ЛЕКЦИЯ №8. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

8.1. Выравнивающие переменные

Идея введения выравнивающих переменных, рассмотренная при изучении аппроксимации функций, очень хорошо работает при проведении операций дифференцирования. Действительно, при удачном выборе этих переменных исходная кривая может быть преобразована в прямую линию, производная от которой вычисляется точно по самым простым формулам.

Итак, пусть задана функция $y(x)$ и введены выравнивающие переменные $\xi = \xi(x),\ \eta = \eta(y)$. После вычисления производной в новых переменных η'_ξ возврат к заданным переменным осуществляется следующим образом

$$y'_x = y'_\eta \, \eta'_\xi \, \xi'_x = \frac{\eta'_\xi \, \xi'_x}{\eta'_y}. \qquad (1)$$

Например, пусть известно, что табличная функция описывает некоторую закономерность вида $y = a\,x^n$, причем параметры a и n неизвестны и на разных участках таблицы они разные. Вводим выравнивающие переменные $\xi = \ln x, \eta = \ln y$. В новых переменных имеем $\eta = \ln a + n\,\xi$ - прямая линия. Производная будет вычислена точно по любой односторонней формуле, в итоге получим точное значение производной, например, в точке x_1

$$y'_x(x_1) = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} \cdot \frac{1/x_1}{1/y_1} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} \cdot \frac{y_1}{x_1}$$

Пример 2. Задана таблица функции $y = x^{2.3}$. Определить разными численными методами производную $y'(2)$.

x	y
1	1
2	4.925
3	12.514
4	24.251

1. Правостороння формула с шагом $h=1$ - $y'_{+} = \frac{12.514 - 4.925}{1} = 7.589$.

2. Правостороння формула с шагом $h=2$ - $y'_{+} = \frac{24.251 - 4.925}{2} = 9.663$.

3. Формула центральной разности - $y'_{c} = \frac{12.514 - 1}{2} = 5.757$

4. Вторая формула Рунге. Используем правосторонние производные, вычисленные выше. При этом $p = 1, m = 2$. Получаем $y'_{R} = 7.589 + \frac{7.589 - 9.663}{2^{1} - 1} = 5.515$.

5. Выравнивающие переменные.

Вводим переменные $\xi = \ln x, \eta = \ln y$. Таблица примет вид

$\xi = \ln x$	$\eta = \ln y$
0	1
0.693	1.594
1.099	2.527
1.386	3.188

Теперь $y'_{v} = \frac{2.527 - 1.594}{1.099 - 0.693} \cdot \frac{4.925}{2} = 5.660$

Точное значение производной $y'(2)$=5.663. Видно что первые две формулы, как и ожидалось, дают результат низкой точности, в отличие от трех последних.

Пример 3. Ввести выравнивающие переменные, отображающие график заданной функции в прямую линию. Исходная функция $y = a\ x e^{b/x}$.

Искомый результат достигается введением новых переменные $\xi = \frac{1}{x},\ \eta = \ln \frac{y}{x}$.

Для возврата к исходным переменным формула (1) уже не годится, т.к. здесь $\eta = \eta(x, y)$. Теперь надо использовать соотношение

$$y'_{x} = \frac{\eta'_{\xi}\, \varsigma'_{x} - \frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} .$$

В самом общем случае, когда $\xi = \xi(x, y),\ \eta = \eta(x, y)$ искомая производная находится по формуле

$$y'_x = \frac{\eta'_\xi \dfrac{\partial \xi}{\partial x} - \dfrac{\partial \eta}{\partial x}}{\dfrac{\partial \eta}{\partial y} - \eta'_\xi \dfrac{\partial \xi}{\partial y}}$$

8.2. Дифференцирование предварительно сглаженной кривой

В этом методе, не имеющем строгого обоснования, методом наилучшего среднеквадратичного приближения подбирается функция, производная от которой в заданной точке принимается за искомую производную. В ряде случаев таким образом удается уменьшить влияние погрешности в задании табличной функции на результат вычисления производной.

Например, выполняя сглаживание прямой линией $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$, получим для первой производной $y'(x) = a_1$, где

$$a_1 = \frac{\sum_{i=0}^{N} \rho_i \sum_{i=0}^{N} \rho_i x_i y_i - \sum_{i=0}^{N} \rho_i x_i \sum_{i=0}^{N} \rho_i y_i}{\sum_{i=0}^{N} \rho_i \sum_{i=0}^{N} \rho_i x_i^2 - (\sum_{i=0}^{N} \rho_i x_i)^2}.$$

8.3. Регуляризация дифференцирования

При уменьшении шага приведенные выше формулы дают все более точный результат. Порядок точности этих формул относительно шага $O(h^p)$ т.е. при $h \to 0$ погрешность метода тоже стремится к нулю. Однако на практике дело обстоит несколько сложнее. Во-первых, в реальных вычислениях приходится иметь дело с функциями, заданными с некоторой погрешностью. Во-вторых, при расчетах на компьютере в силу ограниченности разрядной сетки неизбежно возникает ошибка округления. Рассмотрим, к каким это приводит эффектам.

Пусть точные значения функции будут $\overline{y_n}$ и $\overline{y_{n+1}}$, а погрешность представления функции - δ Тогда

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - y''(\xi)\frac{h}{2} = \frac{(\overline{y_{n+1}} + \delta) - (\overline{y_n} - \delta)}{h} - y''(\xi)\frac{h}{2} = \frac{\overline{y_{n+1}} - \overline{y_n}}{h} - y''(\xi)\frac{h}{2} + \frac{2\delta}{h},$$

где $x_n < \xi < x_{n+1}$.

Видим, что суммарная погрешность складывается из ошибки метода и погрешности представления функции, причем первая погрешность уменьшается с уменьшением шага, а вторая - наоборот, увеличивается, т.е. существует оптимальный шаг, при котором погрешность минимальна. Действительно

$$|R_\Sigma| = |y''|\frac{h}{2} + \frac{2\delta}{h},$$

$$\frac{d|R_\Sigma|}{dh} = \frac{|y''|}{2} - \frac{2\delta}{h^2} = 0$$

Откуда

$$h_{opt} = \sqrt{\frac{4\delta}{|y''_n|}} \quad .$$

Факт существования оптимального шага h_{opt}, в результате чего расчеты с шагами меньше оптимального не повышают точность вычислений, позволяют говорить о возможности регуляризации по шагу. На практике строго выполнить процедуру отыскания h_{opt} невозможно из-за трудности определения значений погрешности δ и второй производной на интервале сетки. Но сам факт наличия h_{opt} важен при решении вопроса о выборе численных формул и параметров сетки.