Διακριτά Μαθηματικά

Εαρινό Εξάμηνο 2022-2023

Λύσεις Ασκήσεων #2

1. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

   $2x + 3y - z = 5$

   $x - 2y + 3z = 7$

   $x + 5y - 4z = 0$

   δεν έχουν λύση (ακολουθήστε τη μέθοδο απόδειξης με αντίφαση).

   Απάντηση:

   Ξεκινάμε υποθέτοντας ότι υπάρχουν πραγματικές τιμές x, y, z που ικανοποιούν ταυτόχρονα κάθε μια από τις τρεις εξισώσεις. Αφαιρώντας τη δεύτερη εξίσωση από την πρώτη, προκύπτει ότι $x + 5y - 4z = -2$. Λαμβάνοντας υπόψη την τρίτη εξίσωση, δηλαδή $x + 5y - 4z = 0$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $x + 5y - 4z$ ισούται με 0 και -2. Αυτό είναι άτοπο. Εφόσον, λοιπόν, η αρχική υπόθεση μας οδήγησε σε άτοπο, οι εξισώσεις δεν έχουν λύση.

2. Δείξτε ότι αν n είναι ακέραιος, τότε ο αριθμός $n^3 - n$ διαιρείται με το 3.

   Απάντηση:

   Λύση 1: *Έστω $n = 3k + r, k \in \mathbb{Z}$ και $r = 0, 1, 2$. Είναι:*

$$\begin{aligned} n^3 - n &= (3k + r)^3 - (3k + r) = 27k^3 + 27k^2 r + 9kr^2 + r^3 - 3k - r \\ &= 3(9k^3 + 9k^2 r + 3kr^2 - k) + r^3 - r \\ &= 3m + f(r) \end{aligned}$$

   όπου $m = 9k^3 + 9k^2 r + 3kr^2 - k$ και $f(r) = r^3 - r$

   Έχουμε τις περιπτώσεις:

   1. $r = 0$: $f(0) = 0$
   2. $r = 1$: $f(1) = 1^3 - 1 = 0$
   3. $r = 2$: $f(2) = 2^3 - 2 = 6$

   Άρα $3|f(r)$ και επειδή $3|3m$ συνεπάγεται ότι $3|(n^3 - n)$.

   Λύση 2: *Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $n^3 - n$ διαιρείται με το 3. Πρέπει να δείξουμε ότι $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{Z}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:*

   - $n > 0$, *με επαγωγή στο n θα δείξουμε ότι $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}^*$:*
     - *Βασικό βήμα: για $n = 1$, $1^3 - 1 = 0$ και $3|0$, άρα $P(1)$ αληθής.*
     - *Επαγωγικό βήμα: έστω $P(k)$ αληθής για κάποιο $k > 1$. Δηλαδή, έστω ότι $3|(k^3 - k)$ συνεπώς:*

$$k^3 - k = 3m, \ m \in \mathbb{N}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(k+1)$ *αληθής, δηλαδή:* $(k+1)^3 - (k+1) = 3l,\ l \in \mathbb{N}$
Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)^3 - (k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= 3m + 3k^2 + 3k \text{ (από την επαγωγική υπόθεση)} \\ &= 3(m + k^2 + k) \\ &= 3l, l = (m + k^2 + k) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Συνεπώς, $P(k+1)$ *διαιρείται με το 3. Άρα,* $\forall k > 1(P(k) \to P(k+1))$ *αληθής. Επομένως δια της επαγωγής* $P(n)$ *αληθής* $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- $n < 0$. *Τότε θα είναι* $n = -m$, *και* $n^3 - n = -m^3 + m = -(m^3 - m)$, $m \in \mathbb{N}^*$. *Άρα διαιρείται με το 3 (από την 1η περίπτωση).*
- $n = 0$. *Τετριμμένη αφού* $n^3 - n = 0$ *και* $3|0$.

3. Να αποδείξετε ότι μεταξύ τριών διαδοχικών ακεραίων υπάρχει πολλαπλάσιο του 3.

   Απάντηση:

   Θα χρησιμοποιήσουμε από τη Θεωρία Αριθμών το γεγονός ότι ένας ακέραιος a *είναι πολλαπλάσιο του 3, ανν διαιρείται με το 3, δηλ. ανν υπάρχει ακέραιος* b *τέτοιος, ώστε* $a = 3b$.

   Αν n *είναι ο μικρότερος από τους τρεις διαδοχικούς ακεραίους, τότε οι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι είναι οι* $n, n+1$ *και* $n+2$. *Πρέπει να δείξουμε ότι:* $\forall n \in \mathbb{Z}$ *ένας τουλάχιστο από τους* $n, n+1, n+2$ *διαιρείται με το 3.*

   Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 3 είναι 0, ή 1, ή 2, ο ακέραιος n *μπορεί να γραφτεί ως:* $n = 3k$, *ή* $n = 3k+1$, *ή* $n = 3k+2$, *όπου* $k \in \mathbb{Z}$.

   Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

   1. *Αν* $n = 3k, k \in \mathbb{Z}$, *τότε ο* n *διαιρείται με το 3.*
   2. *Αν* $n = 3k+1, k \in \mathbb{Z}$, *τότε* $n+2 = 3k+3 = 3(k+1)$, *όπου* $(k+1) \in \mathbb{Z}$, *οπότε ο* $n+2$ *διαιρείται με το 3.*
   3. *Αν* $n = 3k+2, k \in \mathbb{Z}$, *τότε* $n+1 = 3k+3 = 3(k+1)$, *όπου* $(k+1) \in \mathbb{Z}$, *οπότε ο* $n+1$ *διαιρείται με το 3.*

   Άρα, σε κάθε περίπτωση υπάρχει ακέραιος που διαιρείται με το 3.

4. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου αριθμού είναι άρρητος (ακολουθήστε τη μέθοδο απόδειξη με αντίφαση).

   Απάντηση: *Ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου αριθμού είναι ρητός. Με άλλα λόγια,* $r_1 + x = r_2$, *όπου* r_1 *και* r_2 *είναι ρητοί αριθμοί και ο* x *είναι ένας άρρητος αριθμός. Αφού οι* r_1 *και* r_2 *είναι ρητοί, μπορούμε να τους εκφράσουμε και τους δύο ως πηλίκο ακεραίων:* $r_1 = \frac{a}{b}$, $r_2 = \frac{c}{d}$, *για* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. *Τότε έχουμε ότι:*

   $$\frac{a}{b} + x = \frac{c}{d},$$

   οπότε

   $$x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{db}.$$

   Αφού $cd - ab$ *και* db *είναι επίσης ακέραιοι, βλέπουμε ότι το* x *μπορεί να εκφραστεί ως πηλίκο δύο ακέραιων και ως εκ τούτου είναι ρητός αριθμός, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση ότι είναι άρρητος. Έτσι το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου αριθμού είναι άρρητος.*

5. Ακολουθώντας την απλή αρχή της μαθηματικής επαγωγής να αποδείξετε ότι:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Απάντηση:

Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- *Βασικό βήμα: για $n = 1$, $1^2 = \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} = 1$, άρα $P(1)$ αληθής.*
- *Επαγωγικό βήμα: έστω $P(k)$ αληθής για κάποιο $k > 1$. Δηλαδή, $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}$.*

  Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(k+1)$ αληθής, δηλαδή: $1^2 + 2^2 + \ldots + +(k+1)^2 = \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{(k+1)}{6}$
  Έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + (k+1)^2 \text{ (από την επαγωγική υπόθεση)} \\
&= \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + k^2 + 2k + 1 \\
&= \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + k^2 + k + k + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\
&= (\frac{k^3}{3} + k^2 + k + \frac{1}{3}) + (\frac{k^2}{2} + k + \frac{1}{2}) + (\frac{k}{6} + \frac{1}{6}) \\
&= (\frac{k^3}{3} + k^2 + k + \frac{1}{3}) + (\frac{k^2}{2} + k + \frac{1}{2}) + (\frac{k}{6} + \frac{1}{6}) \\
&= \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{(k+1)}{6}
\end{aligned}$$

  Συνεπώς, $P(k+1)$ αληθής. Άρα, $\forall k > 1 (P(k) \to P(k+1))$ αληθής. Επομένως δια της επαγωγής $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

6. Οι αρμονικοί αριθμοί H_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ορίζονται από τη σχέση $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Για παράδειγμα, $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{1}{2}$, και $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Ακολουθώντας την απλή αρχή της μαθηματικής επαγωγής να αποδείξετε ότι:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n.$$

Απάντηση:

Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$. Πρέπει να δείξουμε ότι $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- *Βασικό βήμα: για $n = 1$, $\sum_{i=1}^{1} H_i = H_1 = 1 = (1+1)H_1 - 1$, άρα $P(1)$ αληθής.*
- *Επαγωγικό βήμα: έστω $P(k)$ αληθής για κάποιο $k > 1$. Δηλαδή, $\sum_{i=1}^{k} H_i = (k+1)H_k - k$.*
  Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(k+1)$ αληθής, δηλαδή: $\sum_{i=1}^{k+1} H_i = (k+2)H_{k+1} - (k+1)$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} H_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} H_i + H_{k+1} \\ &= (k+1)H_k - k + H_{k+1} \text{ (από την επαγωγική υπόθεση) (1)} \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της αναδρομικής ακολουθίας:

$$H_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} = H_k + \frac{1}{k+1} \text{ (2)}$$

Από τις (1) *και* (2)*:*

$$\sum_{i=1}^{k+1} H_i = (k+1)H_{k+1} - 1 - k + H_{k+1} = (k+2)H_{k+1} - (k+1)$$

Συνεπώς, $P(k+1)$ αληθής. Άρα, $\forall k > 1(P(k) \to P(k+1))$ αληθής. Επομένως δια της επαγωγής $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

7. Ακολουθώντας την ισχυρή αρχή της μαθηματικής επαγωγής να αποδείξετε ότι κάθε ακέραιος $n \geq 2$ διαιρείται από έναν πρώτο.

   ***Απάντηση**:*

   Έστω ότι το $P(n)$ είναι το κατηγόρημα ότι το n έχει έναν πρώτο διαιρέτη.

   - *Βασικό βήμα: για $n = 2$, $P(2)$ αληθής διότι το 2 είναι ένας πρώτος διαιρέτης του 2.*
   - *Επαγωγικό βήμα: υποθέτουμε ότι $P(k)$ αληθής, δηλαδή k διαιρείται από έναν πρώτο, για όλα τα $2 \leq k \leq n$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(k+1)$ αληθής, δηλαδή $k+1$ διαιρείται από έναν πρώτο. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:*
     - *Το $k+1$ να είναι πρώτος, οπότε σε αυτήν την περίπτωση το $P(k+1)$ είναι αληθής διότι το $k+1$ είναι ένας πρώτος διαιρέτης του $k+1$.*
     - *Το $k+1$ να είναι σύνθετος, οπότε αποτελεί γινόμενο δύο ακέραιων: δηλαδή υπάρχουν ακέραιοι x και y, $2 \leq x \leq n$, $2 \leq y \leq n$, τέτοιοι ώστε $xy = n+1$. Από την επαγωγική υπόθεση, το x διαιρείται από έναν πρώτο p: $x = kp$ για $k \in \mathbb{Z}$. Έτσι προκύπτει ότι $n+1 = xy = (kp)y = (ky)p$. Με $ky \in \mathbb{Z}$, προκύπτει ότι το p διαιρεί το $n+1$. Οπότε το $P(k+1)$ αληθής.*

8. Δείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3|n^3 + 2n$.

   ***Απάντηση**:*

   ***Λύση 1**: Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $n^3 + 2n$ διαιρείται με το 3.*

   - *Βασικό βήμα: για $n = 1$, $1^3 + 2 \times 1 = 3$ το οποίο διαιρείται με το 3. Άρα $P(1)$ αληθής.*
   - *Επαγωγικό βήμα: έστω $P(k)$ αληθής για κάποιο $k > 1$. Δηλαδή, έστω ότι $3|k^3 + 2k$ συνεπώς:*

     $$k^3 + 2k = 3m, \ m \in \mathbb{Z}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(k+1)$ αληθής, δηλαδή: $(k+1)^3 + 2(k+1) = 3l, l \in \mathbb{Z}$
Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)^3 + 2(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= 3m + 3k^2 + 3k + 3 \text{ (από την επαγωγική υπόθεση)} \\ &= 3(m + k^2 + k + 1) \\ &= 3l, l = (m + k^2 + k + 1) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Συνεπώς, $P(k+1)$ διαιρείται με το 3. Άρα, $\forall k > 1(P(k) \to P(k+1))$ αληθής. Επομένως δια της επαγωγής $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

***Λύση 2**: Έστω $n \bmod 3 = r \in \{0, 1, 2\}$. Τότε $n \equiv r(\text{mod}3)$, οπότε:*

$$n^3 + 2n \equiv r^3 + 2r(\text{mod}3)$$

Συνεπώς αρκεί να εξετάσουμε όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις του r:

1. $r = 0$: $0^3 + 2 \times 0 = 0$
2. $r = 1$: $1^3 + 2 \times 1 = 3 \equiv 0(\text{mod}3)$
3. $r = 2$: $2^3 + 2 \times 2 = 12 \equiv 0(\text{mod}3)$

Άρα $n^3 + 2n \equiv 0(\text{mod}3)$, οπότε $3|(n^3 + 2n)$.

9. Δείξτε ότι αν n είναι περιττός ακέραιος, τότε ο αριθμός $n^2 - 1$ διαιρείται με το 8.

   ***Απάντηση**:*

   Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $n^2 - 1$ διαιρείται με το 8. Πρέπει να δείξουμε ότι $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $n = 2m - 1, m \in \mathbb{Z}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

   - *$n \geq 0$. Όμως $n = 2m - 1, m \in \mathbb{N}^*$ και $n^2 - 1 = (2m-1)^2 - 1 = 4m^2 - 4m, m \in \mathbb{N}^*$. Οπότε $P(m)$ είναι το κατηγόρημα $4m^2 - 4m$ διαιρείται με το 8 και αρκεί να δείξουμε με επαγωγή στο m ότι $P(m)$ αληθής $\forall m \in \mathbb{N}^*$:*
     - *Βασικό βήμα: για $m = 1$, $4 * 1^2 - 4 * 1 = 0$ το οποίο διαιρείται με το 8, άρα $P(1)$ αληθής.*
     - *Επαγωγικό βήμα: έστω $P(k)$ αληθής για κάποιο $k > 1$. Δηλαδή, έστω ότι $8|(4k^2 - 4k)$ συνεπώς:*

       $$4k^2 - 4k = 8r, \ r \in \mathbb{Z}$$

       Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(k+1)$ αληθής, δηλαδή: $4(k+1)^2 - 4(k+1) = 8s, \ s \in \mathbb{Z}$
       Έχουμε:

       $$\begin{aligned} P(k+1) &= 4(k+1)^2 - 4(k+1) \\ &= 4k^2 + 8k + 4 - 4k - 4 \\ &= 8r + 8k \text{ (από την επαγωγική υπόθεση)} \\ &= 8(r + k) \\ &= 8s, s = (r + k) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

       Συνεπώς, $P(k+1)$ διαιρείται με το 8. Άρα, $\forall k > 1(P(k) \to P(k+1))$ αληθής. Επομένως δια της επαγωγής $P(m)$ αληθής $\forall m \in \mathbb{N}^*$.
   - *$n < 0$. Τότε θα είναι $n = -m$, και $n^2 - 1 = (-m)^2 - 1 = m^2 - 1$, $m \in \mathbb{N}^*$. Άρα διαιρείται με το 8 (από την 1η περίπτωση).*

10. Ακολουθώντας την απλή αρχή της μαθηματικής επαγωγής να αποδείξετε ότι αν n είναι θετικός, περιττός ακέραιος, τότε ο αριθμός $7^n + 1$ διαιρείται με το 8.

Απάντηση:

Λύση 1:

Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα $8|7^n + 1$. Πρέπει να δείξουμε ότι $P(n)$ αληθής $\forall n \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$. Εφόσον $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $7^n + 1 = 7^{2m+1} + 1, m \in \mathbb{N}$. Οπότε έχουμε $P(m)$ το κατηγόρημα $8|7^{2m+1} + 1, m \in \mathbb{N}$ και αρκεί να δείξουμε με επαγωγή στο m ότι $P(m)$ αληθής $\forall m \in \mathbb{N}$:

- *Βασικό βήμα: για $m = 0$, $7^1 + 1 = 8$ το οποίο διαιρείται με το 8, άρα $P(1)$ αληθής.*
- *Επαγωγικό βήμα: έστω $P(k)$ αληθής για κάποιο $k > 1$. Δηλαδή, έστω ότι $7^{2k+1} + 1$ διαιρείται με το 8 συνεπώς:*

$$7^{2k+1} + 1 = 8r,\ r \in \mathbb{Z}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(k+1)$ αληθής, δηλαδή: $7^{2k+3} + 1 = 8s,\ s \in \mathbb{Z}$
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= 7^{2k+3} + 1 \\
&= 7^{2k+1} * 7^2 + 1 \\
&= 7^{2k+1} * (48+1) + 1 \\
&= 48 * 7^{2k+1} + 7^{2k+1} + 1 \\
&= 48 * 7^{2k+1} + 8r \text{ (από την επαγωγική υπόθεση)} \\
&= 8[6 * 7^{2k+1} + r] \\
&= 8s, s = (6 * 7^{2k+1} + r) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $P(k+1)$ διαιρείται με το 8. Άρα, $\forall k > 1 (P(k) \to P(k+1))$ αληθής. Επομένως δια της επαγωγής $P(m)$ αληθής $\forall m \in \mathbb{N}$.

Λύση 2:

Εφόσον διερευνούμε τη διαιρετότητα με το 8 το σύνολο στο οποίο δουλεύουμε είναι το $\mathbb{Z}_8$. Ισχύει ότι $ord(7) = 2$ αφού $7^2 = 49 = 1 \bmod 8$. Άρα: $7^{2m+1} + 1 = 7^{(2m+1) \bmod 2} + 1 = 7^1 + 1 = 8 = 0 \bmod 8$. Συνεπώς $8|7^n + 1$ για n θετικό, περιττό ακέραιο.

11. Η ακολουθία (a_n) ορίζεται ως εξής:

$$a_n = \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, n \geq 3 \end{cases}$$

Δείξτε ότι, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq 3^n$.

Απάντηση: *Έστω $P(n)$ το κατηγόρημα, $a_n \leq 3^n$.*

- *Βασικό βήμα: για $n = 0$, $a_0 = 1 = 3^0$, άρα $P(0)$ αληθής, για $n = 1$, $a_1 = 2 \leq 3^1$, άρα $P(1)$ αληθής και για $n = 2$, $a_2 = 3 \leq 3^2$, άρα $P(2)$ αληθής .*
- *Επαγωγικό βήμα: έστω $P(k)$ αληθής για όλους τους θετικούς ακέραιους k με $2 < k \leq n$, δηλαδή:*

$$a_k \leq 3^k, a_{k-1} \leq 3^{k-1}, a_{k-2} \leq 3^{k-2}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(k+1)$ *αληθής, δηλαδή:* $a_{k+1} \leq 3^{k+1}$
Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= a_{k+1} \\ &= a_k + a_{a-1} + a_{k-2} \text{ (από τον ορισμό)} \\ &\leq 3^k + 3^{k-1} + 3^{k-2} \text{ (από την επαγωγική υπόθεση)} \\ &\leq 3^k + 3^k + 3^k \\ &= 3 * 3^k \\ &= 3^{k+1} \end{aligned}$$

Άρα, $P(k+1)$ *αληθής, οπότε* $P(n)$ *αληθής* $\forall n \in \mathbb{N}$.

12. Δείξτε ότι υπάρχουν απείρως πολλοί πρώτοι αριθμοί (ακολουθήστε τη μέθοδο απόδειξης με αντίφαση).
Απάντηση: *Έστω ότι το σύνολο των πρώτων που υπάρχουν είναι πεπερασμένο και ας το συμβολίσουμε* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.
Θεωρούμε τον ακέραιο

$$N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$$

Προφανώς,

$$N > 1, N > p_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{1}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να γράψουμε

$$N = p_1(p_2 \ldots p_n) + 1 = p_1 q + 1, q = p_2 \ldots p_n \in \mathbb{Z}$$

Άρα, $p_1 \not| N$.
Συνεπώς,

$$p_i \not| N, i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) συνεπάγεται ότι ο N *είναι πρώτος ή αν είναι σύνθετος θα πρέπει να έχει παράγοντα (διαιρείται με) κάποιον πρώτο εκτός του συνόλου* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, *άρα άτοπο.*