Д/з №1. Вариант №13.

№1. Каждая повторная передача сигнала по каналу связи увелич. вероятность искажения сигнала на 0,1%, а при передаче 1-го сигнала эта вероятность равна 0,05%. Известно, что по каналу связи передано 100 сигналов. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9 заключено число переданных без искажения сигналов.

Решение.

Число переданных без искажений сигналов (из 100) равно:

$Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$, где случ. вел-на X_i имеет след. распределение:

x_i	0	1
p	$0{,}05+\frac{i-1}{1000}$	$0{,}95-\frac{i-1}{1000}$

$i=1,\dots,100$

Если увеличивать i (свыше 100) то с какого-то момента $p>1$ как так?

$$M(X_i)=0\cdot\left(0{,}05+\frac{i-1}{1000}\right)+1\cdot\left(0{,}95-\frac{i-1}{1000}\right)=$$

$$=0{,}95-\frac{i-1}{1000}=\frac{951-i}{1000}$$

$$D(X_i)=M(X_i^2)-M^2(X_i)=1^2\cdot\left(0{,}95-\frac{i-1}{1000}\right)-\left(0{,}95-\frac{i-1}{1000}\right)^2=\frac{1}{10^6}\left(46599+902i-i^2\right)$$

$$M(Z)=M(x_1+\ldots+x_{100})=\sum_{i=1}^{100}M(X_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{100}\frac{951-i}{1000}=\frac{1}{1000}\left(951\cdot100-\frac{100\cdot(100+1)}{2}\right)=$$

$$=\frac{1801}{20}=90{,}05$$

$$D(Z)=D(X_1+\ldots+X_{100})=\sum_{i=1}^{100}D(X_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{6}\cdot\left(46509+902i-i^2\right)=$$

$$=\frac{1}{10^6}\left(46599+902\cdot\frac{100\cdot1001}{2}-\frac{1}{6}\cdot100\times\right.$$

$\ldots(100+1)\cdot(2\cdot 100+1)) = \frac{177538}{20000} =$

$= 8{,}87665.$

Запишем для случайной величины Z второе нер-во Чебышева:

$$P(|Z-90{,}05|<\varepsilon)\geq 1-\frac{8{,}87665}{\varepsilon^2}$$

$$1-\frac{8{,}87665}{\varepsilon^2}=0{,}9$$

$$\frac{8{,}87665}{\varepsilon^2}=0{,}1$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{8{,}87765}{0{,}1}}\approx 9{,}4216$$

$$90{,}05-9{,}4216<Z<90{,}05+9{,}4216$$

$$80{,}63<Z<99{,}47$$

Искомые границы: от 81 до 99.

Ответ: от 80,63 до 99,47.

+

№2. С использованием метода моментов для случ. выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ из ген. совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

$$f_X(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 x^2 e^{-\theta^2 x^2}, \quad x > 0$$

Решение.

Метод моментов дает соотношение для оценки неизв. пар-ра: $M(X) = \bar{X}_B$

~~M(X)~~ Вычислим мат. ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times\ \theta^3 \cdot x^2 \cdot e^{-\theta^2 x^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \theta^3 \int_0^{+\infty} x^3 \cdot e^{-\theta^2 x^2}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \theta x = z \\ dx = \frac{dz}{\theta} \end{matrix} \right| = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\theta} \int_0^{+\infty} z^3 \cdot e^{-z^2}\,dz \overset{?}{=}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot (z^2 + z) \cdot e^{-z^2} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \times$$

$= \frac{1}{\theta}(0-1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\theta}$, где учтено, что

$$\lim_{z\to+\infty}(z^2+1)\cdot e^{-z^2} = \lim_{z\to\infty}\frac{z^2+1}{e^{z^2}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 0,$$

т. к. экспонента возрастает больше любого многочлена.

$$\left.\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \overline{X}$$

$\hat{\theta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\overline{X}}$, где $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – выборочное среднее

<u>№3.</u> С использованием метода макс. правдоподобия для случ. выборки $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из ген. совокупности X найти точечные оценки пар-ов заданного закона распр. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{X}_5 = (x_1, \ldots, x_5)$

Романов А.В. ИУ7-63Б. Задание №4.

Известно, что измерительный прибор не имеет систематических ошибок, а случайные ошибки подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отк. σ.

Сколько надо провести измерений одной и той же величины, чтобы с доверительной вер-ю $\gamma = 0{,}7$ абсолютное значение ошибки было не более $0{,}2\sigma$.

Решение.

$$M\left[\frac{1}{n}\sum X_i\right] = \frac{1}{n}\sum MX_i = MX$$

$$D\left[\frac{1}{n}\sum X_i\right] = \frac{1}{n} D\left[\sum X_i\right] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$M\bar{X}_n = MX, \quad \bar{X}_n \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$P\{|\bar{X}_n - MX| \le 0{,}2\sigma^2\} = 0{,}7$$

$MX = M\bar{X}_n \Rightarrow P\{|\bar{X}_n - M\bar{X}_n| \le 0{,}2\sigma\} = 0{,}7$

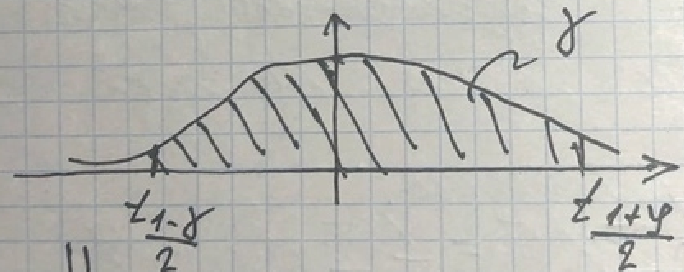
$P\left\{\left|\frac{\bar{X}_n - M\bar{X}_n}{\sigma}\sqrt{n}\right| \le 0{,}2\sqrt{n}\right\} = 0{,}7$

Введём $Y_n = \frac{\bar{X}_n - M\bar{X}_n}{\sigma}\sqrt{n} \Rightarrow$

$P\{|Y_n| \le 0{,}2\sqrt{n}\} = 0{,}7.$

По ЦПТ (т.к $n \ge 1$):

$Y_n \sim N(0,1)$



$\Downarrow$

$0{,}2\sqrt{n} \ge t^{N(0,1)}_{\frac{1+\gamma}{2}} \Rightarrow n \ge \left[5 \cdot t^{N(0,1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}\right]^2$

$n \ge (\underbrace{5 \cdot 1{,}04}_{\text{(по таблице)}})^2 \Rightarrow n = 28$

$M\bar{X}_n| \le 0{,}2\sigma\} = 0{,}7$

$= 0{,}7$

$\sqrt{n} \Rightarrow$

$):$

$\Rightarrow$

$\frac{+\gamma}{2}$

$n \geqslant \left[5 \cdot t^{N(0,1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}\right]^2$

$n = 28$

Ответ: 28 изделий.