Laboratorium: Lista 2
Test Studenta

Statystyka w zastosowaniach

Sylwia Majchrowska
Matematyka

22 marca 2016

Spis treści

1 Wstęp

Rozważany jest problem testowania dla dwóch prób: $X_1, ..., X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_1, ..., Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, gdzie σ_1 i σ_2 są nieznane, $H_0 : \mu_i = \mu_2$ vs $H_A : \mu_i \neq \mu_2$.

2 Zadanie pierwsze

Zadanie polegało na skonstruowaniu przedziału ufności na poziomie istotności 0.95 dla prawdopodobieństwa błędu pierwszego rodzaju gdy $n_1 = 5$, $\sigma_1 = 1$, $n_2 = 5$, $\sigma_2 = 5$ dla $\alpha = 0.05$ oraz $\alpha = 0.1$. Przedział ten utworzono bazując na warunku, który miał on spełnić, a mianowicie

$$P\left(\hat{p} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}} < p < \hat{p} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}\right) = 0.95,$$

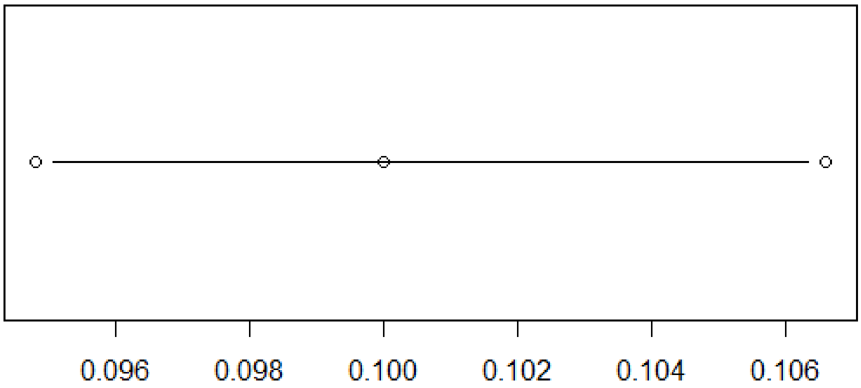
gdzie $\hat{p}$ jest wyestymowanym prawdopodobieństwem odrzucenia hipotezy H_0 przy założeniu, że jest ona prawdziwa (to p-stwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju), a α jest poziomem istotności - czyli maksymalnym dopuszczalnym prawdopodobieństwem popełnienia błędu I rodzaju.

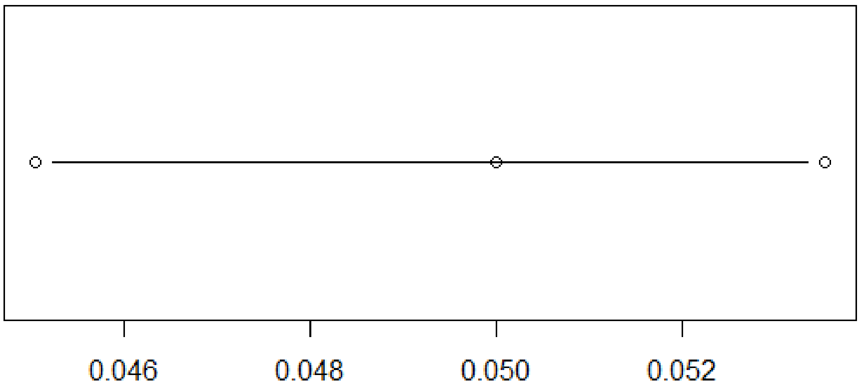
Estymatory wyznaczono w oparciu o 10 000 powtórzeń eksperymentu.

Przykładowe wyniki symulacji:

```
> Welch(0.05,5,10,0,0,1,5)
[1] 0.0554
> przedzial(Welch(0.05,5,10,0,0,1,5),10000,0.05)
[1] 0.0450568 0.0535432
> Welch(0.1,5,10,0,0,1,5)
[1] 0.0978
> przedzial(Welch(0.1,5,10,0,0,1,5),10000,0.05)
[1] 0.09480186 0.10659814
```

Jak można zauważyć zadane poziomy istotności mieszczą się w skonstruowanych przedziałach ufności.





Rysunek 1: Otrzymane przedziały ufności dla $\alpha = 0.05$ (dolny graf) i $\alpha = 0.1$ (górny graf).

Kod źródłowy zadania 1 w języku R:

```
set.seed(10)
n1 = 5
n2 = 10
s1 = 1
s2 = 5
u1 = 0
u2 = 0

Welch <- function(a,n1,n2,u1,u2,s1,s2){
  symNum = 10000

  Xe=matrix(rnorm(n1*symNum,u1,s1),n1,symNum)
  Ye=matrix(rnorm(n2*symNum,u2,s2),n2,symNum)
  Xme=apply(Xe,2,mean)
```

```
  Xs=c(1:symNum)
  for (i in 1:symNum){
    Xs[i] = 1/(n1-1)*sum((Xe[,i]-Xme[i])^2)}
  Yme=apply(Ye,2,mean)
  Ys=c(1:symNum)
  for (k in 1:symNum){
    Ys[k] = 1/(n2-1)*sum((Ye[,k]-Yme[k])^2)}
  Ze=(Xme-Yme)/sqrt(Xs/n1+Ys/n2)
  v = (Xs/n1 + Ys/n2)^2/((Xs^2/n1^2)/(n1-1)
        +(Ys^2/n2^2)/(n2-1))
  wynik=0
  for(j in 1:symNum){
    if(Ze[j] < (-qt((1-a/2),v[j])) ||
         Ze[j] > qt((1-a/2),v[j])){
      wynik = wynik + 1
    }
  }
  return (wynik/symNum)
}

przedzial<- function(p,N,alfa){
  return(c(p - qnorm(1-alfa/2)*sqrt(p*(1-p)/N),
         p + qnorm(1-alfa/2)*sqrt(p*(1-p)/N)))
}

przedzial(Welch(0.05, n1, n2, u1, u2, s1, s2),10000,0.05)
przedzial(Welch(0.1, n1, n2, u1, u2, s1, s2),10000,0.05)
```

3 Zadanie drugie

Tym razem dla $n_1 = 5$, $n_2 = 5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\mu_1 = 0$ i $\mu_2 = 1.1$ oraz $\alpha = 0.05$ należało teoretycznie wyznaczyć moc testu Studenta (wykorzystując informację o homoskedastyczności wariancji), a następnie porównać ją z wyznaczoną na podstawie symulacji komputerowych (eksperyment powtórzono 10 000 razy) mocą testu Studenta z poprawką Welcha-Sattherthweite'a. Na podstawie rozważań dokonanych podczas zajęć laboratoryjnych otrzymano zależność

$$\beta(\delta) = t_{n_1+n_2-2,\delta}\left(-t^{-1}_{n_1+n_2-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) + 1 - t_{n_1+n_2-2,\delta}\left(t^{-1}_{n_1+n_2-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right),$$

gdzie δ jest parametrem niecentralności niecentralnego rozkładu Studenta i wynosi $\delta = \frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{(\sigma^2*(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$.

Przykładowe wyniki symulacji:

```
> MocWelcha(0.05,5,10,0,1.1,1,1)
[1] 0.436
> MocTeo(0.05,5,10,0,1.1,1,1)
[1] 0.4601
```

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że moc testu wyznaczona empirycznie jest zbliżona do wielkości otrzymanej na podstawie rozważań teoretycznych (generalnie jest ona trochę mniejsza). Moc testu Welcha przy różnicy między średnimi wynoszącej 1.1 i podanej w zadaniu wielkości prób nie jest zbyt imponująca (prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_0 plasuje się poniżej 50%).

Kod źródłowy zadania 2 w języku R:

```
set.seed(10)
n1 = 5
n2 = 10
s1 = 1
s2 = 1
u1 = 0
u2 = 1.1
alpha = 0.05

MocWelcha <- function(a,n1,n2,u1,u2,s1,s2){
  symNum = 1000
  Xe=matrix(rnorm(n1*symNum,u1,s1),n1,symNum)
  Ye=matrix(rnorm(n2*symNum,u2,s2),n2,symNum)
  Xme=apply(Xe,2,mean)
  Xs=c(1:symNum)
  for (i in 1:symNum){
    Xs[i] = 1/(n1-1)*sum((Xe[,i]-Xme[i])^2)}
  Yme=apply(Ye,2,mean)
  Ys=c(1:symNum)
  for (k in 1:symNum){
    Ys[k] = 1/(n2-1)*sum((Ye[,k]-Yme[k])^2)}
  Ze=(Xme-Yme)/sqrt((Xs)/n1+Ys/n2)
  v = (Xs/n1 + Ys/n2)^2/((Xs^2/n1^2)/(n1-1)
        +(Ys^2/n2^2)/(n2-1))
  wynik=0
  for(j in 1:symNum){
    if(Ze[j] < (-qt((1-a/2),v[j])) ||
        Ze[j] > qt((1-a/2),v[j])){
      wynik = wynik + 1
    }
  }
  return (wynik/symNum)
}

MocTeo <- function(a,n1,n2,u1,u2,s1,s2){
  delta = (u1-u2)/sqrt(s1^2/n1+s2^2/n2)
  return(1-pt(qt(1-a/2,n1+n2-2),n1+n2-2,delta)
        +pt(-qt(1-a/2,n1+n2-2),n1+n2-2,delta))
}

MocWelcha(alpha,n1,n2,u1,u2,s1,s2)
MocTeo(alpha,n1,n2,u1,u2,s1,s2)
```

4 Zadanie trzecie

Ponownie zadaniem było skonstruowanie 95% przedziału ufności dla p-stwa błędu pierwszego rodzaju. Tym razem jednak wartość krytyczna do testowania H_0 za pomocą statystyki ogólnego testu Studenta została wzięta z rozkładu normalnego. Obliczenia wykonano dla dwóch poziomów istotności α oraz czterech różnych przypadków liczebności prób (podpunkty od a) do d)).

Przykładowe wyniki symulacji:

```
# alfa = 0.05
a) przedzial(Student(0.05,5,10),10000,0.05)
[1] 0.07807802 0.08892198
b) przedzial(Student(0.05,10,20),10000,0.05)
[1] 0.0614235 0.0711765
c) przedzial(Student(0.05,20,40),10000,0.05)
[1] 0.05312985 0.06227015
d) przedzial(Student(0.05,40,80),10000,0.05)
[1] 0.04870512 0.05749488
# alfa = 0.1
a) przedzial(Student(0.1,5,10),10000,0.05)
[1] 0.1315339 0.1450661
b) przedzial(Student(0.1,10,20),10000,0.05)
[1] 0.1074782 0.1199218
c) przedzial(Student(0.1,20,40),10000,0.05)
[1] 0.1020142 0.1141858
d) przedzial(Student(0.1,40,80),10000,0.05)
[1] 0.09908914 0.11111086
```

Dopiero dla $n_1 = 40$ i $n_2 = 80$ przy $\alpha = 0.05$ obrany poziom istotności wpada do wyestymowanego przedziału istotności. Przy $\alpha = 0.1$ sytuacja jest podobna, gdyż dana wielkość mieści się w przedziale wyznaczonym tylko w podpunkcie d).

Kod źródłowy zadania 3 w języku R:

```
set.seed(10)

Student <- function(a,n1,n2){
  symNum = 10000
  Xe=matrix(rnorm(n1*symNum),n1,symNum)
  Ye=matrix(rnorm(n2*symNum),n2,symNum)
  Xme=apply(Xe,2,mean)
  Xs=c(1:symNum)
  for (i in 1:symNum){
    Xs[i] = 1/(n1-1)*sum((Xe[,i]-Xme[i])^2)}
  Yme=apply(Ye,2,mean)
  Ys=c(1:symNum)
  for (k in 1:symNum){
    Ys[k] = 1/(n2-1)*sum((Ye[,k]-Yme[k])^2)}
  Ze=abs(Xme-Yme)/sqrt((Xs)/n1+Ys/n2)
```

```
  wynik=0
  for(j in 1:symNum){
    if(Ze[j] < (-qnorm(1-a/2)) ||
        Ze[j] > qnorm(1-a/2)){
      wynik = wynik + 1
    }
  }
  return (wynik/symNum)
}
przedzial<- function(p,N, alfa){
  return(c(p - qnorm(1-alfa/2)*sqrt(p*(1-p)/N),
        p + qnorm(1-alfa/2)*sqrt(p*(1-p)/N)))
}

przedzial(Student(0.05,5,10),10000,0.05)
przedzial(Student(0.05,10,20),10000,0.05)
przedzial(Student(0.05,20,40),10000,0.05)
przedzial(Student(0.05,40,80),10000,0.05)

przedzial(Student(0.1,5,10),10000,0.05)
przedzial(Student(0.1,10,20),10000,0.05)
przedzial(Student(0.1,20,40),10000,0.05)
przedzial(Student(0.1,40,80),10000,0.05)
```

5 Zadanie czwarte

Dla tego ćwiczenia próby X_i i Y_i miały pochodzić z rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda = 1$. Wszystkie obliczenia wykonano analogiczne do zadania 3.

Przykładowe wyniki symulacji:

```
# alfa = 0.05
a) przedzial(Exponent(0.05,5,10),10000,0.05)
[1] 0.07730171 0.08809829
b) przedzial(Exponent(0.05,10,20),10000,0.05)
[1] 0.05958899 0.06921101
c) przedzial(Exponent(0.05,20,40),10000,0.05)
[1] 0.05486355 0.06413645
d) przedzial(Exponent(0.05,40,80),10000,0.05)
[1] 0.04976241 0.05863759
# alfa = 0.1
a) przedzial(Exponent(0.1,5,10),10000,0.05)
[1] 0.1331992 0.1468008
b) przedzial(Exponent(0.1,10,20),10000,0.05)
[1] 0.1135332 0.1262668
c) przedzial(Exponent(0.1,20,40),10000,0.05)
[1] 0.1063069 0.1186931
d) przedzial(Exponent(0.1,40,80),10000,0.05)
[1] 0.1024043 0.1145957
```

Na podstawie przykładowych wyników widać, że dla $n_1 = 40$ i $n_2 = 80$ przy $\alpha = 0.05$ obrany poziom istotności wpada do wyestymowanego przedziału istotności. Jednocześnie przy $\alpha = 0.1$ dana wielkość nie mieści się w żadnych z wyznaczonych przedziałów. Oznacza to, że dla rozkładów wykładniczych przeprowadzone rozumowanie nie będzie działało aż tak dobrze jak dla danych pochodzących z rozkładów normalnych - co wskazuje na wagę poczynionych założeń.

Kod źródłowy zadania 4 w języku R:

```
set.seed(10)

Exponent <- function(a,n1,n2){
  symNum = 10000
  Xe=matrix(rexp(n1*symNum,1),n1,symNum)
  Ye=matrix(rexp(n2*symNum,1),n2,symNum)
  Xme=apply(Xe,2,mean)
  Xs=c(1:symNum)
  for (i in 1:symNum){
    Xs[i] = 1/(n1-1)*sum((Xe[,i]-Xme[i])^2)}
  Yme=apply(Ye,2,mean)
  Ys=c(1:symNum)
  for (k in 1:symNum){
    Ys[k] = 1/(n2-1)*sum((Ye[,k]-Yme[k])^2)}
  Ze=abs(Xme-Yme)/sqrt((Xs)/n1+Ys/n2)

  wynik=0
  for(j in 1:symNum){
    if(Ze[j] < (-qnorm(1-a/2)) ||
         Ze[j] > qnorm(1-a/2)){
      wynik = wynik + 1
    }
  }
  return (wynik/symNum)
}

przedzial<- function(p,N,alfa){
  return(c(p - qnorm(1-alfa/2)*sqrt(p*(1-p)/N),
         p + qnorm(1-alfa/2)*sqrt(p*(1-p)/N)))
}

przedzial(Exponent(0.05,5,10),10000,0.05)
przedzial(Exponent(0.05,10,20),10000,0.05)
przedzial(Exponent(0.05,20,40),10000,0.05)
przedzial(Exponent(0.05,40,80),10000,0.05)

przedzial(Exponent(0.1,5,10),10000,0.05)
przedzial(Exponent(0.1,10,20),10000,0.05)
przedzial(Exponent(0.1,20,40),10000,0.05)
przedzial(Exponent(0.1,40,80),10000,0.05)
```