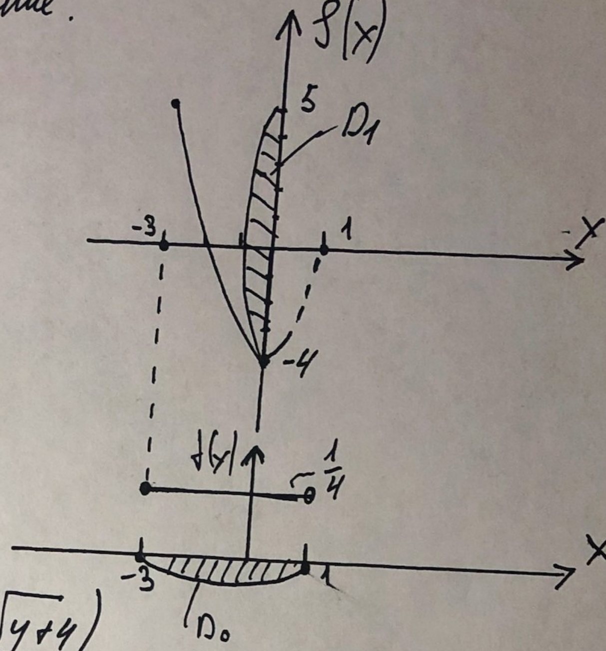
Экзамен по теории вероятностей
Романов Алексей Васильевич
группа ИУ7-53Б
Вариант №1

01.02.2021
Общее число листов в работе: 6

№3. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-3; 1]$. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2 - 4$.

Решение:



$X \sim R(-3,1)$

$y = \varphi(x)$

$f(x) = x^2 - 4$

$$\psi(x) = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4} \\ -\sqrt{x+4} \end{array} \right.$$

1) $y \le -4 \Rightarrow F(y) = 0$

2) $y \in (-4; -3]$:

$$Y < y \Leftrightarrow X \in (-\sqrt{y+4}; \sqrt{y+4})$$

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} \frac{1}{4}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{y+4}$$

3) $y \in (-3; 5)$

$$Y < y \Leftrightarrow X \in (-\sqrt{y+4}; 1)$$

$$F(y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{y+4}\right)$$

4) $y \ge 5$: $F(y) = 1$

№2. В первой урне 5 белых и 4 черных шара, во второй — 4 белых и 2 черных шара. ~~Из~~ Известно, что шар, случайным образом извлеченный из случайно выбранной урны, оказался черным. Найти вероятность того, что он был взят из первой урны.

Решение:

Пусть урна 1 — урна с 5б. и 4ч. шарами, а 2 — урна с 4б. и 2ч. шарами.

$H_0 = \{$выбрана урна 1 для извлечения шара$\}$

$H_1 = \{$выбрана урна 2 для извлечения шара$\}$

$\Omega = \{ i \mid i \in \{1,2\}\}$, где i - номер урны, выбранной для извлечения.

$\{H_0, H_1\}$ — полная группа событий.

$A = \{$извлечен черный шар$\}$; $P(H_0|A)$ — ?

По ф. Байеса:

$$P(H_0|A) = \frac{P(A|H_0)\cdot P(H_0)}{P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1)}$$

$$P(H_0) = \frac{1}{2}; \quad P(A|H_0) = \frac{C_4^1}{C_9^1} = \frac{\frac{4!}{1!3!}}{\frac{9!}{1!8!}} = \frac{4}{9}$$

$$P(H_1) = \frac{1}{2}; \quad P(A|H_1) = \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{\frac{2!}{1!1!}}{\frac{6!}{1!5!}} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_0|A) = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

№1. В танцевальной школе 10 сложившихся пар на один вечер случ. обр. меняются партнерами. Найти вер-ть того, что ровно трем каким-то юношам этим вечером достанутся чужие партнерши.

Решение:

Рассмотрим кортеж: $(1,2,3)$ и все его перестановки:

$(1,2,3)$
$(1,3,2)$
$(2,1,3)$
$(2,3,1)$ —
$(3,1,2)$ — > — все числа не совпад. с индексом
$(3,2,1)$

Таким образом, если перебрать все сочет. по 3 партнера, то можно подсчитать все удовл. исх.:

$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_{10})$, где x_i — партнерша, доставшаяся i-ому партнеру;
$x_i \neq x_j$, при $i,j \in \{1,\dots,10\}$, $i \neq j$
$x_i \in \{1,\dots,10\}$ при $i \in \{1,\dots,10\}\}$

C_{ijk} — $\{$$i$-ый, j-ый и k-ый партнеры получат не своих партнерш, остальные — своих$\}$

$C_{ijk} = \{(x_1,\dots,x_{10}) \in \Omega \mid x_i \neq i,\ x_j \neq j,\ x_k \neq k,\ x_l = l$ при $l \notin \{i,j,k\}\}$

$N(C_{ijk}) = 2$; $N(\Omega) = 10!$ $A = \{$3 партнера получ. не своих партнерш$\}$

$A = \sum C_{ijk}$; $N(\{i,j,k\}) = \{$кол-во соч. по 3 партн. из 10 $= \{\{i,j,k\} : i,j,k \in \{1,\dots,10\};\ i \neq j \neq k \neq i\}\} =$

$= C_{10}^{3} = \frac{10!}{7!\,3!}$; $N(A) = N(C_{ijk}) \cdot N(\{i,j,k\}) = 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 8 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \boxed{\frac{2}{3 \cdot 7!}}$

Лист №4.

№1. Случ. вектор (X, Y) имеет плотность распр. вер-ти

$$f(x,y) = \frac{a}{3+x^2+3y^2+x^2y^2}$$

а) Найти параметр. a;

б) найти маргинальные плотности распределения случ. вел-н X и Y;

в) установить, зависимы ли X и Y;

г) найти вер-ть попадания вектора (X, Y) в квадрат, ограниченный прямыми $x=0, y=0$
$x=1, y=1$.

Решение:

а) По условию нормировки:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = a\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(3+x^2)(1+y^2)} = a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{3+x^2}\int\frac{dx}{1+y^2} =$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{3+x^2}\cdot\left[\operatorname{arctg}(y)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = a\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{3+x^2} =$$

$$= a\pi\left(\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt3}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = \frac{a\pi^2}{\sqrt3} \Longrightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt3}{\pi^2}}$$

б) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt3}{\pi^2}\cdot\frac{dy}{(3+x^2)(1+y^2)} = \frac{\sqrt3}{\pi^2}\cdot\frac{1}{3+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt3}{\pi}\cdot\frac{1}{3+x^2}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \frac{\sqrt3}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\left(\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt3}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = \boxed{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}}$$

в) Критерий независ.:

$$\forall (x,y): f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \Longleftrightarrow X, Y \text{ - независ.}$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(1+y^2)(3+x^2)}$$

$$\parallel$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \left[\frac{\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{1}{3+x^2}\right]\cdot\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}\right]$$

$\Bigg\}$ $\underline{X, Y \text{ - независ.}}$

г) $$P\{(x,y)\in D\} = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}\int_0^1\frac{dx}{3+x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi^2}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1\right] = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\left(\operatorname{arctg}(y)\Big|_0^1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{6\pi} = \boxed{\frac{1}{24}}$$