第三章　离散时间系统的时域分析

No.2

离散系统的优点：精度高、可靠性好、便于实现大规模集成、设备体积小、重量轻等

离散系统的时域分析与连续系统时域分析有对应关系

连续系统~微分方程 $$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot e^{(j)}(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad y_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

连续系统的数学运算含微分（或积分）、数乘、相加

离散系统~差分方程 $$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} e(k-j)$$

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k) \quad y_{zs}(k) = e(k) * h(k)$$

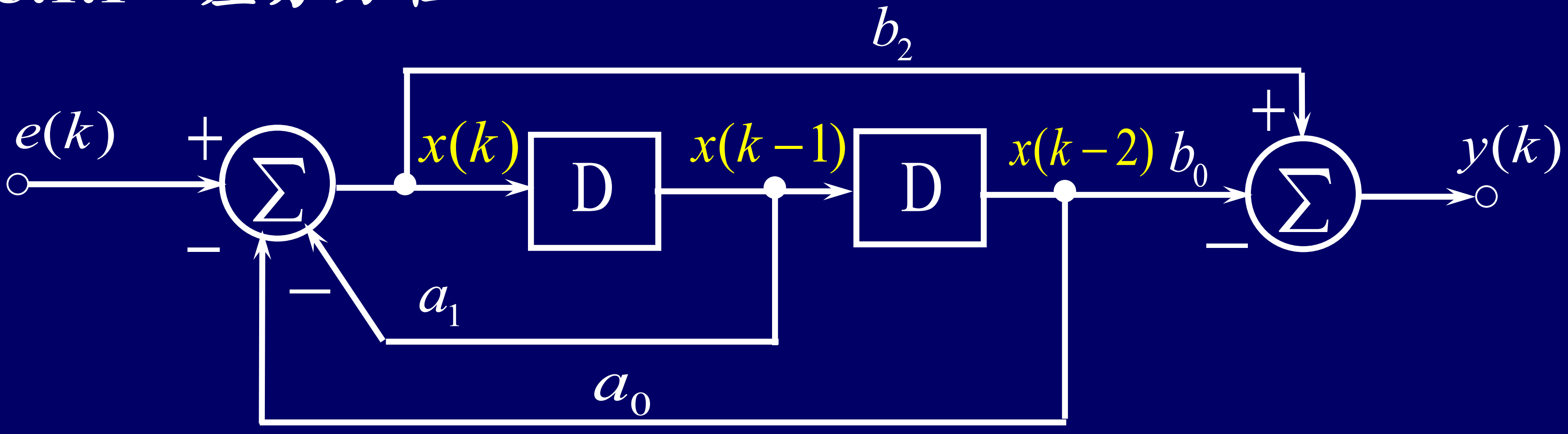
离散系统的数学运算含移位（或延时）、数乘、相加

不必求跳变量

3.1 系统差分方程及其经典解

单位：采样周期

3.1.1 差分方程



左加法器： $x(k)+a_1x(k-1)+a_0x(k-2)=e(k)$

右加法器： $y(k)=b_2x(k)-b_0x(k-2)$

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_0y(k-2)=b_2e(k)-b_0e(k-2)$$

单输入—单输出的*LTI*离散系统的数学模型一般形式为

常系数线性差分方程

没有乘除关系，如 y(k)·x(k-1)，x(k)x(k-1)

$$a_n y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\ldots+a_0 y(k-n)=$$
$$b_m e(k)+b_{m-1}e(k-1)+\ldots+b_0 e(k-m)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}y(k-i)=\sum_{j=0}^{m} b_{m-j}e(k-j) \qquad n\geq m$$

方程的阶数：输出序列$y(k)$的最高序号与最低序号之差

求解差分方程的方法：①迭代法 计算机

②经典法

③变换域法 Z变换

时域经典法

建立系统的差分方程

求特征根λ_i，确定齐次解$y_h(k)$的形式（查表5–1）

由$e(k)$，确定特解$y_p(k)$的形式（查表5–2）

$+$ $\sum$ $+$

含待定系数

$$y(k)=y_h(k)+y_p(k)$$

由初始条件确定系数

系统响应$y(k)$

条

$y(0)$

$y(1)$

$\vdots$

状 state

$y(-1)$

$y(-2)$

$\vdots$

淡化跳变量

（1） 齐次解$y_h(k)$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} e(k-j) \qquad n \ge m$$

齐次差分方程 $y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \ldots + a_0 y(k-n) = 0$

方程右边为

一阶差分方程的齐次解

$$\left.\begin{aligned} & y(k) + a y(k-1) = 0 \\ & y(k) \Big/ y(k-1) = -a \end{aligned}\right\}$$

意味着$y_h(k)$是一个公比为$(-a)$的等比序列

$\therefore \quad y_h(k) = C(-a)^k$

其中C是待定系数，由初始条件确定

差分方程的齐次解

齐次方程 $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\ldots+a_0 y(k-n)=0$

特征方程 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0$

$\boxed{\text{齐次解的形式完全由特征根}\lambda_i\text{确定（查P}_{218}\text{表5-1）}}$

单根 $c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k$ $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$

重根 $(c_1k+c_2)\lambda^k$ $(c_1t+c_2)e^{\lambda t}$

共轭根 $\lambda_{1,2}=\rho e^{\pm j\Omega}$ $\rho^k[c_1\cos(k\Omega)+c_2\sin(k\Omega)]$

$\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$ $e^{\alpha t}[c_1\cos(\beta t)+c_2\sin(\beta t)]$

例1：求下列方程的齐次解$y_h(k)$

1) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=0$

解：特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=0 \quad (\lambda+1)(\lambda+2)=0$

$$\lambda_1=-1, \qquad \lambda_2=-2$$

$$y_h(k)=c_1(-1)^k+c_2(-2)^k$$

2) $y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=0$

解：特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0 \quad (\lambda+2)^2=0$

$$\lambda_1=\lambda_2=-2$$

$$y_h(k)=(c_1k+c_2)(-2)^k$$

3) $y(k)+2y(k-1)+2y(k-2)=0$

解：特征方程 $\lambda^2+2\lambda+2=0 \quad (\lambda+1)^2+1=0$

$$\lambda_{1,2}=-1\pm j=\rho e^{\pm j\Omega}=\sqrt{2}e^{\pm j\frac{3}{4}\pi}$$

$$y_h(k)=\rho^k[C_1\cos(k\Omega)+C_2\sin(k\Omega)]$$

$$=\sqrt{2}^k[C_1\cos(\frac{3\pi}{4}k)+C_2\sin(\frac{3\pi}{4}k)]$$

（2） 特解$y_p(k)$

特解也称为**强迫响应**，其形式与激励的形式有关

根据$e(k)$的形式查P218表5–2，先确定$y_p(k)$的形式，然后代入差分方程确定系数。

例 $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=e(k)$

$e(k)=2\varepsilon(k)$ 求 $y_p(k)$

解： $e(k)=2\varepsilon(k)$ $k\geq 0$ 时，激励为常数 2 $y_p(k)=P$

$$P+3P+2P=2 \Rightarrow P=\frac{1}{3}$$

$$y_p(k)=\frac{1}{3}, k\geq 0 \quad \frac{1}{3}\varepsilon(k)$$

例 $y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=e(k)$

$e(k)=2^k$ 求 $y_p(k)$

解：特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-2$

$$2 \neq \lambda_{1,2}$$

$$y_p(k)=P2^k$$

$$P2^k+4P2^{k-1}+4P2^{k-2}=2^k$$

$$P+2P+P=1 \Rightarrow P=\frac{1}{4}$$

$$y_p(k)=\frac{1}{4}2^k, k\geq 0 \quad \frac{1}{4}2^k\varepsilon(k)$$

(3) 全解 $y(k)$ $$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k + y_p(k)$$

注意：待定系数在全解中用初始条件确定

例 $y(k) + 4y(k-1) + 4y(k-2) = e(k)$

$e(k) = 2^k$ $y(0) = 0, y(1) = -1$ 求 $y(k)$

解：特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$

$$y_h(k) = (c_1 k + c_2)(-2)^k$$

$$y_p(k) = \frac{1}{4} 2^k$$

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

$$= (c_1 k + c_2)(-2)^k + \frac{1}{4} 2^k$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_2 + \dfrac{1}{4} \\ \\ y(1) = -1 = (c_1 + c_2)(-2) + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ \\ c_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$y(k) = \left[k(-\mathbf{2})^k - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}(-\mathbf{2})^k + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \mathbf{2}^k \right] \varepsilon(k)$$

例 $6y(k)-5y(k-1)+y(k-2)=10e(k)$

$e(k)=\cos(\frac{\pi}{2}k)$ $y(0)=0, y(1)=1$ 求 $y(k)$

解：特征方程 $6\lambda^2-5\lambda+1=0$ $(2\lambda-1)(3\lambda-1)=0$

$$\Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{2}, \lambda_2=\frac{1}{3}$$

$$y_h(k)=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^k+c_2\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$y_p(k)= P\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)+Q\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$6y(k)-5y(k-1)+y(k-2)=10e(k) \qquad e(k)=\cos(\frac{\pi}{2}k)$$

$$y_p(k)=P\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)+Q\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$y_p(k-1)=P\cos[\frac{(k-1)\pi}{2}]+Q\sin[\frac{(k-1)\pi}{2}]$$

$$=P\sin(\frac{k\pi}{2})-Q\cos(\frac{k\pi}{2})$$

$$y_p(k-2)=P\cos[\frac{(k-2)\pi}{2}]+Q\sin[\frac{(k-2)\pi}{2}]$$

$$=-P\cos(\frac{k\pi}{2})-Q\sin(\frac{k\pi}{2})$$

$$(6P+5Q-P)\cos(\frac{k\pi}{2})+(6Q-5P-Q)\sin(\frac{k\pi}{2})=10\cos(\frac{k\pi}{2})$$

$$(6P+5Q-P)\cos(\frac{k\pi}{2})+(6Q-5P-Q)\sin(\frac{k\pi}{2})=10\cos(\frac{k\pi}{2})$$

$$\begin{cases} 6P+5Q-P=10 \\ 6Q-5P-Q=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P=1 \\ Q=1 \end{cases}$$

$$y_p(k)=\cos(\frac{k\pi}{2})+\sin(\frac{k\pi}{2}) =\sqrt{2}\cos(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$$

$$y(k)=y_h(k)+y_p(k)$$

$$=c_1(\frac{1}{2})^k+c_2(\frac{1}{3})^k+\sqrt{2}\cos(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}),k\geq 0$$

$$y(k)=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^k+c_2\left(\frac{1}{3}\right)^k+\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),k\geq 0$$

$$\begin{cases} y(0)=c_1+c_2+1=0 \\ y(1)=\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{3}c_2+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=2 \\ c_2=-3 \end{cases}$$

$$\therefore y(k)=\underbrace{2\left(\frac{1}{2}\right)^k-3\left(\frac{1}{3}\right)^k}_{\text{暂态响应}\quad\text{自由响应}}+\underbrace{\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}_{\text{强迫响应}\quad\text{稳态响应}},k\geq 0$$

返回

3.2 零输入响应和零状态响应

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} e(k-j) \qquad n \geq m$$

$$\begin{aligned} y(k) &= y_h(k) + y_p(k) \\ &= y_{zi}(k) + y_{zs}(k) \end{aligned}$$

零输入响应 $y_{zi}(k)$

在激励为零时，仅由初始状态引起的响应

零状态响应 $y_{zs}(k)$

在系统的初始状态为零时，仅由激励引起的响应

3.2.1 零输入响应

$y_{zi}(k)$对应齐次方程，由特征根决定

$$y_{zi}(k)=\sum_{i=1}^{n}C_{xi}\lambda_i^k$$ ←λ 均为单实根时

C_{xi} 由初始状态确定

5.2.2 零状态响应

$y_{zs}(k)$对应非齐次方程，由$y_h(k)$ 和$y_p(k)$组成

$$y_{zs}(k)=y_h(k)+y_p(k)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}C_{si}\lambda_i^k+y_p(k)\quad k\geq 0$$ ←λ 为单实根时

C_{si} 由零状态时的初始条件确定

初始状态、初始条件的概念

因果系统，$e(k)$在$k = 0$时接入

$y(-1), y(-2), y(-3) \ldots y(-k)$ ~ 初始状态

$y(0),\ y(1),\ y(2) \ldots y(k\text{-}1)$ ~ 初始条件

例：$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=e(k)$，　$y(-1)=2, y(-2)=-\dfrac{1}{2}$

$e(k)=\varepsilon(k)$ 求 $y_{zi}(k), y_{zs}(k), y(k)$

解： a）求零输入响应 $y_{zi}(k)$

$\lambda^2-\lambda-2=0$

$(\lambda-2)(\lambda+1)=0$

特征方程：$\lambda^2-\lambda-2=0 \quad (\lambda+1)(\lambda-2)=0$

$\lambda_1=2, \lambda_2=-1$

$$\begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=2\end{cases} \qquad y_{zi}(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k$$

$y=c_1 2^k+c_2(-1)^k$，

$c_1\frac{1}{2}-c_2=2$

$c_1\frac{1}{4}+c_2=-\frac{1}{2}$

代入初始状态
$$\begin{cases} y(-1)=2=-c_1+\dfrac{c_2}{2}\\ y(-2)=-0.5=c_1+\dfrac{c_2}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_1=-1\\ c_2=2\end{cases}$$

$\frac{3}{4}c_1=\frac{3}{2}$

$c_1=2$

$c_2=-1$

$$y_{zi}(k)=[-(-1)^k+2(2)^k]\varepsilon(k)$$

b） 求零状态响应$y_{zs}(k)$ $y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=e(k)$

$e(k)=\varepsilon(k)$

$$y_{zs}(k)=y_h(k)+y_p(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k-\frac{1}{2}$$

根据初始状态（零状态），递推出初始条件：

$$y(k)=y(k-1)+2y(k-2)+\varepsilon(k)$$

$$y(0)=y(-1)+2y(-2)+\varepsilon(0)=0+0+1=1$$

$$y(1)=y(0)+2y(-1)+\varepsilon(1)=1+0+1=2$$

$$\begin{cases} y(-1)=0 \\ y(-2)=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y_{zs}(0)=1 \\ y_{zs}(1)=2 \end{cases}$$

代入初始条件，确定系数 $c_1=\frac{1}{6}$, $c_2=\frac{4}{3}$

$$y_{zs}(k)=[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$$

c） 全响应$y(k)$

$$y_{zi}(k)=[-(-1)^k+2(2)^k]\varepsilon(k)$$

$$y_{zs}(k)=[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$$

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=\left[-\frac{5}{6}(-1)^k+\frac{10}{3}2^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$$

直接求解全响应

$$y(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k-\frac{1}{2}$$

根据初始状态，递推出初始条件：

$$y(k)=y(k-1)+2y(k-2)+\varepsilon(k)$$

阶跃序列 ≥0 时均为 1

$$y(0)=y(-1)+2y(-2)+\varepsilon(0)=2-1+1=2$$

$$y(1)=y(0)+2y(-1)+\varepsilon(1)=2+4+1=7$$

$$\begin{cases} y(-1)=2 \\ y(-2)=-0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0)=2 \\ y(1)=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-\dfrac{5}{6} \\ c_2=\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad y(k)=\left[-\frac{5}{6}(-1)^k+\frac{10}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$$

返回

复　习

经典法求解差分方程　$y(k)=y_h(k)+y_p(k)$

由特征根λ, 确定齐次解$y_h(k)$的形式

$$\begin{cases} \text{单根} & c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k \\ \text{重根} & (c_1k+c_2)\lambda^k \\ \text{共轭根} & \rho^k[c_1\cos(k\Omega)+c_2\sin(k\Omega)] \quad \lambda_{1,2}=\rho e^{\pm j\Omega} \end{cases}$$

由$e(k)$,确定特解$y_p(k)$的形式

常数　a^k　$\cos(k\Omega)$　　$y_{zi}(k)$　$y_{zs}(k)$

$y(-1), y(-2)$ ~ 初始状态 $\Rightarrow$ $y(0),\ y(1)$ ~ 初始条件

返回

3.3 单位序列响应$h(k)$和单位阶跃响应$g(k)$

3.3.1 单位序列响应$h(k)$ [又称单位样值响应]

$$e(k)=\delta(k) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y_{zs}(k)=h(k)$$

$$h(k)=T[0,\{\delta(k)\}]$$

由差分方程求解$h(k)$时注意：

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}h(k-i)=\sum_{j=0}^{m} b_{m-j}\delta(k-j) \qquad n \geq m$$

1. $h(k)$对应齐次解的形式；

2. 初始状态为零 $h(-1)=h(-2)=\ldots=h(-n)=0$

3. 初始条件根据初始状态，迭代得出

例1. $y(k)$ - $y(k$-1) - 2$y(k$-2) = $e(k)$ 求单位序列响应$h(k)$

解： 特征方程： $\lambda^2-\lambda-2=0 \quad (\lambda-2)(\lambda+1)=0$

$$\Rightarrow h(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}2^k\right]\varepsilon(k)$$

零初始状态h(-1)=h(-2)=0 $\Rightarrow$ 初始条件 $h(0), h(1)$

$$h(k)=h(k-1)+2h(k-2)+\delta(k)$$

$\delta(k)$, $k\neq0$时为0

$$h(0)=h(-1)+2h(-2)+\delta(0)=0+0+1=1$$

$\delta(k)$ $k=0$时，为1

$$h(1)=h(0)+2h(-1)+\delta(1)=1+0+0=1$$

$$\begin{cases}h(0)=1\\h(1)=1\end{cases}\quad\begin{cases}c_1+c_2=1\\-c_1+2c_2=1\end{cases}\Rightarrow c_1=\frac{1}{3},c_2=\frac{2}{3}$$

例2. $y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=e(k)-2e(k-2)$

求单位序列响应 $h(k)$

解： 特征方程：$\lambda^2+4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-2$

$h(k)=(c_1k+c_2)(-2)^k\varepsilon(k)+c_0\delta(k)$　变换域求解

阶数相等

初始条件：$h(0)$、$h(1)$、$h(2)$

$$h(k)+4h(k-1)+4h(k-2)=\delta(k)-2\delta(k-2)$$

$$h(k)=\delta(k)-2\delta(k-2)-4h(k-1)-4h(k-2)$$

$$h(0)=\delta(0)-2\delta(-2)-4h(-1)-4h(-2)=1=c_0+c_2$$

$$h(1)=\delta(1)-2\delta(-1)-4h(0)-4h(-1)=-4=-2c_1-2c_2$$

$$h(2)=\delta(2)-2\delta(0)-4h(1)-4h(0)=10=8c_1+4c_2$$

$$c_0=-\frac{1}{2}\quad c_1=\frac{1}{2}\quad c_2=\frac{3}{2}\quad h(k)=-\frac{1}{2}\delta(k)+(\frac{1}{2}k(-2)^k+\frac{3}{2}(-2)^k)\varepsilon(k)$$

3.3.2 单位阶跃响应g(k)

$$g(k)=T[0,\{\varepsilon(k)\}]$$

由差分方程求g(k)注意：

1. g(k)对应非齐次方程

2. 初始状态为零 $g(-1)=g(-2)=\ldots=g(-n)=0$

3. 初始条件根据初始状态，迭代得出

例：$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=e(k)$ 求 $g(k)$

解： 特征方程 $\lambda^2-\lambda-2=0 \quad (\lambda+1)(\lambda-2)=0$

$$g(k)= c_1(-1)^k+c_2(2)^k+g_p(k) \quad (-\frac{1}{2})$$

特解

求初始条件 $g(0), g(1)$

$$g(k)=g(k-1)+2g(k-2)+\varepsilon(k)$$

$$g(0)=g(-1)+2g(-2)+\varepsilon(0)=1$$

$$g(1)=g(0)+2g(-1)+\varepsilon(1)=2$$

$$\begin{cases} g(0)=c_1+c_2-\dfrac{1}{2}=1 \\ g(1)=-c_1+2c_2-\dfrac{1}{2}=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{1}{6} \\ c_2=\dfrac{4}{3} \end{cases} \qquad g(k)=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}2^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$$

3.3.3 $h(k)$与$g(k)$的关系

$$\delta(k) \leftrightarrow \varepsilon(k)$$

$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1) \qquad \varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n)$$

基于因果考虑

∴ 由线性性质和时(移)不变性可得

$$h(k)=g(k)-g(k-1) \qquad g(k)=\sum_{n=0}^{\infty}h(k-n)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)$$

例：已知 $h(k)=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}2^k\right]\varepsilon(k)$ 求 $g(k)$

解：

$$\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n)$$

$$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)=\sum_{n=0}^{\infty}h(k-n)$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{k}\left[\frac{1}{3}(-1)^i+\frac{2}{3}2^i\right]\varepsilon(i)=\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{1}{3}(-1)^i+\frac{2}{3}2^i\right]$$

$$=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}2^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$$

例：已知某系统的 $g(k)=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}2^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$ 求 $h(k)$

解： $h(k)=g(k)-g(k-1)$

$$h(k)=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)-\left[\frac{1}{6}(-1)^{k-1}+\frac{4}{3}(2)^{k-1}-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k-1)$$

$$\varepsilon(k)-\delta(k)$$

$$h(k)=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

返回

3.4 卷积和

3.4.1 卷积和的定义及求解

1. 卷积和的定义

卷积积分 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

卷积和 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_1(n)f_2(k-n)$

卷积和的上、下限由$f_1(k)$ 和$f_2(k)$的定义域确定

例：$f_1(k)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k)$， $f_2(k)=\varepsilon(k)$ 求 $f_1(k)*f_2(k)$

解：$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(n)\varepsilon(k-n)$$

$$=\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\dfrac{1}{2}}$$

$$=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]\varepsilon(k)$$

2. 卷积和的图解法(卷积和的几何意义)

求卷积和的过程

1) 变量置换 $k \to n$ $f_1(k), f_2(k) \to f_1(n), f_2(n)$

2) 反折 $f_2(n) \to f_2(-n)$

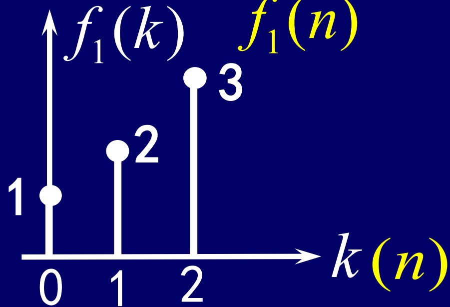
3) $f_2(-n)$ 沿n轴平移k 个单位 $\to f_2(k-n)$

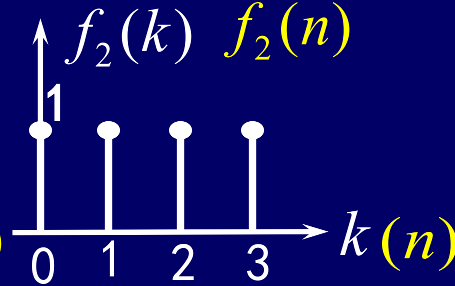
4) 将$f_2(k-n)$与$f_1(n)$的对应样值相乘、相加，得到 k 时的卷积值$f(k)$。

5) 将k在$(-\infty, \infty)$范围内变化，重复第3、4步，最终得到 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$ 。

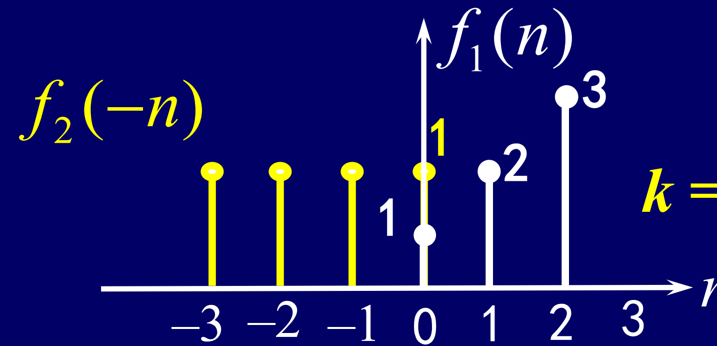
例：求 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$

n+m-1





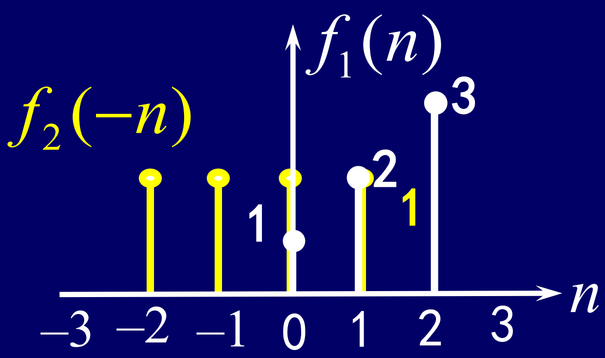
2) 反折 $f_2(n) \rightarrow f_2(-n)$



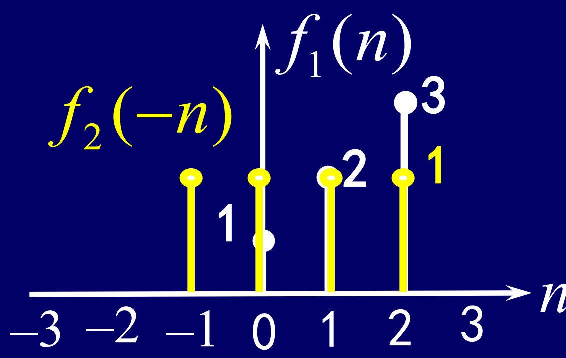
$k=0$

1) 变量置换 $k \rightarrow n$

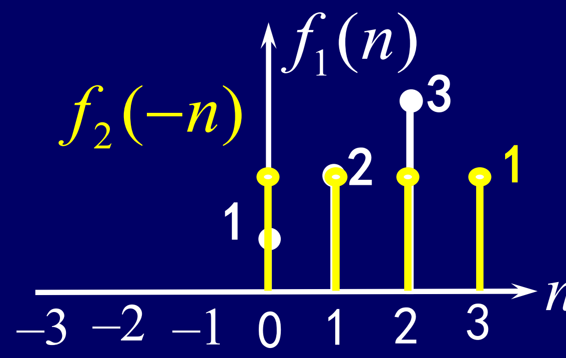
3) 将 $f_2(-n)$ 平移 k 得 $f_2(k-n)$



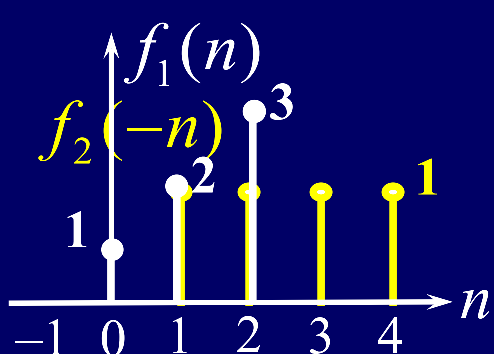
$k=1$



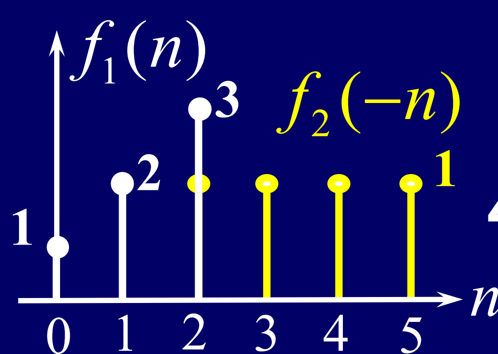
$k=2$



$k=3$



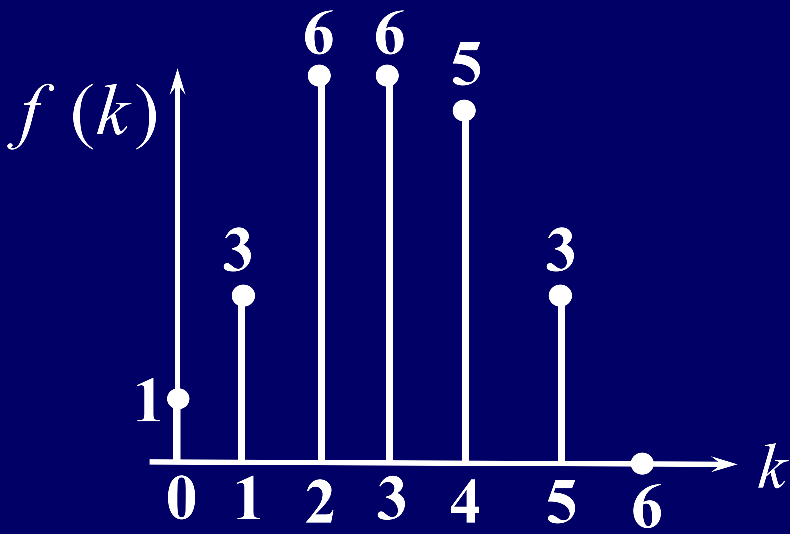
$k=4$



$k=5$

4) 对应样值相乘、求和

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\{0,0,\underset{\underset{k=0}{\uparrow}}{1},3,6,6,5,3,0,0\}$$



有限长序列卷积和的特点：

若$f_1(k)$的长度为N_1，$f_2(k)$的长度为N_2

则$f(k)=f_1(k)*f_2(k)$的长度为：$N=N_1+N_2-1$

3. 对位相乘求和法(又称不进位乘法)

注意：仅适用于两个有限长序列求卷积和

$$f_1(k)=\{1_{k=0},2,3\}$$

$$f_2(k)=\{1_{k=0},1,1,1\}$$

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & & & & \overset{k=0}{\downarrow} & & & & \\
 & & & k=0 & 1 & 2 & 3 & & f_1(k) \\
 & & & \downarrow & & & & & \\
\times & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & f_2(k) \\
\hline
 & & & & 1 & 2 & 3 & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & & & & \\
 & 1 & 2 & 3 & & & & & \\
\hline
 & 1 & 3 & 6 & 6 & 5 & 3 & & \\
 & \uparrow & & & & & & & \\
 & k=0 & & & & & & &
\end{array}
$$

例：$f_1(k)=\left\{\begin{matrix}3 & \underset{\substack{\uparrow\\ k=0}}{1} & 4 & 2\end{matrix}\right\}$，$f_2(k)=\left\{\begin{matrix}\underset{\substack{\uparrow\\ k=0}}{2} & 1 & 5\end{matrix}\right\}$ 求 $f_1(k)*f_2(k)$

解：

$$
\begin{array}{lcccccccl}
 & & \overset{k=-1}{\downarrow} & & & & & & \\
 & & 3 & 1 & 4 & 2 & & & f_1(k) \\
 & & & \overset{k=0}{} & & & & & \\
\times & & & 2 & 1 & 5 & & & f_2(k) \\
\hline
 & & 15 & 5 & 20 & 10 & & & \\
 & 3 & 1 & 4 & 2 & & & & \\
6 & 2 & 8 & 4 & & & & & \\
\hline
6 & 5 & 24 & 13 & 22 & 10 & & & \\
\uparrow & & & & & & & & \\
k=-1 & & & & & & & &
\end{array}
$$

$-1+0=-1$

$$f_1(k)*f_2(k)=\left\{\begin{matrix}6 & \underset{\substack{\uparrow\\ k=0}}{5} & 24 & 13 & 22 & 10\end{matrix}\right\}$$

3.4.2 借助单位序列响应与卷积和求解系统的零状态响应

$$f(k) = f(k) * \delta(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(k-n)$$

利用卷积和求解离散系统的零状态响应$y_{zs}(k)$

$$e(k)=\delta(k) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y_{zs}(k) = h(k)$$

$$\delta(k-n) \qquad\qquad y_{zs}(k) = h(k-n)$$

$$e(n)\delta(k-n) \qquad\qquad y_{zs}(k) = e(n)h(k-n)$$

$$e(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n)\delta(k-n) \qquad y_{zs}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n)h(k-n)$$

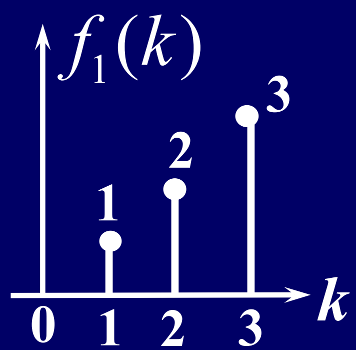
$$= e(k) * h(k)$$

离散系统的$y_{zs}(k)$为$e(k)$与$h(k)$的卷积和

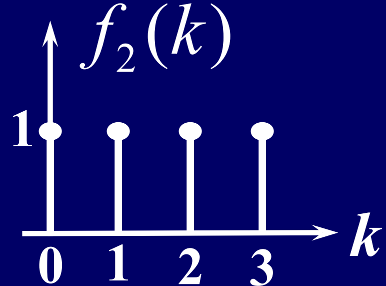
5.4.3 卷积和常用性质

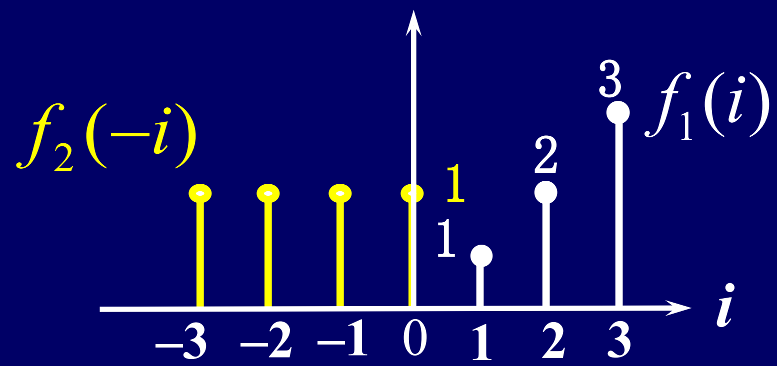
1. 交换律 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)=f_2(k)*f_1(k)$

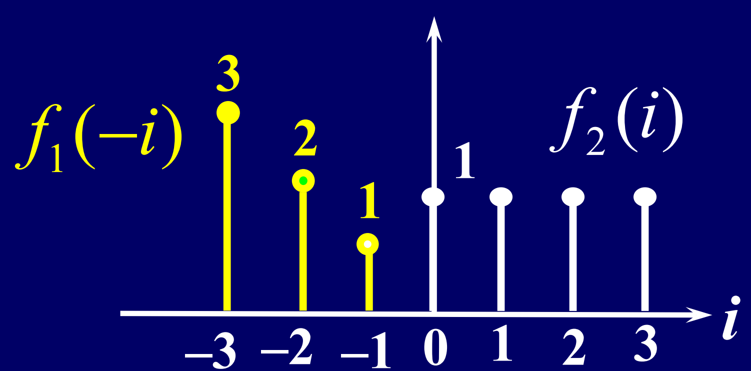
两函数的位置可以互换说明反折函数可以任选



$*$

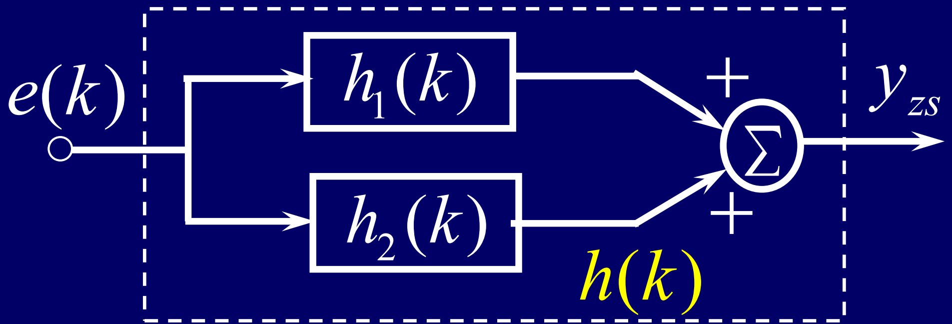


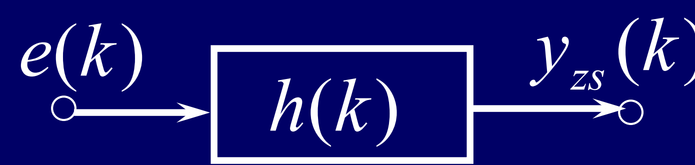




2. 分配律

$$f_1(k)*\left[f_2(k)+f_3(k)\right]=f_1(k)*f_2(k)+f_1(k)*f_3(k)$$

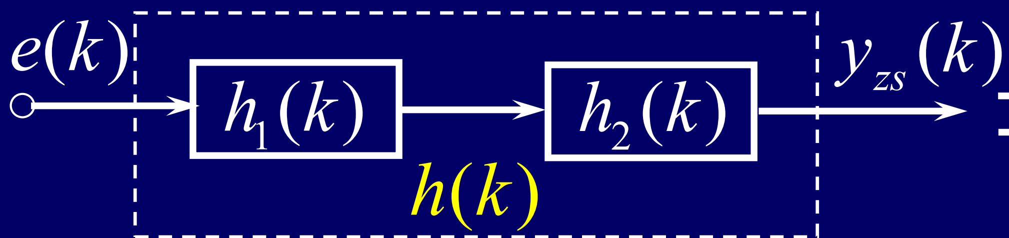




$$h(k)=h_1(k)+h_2(k)$$

3. 结合律

$$[f_1(k)*f_2(k)]*f_3(k)=f_1(k)*[f_2(k)*f_3(k)]$$



$$h(k)=h_1(k)*h_2(k)$$

结论：

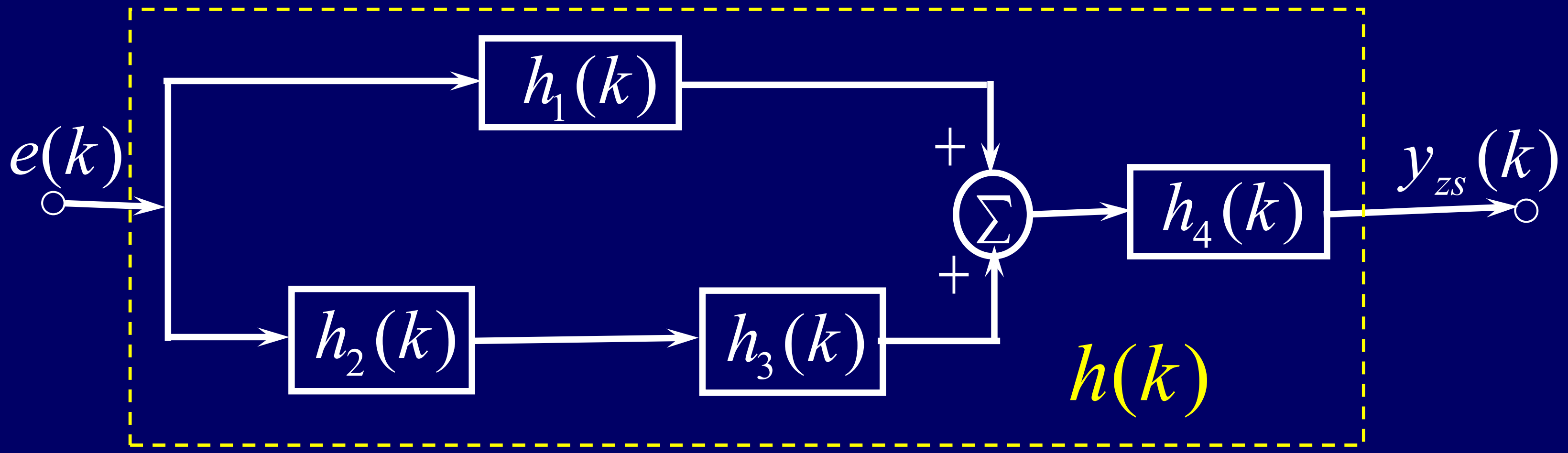
1) n个子系统并联的等效单位序列响应为n个子系统单位序列响应之和

$$h(k) = h_1(k) + h_2(k) + \cdots + h_n(k)$$

2) n个子系统级联的等效单位序列响应为n个子系统单位序列响应之卷积和

$$h(k) = h_1(k) * h_2(k) * \cdots * h_n(k)$$

例：求下图所示复合系统的单位序列响应$h(k)$



$$h(k)=[h_1(k)+h_2(k)*h_3(k)]*h_4(k)$$

4. 移位特性

若 $f_1(k) * f_2(k) = f(k)$

则 $f_1(k) * f_2(k-k_1) = f_1(k-k_1) * f_2(k) = f(k-k_1)$

$$f_1(k-k_1) * f_2(k-k_2) = f_1(k-k_2) * f_2(k-k_1) = f(k-k_1-k_2)$$

例 $f_1(k) = (1/2)^k \varepsilon(k+2)$， $f_2(k) = \varepsilon(k-3)$

$$f(k) = (1/2)^k \varepsilon(k) * \varepsilon(k) = 2\left[1-(1/2)^{k+1}\right]\varepsilon(k)$$ 求 $f_1(k) * f_2(k)$

解： $f_1(k) * f_2(k) = (1/2)^k \varepsilon(k+2) * \varepsilon(k-3)$

$$= 4(1/2)^{k+2} \varepsilon(k+2) * \varepsilon(k-3) = 4f(k-1)$$

$$= 8[1-(1/2)^k]\varepsilon(k-1)$$

5.任意序列与单位序列的卷积

a) $f(k) * \delta(k) = \delta(k) * f(k) = f(k)$

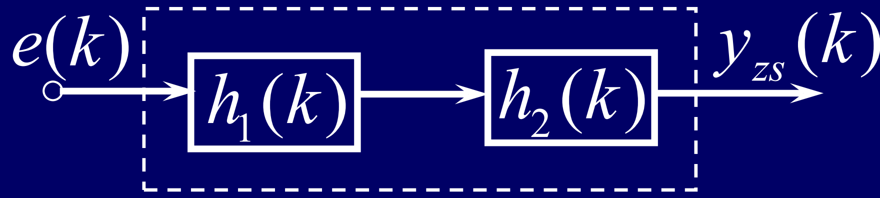
b) $f(k) * \delta(k-k_1) = \delta(k-k_1) * f(k) = f(k-k_1)$

c) $f(k-k_1) * \delta(k-k_2) = f(k-k_1-k_2)$

$$f(k) * \delta(k-k_1) * \delta(k-k_2) = f(k-k_1-k_2)$$

例：如图所示系统 $h_2(k)=a^k\varepsilon(k)$, $h_1(k)=2\cos\left(\dfrac{\pi k}{4}\right)$

$e(k)=\delta(k)-a\delta(k-1)$ 求 $y_{zs}(k)$



解 $$y_{zs}(k)=e(k)*h_1(k)*h_2(k)$$

$$=[\delta(k)-a\delta(k-1)]*2\cos(\frac{k\pi}{4})*a^k\varepsilon(k)$$

$$=[a^k\varepsilon(k)-a\cdot a^{k-1}\varepsilon(k-1)]*2\cos(\frac{k\pi}{4})$$

$$=a^k[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)]*2\cos(\frac{k\pi}{4})$$

$$=a^k\delta(k)*2\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$$

返回

本章重点及要求

1) 会建立系统的差分方程

2) **熟练掌握**用经典法求解差分方程：即由特征根λ确定齐次解$y_h(k)$ 、由激励$e(k)$的形式确定特解$y_p(k)$

3) 掌握初始状态、初始条件的概念，会用迭代法确定初始条件

4) 掌握零输入、零状态、全响应的物理意义并会求解

5) **深刻理解**系统单位序列响应$h(k)$与阶跃响应$g(k)$的物理意义，并会求解。

6) 深刻理解卷积和的物理意义并掌握其数学表示式

$$y_{zs}(k) = e(k) * h(k)$$

7) 熟练掌握卷积和的性质

8) 熟练掌握求卷积和常用的方法

a) 解析法(配合级数的求和公式)

b) 图解法

c) 不进位乘法

d) 利用性质

END

本章作业：

3.2 (1), 3.4 (3), 3.6 (1,5)

3.8(2,3), 3.9(c), 3.10(b) ， 3.13(c)

3.11(1,3), 3.12(2,4)

3.15, 3.18, 3.22,

$$\frac{s+5}{s(s^2+2s+5)}=\frac{s+5}{s(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

$$=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1+2j}+\frac{k_3}{s+1-2j}$$

$$=\frac{k_1}{s}+\frac{as+b}{s^2+2s+5} \qquad k_1=1 \qquad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$$

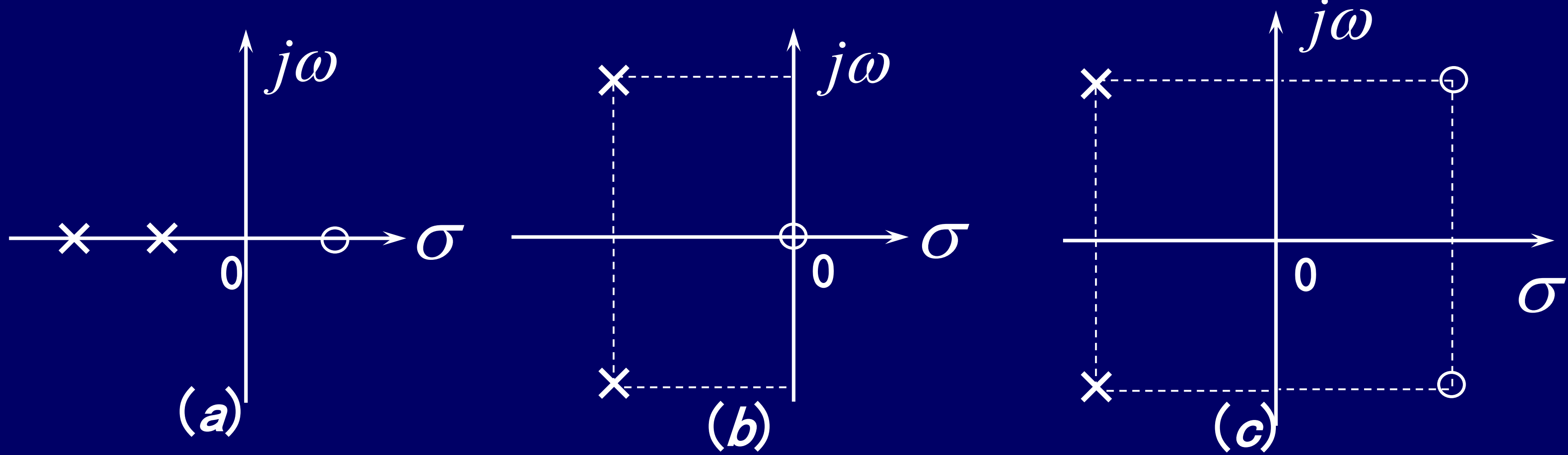
$$\frac{-s-1}{s^2+2s+5}=-\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$-e^{-t}\cos 2t\varepsilon(t)$$

由零、极点图画出系统的频率特性（幅频、相频）

判断是那种系统(低通、高通、带通、带阻、全通)



由$H(s)$判别系统的稳定性　罗斯稳定准则

$$H(s)=\frac{s}{s^2-(k+4)s+5}$$

连续系统

时域

变换域
- 频域 —— 傅里叶变换
- 复频域 —— 拉普拉斯变换

离散系统

时域

变换域　z域 —— z变换