Διακριτά Μαθηματικά

Εαρινό Εξάμηνο 2022-2023

Λύσεις Ασκήσεων #3

1. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς και αιτιολογήστε.

   (α) $2 \in \{1, 2, 3\}$

   Λύση: *Αληθής. Το 2 είναι στοιχείο του συνόλου* $\{1, 2, 3\}$.

   (β) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$

   Λύση:*Ψευδής. Το* $\{2\}$ *δεν είναι στοιχείο του συνόλου* $\{1, 2, 3\}$ *αλλά υποσύνολό του.*

   (γ) $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$

   Λύση:*Ψευδής. Το στοιχείο 2 δεν είναι σύνολο.*

   (δ) $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

   Λύση:*Αληθής. Το* $2 \in \{2\}$ *και* $2 \in \{1, 2, 3\}$, *άρα το* $\{2\}$ *είναι υποσύνολο του* $\{1, 2, 3\}$.

   (ε) $\{2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$

   Λύση:*Ψευδής. Το* $2 \in \{2\}$ *αλλά* $2 \notin \{\{1\}, \{2\}\}$, *συνεπώς το* $\{2\}$ *δεν είναι υποσύνολο {{1}, {2}}.*

   (στ) $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$

   Λύση:*Αληθής. Το* $\{2\}$ *είναι στοιχείο του συνόλου* $\{\{1\}, \{2\}\}$.

   (ζ) $5 \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   Λύση:*Ψευδής. Το 5 δεν μπορεί να αποτελεί γνήσιο υποσύνολο του* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *αφού πρόκειται για στοιχείο και όχι σύνολο.*

   (η) $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   Λύση:*Αληθής. Το 3 είναι στοιχείο του συνόλου* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (ϑ) $\{3, 5\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   Λύση:*Ψευδής. Το σύνολο* $\{3, 5\}$ *δεν είναι στοιχείο του συνόλου* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *αλλά υποσύνολό του.*

   (ι) $\{3, 5\} \subset \{x | (x = 2 * k + 1) \wedge k \in \mathbf{N}\}$

   Λύση:*Αληθής. Το* $\{3, 5\}$ *είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των περιττών αριθμών.*

2. Δίνονται τα σύνολα $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και $A = \{1, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 6, 7\}$ και $C = \{2, 5, 7\}$. Προσδιορίστε τα χαρακτηριστικά διανύσματα των συνόλων και έπειτα γράψτε τα στοιχεία των:
Έχουμε: $S = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$, $A = \{1, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}$, $B = \{1, 0, 1, 0, 0, 1, 1\}$, $C = \{0, 1, 0, 0, 1, 0, 1\}$

   (α) $A \cap B$

   Λύση:

$$\begin{aligned} \textit{Το χαρακτηριστικό διάνυσμα του}\ \ A &= \{1, 1, 0, 1, 0, 1, 0\} \\ \textit{και του}\ \ B &= \{1, 0, 1, 0, 0, 1, 1\} \\ \textit{Ισχύει ότι το χαρακτηριστικό διάνυσμα}\ \ A \cap B &= \{1, 0, 0, 0, 0, 1, 0\} \\ \textit{οπότε}\ \ (A \cap B) &= \{1, 6\}. \end{aligned}$$

(β) $A^c \cup B$

Λύση:

$$\begin{aligned} \textit{Το χαρακτηριστικό διάνυσμα του}\ \ A^c &= \{0,0,1,0,1,0,1\} \\ \textit{και του}\ \ B &= \{1,0,1,0,0,1,1\} \\ \textit{Ισχύει ότι το χαρακτηριστικό διάνυσμα}\ \ A^c \cup B &= \{1,0,1,0,1,1,1\} \\ \textit{οπότε}\ \ A^c \cup B &= \{1,3,5,6,7\}. \end{aligned}$$

(γ) $(A \cap B^c) \cup C$

Λύση:

$$\begin{aligned} \textit{Το χαρακτηριστικό διάνυσμα του}\ \ A &= \{1,1,0,1,0,1,0\} \\ \textit{του}\ \ B^c &= \{0,1,0,1,1,0,0\} \\ \textit{και του}\ \ C &= \{0,1,0,0,1,0,1\} \\ \textit{Συνεπώς, το χαρακτηριστικό διάνυσμα του}\ \ D &= (A \cap B^c) = \{0,1,0,1,0,0,0\} \\ \textit{και του}\ \ (A \cap B^c) \cup C &= D \cup C = \{0,1,0,1,1,0,1\} \\ \textit{οπότε}\ \ (A \cap B^c) \cup C &= \{2,4,5,7\}. \end{aligned}$$

3. Να αποδειχθεί ότι $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Λύση:

$$\begin{aligned} (A \cup B) - (A \cap B) &= \{x : x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\} \\ &= \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in (A \cap B)^c\} \\ &= \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A^c \vee x \in B^c)\} \ \ \text{(De Morgan)} \\ &= \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (B - A) &= \{x : x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\} \\ &= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \\ &= \{x : ((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in B) \wedge \neg(x \in A))\} \end{aligned}$$

Για δύο προτάσεις τώρα, $p = (x \in A)$ και $q = (x \in B)$, δείχνουμε τη λογική ισοδυναμία των σύνθετων προτάσεων $R = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ και $S = (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του πίνακα αληθείας από τον προτασιακό λογισμό:

p	q	$p \vee q$	$\neg p \vee \neg q$	R	$p \wedge \neg q$	$q \wedge \neg p$	S
0	0	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**1**	0	1	**1**
1	0	1	1	**1**	1	0	**1**
1	1	1	0	**0**	0	0	**0**

Από τις στήλες R, S του πίνακα αληθείας, η ισοδυναμία των R και S συνεπάγεται ότι τα σύνολα $(A \cup B) - (A \cap B)$ και $(A - B) \cup (B - A)$ είναι ισοδύναμα. Επομένως: $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

4. Για κάθε μία από τις παρακάτω απαιτήσεις δώστε μία διαμέριση του συνόλου $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   (α) Κάθε υποσύνολο έχει ίδιο μέγεθος.

   Λύση: *{{1,3},{2,4},{5,6}}*

   (β) Κάθε υποσύνολο δεν έχει ίδιο μέγεθος με άλλο.

   Λύση: *{{2},{3,6},{4,1,5}}*

   (γ) Υπάρχουν όσο το δυνατόν περισσότερα υποσύνολα.

   Λύση: *{{1},{2},{3},{4},{5},{6}}*

   (δ) Υπάρχουν όσο το δυνατό λιγότερα υποσύνολα.

   Λύση: *{{1,2,3,4,5,6}}*

5. Δίνεται ότι $A = \{a, b, g\}$ και $B = \{a, d\}$. Να βρεθεί ο πληθικός αριθμός των:

   (α) $\mathcal{P}(\mathcal{A})$

   Λύση:$|\mathcal{P}(\mathcal{B})| = 2^3 = 8$

   (β) $\mathcal{P}(\mathcal{B})$

   Λύση:$|\mathcal{P}(\mathcal{A})| = 2^2 = 4$

   (γ) $A \cup B$

   Λύση:*Από τον κανόνα του αθροίσματος ισχύει:*
   $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 2 - 1 = 4$
   Πράγματι, $|A \cup B| = \{a, b, g, d\}$

   (δ) $(A \times \{g\}) \cup (B \times \{a\})$

   Λύση:
   $A \times \{g\} = \{(a, g), (b, g), (g, g)\} \to |A \times \{g\}| = 3 \cdot 1 = 3$
   $B \times \{a\} = \{(a, a), (d, a)\} \to |B \times \{a\}| = 2 \cdot 1 = 2$
   $|(A\times\{g\})\cup(B\times\{a\})| = |(A\times\{g\})|+|(B\times\{a\})| = 3+2 = 5$, *αφού τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους.*

   (ε) $A \times B$

   Λύση:*Από τον κανόνα του γινομένου:*
   $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$
   Πράγματι, $A \times B = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, d), (g, a), (g, d)\}$

   (στ) A^2

   Λύση:
   $|A^2| = |A| \cdot |A| = 3^2 = 9$
   Πράγματι, $A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, g), (b, a), (b, b), (b, g), (g, a), (g, b), (g, g)\}$

   (ζ) B^2

   Λύση: $|B^2| = |B| \cdot |B| = 2^2 = 4$
   Πράγματι, $B^2 = B \times B = \{(a, a), (a, d), (d, a), (d, d)\}$

6. Να περιγραφούν τα στοιχεία των B^2 και B^4 αν $B = \{0, 1\}$.

   Λύση:
   $B^2 = B \times B = \{(b_1, b_2) : b_1, b_2 \in \{0, 1\}\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
   Το B^2 έχει συνολικά $2^2 = 4$ στοιχεία

   $B^4 = B \times B \times B \times B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) : b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0, 1\}\}$
   Άρα,το σύνολο θα έχει $|B^4| = 2^4 = 16$ στοιχεία:
   $B^4 = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1),$
   $(1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$

7. Να δειχτεί ότι $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   Λύση:

$$\begin{aligned}
A \times (B \cup C) &= \{(x, y) : (x \in A) \wedge (y \in B \cup C)\} \\
&= \{(x, y) : (x \in A) \wedge ((y \in B) \vee (y \in C))\} \\
&= \{(x, y) : ((x \in A) \wedge (y \in B)) \vee ((x \in A) \wedge y \in C))\} \\
&= \{(x, y) : ((x, y) \in A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C)\} \\
&= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)\} \\
&= (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

8. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής η ισότητα $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$. Αν είναι αληθής αποδείξτε το, αν είναι ψευδής δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

   Λύση:*Ψευδής*
   Αντιπαράδειγμα:
   Έστω $A = \{1, 2\}, C = \{3\}, B = \{4\}, D = \{5\}$. Τότε έχουμε: $(A \times B) \cup (C \times D) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5)\}$ *και* $(A \cup C) \times (B \cup D) = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$. *Κατά συνέπεια δεν ισχύει η ισότητα.*

9. Με χρήση πίνακα αληθείας και αιτιολογώντας κατάλληλα αποδείξτε ότι $A \cap B \cap C \subseteq B \cap (A \cup C)$

   Λύση:

A	B	C	$(A \cup C)$	$(A \cap B \cap C)$	$(B \cap (A \cup C)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

   Αιτιολόγηση: Για να ισχύει η σχέση του υποσυνόλου πρέπει κάθε στοιχείο x του πρώτου συνόλου να είναι στοιχείο του δεύτερου συνόλου. Αρκεί, λοιπόν, να ισχύει η σχέση implies για τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα αληθείας. Συγκεκριμένα όπου υπάρχει 1 στη στήλη $(A \cap B \cap C)$ δε θα πρέπει να υπάρχει 0 στη στήλη $(B \cap (A \cup C)$, γεγονός που ισχύει και κατά συνέπεια ισχύει ότι: $A \cap B \cap C \subseteq B \cap (A \cup C)$.

10. Απλοποιήστε την έκφραση:

$$\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$$

Λύση:
Είναι:
$\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}} =$
$= \overline{\overline{(A \cup B) \cap C}} \cap \overline{\overline{B}} =$ *(Νόμος DeMorgan)*
$= (A \cup B) \cap C) \cap B$ *(Νόμος Διπλής άρνησης)*
$= (A \cup B) \cap (C \cap B)$ *(Προσεταιριστικός Νόμος)*
$= (A \cup B) \cap (B \cap C)$ *(Αντιμεταθετικός Νόμος)*
$=((A \cup B) \cap B) \cap C$ *(Προσεταιριστικός Νόμος)*
$= B \cap C$ *(Νόμος Απορροφητικότητας)*

11. Μία ΚΑΙ-πύλη έχει δύο εισόδους I_1 και I_2 και μία έξοδο O. Μια τέτοια πύλη μπορεί να εμφανίσει μία ή περισσότερες από τις ακόλουθες δυσλειτουργίες:

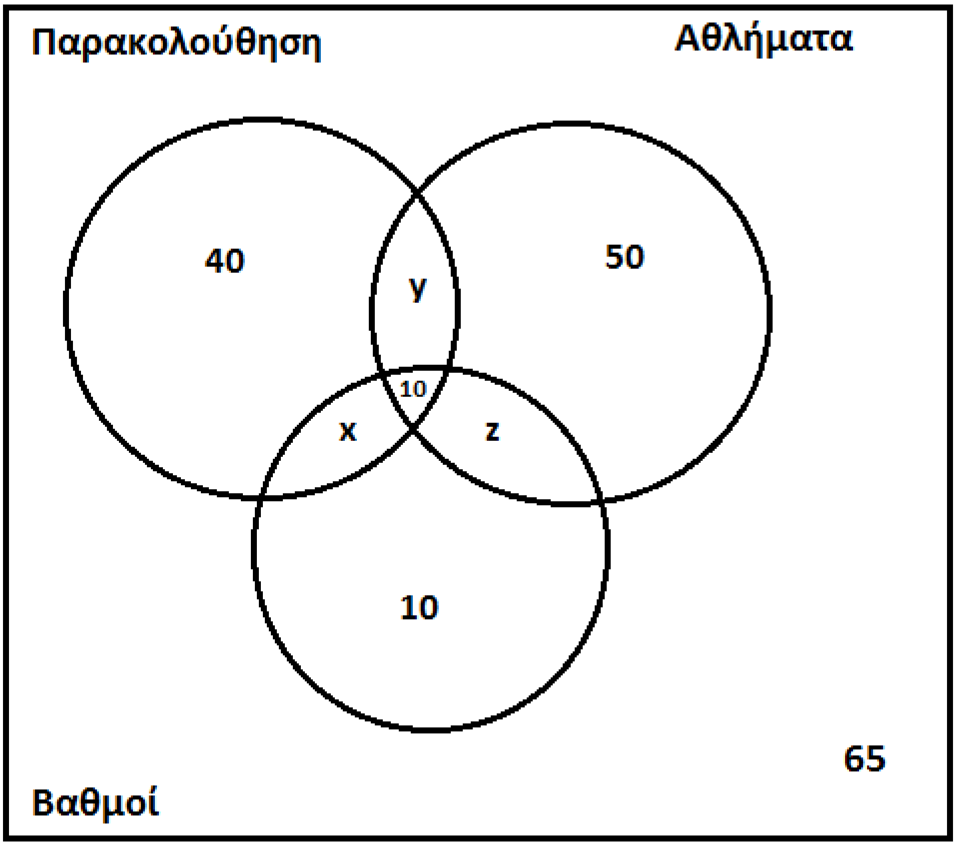
- D_1: η είσοδος I_1 'κολλάει' στο 0
- D_2: η είσοδος I_2 'κολλάει' στο 0
- D_3: η έξοδος O 'κολλάει' στο 1

Σε ένα δείγμα 100 τέτοιων πυλών έστω ότι A, B και C υποσύνολα που εμφανίζουν τη δυσλειτουργία D_1, D_2 και D_3, αντίστοιχα. Εάν $|A| = 23, |B| = 26, |C| = 30, |A \cap B| = 7, |A \cap C| = 8, |B \cap C| = 10$ και $|A \cap B \cap C| = 3$, πόσες από τις πύλες του δείγματος εμφάνισαν τουλάχιστον μία από τις δυσλειτουργίες D_1, D_2, D_3;

Λύση:
Έχουμε: $|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C| = 23+26+30-7-8-10+3 = 57$ *(προσθετικός νόμος). Επομένως, 57 ΚΑΙ-πύλες εμφάνισαν τουλάχιστον μία από τις δυσλειτουργίες και* $100 - 57 = 43$ *ΚΑΙ-πύλες δεν εμφάνισαν καμία βλάβη.*

12. Οι μαθητές του 1ου Δημοτικού Θεσσαλονίκης λαμβάνουν κάποια διπλώματα στο τέλος της χρονιάς κατά την τελετή λήξης. Αυτό το χρόνο 120 μαθητές πήραν δίπλωμα παρακολούθησης μαθημάτων (δεν έκαναν ούτε μία απουσία), 180 μαθητές πήραν δίπλωμα συμμετοχής στους σχολικους αθλητικούς αγώνες και 80 πήραν δίπλωμα αριστείας. Από αυτούς, οι 40 μαθητές που πήραν δίπλωμα παρακολούθησης δεν πήραν κανένα άλλο δίπλωμα, οι 50 μαθητές που πήραν το δίπλωμα συμμετοχής στους αθλητικούς αγώνες δεν πήραν κανένα άλλο δίπλωμα και οι 10 μαθητές που πήραν δίπλωμα αριστείας δεν πήραν κανένα άλλο δίπλωμα. Επιπλέον, 10 μαθητές πήραν και τα τρία διπλώματα ενώ 65 μαθητές δεν πήραν κανένα δίπλωμα. Σχεδιάστε ένα διάγραμμα Venn και βρείτε πόσους μαθητές είχε το σχολείο αυτή τη χρονιά.

Λύση:
Οι εξής εξισώσεις μπορούν να γραφούν:
$x + y + 10 + 40 = 120$
$x + z + 10 + 10 = 80$
$y + z + 10 + 50 = 180$
Η λύση σε αυτό το σύστημα είναι $x = 5$,$y = 65$ και $z = 55$. Επομένως, το συνολικό πλήθος των παιδιών της σχολικής χρονιάς είναι:
$65 + 40 + 50 + 10 + 10 + 5 + 65 + 55 = 300$


Παρακολούθηση
Αθλήματα
40
y
50
10
x
z
10
65
Βαθμοί