Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по дисциплине «Математическая статистика»

Тема Интервальные оценки

Студент Романов А.В.

Группа ИУ7-63Б

Оценка (баллы) ____________

Преподаватель Саркисян П. С.

Москва — 2021 г.

Задание

Цель работы

Построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Постановка задачи

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:
   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Теоретические сведения

Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с уровнем доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с уровнем доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания;

$S(\vec{X}) = \sqrt{S^2(\vec{X})}$ – квадратный корень из точечной оценки дисперсии;

n – объем выборки;

γ – уровень доверия;

$t^{St(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}} \tag{3}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}} \tag{4}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{\chi^2(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$ с $n-1$ степенями свободы.

Результаты работы программы

Код программы

```
X = [-10.82,-9.27,-9.65,-9.36,-9.27,-11.25,-9.89,-9.26,-11.15,
  -8.90,-11.02,-8.28,-9.18,-10.16,-10.59,-10.82,-9.05,-9.47,
  -10.98,-11.50,-8.64,-10.86,-10.76,-11.49,-11.09,-9.33,
  -9.32,-9.66,-8.79,-10.54,-9.12,-10.40,-8.59,-10.22,-9.06,
  -10.59,-10.60,-10.25,-9.35,-11.44,-9.81,-9.32,-9.95,-9.33,
  -10.64,-9.45,-10.99,-10.15,-10.39,-10.36,-10.49,-11.67,
  -10.00,-10.87,-11.11,-9.68,-10.77,-9.13,-8.62,-10.33,-11.36,
  -10.24,-9.41,-11.05,-10.15,-9.35,-11.45,-9.87,-10.41,-10.11,
  -10.84,-11.48,-7.77,-10.79,-9.88,-10.70,-9.07,-9.47,-10.15,
  -9.93,-11.52,-9.04,-10.93,-10.13,-9.56,-11.39,-9.79,-9.19,
  -11.09,-9.86,-10.67,-10.26,-9.07,-10.53,-11.24,-10.16,-11.33,
  -8.76,-8.88,-10.53,-10.12,-8.98,-9.84,-9.90,-10.13,-9.32,-9.31,
  -9.99,-8.55,-11.64,-11.32,-10.51,-11.71,-10.50,-10.50,-12.20,
  -11.68,-10.45,-7.88,-10.84]

gamma = 0.9;

% 1-2
[muhat, muci] = my_normfit_mu(X, 1 - gamma);
[s2hat, s2ci] = my_normfit_s2(X, 1 - gamma);

% 3
process_mu(X, gamma, muhat);
process_s2(X, gamma, s2hat);

function [muhat, muci] = normfit_mu(X, alpha)
  [muhat, ~, muci, ~] = normfit(X, alpha);
end

function [s2hat, s2ci] = normfit_s2(X, alpha)
  [~, sigmahat, ~, sigmaci] = normfit(X, alpha);
  s2hat = sigmahat ^ 2;
  s2ci = sigmaci .^ 2;
end

function [muhat, muci] = my_normfit_mu(X, alpha)
```

```
  muhat = mean(X);
  s = std(X);
  gamma = 1 - alpha;
  n = length(X);
  mu_bottom = muhat + s * tinv((1 - gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
  mu_top = muhat + s * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
  muci = [mu_bottom, mu_top];
end

function [s2hat, s2ci] = my_normfit_s2(X, alpha)
  s2hat = var(X);
  gamma = 1 - alpha;
  n = length(X);
  s2_top = (n - 1) * s2hat / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
  s2_bottom = (n - 1) * s2hat / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
  s2ci = [s2_bottom, s2_top];
end

function process_parameter(X, gamma, est, fit, line_legend, est_legend, top_legend, bottom_legend)
  N = length(X);
  figure;
  hold on;
  grid on;
  plot([1, N], [est, est]);
  ests = [];
  cis_bottom = [];
  cis_top = [];
  for n = 1:N
    [est, cis] = fit(X(1:n), 1 - gamma);
    ests = [ests, est];
    cis_bottom = [cis_bottom, cis(1)];
    cis_top = [cis_top, cis(2)];
  end

  plot(1:N, ests);
  plot(1:N, cis_bottom);
  plot(1:N, cis_top);
  l = legend(line_legend, est_legend, top_legend, bottom_legend);
  set(l, 'Interpreter', 'latex', 'fontsize', 18);
  hold off;
end

function process_mu(X, gamma, muhat)
  process_parameter(X, gamma, muhat, @my_normfit_mu, '$\hat\mu(\vec x_N)$', '$\hat\mu(\vec x_n)$', '$\underline\mu(\vec x_n)$', '$\overline\mu(\vec x_n)$');
end

function process_s2(X, gamma, S2)
```

```
  process_parameter(X, gamma, S2, @my_normfit_s2, '$\hat\sigma^2(\vec x_N)$'
      , '$\hat\sigma^2(\vec x_n)$', '$\underline\sigma^2(\vec x_n)$', '$\
      overline\sigma^2(\vec x_n)$');
end
```

Результаты расчётов

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = -10,1318$$

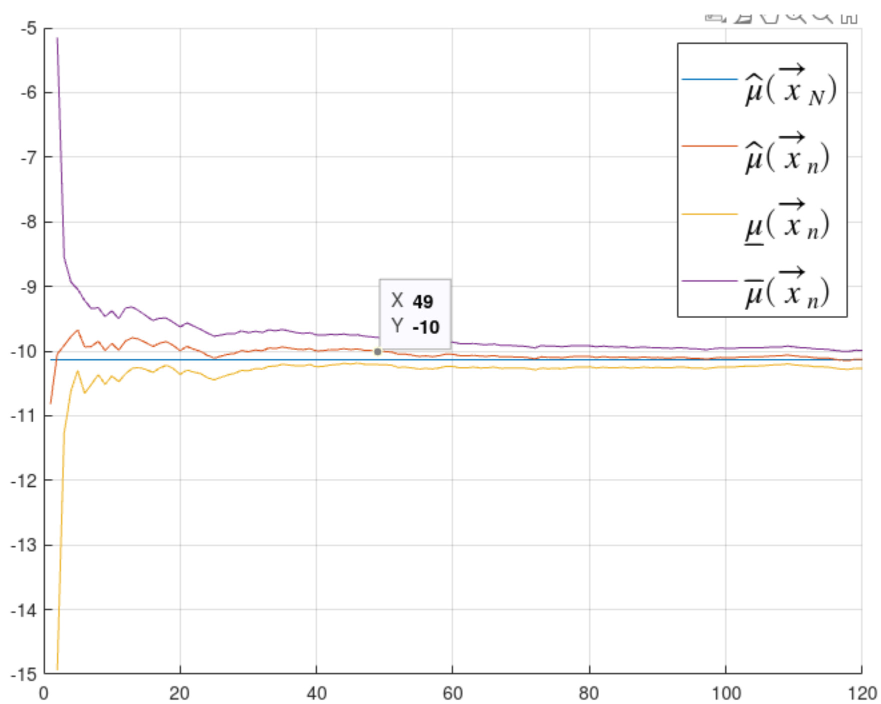
$$S^2(\vec{x}_n) = 0,846$$

$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = -10,2709$$

$$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = -9,9926$$

$$\underline{S^2}(\vec{x}_n) = 0,6921$$

$$\overline{S^2}(\vec{x}_n) = 1,0619$$



1

Рис. 1: Прямая $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графики функций $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

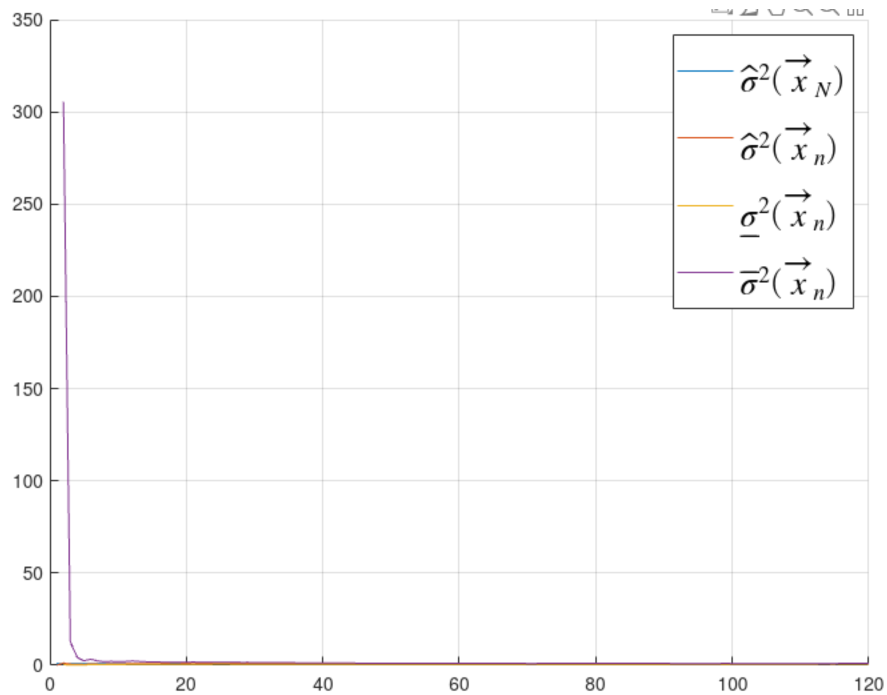


Рис. 2: Прямая $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

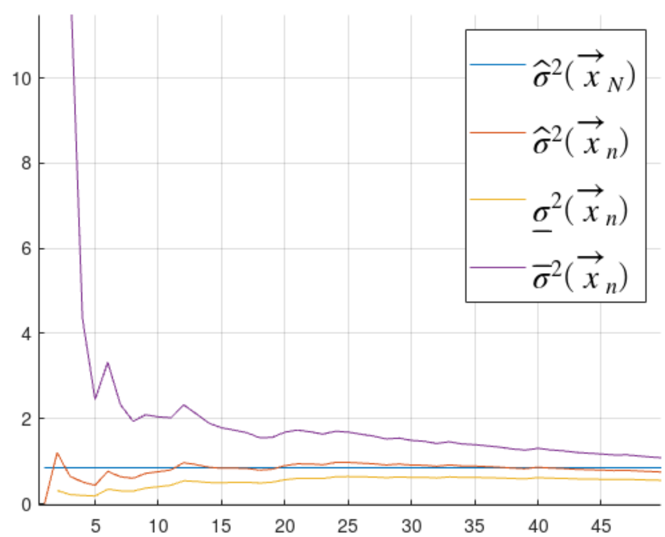


Рис. 3: Прямая $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N (приближенный)