\delta(t)$$ 平衡法

$$h(t)=(c_1e^{-t}+c_2e^{-2t})\varepsilon(t) \quad h(0_+)=-1 \quad h'(0_+)=5$$

$$h(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}(3e^{-\tau}-4e^{-2\tau})\varepsilon(\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}(3e^{-\tau}-4e^{-2\tau})d\tau=-3e^{-\tau}\Big|_0^t+2e^{-2\tau}\Big|_0^t$$

$$=(-3e^{-t}+2e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$$

返回

2.4 卷积积分（重点）

2.4.1 卷积的定义及其积分限的确定

一、卷积的(数学)定义

设$f_1(t)$与$f_2(t)$是定义在$(-\infty \sim \infty)$区间上的连续函数

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$f(t)=f_1(t) * f_2(t)$$

$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积积分，积分结果仍是以时间t为变量的函数$f(t)$

二、卷积积分限的确定

卷积的积分限从$-\infty$到$+\infty$，当$f_1(t)$和$f_2(t)$受到某种限制时，卷积积分的上、下限要发生变化，需要确定。

例1：$f_1(t)=t\varepsilon(t)$ $f_2(t)=\varepsilon(t)$ 求 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau\varepsilon(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau=\int_0^t\tau d\tau=\frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)$$

例2：$f_1(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$ $f_2(t)=\varepsilon(t)$ 求 $f_1(t)*f_2(t)$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\tau}\overset{>0}{\varepsilon(\tau)}\cdot\overset{>0}{\varepsilon(t-\tau)}d\tau=\int_0^t e^{-2\tau}d\tau=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\underline{\varepsilon(t)}$$

保证 t>0

例3：$f_1(t)=\varepsilon(t+2)$ $f_2(t)=\varepsilon(t-3)$ 求 $f_1(t)*f_2(t)$

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\tau+2)\varepsilon(t-\tau-3)d\tau$$

$$\left.\begin{array}{l}\tau+2>0\\ t-\tau-3>0\end{array}\right\}t-3>\tau>-2\quad=\int_{-2}^{t-3}1d\tau=(t-1)\,\underline{\varepsilon(t-1)}$$

上界大于下界

2.4.2 卷积的图示法

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

从定义式可以看出：做卷积运算需要经过以下步骤

1) 变量代换 $t\to\tau$

2) 反转 $f_2(\tau)\to f_2(-\tau)$

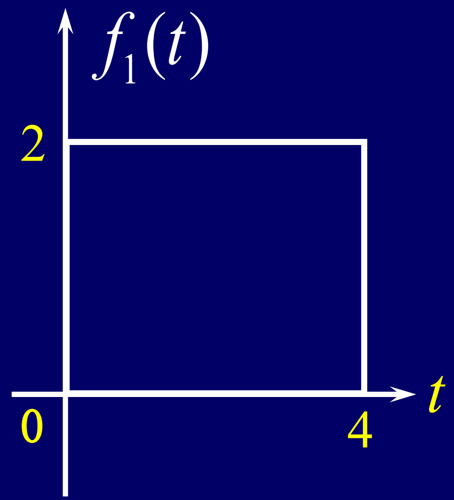
3) 将 $f_2(-\tau)$ 在 τ 轴上平移 t 得 $f_2(t-\tau)$

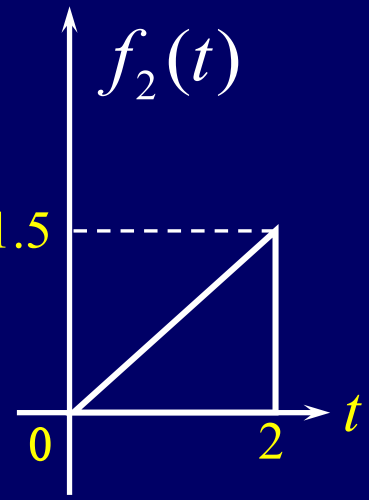
4) 将 $f_1(\tau)$ 和 $f_2(t-\tau)$ 相乘后积分

图示法就是把这几个步骤借助图直观地表示出来

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t)\to f_1(\tau) \\ f_2(t)\to f_2(\tau)\to f_2(-\tau)\to f_2(t-\tau) \end{array}\right. \to \int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

例4：$f_1(t)$和$f_2(t)$的波形如下图所示，求$f_1(t) * f_2(t)$



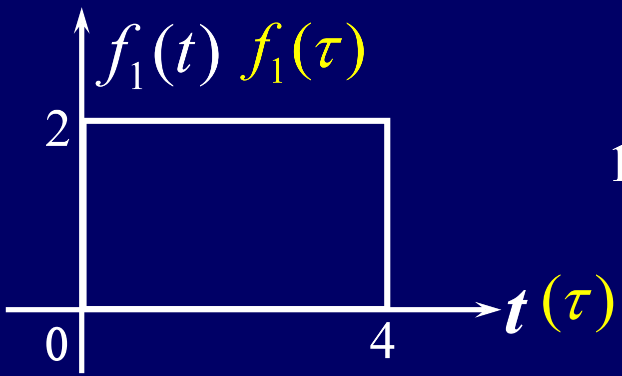


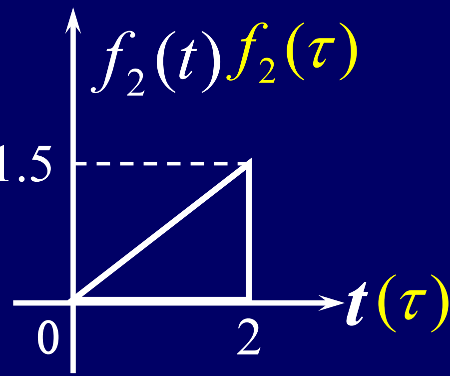
$$f_1(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-4)]$$

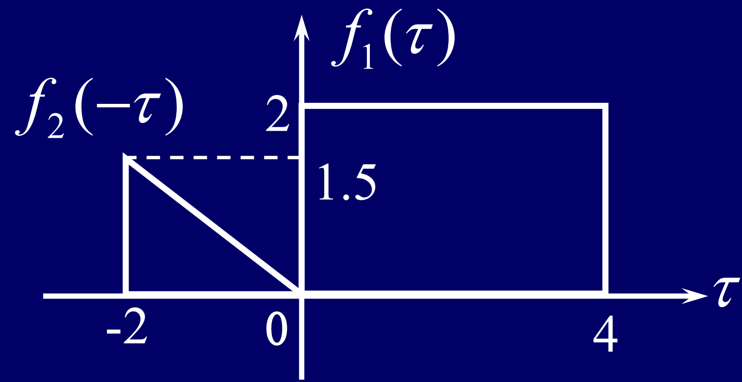
$$f_2(t) = \frac{3}{4}t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)]$$

1) 变量置换 $t \to \tau$

2)反折$f_2(\tau) \to f_2(-\tau)$





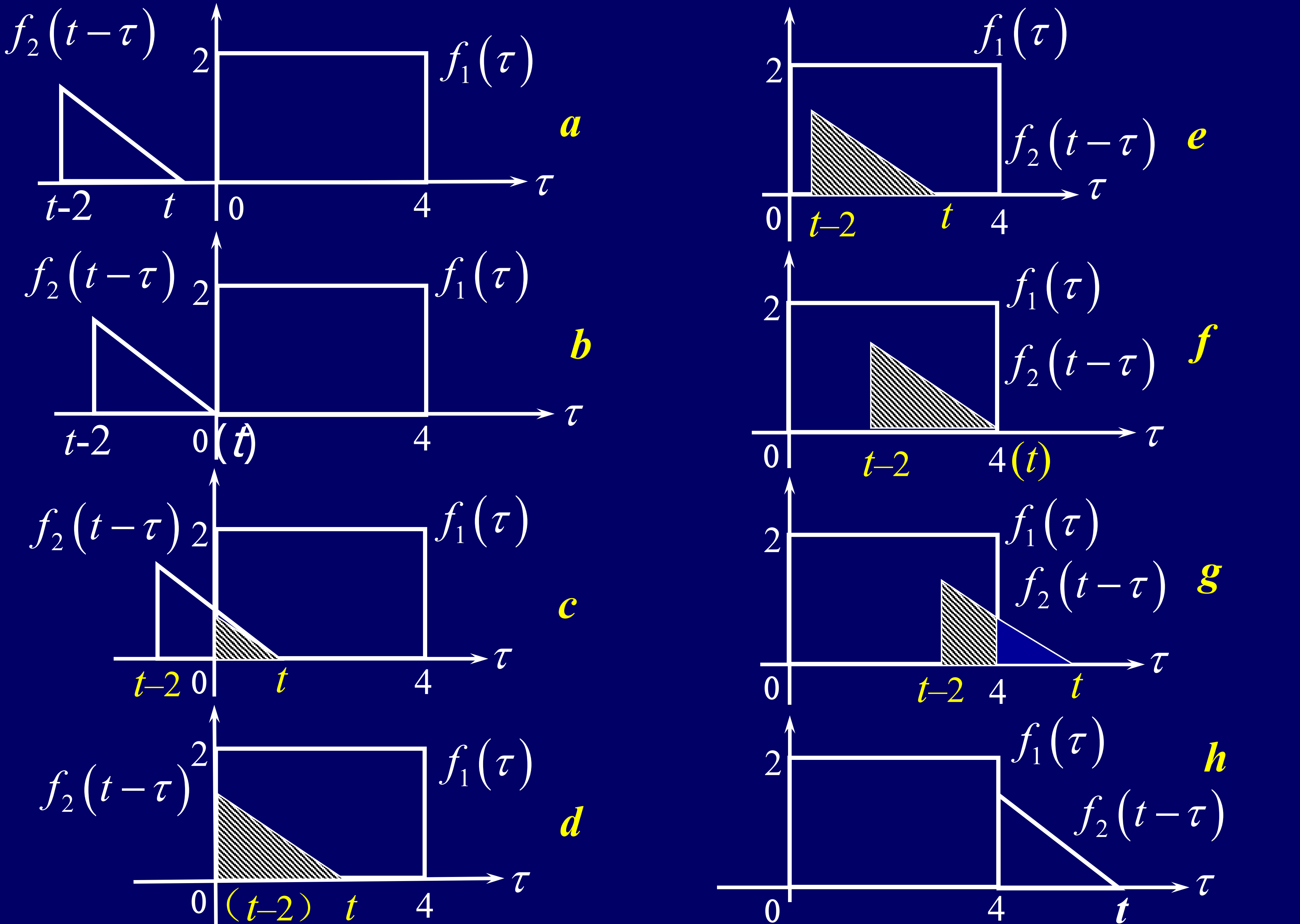


3)将$f_2(-\tau)$在τ轴上平移得$f_2(t-\tau)$

$t > 0$ 时，$f_2(-\tau)$ 向右平移

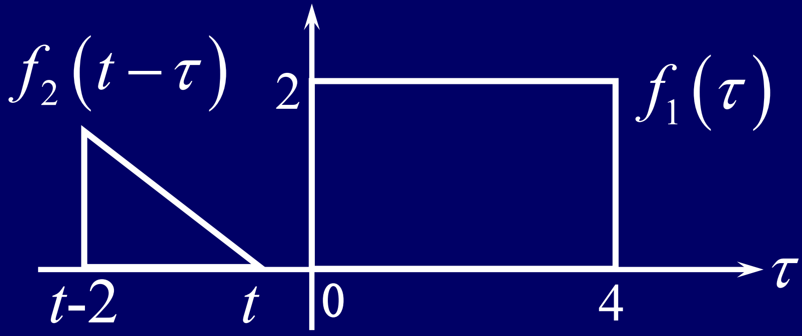
4)将$f_1(\tau)$和$f_2(t-\tau)$ 相乘后积分

当 t 从$-\infty$ 逐渐增大时,$f_2\left(t-\tau\right)$ 沿τ 轴从左向右平移



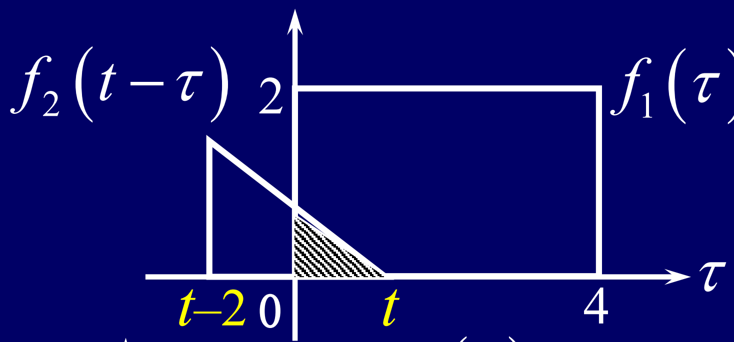
f2(t−τ)
2
f1(τ)
a
t-2
t
0
4
τ
f2(t−τ)
2
f1(τ)
b
t-2
0 (t)
4
τ
f2(t−τ)
2
f1(τ)
c
t–2
0
t
4
τ
2
f1(τ)
f2(t−τ)
d
0
(t–2)
t
4
τ
f1(τ)
2
f2(t−τ)
e
0
t–2
t
4
τ
f1(τ)
2
f2(t−τ)
f
0
t–2
4 (t)
τ
f1(τ)
2
f2(t−τ)
g
0
t–2
4
t
τ
f1(τ)
2
h
f2(t−τ)
0
4
t
τ

具体计算如下：



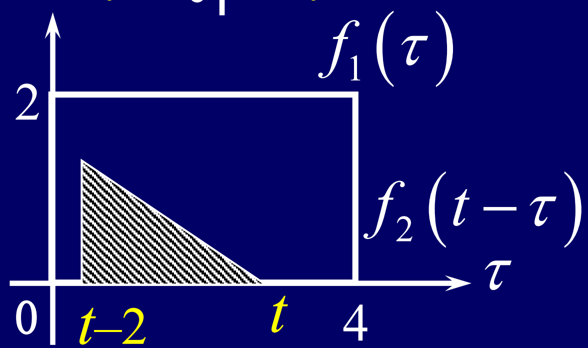
$t<0 \quad f(t)=0 \qquad f_2(t)=\dfrac{3}{4}t$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

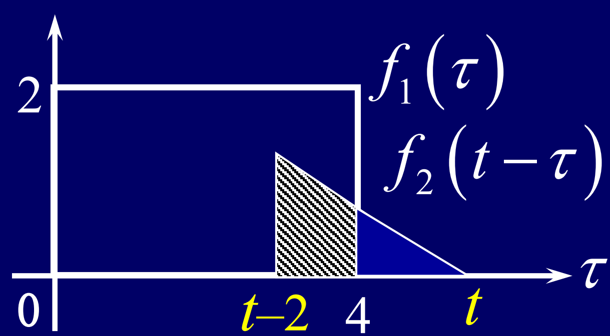


$0<t<2$

$$f(t)=\int_0^t 2\cdot\frac{3}{4}(t-\tau)d\tau=\frac{3}{4}t^2$$

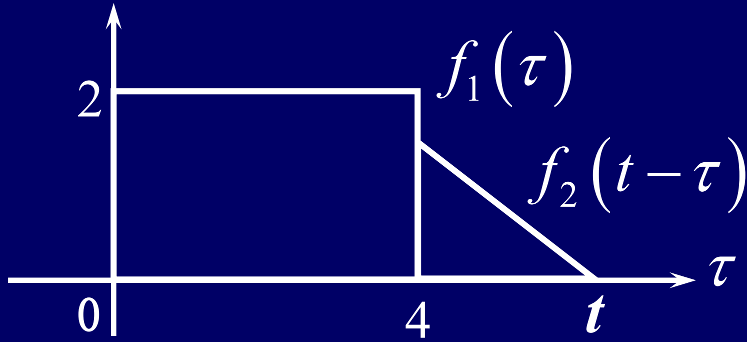


$2<t<4 \quad f(t)=\displaystyle\int_{t-2}^{t} 2\cdot\frac{3}{4}(t-\tau)d\tau=3$



$4<t<6$

$$f(t)=\int_{t-2}^{4} 2\cdot\frac{3}{4}(t-\tau)d\tau=-\frac{3}{4}(t-4)^2+3$$



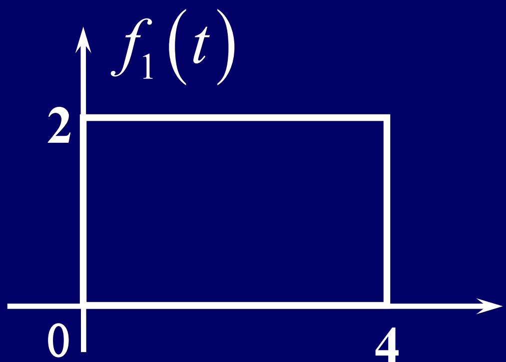
$t>6 \qquad f(t)=0$

$$\therefore f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{3}{4}t^2 & 0<t<2 \\ 3 & 2<t<4 \\ -\frac{3}{4}(t-4)^2+3 & 4<t<6 \\ 0 & t>6 \end{cases}$$

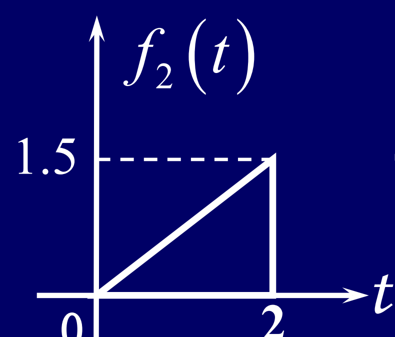
注意：

卷积前、后信号时宽的变化

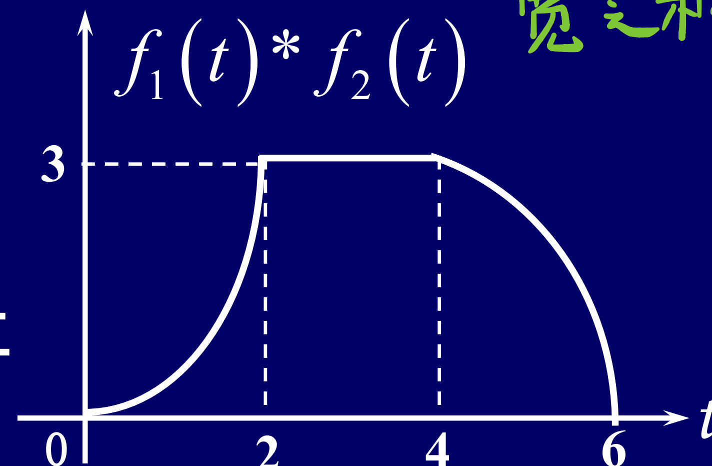
参加卷积的函数时宽之和



$*$



$=$



从图解分析过程可以看出：

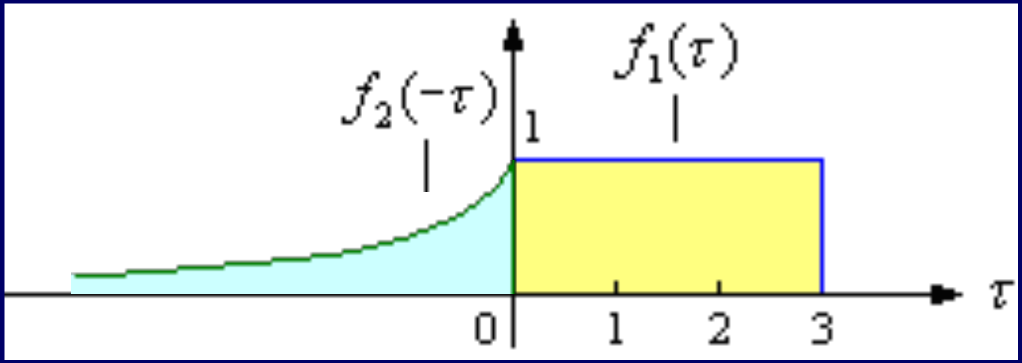
1）卷积中积分限取决于两个图形重叠部分的范围

2）卷积结果所占的时宽等于两个函数各自时宽的总和

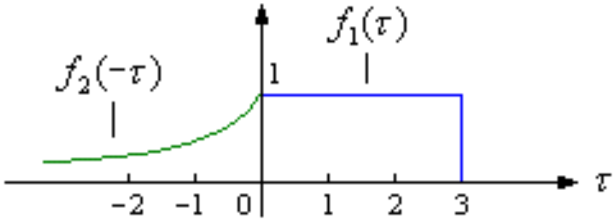
例5　已知信号 $f_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)$， $f_2(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$，求 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

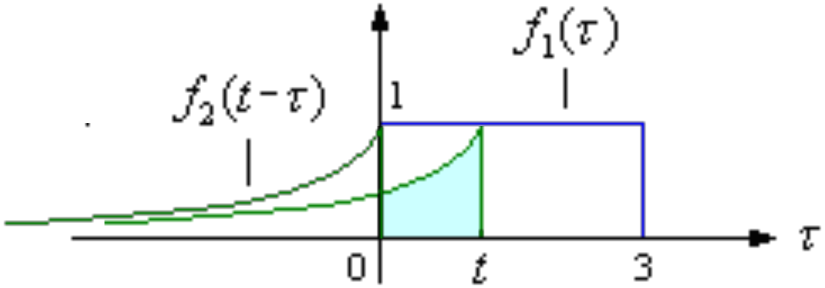
解：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

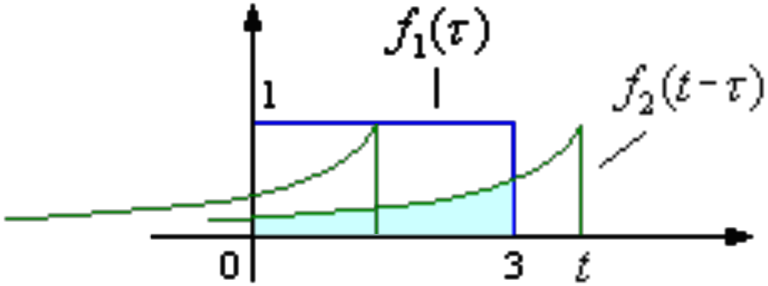


当 $t \le 0$ 时， $y(t) = f_1(t) * f_2(t) = 0$





$0 < t \le 3$



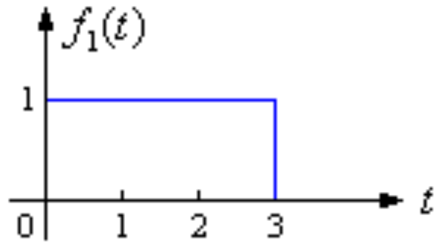
$t > 3$

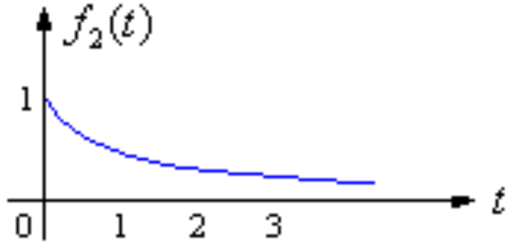
当 $0 < t \le 3$ 时，

$$\int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = 1 - e^{-t}, \quad 0 < t \le 3$$

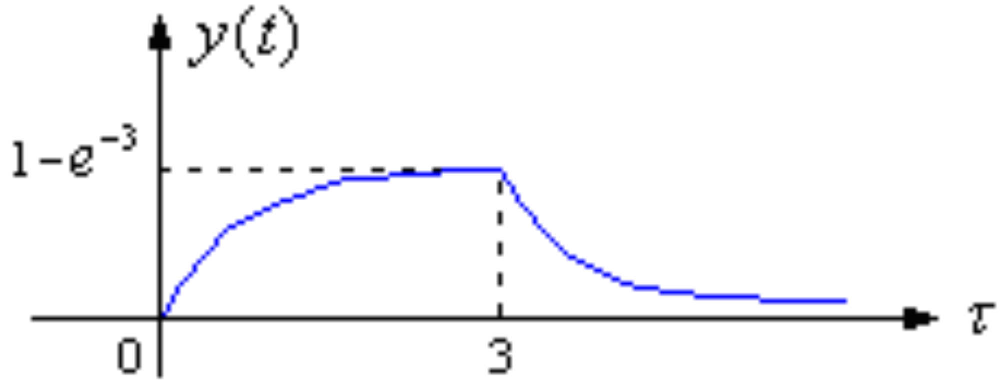
当 $t > 3$ 时，

$$\int_0^3 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^3 e^{\tau} d\tau = (e^3 - 1) e^{-t}, \quad t > 3$$





$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}\,, & 0 < t \le 3 \\ (e^3 - 1)e^{-t}\,, & t > 3 \end{cases}$$



2.4.3 借助冲激响应和线性时不变求解系统的零状态响应

卷积积分的物理意义

将激励信号$e(t)$分解为无穷多个冲激信号之和，借助系统的**冲激响应、线性、时不变性质**求解系统对任意信号激励下的零状态响应$y_{zs}(t)$

线性时不变的概念

$$\delta(t)$$

$$y_{zs}(t) = h(t)$$

$$\delta(t-t_0)$$

$$y_{zs}(t) = h(t-t_0)$$

$$\alpha\delta(t)+\beta\delta(t-t_0)$$

$$y_{zs}(t) = \alpha h(t)+\beta h(t-t_0)$$

复　习

冲激响应$h(t)$　$e(t)=\delta(t) \Rightarrow y_{zs}(t)=h(t)$

冲激响应$h(t)$的形式与齐次解的形式基本相同

阶跃响应$g(t)$　$e(t)=\varepsilon(t) \Rightarrow y_{zs}(t)=g(t)$

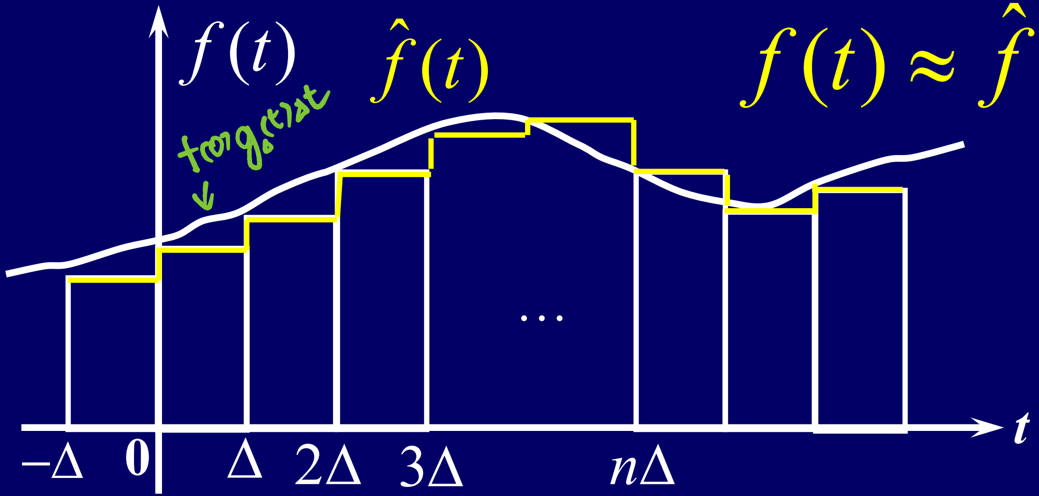
卷积的定义　$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$\begin{cases} f_1(\tau)\neq 0 \\ f_2(t-\tau)\neq 0 \end{cases}$ 得到 τ 的范围

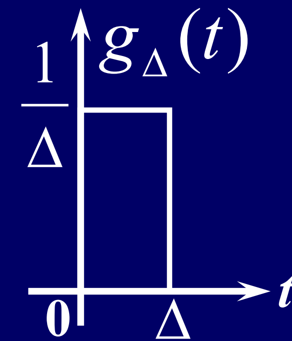
卷积结果所占的时宽等于两个函数各自时宽的总和

计算下列卷积　$\varepsilon(t+2)*\varepsilon(t-3)$　$e^{-2t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t-1)$

1. 连续信号的时域分解



$$f(t) \approx \hat{f}(t)$$



$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta) g_\Delta(t - n\Delta)\Delta \qquad \Delta \to 0 \qquad \hat{f}(t) \to f(t)$$

$$\Delta \to d\tau \qquad n\Delta \to \tau \qquad g_\Delta(t) \to \delta(t) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = f(t)$$

任意信号$f(t)$可以分解为无穷多个冲激信号的加权和

$$f(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\delta(t - n\Delta)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

2.利用卷积积分求解系统零状态响应（卷积积分的物理意义）

$$e(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n\Delta)\delta(t - n\Delta)\Delta$$

对于*LTI*系统

$$e(t) = \delta(t) \rightarrow y_{zs}(t) = h(t)$$

$$e(t) = \delta(t - n\Delta) \rightarrow y_{zs}(t) = h(t - n\Delta)$$

$$e(t) = e(n\Delta)\delta(t - n\Delta)\Delta \rightarrow y_{zs}(t) = e(n\Delta)h(t - n\Delta)\Delta$$

$$e(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n\Delta)\delta(t - n\Delta)\Delta \rightarrow y_{zs}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n\Delta)h(t - n\Delta)\Delta$$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau = e(t) * h(t)$$

系统在激励信号$e(t)$作用下的零状态响应$y_{zs}(t)$为激励$e(t)$与系统冲激响应$h(t)$的卷积积分，即

零状态

$$y_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

例 已知某LTI连续系统的$h(t)=\varepsilon(t)$，激励信号$e(t)=\varepsilon(t-1)$，求系统的零状态响应$y(t)$

解：

$$y_{zs}(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau-1)\varepsilon(t-\tau)d\tau \quad t > \tau > 1$$

$$= \int_{1}^{t} d\tau$$

$$= (t-1)\varepsilon(t-1)$$

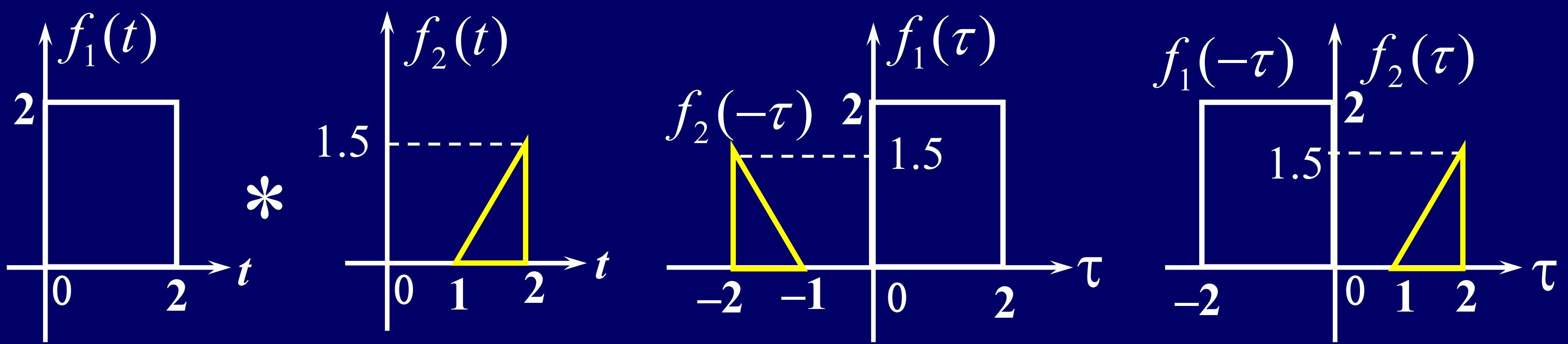
返回

2.5 卷积积分的性质

1. 卷积的代数运算

(1) 交换律 $f(t) = f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

卷积中两函数的位置可以互换、反转函数可以任选



(2) 分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

物理意义

a) 设系统的激励为：$e(t)=e_1(t)+e_2(t)$

系统的冲激响应为：$h(t)$

$$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)=[e_1(t)+e_2(t)]*h(t)$$

$$=e_1(t)*h(t)+e_2(t)*h(t)$$

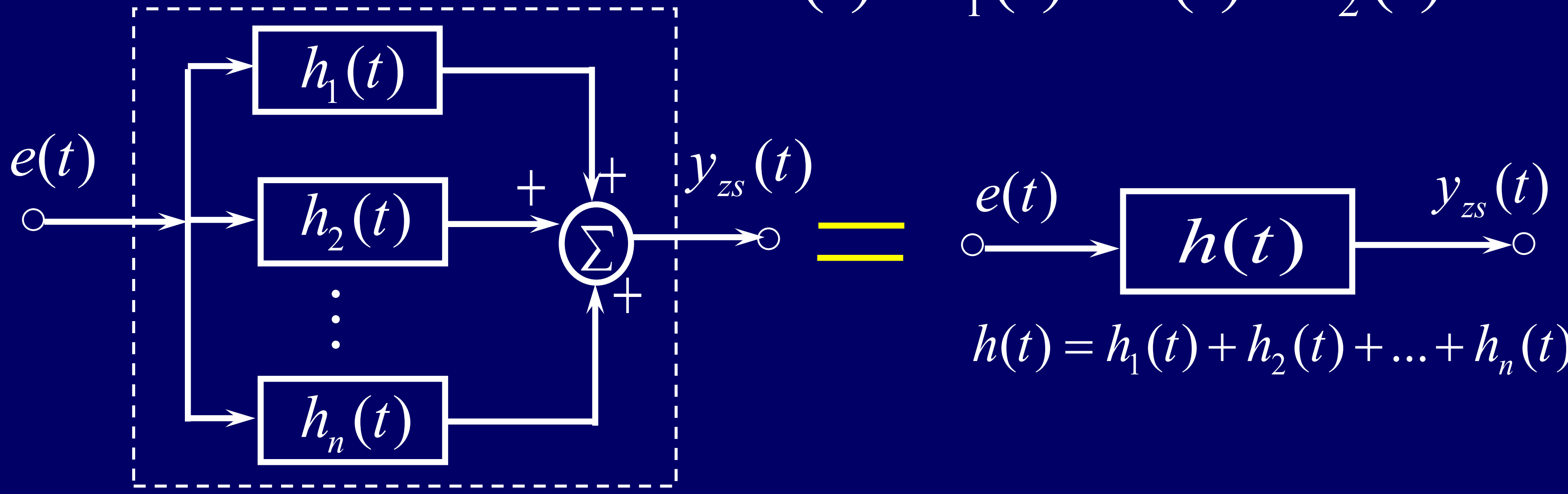
***n*个信号相加作用于系统产生的零状态响应，等于*n*个信号分别作用于系统产生的*n*个零状态响应之和。**

$b)$ 设系统的激励为：$e(t)$

系统的冲激响应为：$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$

$$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)=e(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$$

$$=e(t)*h_1(t)+e(t)*h_2(t)$$

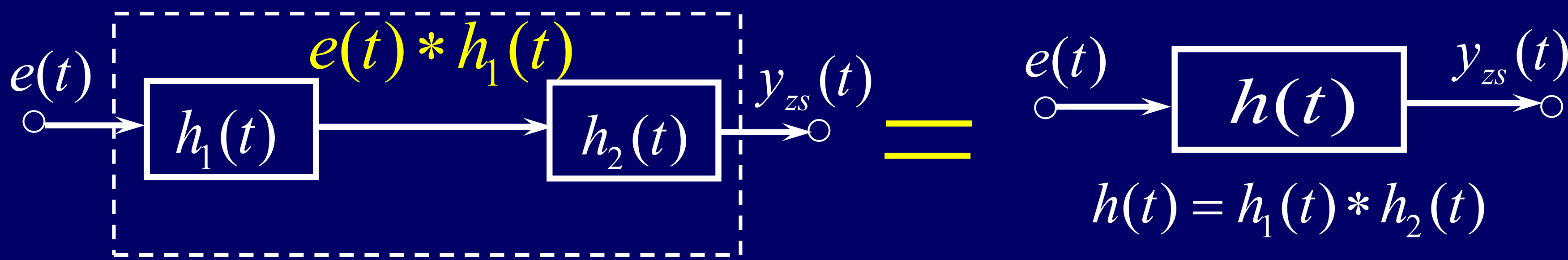


$h(t)=h_1(t)+h_2(t)+\ldots+h_n(t)$

***n*个子系统并联组成的系统，其冲激响应等于各子系统冲激响应之和。**

(3) 结合律

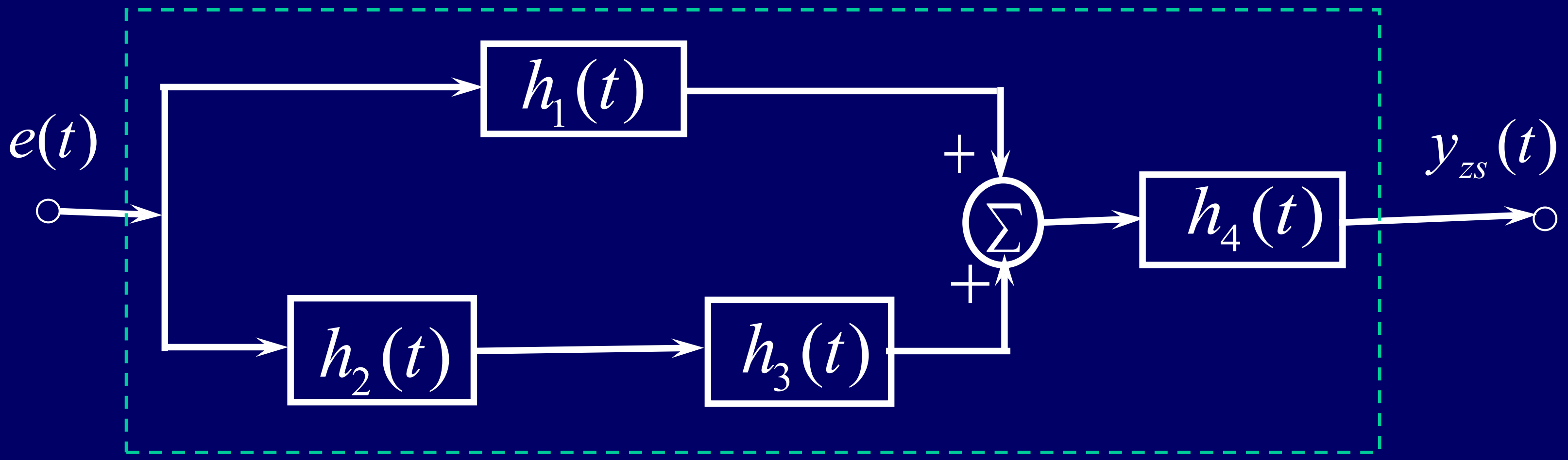
$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$$



$$y_{zs}(t)=[e(t)*h_1(t)]*h_2(t)=e(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=e(t)*h(t)$$

***n*个子系统级联组成的系统，其冲激响应等于各子系统冲激响应之卷积。**

例：求下图所示复合系统的冲激响应$h(t)$



$$h_2(t) * h_3(t)$$

$$h_1(t) + h_2(t) * h_3(t)$$

$$h(t) = [h_1(t) + h_2(t) * h_3(t)] * h_4(t)$$

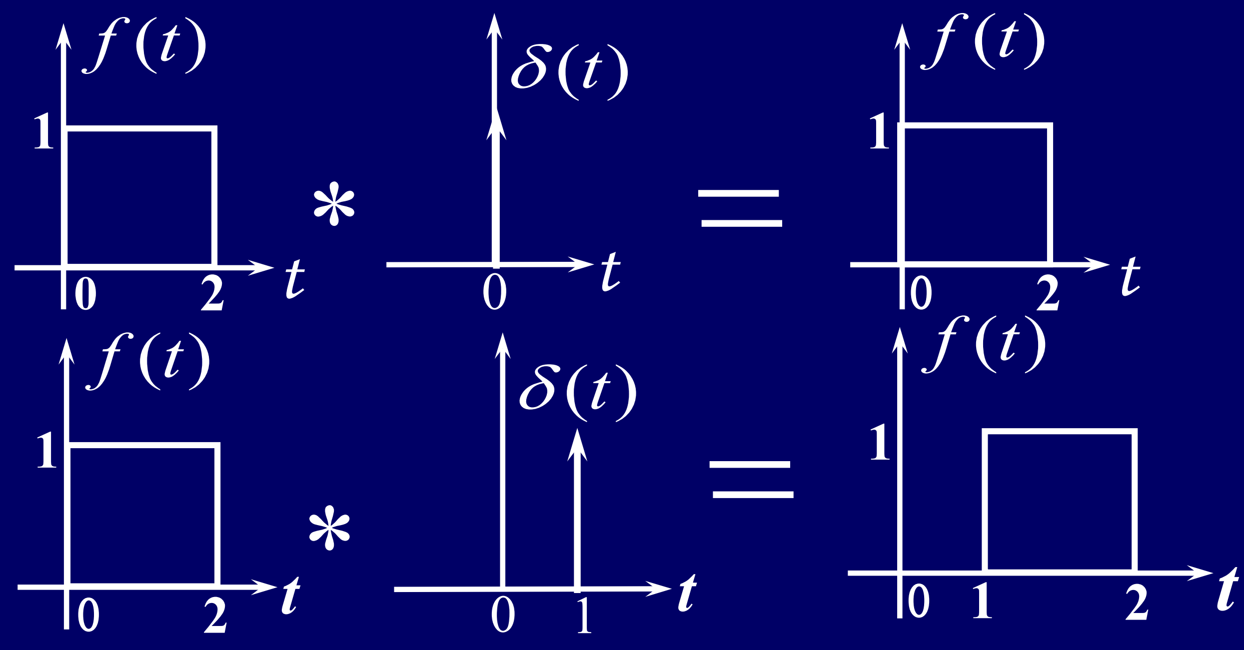
2. 函数与冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

任意函数$f(t)$与$\delta(t)$卷积的结果为该函数$f(t)$本身

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

任意函数$f(t)$与延时t_0的冲激函数卷积的结果是把原函数$f(t)$延时t_0。（在冲激函数处重现原函数）



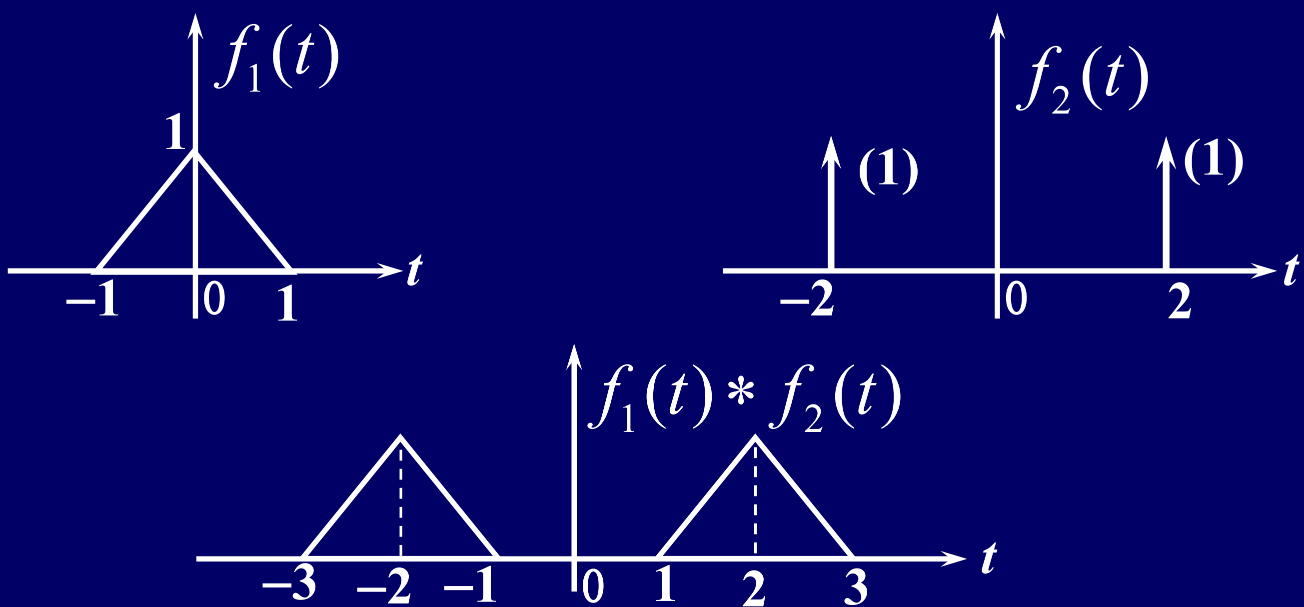
$$\delta(t) * \delta(t) = \delta(t)$$

$$\delta(t) * \delta(t-t_1) = \delta(t-t_1)$$

$$f(t-t_1) * \delta(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$$

$$f(t) * \delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$$

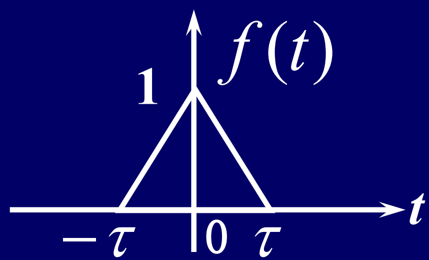
例：$f_1(t)$和$f_2(t)$的波形如下图所示，求$f_1(t) * f_2(t)$。

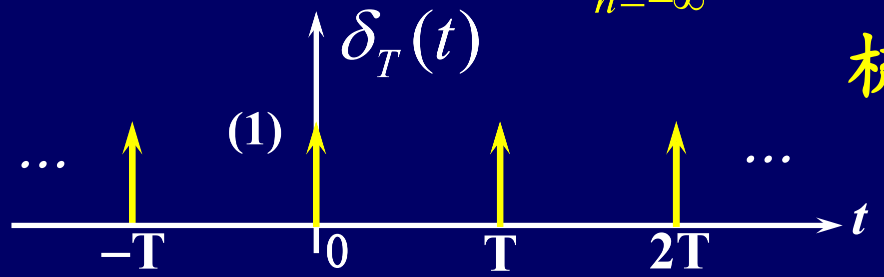


例：计算 $f(t)*\delta_T(t)$

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

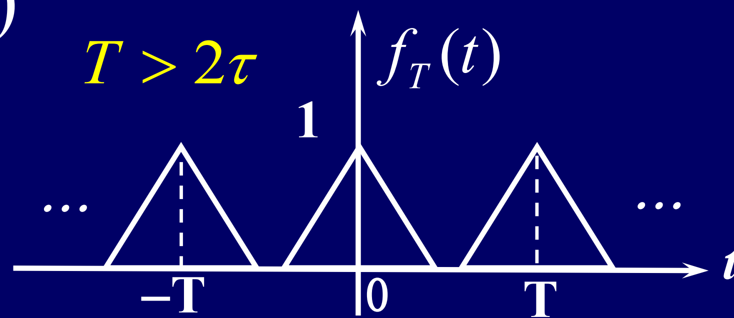
梳状函数

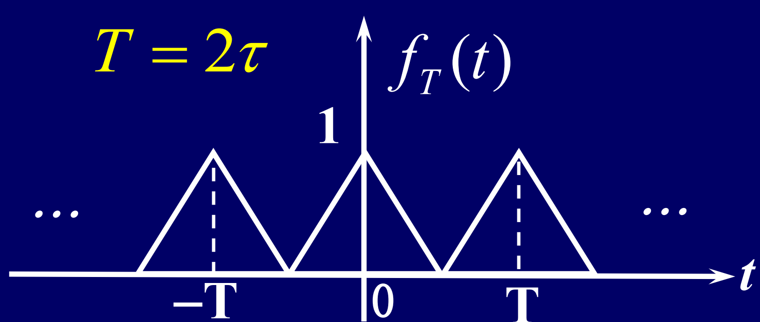


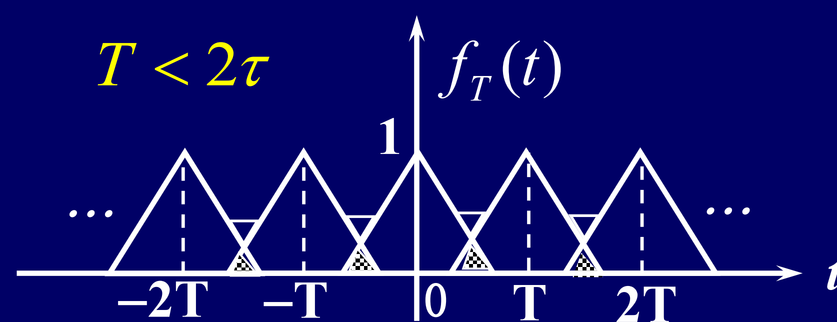


$$f(t)*\delta_T(t)=f(t)*\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

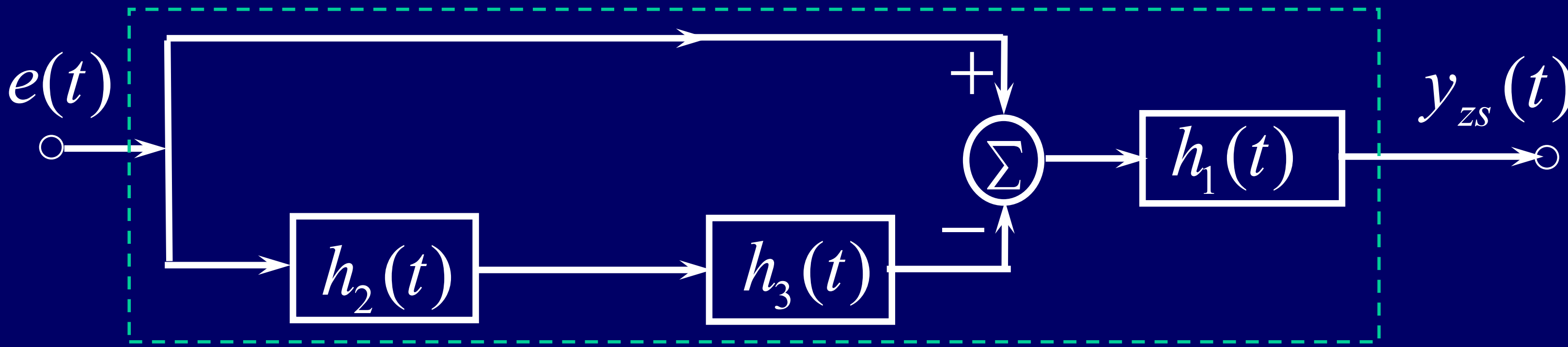
$$=\sum_{-\infty}^{\infty}f(t-nT)=f_T(t)$$







例、写出下图所示复合系统的冲激响应$\boldsymbol{h(t)}$



$$h_1(t)=\varepsilon(t) \quad h_2(t)=\delta(t+1) \quad h_3(t)=\delta(t-2)$$

3、卷积的微分和积分

$$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{def} f^{(1)}(t)$$

1) 卷积的微分性质

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx \xrightarrow{def} f^{(-1)}(t)$$

$$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(1)} = f_1^{(1)}(t)*f_2(t) = f_1(t)*f_2^{(1)}(t)$$

对两函数卷积求导，等于先对其任一函数求导后再卷积

2) 卷积的积分性质

$$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(-1)} = f_1^{(-1)}(t)*f_2(t) = f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

对两函数卷积积分，等于先对其任一函数积分后再卷积

$$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(2)} = ? \quad \left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(-2)} = ?$$

函数$f(t)$与冲激函数的导数或积分卷积

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$$

函数$f(t)$与冲激偶卷积，相当于对$f(t)$求导

$$f(t)*\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx=f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx$$

函数$f(t)$与阶跃函数卷积，相当于对$f(t)$积分

$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

$$f(t)*\delta^{(n)}(t-t_0)=f^{(n)}(t-t_0)$$

$n>0$表示微分

$n<0$表示积分

3) 卷积的微积分性质

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = f_1^{(1)}(t) * f_2^{(-1)}(t)$$

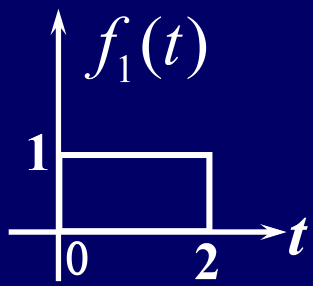
$$= f_1^{(-1)}(t) * f_2^{(1)}(t)$$

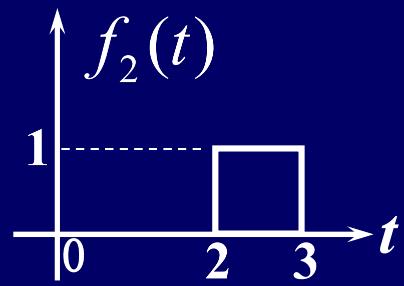
$f_1(t)$与$f_2(t)$卷积的结果等于先对其中任一函数求导数，对另一函数求积分后的结果卷积。

$$f(t) = f_1^{(i)}(t) * f_2^{(-i)}(t) = f_1^{(-i)}(t) * f_2^{(i)}(t)$$

$$f^{(i)}(t) = f_1^{(j)}(t) * f_2^{(i-j)}(t) = f_1^{(i-j)}(t) * f_2^{(j)}(t)$$

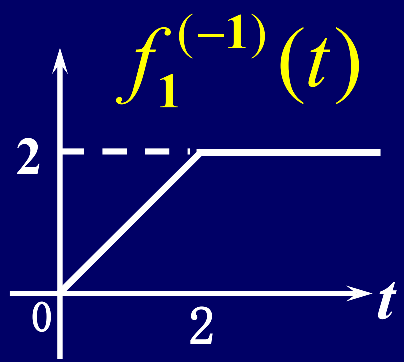
例：$f_1(t)$和$f_2(t)$的波形如下图所示，求$f_1(t) * f_2(t)$



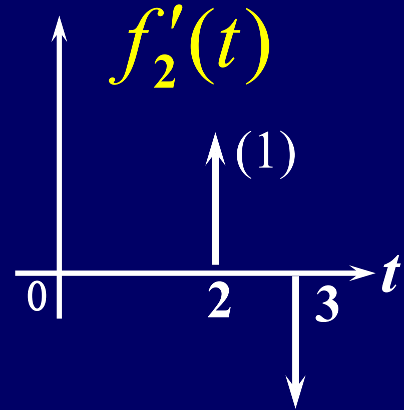


$$= f_1^{(-1)}(t) * f_2^{(1)}(t)$$

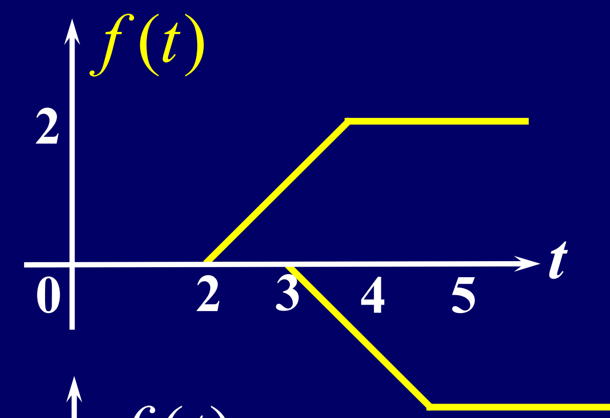
解：

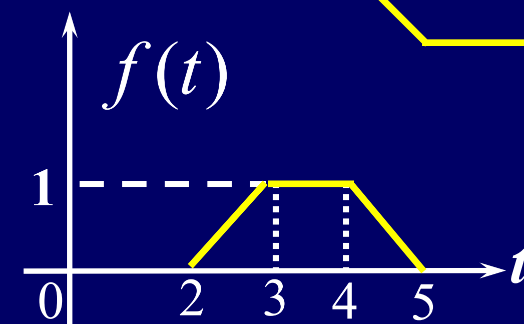


$*$



$=$





例：$f_1(t)=\cos t\varepsilon(t), f_2(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4\pi),$ 求 $f_1(t)*f_2(t)$

$$f_1(t)*f_2(t)=\cos t\cdot\varepsilon(t)*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4\pi)]$$

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2^{(1)}(t)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=\sin t\cdot\varepsilon(t)*[\delta(t)-\delta(t-4\pi)]$$

$$=\sin t\cdot\varepsilon(t)-\sin(t-4\pi)\cdot\varepsilon(t-4\pi)$$

$$=\sin t\cdot[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4\pi)]$$

例：某LTI系统的数学模型为

$$y'(t)+2y(t)=e'(t)+3e(t)$$

已知 $y(0\_)=2, e(t)=t\varepsilon(t)$ 求$y(t) = y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$

解：零输入响应为：$y_{zi}(t)=ce^{-2t}\varepsilon(t)=2e^{-2t}\varepsilon(t)$

零状态响应为：$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)$ 求跳变量

$$h(t)= c_0\delta(t)+c_1e^{-2t}\varepsilon(t) =\delta(t)+e^{-2t}\varepsilon(t)$$

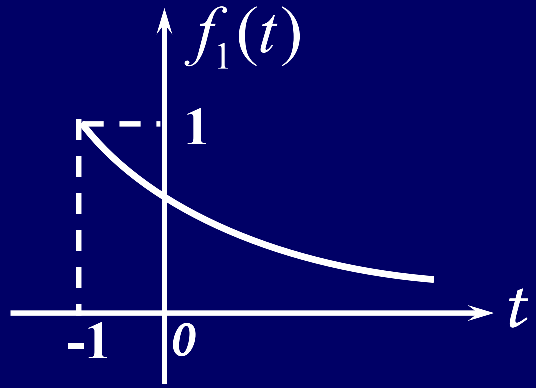
$$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)=t\varepsilon(t)*[\delta(t)+e^{-2t}\varepsilon(t)]$$

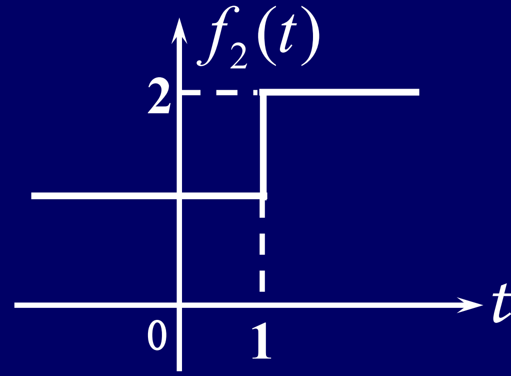
$$= t\varepsilon(t) + t\varepsilon(t) * e^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$=(\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{4})\varepsilon(t)$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

例：$f_1(t)$和$f_2(t)$的波形如下图所示，求 $f_1(t)*f_2(t)$





$e^{-(t+1)}\varepsilon(t+1)$ $\qquad$ $1+\varepsilon(t-1)$

解：$f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*[1+\varepsilon(t-1)]$

$$=f_1(t)*1+f_1(t)*\varepsilon(t-1)$$

$$f_1(t)*1=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\cdot 1d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\tau+1)}\varepsilon(\tau+1)d\tau$$

$$=\int_{-1}^{\infty}e^{-(\tau+1)}d\tau=-e^{-(\tau+1)}\Big|_{-1}^{\infty}=1$$

$$f_1(t) * \varepsilon(t-1) = f_1^{(-1)}(t) * \delta(t-1) \qquad f_1(t) = e^{-(t+1)}\varepsilon(t+1)$$

$$f_1^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(\tau+1)}\varepsilon(\tau+1)d\tau$$

$$= \int_{-1}^{t} e^{-(\tau+1)}d\tau \quad = -e^{-(\tau+1)}\Big|_{-1}^{t}$$

$$= (1 - e^{-(t+1)})\ \varepsilon(t+1)$$

$$(1 - e^{-(t+1)})\varepsilon(t+1) * \delta(t-1) = (1 - e^{-t})\varepsilon(t)$$

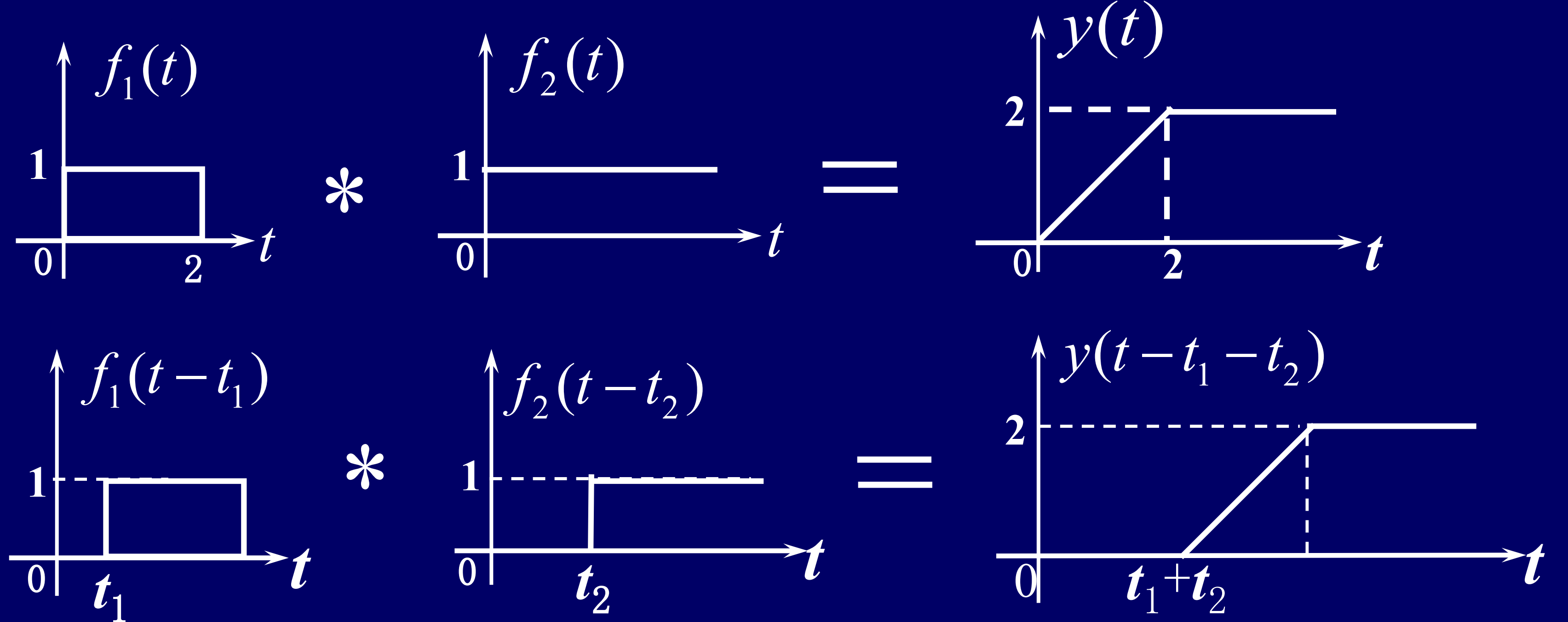
$$f_1(t) * f_2(t) = 1 + (1 - e^{-t})\varepsilon(t)$$

4、卷积的时移特性

$$f_1(t) * f_2(t) = y(t)$$

$$f_1(t-t_0) * f_2(t) = y(t-t_0) = f_1(t) * f_2(t-t_0)$$

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = y(t-t_1-t_2) = f_1(t-t_2) * f_2(t-t_1)$$



例：已知 $f_1(t-1)*f_2(t+1)=1+\varepsilon(t)-e^{-t}\varepsilon(t)$

求 $f_1(t)*f_2(t)$

例：已知 $f_1(t)=e^{-2t}\varepsilon(t+1)\quad f_2(t)=\varepsilon(t-3)$

$e^{-2t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=\dfrac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$ 求 $f_1(t)*f_2(t)$

解：$f_1(t)*f_2(t)=e^{2}e^{-2(t+1)}\varepsilon(t+1)*\varepsilon(t-3)$

$$=e^{2}\frac{1}{2}(1-e^{-2(t-2)})\varepsilon(t-2)$$

返回

本章重点及要求

1）会用经典法求解微分方程（即由特征根的形式确定齐次解、由激励的形式确定特解）

2）掌握初始状态 $y^{(i)}(0_-)$，初始条件 $y^{(i)}(0_+)$ 和跳变量 $\vee y^{(i)}(0)$ 的概念，会用冲激函数平衡法确定初始条件

$$y^{(i)}(0_+) = y^{(i)}(0_-) + \vee y^{(i)}(0)$$

3）掌握系统全响应的三种分解方法

（1）自由响应 + 强迫响应；

（2）零输入响应 + 零状态响应；

（3）暂态响应 + 稳态响应

4）深刻理解冲激响应$h(t)$与阶跃响应$g(t)$的物理意义，并会求解。

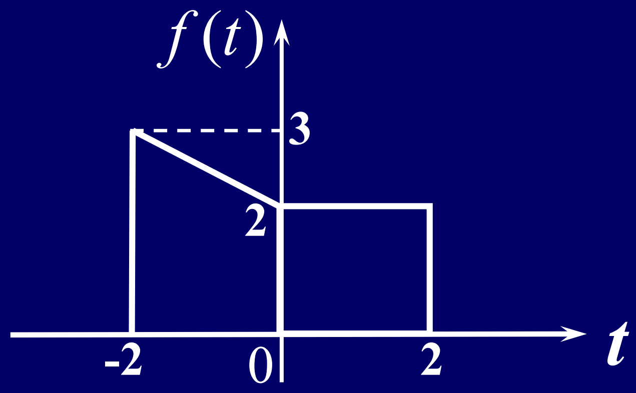
5）掌握卷积积分的定义，深刻理解卷积积分的物理意义，熟练应用卷积积分的定义和性质计算卷积积分

卷积积分的物理意义：系统的零状态响应为激励信号与系统冲激响应的卷积积分

$$y_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

END

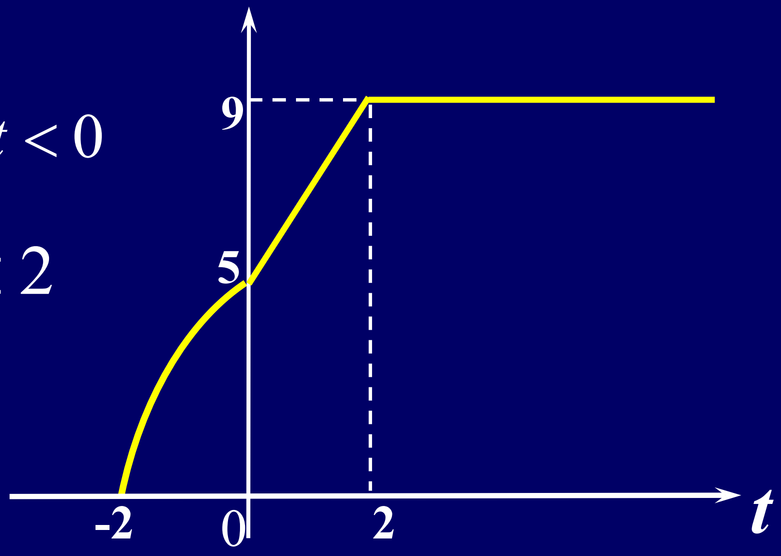
作业 讲解



$$
f(t)=\begin{cases} 0 & t<-2 \\ 2-\dfrac{1}{2}t & -2<t<0 \\ 2 & 0<t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}
$$

$$
\frac{df(t)}{dt}
$$

$$
\int_{-\infty}^{t} f(x)dx=\begin{cases} 0 & t<-2 \\ 5+2t-\dfrac{1}{4}t^2 & -2<t<0 \\ 5+2t & 0<t<2 \\ 9 & t>2 \end{cases}
$$



$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2e''(t)+6e(t)$$

已知 $e(t)=\varepsilon(t)$ $y(0_-)=2$ $y'(0_-)=0$ 求 $y(0_+)$ $y'(0_+)$

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta'(t)+6\varepsilon(t)$$

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=e'(t)+2e(t)$$

已知 $e(t)=3e^{-2t}\varepsilon(t)$

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3\delta(t)-6e^{-2t}\varepsilon(t)$$

返回

2.1 (1,3,4) ,2.2 (2,4),2.4

2.14, 2.16

2.17 (1,2,3,4,5,7)

2.17(5)用性质结合定义来求，直接用性质求积分复杂

2.18(1,2,4),2.20,2.28,2.29

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

$h''(t)$	$\delta'(t)-3\delta(t)$	$h''(t)$	$\delta'(t)-3\delta(t)$
$5h'(t)$	$5\delta(t)$	$h'(t)$	$\delta(t)-\underbrace{3\varepsilon(t)}$
$6h(t)$		$h(t)$	$\underbrace{\varepsilon(t)}$

$h''(t)$	$\delta'(t)-3\delta(t)$	$h''(t)$	$\delta'(t)-3\delta(t)$
$5h'(t)$	$5\delta(t)$	$5h'(t)$	$\delta(t)-3\varepsilon(t)$
$6h(t)$	$6\varepsilon(t)$	$6h(t)$	$\varepsilon(t)$

返回 $h(t)$

$$g''(t) + 5g'(t) + 6g(t) = \delta'(t) + 2\delta(t)$$

$g''(t)$ $\delta'(t) - 3\delta(t)$

$5g'(t)$ $5\delta(t)$

$6g(t)$

$g''(t)$ $\delta'(t) - 3\delta(t)$

$g'(t)$ $\delta(t) - \underbrace{3\varepsilon(t)}$

$g(t)$ $\underbrace{\varepsilon(t)}$

返回$g(t)$

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta'''(t)+2\delta'(t)$$

$$h''(t)\quad \delta'''(t)-5\delta''(t)+21\delta'(t)-75\delta(t)$$

$$5h'(t)\quad 5\delta''(t)-25\delta'(t)+105\delta(t)$$

$$6h(t)\quad 6\delta'(t)-30\delta(t)$$

$$h''(t)\quad \delta'''(t)-5\delta''(t)+21\delta'(t)-75\delta(t)$$

$$h'(t)\quad \delta''(t)-5\delta'(t)+21\delta(t)-\underbrace{75\varepsilon(t)}$$

$$h(t)\quad \delta'(t)-5\delta(t)+\underbrace{21\varepsilon(t)}$$

$$h(t)=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t})\varepsilon(t)+C_3\delta(t)+C_4\delta'(t)$$

$$C_3=-5$$

$$C_4=1$$

$h''(t)$ $\delta'''(t)-5\delta''(t)+21$ $h''(t)$ $\delta'''(t)-5\delta''(t)$

$5h'(t)$ $5\delta''(t)-25\delta'(t)$ $h'(t)$ $\delta''(t)-5\delta'(t)$

$6h(t)$ $6\delta'(t)-30\delta(t)$ $h(t)$ $\delta'(t)-5\delta(t)$

返回

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)$$

$h''(t)$ $\delta''(t)$ $-3\delta'(t)$ $+9\delta(t)$

$5h'(t)$ $5\delta'(t)$ $-15\delta(t)$

$6h(t)$ $6\delta(t)$

$h''(t)$ $\delta''(t)$ $-3\delta'(t)$ $+9\delta(t)$

$h'(t)$ $\delta'(t)$ $-3\delta(t)$ $+\underbrace{9\varepsilon(t)}$

$h(t)$ $\delta(t)$ $-\underbrace{3\varepsilon(t)}$

$$h(t)=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t})\varepsilon(t)+C_0\delta(t)$$

返回

$$C_0=1$$

返回

$$h''(t)+3h'(t)+2h(t)=-\delta'(t)+2\delta(t)$$

$$h''(t) \quad -\delta'(t) \quad +\mathbf{5}\delta(t)$$

$$\mathbf{3}h'(t) \quad -\mathbf{3}\delta(t)$$

$$\mathbf{2}h(t)$$

$$h''(t) \quad -\delta'(t) \quad +\mathbf{5}\delta(t)$$

$$h'(t) \quad -\delta(t) \quad +\underbrace{\mathbf{5}\varepsilon(t)}$$

$$h(t) \quad \underbrace{-\varepsilon(t)}$$

$$h(0_+)=-1 \quad h'(0_+)=5$$

返回

$$y'(t)+3y(t)=3\delta'(t)$$

$y'(t)$ $3\delta'(t)-9\delta(t)$

$3y(t)$ $9\delta(t)$

$y'(t)$ $3\delta'(t)-9\delta(t)$

$y(t)$ $3\delta(t)$ $-9\varepsilon(t)$

$$\forall y(0)=-9$$

返回

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2e'(t)+6e(t)$$

已知 $e(t)=\varepsilon(t)$ $y(0\_)=2$ $y'(0\_)=0$ 求 $y(0_+)$ $y'(0_+)$

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta(t)+6\varepsilon(t)$$

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta(t)$$

$y''(t)$ $2\delta(t)$

$3y'(t)$

$2y(t)$

$y''(t)$ $2\delta(t)$

$y'(t)$ $2\varepsilon(t)$

$y(t)$

$\forall y(0)=$ **0** $y(0_+)=$ **2**

$\forall y'(0)=$ **2** $y'(0_+)=$ **2**

返回

$$y'''(t)+4y''(t)+5y'(t)+2y(t)=\delta''(t)+3\delta(t)$$

$y'''(t)$ $\delta''(t)-4\delta'(t)+14\delta(t)$

$4y''(t)$ $4\delta'(t)-16\delta(t)$

$5y'(t)$ $5\delta(t)$

$2y(t)$

$y'''(t)$ $\delta''(t)-4\delta'(t)+14\delta(t)$

$y''(t)$ $\delta'(t)-4\delta(t)+\underbrace{14\varepsilon(t)}$

$y'(t)$ $\delta(t)\ \underbrace{-4\varepsilon(t)}$

$y(t)$ $\underbrace{\varepsilon(t)}$

$$\forall y(0)=1$$

$$\forall y'(0)=-4$$

$$\forall y''(0)=14$$

返回

1. 某系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=e(t)$

激励为$e(t)=2\varepsilon(t)$，计算当$y(0_+)=0, y'(0_+)=0$ 的全响应

1）齐次解$y_h(t)$ $\lambda^2+3\lambda+2=0$ $(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

特征根$\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$ 齐次解 $y_h(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

2）特解$y_p(t)$ 设特解为 $y_p(t)=P\ =1$

3）全解$y_p(t)$ $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+1$

代入初始条件 $y(0_+)=0, y'(0_+)=0$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=c_1+c_2+1=0 \\ y'(0)&=-c_1-2c_2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-2 \\ c_2=1 \end{cases}$$

返回

$$y(t)=(-2e^{-t}+e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$$

2. $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2e''(t)+6e(t)$

已知 $e(t)=\varepsilon(t)$ $y(0\_)=2$ $y'(0\_)=0$ 求 $y(0_+)$ $y'(0_+)$

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta'(t)+6\varepsilon(t)$$

$y''(t)$ $2\delta'(t)-6\delta(t)$

$3y'(t)$ $6\delta(t)$

$2y(t)$

$y''(t)$ $2\delta'(t)-6\delta(t)$

$y'(t)$ $2\delta(t)-\underbrace{6\varepsilon(t)}$

$y(t)$ $\underbrace{2\varepsilon(t)}$

$\forall y(0)=2$ $\forall y'(0)=-6$

$$y'(0_+)=y'(0\_)-6=-6$$

$$y(0_+)=y(0\_)+2=4$$

返回

前两章测试

$f(t)=2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$ 是功率信号还是能量信号？求其功率或能量。 功率信号

判断系统 $y(n)=n^2x(n+1)+1$ 的线性、时不变、因果、稳定

线性，时变，非因果，不稳定

计算 $(1-t)\frac{d}{dt}[e^{-3t}\delta(t)]=$ ____。 $(1-t)\delta'(t) = \delta'(t) - \delta(t)$

$e^{-3t}\delta(t) = \delta(t)$

计算 $\int_{-\infty}^{3}(2t^2-3t-20)[\delta(t+3)*\delta'(t-5)]dt=$ $-18\delta(t)\ -5\varepsilon(t)$

$\delta'(t-2)\ (2t^2-3t-20)$

$(8-6-20)\delta'(t)$

$-5\delta(t)$ $\quad -18\delta'(t)-5\delta(t)$

计算 $f(k)=5\cos\frac{\pi}{6}k+2e^{j\frac{\pi}{4}k}$ 的周期为 ___24___。

$\frac{2\pi}{\pi}\cdot 6$ $\quad \frac{2\pi}{\pi}\cdot 4$ $\quad 12 \quad 8$

已知某*LTI*系统$h(t)=\cos 2t\ \varepsilon(t)$，当激励为$e(t)=4\varepsilon(t-1)$时

该系统的零状态响应$y_{zs}(t)=$ $8\sin(2t-2)\varepsilon(t-1)$。

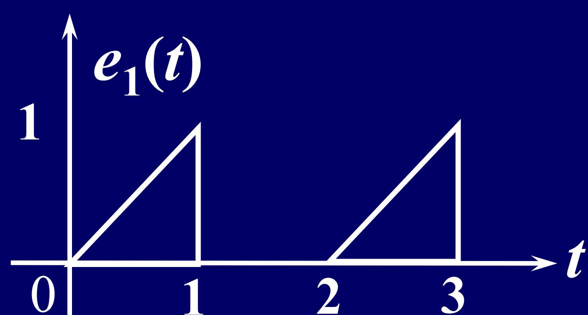
$y_{zs}=h(t)*e(t)$

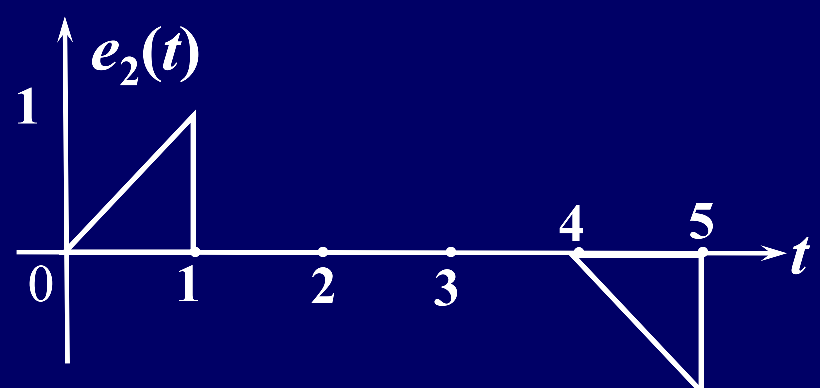
$=\int^{t-1}4\cos 2t\,dt=8\sin 2(t-1)\,\varepsilon(t-1)$

已知$f(-2t+6)=2\delta(t-1)+t[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)]$画出$f(t)$的波形 (5分)

某系统数学模型为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=5e'(t)+e(t)$ 画出该系统的结构框图 (5分）。

某*LTI*连续系统，输入信号如下图所示。当输入为$e_1(t)$时$y_{zs1}(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4)$ ，求输入为$e_2(t)$时的$y_{zs2}(t)$(5分)。





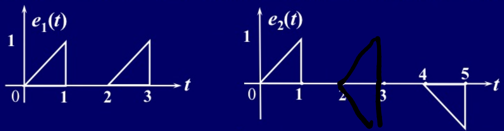
已知$e(t)*h'(t)=\delta(t)-2e^{-2t}\varepsilon(t)$ 求$2[e(t)*h''(t)*\varepsilon(t)]$ (4分）

END

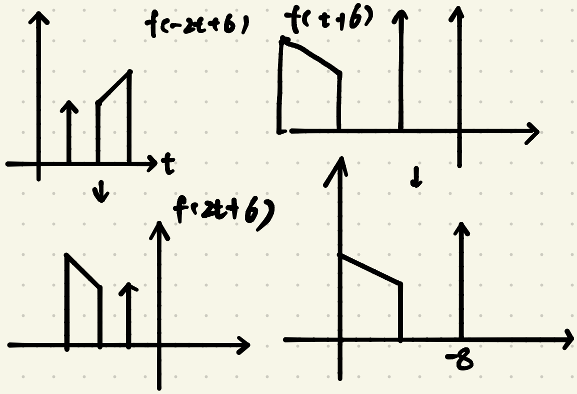
已知$f(-2t+6)=2\delta(t-1)+t[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)]$画出$f(t)$的波形(5分)

某系统数学模型为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=5e'(t)+e(t)$ 画出该系统的结构框图(5分)。

某LTI连续系统，输入信号如下图所示。当输入为$e_1(t)$时$y_{zs1}(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4)$，求输入为$e_2(t)$时的$y_{zs2}(t)$(5分)。



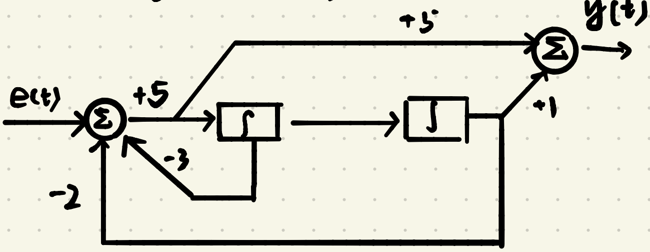
已知 $e(t)*h'(t)=\delta(t)-2e^{-2t}\varepsilon(t)$ 求 $2[e(t)*h''(t)*\varepsilon(t)]$ (4分)



平移题要负直接对称

$y(t)=5x'(t)+x(t)$

$e(t)=5x''(t)+3x'(t)+2x(t)$



$e_1(t)*h(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4)$

$e_2(t)=e_1(t)-e_1(t-2)$

$\therefore y_{zs2}=e_2(t)*h(t)$

$=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4)$

$-\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-6)$

$e(t)*h'(t)=\delta(t)-2e^{-2t}\varepsilon(t)$

$2[e(t)*h''(t)*\varepsilon(t)]$

$=2[e(t)*h'(t)*\delta(t)]$

$=2[e(t)*h'(t)]$

$=2\delta(t)-4e^{-2t}.$