Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 4
по дисциплине "Вычислительные алгоритмы"

Тема Среднеквдратичное приближение.

Студент Романов А.В.

Группа ИУ7-43Б

Оценка (баллы) ________________

Преподаватель Градов В.М.

Москва — 2020 г.

1. Тема работы

Построение и программная реализация алгоритма наилучшего среднеквадратичного приближения.

2. Цель работы

Получение навыков построения алгоритма метода наименьших квадратов с использованием полинома заданной степени при аппроксимации табличных функций с весами.

3. Входные данные

1. Таблица функции с веми p_i с количеством узлов N.

x	y	ρ
x_i	y_i	ρ_i

2. Степень аппроксимирующего полинома – n.

4. Выходные данные

График, на котором изоброжённ аппроксимирующий полином, и точки из исходной таблицы значений.

5. Описание алгоритма

Под близостью в среднем исходной и аппроксимирующей функций будем понимать результат оценки суммы

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i [y(x_i) - \varphi(x_i)]^2 \tag{1}$$

$y(x)$ - исходная функция
$\varphi(x)$ - множество функций , принадлежащих линейному пространству функций
ρ_i - вес точки

Нужно найти наилучшее приближение, т.е

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i [y(x_i) - \varphi(x_i)]^2 = min \tag{2}$$

Разложим функцию $\varphi(x)$ по системе линейно независимых функций $\varphi_k(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \varphi_k(x) \tag{3}$$

Подставляя (3) в условие (2) получим:

$$((y - \varphi), (y - \varphi)) = (y, y) - 2 \sum_{k=0}^{n} a_k (y, \varphi_k) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = min \tag{4}$$

Дифференцируя по a_k получаем:

$$\sum_{i=0}^{n} (x^k, x^m) a_m = (y, x^k) \tag{5}$$

где

$$(x^k, x^m) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i x_i^{k+m}$$

$$(y, x^k) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i y_i x_i^k$$

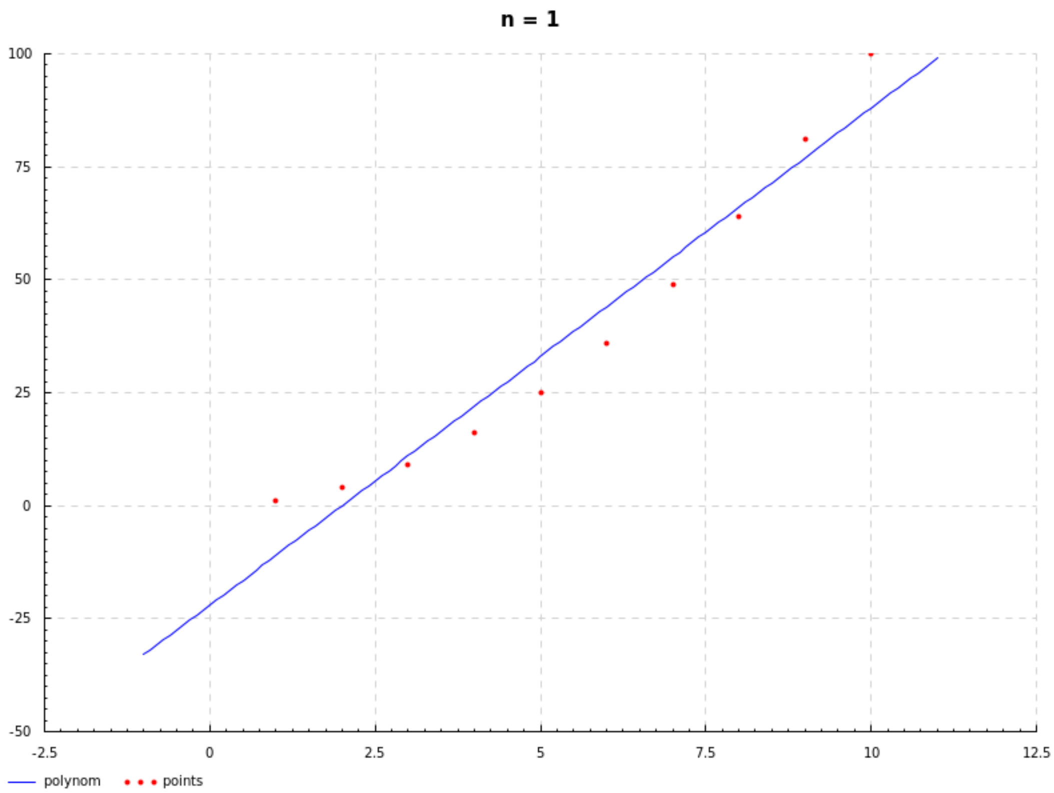
Итоговый алгоритм:
1. Выбирается степень полинома $n < N$.
2. Составляется система линейных алгебраических уравнений типа.
3. В результате решения СЛАУ находятся коэффицинты полинома.

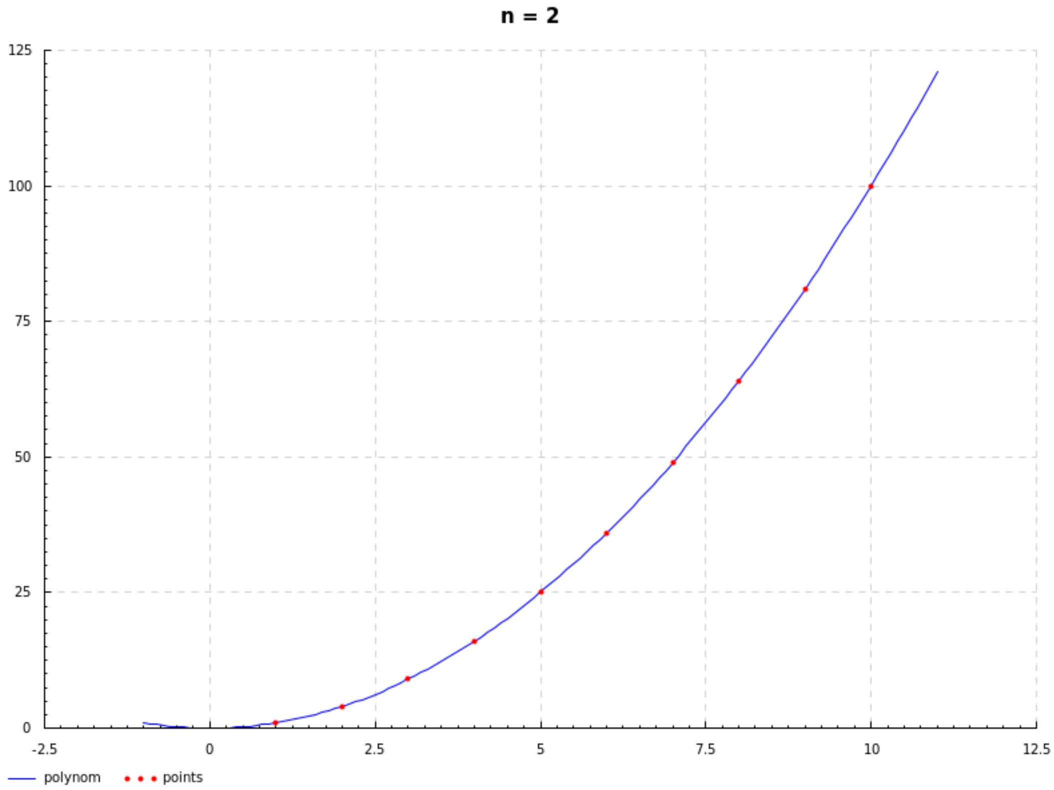
6. Результаты работы программы

1. Веса точек равны.

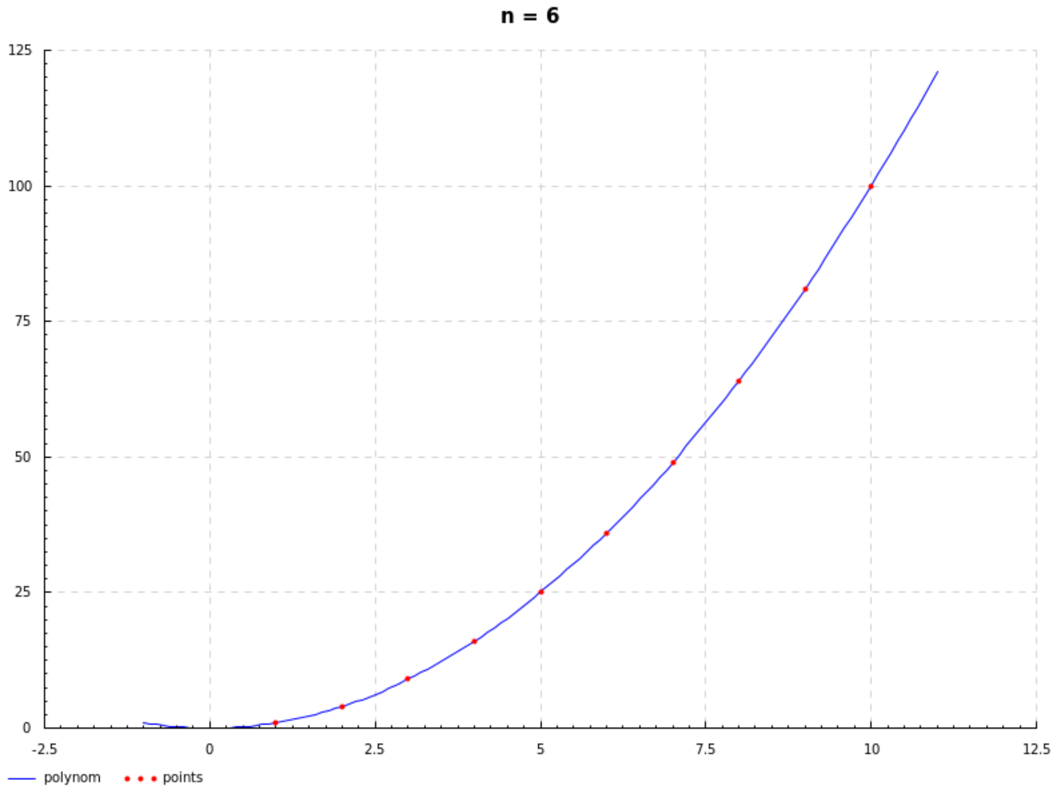
Исходная таблица:

x_i	y_i	ρ_i
1	1	1
2	4	1
3	9	1
4	16	1
5	25	1
6	36	1
7	49	1
8	64	1
9	81	1
10	100	1





n = 2
125
100
75
50
25
0
-2.5
0
2.5
5
7.5
10
12.5
polynom
points

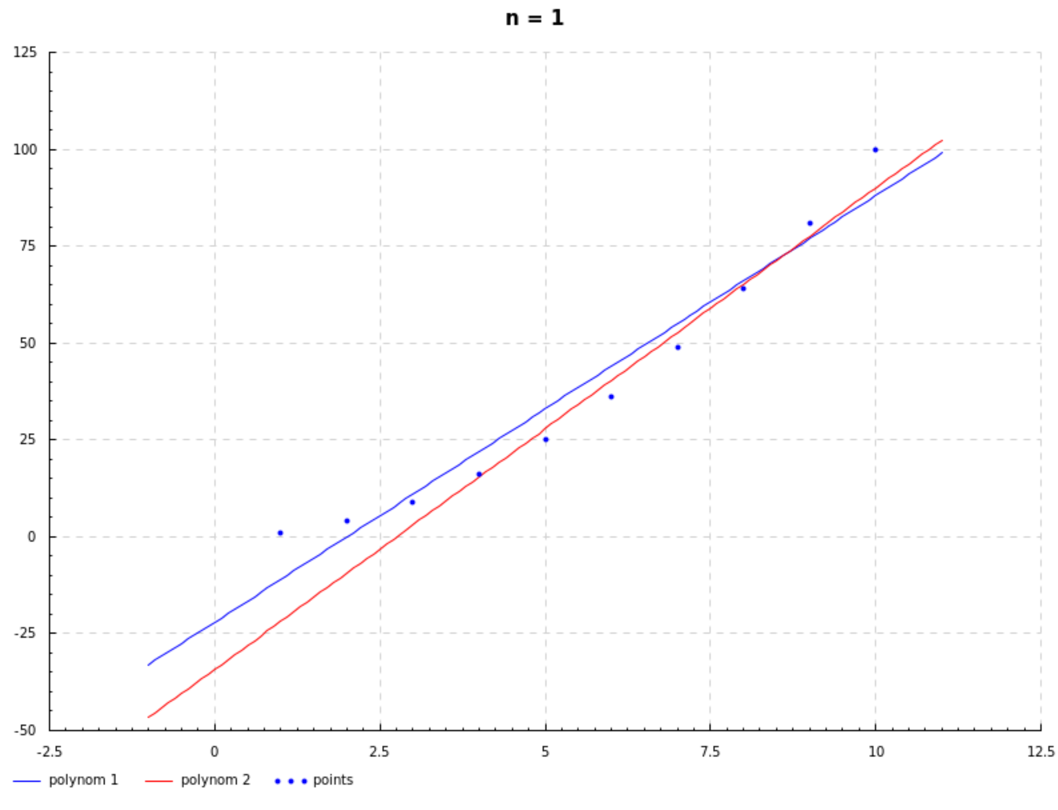


n = 6
125
100
75
50
25
0
-2.5
0
2.5
5
7.5
10
12.5
polynom
points

2. Веса точек разные.

Исходная таблица:

x_i	y_i	ρ_i
1	1	0.1
2	4	0.5
3	9	1
4	16	2
5	25	5
6	36	1.9
7	49	3
8	64	0.3
9	81	5
10	100	0.1



Синяя прямая - веса точек равны единице.
Красная прямая - веса точек разные.

7. Ответы на вопросы для защиты ЛР

1. Что произойдет при задании степени полинома $n = N - 1$

Полином будет построен по всем точкам, независимо от того, какие будут веса у точек.

2. Будет ли работать Ваша программа при $n >= N$? Что именно в алгоритме требует отдельного анализа данного случая и может привести к аварийной остановке?

Программа работать будет. Но, по N точкам нельзя построить полином степени n, так как в данном случае определитель будет равен нулю. Программа будет работать из-за погрешностей, будут операции с действительными числами.

3. Получить формулу для коэффициента полинома a_0 при степени полинома $n = 0$. Какой смысл имеет величина, которую представляет данный коэффициент?

Формула:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \rho_i}{\sum_{i=1}^{N} \rho_i}$$

Значение: математичское ожидание

4. Записать и вычислить определитель матрицы СЛАУ для нахождения коэффициентов полинома для случая, когда $n = N = 2$.

Пусть есть таблица:

x_i	y_i	ρ_i
x_0	y_0	ρ_1
x_1	y_1	ρ_2

Тогда имеем СЛАУ вида:

$$\begin{cases} (\rho_0 + \rho_1)a_0 + (\rho_0 x_0 + \rho_1 x_1)a_1 + (\rho_0 x_0^2 + \rho_1 x_1^2)a_2 = \rho_0 y_0 + \rho_1 y_1 \\ (\rho_0 x_0 + \rho_1 x_1)a_0 + (\rho_0 x_0^2 + \rho_1 x_1^2)a_1 + (\rho_0 x_0^3 + \rho_1 x_1^3)a_2 = \rho_0 y_0 x_0 + \rho_1 y_1 x_1 \\ (\rho_0 x_0^2 + \rho_1 x_1^2)a_0 + (\rho_0 x_0^3 + \rho_1 x_1^3)a_1 + (\rho_0 x_0^4 + \rho_1 x_1^4)a_2 = \rho_0 y_0 x_0^2 + \rho_1 y_1 x_0^2 \end{cases}$$

$$\Delta = (\rho_0 + \rho_1)(\rho_0 x_0^2 + \rho_1 x_1^2)(\rho_0 x_0^4 + \rho_1 x_1^4) + (\rho_0 x_0 + \rho_1 x_1)(\rho_0 x_0^3 + \rho_1 x_1^3)(\rho_0 x_0^2 + \rho_1 x_1^2) +$$

$$(\rho_0 x_0^2 + \rho_1 x_1^2)(\rho_0 x_0 + \rho_1 x_1)(\rho_0 x_0^3 + \rho_1 x_1^3) - (\rho_0 x_0^2 + \rho_1 x_1^2)(\rho_0 x_0^2 + \rho_1 x_1^2)(\rho_0 x_0^2 + \rho_1 x_1^2) -$$

$$(\rho_0 + \rho_1)(\rho_0 x_0^3 + \rho_1 x_1^3)(\rho_0 x_0^3 + \rho_1 x_1^3) - (\rho_0 x_0 + \rho_1 x_1)(\rho_0 x_0 + \rho_1 x_1)(\rho_0 x_0^4 + \rho_1 x_1^4) = 0$$

Так как $\Delta = 0$, система решений не имеет, как я и говорил в ответе на вопрос 2.

8. Код программы

Файл Main.hs:

```
import Parse
import Gauss
import Plot
import Approximation
import System.IO

printRow :: ((Double, Double), Double) -> IO ()
printRow row = putStrLn $ show (fst $ fst row) ++ " " ++ show (snd $ fst row) ++
    " " ++ show (snd row)

main :: IO ()
main = do
    table <- openFile "table2.csv" ReadMode >>= hGetContents >>= return .
        parseTable . lines
    putStrLn "X   Y   P" >> mapM_ printRow (zip (xy table) $ weight table) >>
        putStrLn "Enter n:"
    coeffs <- fmap toInt getLine >>= return . (+ 1) >>= return .
        quadraticApproximation table
    print coeffs
    plotApproximation (f coeffs) $ xy table
```

Файл Gauss.hs:

```
module Gauss(
    gauss
) where

type Matrix = [[Double]]
type Coeffs = [Double]

subtractRow :: [Double] -> [Double] -> [Double]
subtractRow subRow row = map (\x -> fst x - snd x * (head row / head subRow)) $
   zip row subRow

triangulation :: Matrix -> Matrix
triangulation matrix
    | length matrix == 0 = matrix
    | otherwise = head matrix :
        triangulation (map tail (map (subtractRow $ head matrix) $ tail matrix))

gauss :: Matrix -> Coeffs
gauss = coeffs . reverse . triangulation
    where coeffs = foldl (\x y -> (last y - (sum $ zipWith (*) (init $ tail y) x
        )) / (head y) : x) []
```

Файл Approximation.hs:

```
module Approximation(
    quadraticApproximation,
    f
) where

import Gauss
import Parse

type Coeffs = [Double]
type Weights = [Double]

f :: Coeffs -> Double -> Double
f coeffs x = sum $ zipWith (*) coeffs (map (\y -> x ^ y) [0..length coeffs - 1])
```

```
mult3 :: Double -> Double -> Double -> Double
mult3 x y z = x * y * z

quadraticApproximation :: Table -> Int -> Coeffs
quadraticApproximation table n = gauss matrix
    where
        xs = map fst $ xy table
        ys = map snd $ xy table
        x_coeffs =
            map (\k -> sum $ zipWith (*) (map (^ k) xs) $ weight table) [0..n *
                2 - 2]
        y_coeffs =
            map (\k -> sum $ zipWith3 mult3 (map (^ k) xs) ys $ weight table)
                [0..n - 1]
        matrix = zipWith (\x y -> x ++ [y]) (map (\x -> take n $ drop x x_coeffs
            ) [0..n - 1]) y_coeffs
```

Файл Plot.hs:

```
module Plot (
    plotApproximation
) where

import Graphics.Rendering.Chart.Easy
import Graphics.Rendering.Chart.Backend.Cairo

signal :: (Double -> Double) -> [Double] -> [(Double,Double)]
signal f xs = [ (x, f x) | x <- xs ]

plotApproximation f pts = toFile def "test.png" $ do
    layout_title .= "n = 9"
    setColors [opaque blue, opaque red]
    plot (line "polynom" [signal f [-1,(-0.9)..11]])
    plot (points "points" pts)
```