

Ondas gravitacionales

Creación y detección

Federico Marcos

Departamento de Física, Universidad Nacional de La Plata

11 de febrero de 2014

Índice

- 1 Formalismo teórico
 - Gravedad linealizada
 - La propagación de ondas gravitacionales
 - El efecto de las ondas en partículas libres
- 2 Detección de las ondas gravitacionales
 - Un detector resonante
 - Interferómetros Láser. Midiendo distancias con luz
- 3 La generación de las ondas
 - Cálculo de un sistema binario

Índice

1 Formalismo teórico

- Gravedad linealizada
- La propagación de ondas gravitacionales
- El efecto de las ondas en partículas libres

2 Detección de las ondas gravitacionales

- Un detector resonante
- Interferómetros Láser. Midiendo distancias con luz

3 La generación de las ondas

- Cálculo de un sistema binario

Gravedad linealizada

Dada una métrica $g_{\mu\nu}$ se propone escribirla como

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

La métrica inversa será

$$g^{-1} = (\bar{g} + h)^{-1} = ((1 + h \bar{g}^{-1}) \bar{g})^{-1} = \bar{g}^{-1} (1 - h \bar{g}^{-1} + O(h^2))$$

Es decir

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma} + O(h^2)$$

Gravedad linealizada

Dada una métrica $g_{\mu\nu}$ se propone escribirla como

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

La métrica inversa será

$$g^{-1} = (\bar{g} + h)^{-1} = ((1 + h\bar{g}^{-1})\bar{g})^{-1} = \bar{g}^{-1}(1 - h\bar{g}^{-1} + O(h^2))$$

Es decir

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\rho}\bar{g}^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma} + O(h^2)$$

Gravedad linealizada

Dada una métrica $g_{\mu\nu}$ se propone escribirla como

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

La métrica inversa será

$$g^{-1} = (\bar{g} + h)^{-1} = ((1 + h \bar{g}^{-1}) \bar{g})^{-1} = \bar{g}^{-1} (1 - h \bar{g}^{-1} + O(h^2))$$

Es decir

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma} + O(h^2)$$

Símbolos de Christoffel

Podemos calcular los símbolos de Christoffel a primer orden en h

$$\Gamma_{\rho;\mu\nu} = \bar{\Gamma}_{\rho;\mu\nu} + \frac{1}{2} (-\partial_\rho h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho - h^{\rho\sigma} \bar{\Gamma}_{\sigma;\mu\nu} + \bar{g}^{\rho\sigma} \frac{1}{2} (-\partial_\rho h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu}) + O(h^2)$$

Utilizando que $\partial_\sigma h_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\sigma h_{\mu\nu} + \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\varepsilon h_{\varepsilon\nu} + \bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^\varepsilon h_{\mu\varepsilon}$ llegamos a:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{2} (-\bar{\nabla}_\rho h_{\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\rho} + \bar{\nabla}_\nu h_{\rho\mu})$$

Símbolos de Christoffel

Podemos calcular los símbolos de Christoffel a primer orden en h

$$\Gamma_{\rho;\mu\nu} = \bar{\Gamma}_{\rho;\mu\nu} + \frac{1}{2} (-\partial_\rho h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho - h^{\rho\sigma} \bar{\Gamma}_{\sigma;\mu\nu} + \bar{g}^{\rho\sigma} \frac{1}{2} (-\partial_\rho h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu}) + O(h^2)$$

Utilizando que $\partial_\sigma h_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\sigma h_{\mu\nu} + \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\varepsilon h_{\varepsilon\nu} + \bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^\varepsilon h_{\mu\varepsilon}$ llegamos a:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{2} (-\bar{\nabla}_\rho h_{\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\rho} + \bar{\nabla}_\nu h_{\rho\mu})$$

Tensor de Ricci

Teniendo las conexiones, podemos calcular el tensor de curvatura y Ricci a primer orden en h

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] + O(h^2)$$

Con

$$L_{\mu\nu}[h] = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\rho} + \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\rho} - \bar{\nabla}^2 h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu h^\rho_\rho)$$

Tensor de Ricci

Teniendo las conexiones, podemos calcular el tensor de curvatura y Ricci a primer orden en h

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] + O(h^2)$$

Con

$$L_{\mu\nu}[h] = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\rho} + \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\rho} - \bar{\nabla}^2 h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu h^\rho_\rho)$$

Escalar de Ricci y tensor de Einstein

Podemos calcular el escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = (\bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2)) (\bar{R}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] + O(h^2))$$

$$R = \bar{R} + L_{\rho}^{\rho}[h] - \bar{R}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

Donde explícitamente:

$$L_{\rho}^{\rho}[h] = \bar{\nabla}^{\rho} \bar{\nabla}^{\sigma} h_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^2 h_{\rho}^{\rho}$$

Con esto podemos calcular el tensor de Einstein

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$$E_{\mu\nu} = \bar{E}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} (L_{\rho}^{\rho}[h] - \bar{R}^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2} \bar{R} h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

Escalar de Ricci y tensor de Einstein

Podemos calcular el escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = (\bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2)) (\bar{R}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] + O(h^2))$$

$$R = \bar{R} + L_{\rho}^{\rho}[h] - \bar{R}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

Donde explícitamente:

$$L_{\rho}^{\rho}[h] = \bar{\nabla}^{\rho} \bar{\nabla}^{\sigma} h_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^2 h_{\rho}^{\rho}$$

Con esto podemos calcular el tensor de Einstein

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$$E_{\mu\nu} = \bar{E}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} (L_{\rho}^{\rho}[h] - \bar{R}^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2} \bar{R} h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

Escalar de Ricci y tensor de Einstein

Podemos calcular el escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = (\bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2)) (\bar{R}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] + O(h^2))$$

$$R = \bar{R} + L_{\rho}^{\rho}[h] - \bar{R}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

Donde explícitamente:

$$L_{\rho}^{\rho}[h] = \bar{\nabla}^{\rho} \bar{\nabla}^{\sigma} h_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^2 h_{\rho}^{\rho}$$

Con esto podemos calcular el tensor de Einstein

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$$E_{\mu\nu} = \bar{E}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} (L_{\rho}^{\rho}[h] - \bar{R}^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2} \bar{R} h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

Traza transversa

Es útil introducir la traza transversa de $h_{\mu\nu}$:

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{h^\rho{}_\rho}{2} \bar{g}_{\mu\nu}$$

y su relación inversa

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{H^\rho{}_\rho}{D-2} \bar{g}_{\mu\nu}$$

$$L_{\mu\nu}[h] = L_{\mu\nu}[H] + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H^\sigma{}_\sigma + \frac{1}{2(D-2)} \bar{\nabla}^2 H^\rho{}_\rho \bar{g}_{\mu\nu}$$

Traza transversa

Es útil introducir la traza transversa de $h_{\mu\nu}$:

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{h^\rho{}_\rho}{2} \bar{g}_{\mu\nu}$$

y su relación inversa

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{H^\rho{}_\rho}{D-2} \bar{g}_{\mu\nu}$$

$$L_{\mu\nu}[h] = L_{\mu\nu}[H] + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H^\sigma{}_\sigma + \frac{1}{2(D-2)} \bar{\nabla}^2 H^\rho{}_\rho \bar{g}_{\mu\nu}$$

Traza transversa

Es útil introducir la traza transversa de $h_{\mu\nu}$:

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{h^\rho{}_\rho}{2} \bar{g}_{\mu\nu}$$

y su relación inversa

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{H^\rho{}_\rho}{D-2} \bar{g}_{\mu\nu}$$

$$L_{\mu\nu}[h] = L_{\mu\nu}[H] + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H^\sigma{}_\sigma + \frac{1}{2(D-2)} \bar{\nabla}^2 H^\rho{}_\rho \bar{g}_{\mu\nu}$$

Tensor de Einstein

Finalmente tenemos para el tensor de Einstein:

$$E_{\mu\nu} = \bar{E}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[H] + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H^\sigma_\sigma - \frac{\bar{R}}{2} H_{\mu\nu} + \\ + \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} (\bar{R}^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}) + O(h^2)$$

El término lineal en h puede expresarse explícitamente como:

$$E_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\mu H_{\nu\rho} + \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\nu H_{\mu\rho} - \bar{\nabla}^2 H_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H^\rho_\rho + \\ + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H^\sigma_\sigma - \bar{R} H_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu} (\bar{R}^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}))$$

Simplificamos el conmutador de derivadas covariantes:

$$E_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_\mu (\bar{\nabla}^\rho H_{\nu\rho}) + \bar{\nabla}_\nu (\bar{\nabla}^\rho H_{\mu\rho}) + \bar{R}^\sigma_\mu H_{\nu\sigma} + \bar{R}^\sigma_\nu H_{\mu\sigma} - 2\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma} H^{\rho\sigma} \\ - \bar{\nabla}^2 H_{\mu\nu} - \bar{R} H_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu} (\bar{R}^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}))$$

Tensor de Einstein

Finalmente tenemos para el tensor de Einstein:

$$E_{\mu\nu} = \bar{E}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[H] + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H^\sigma_\sigma - \frac{\bar{R}}{2} H_{\mu\nu} + \\ + \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} (\bar{R}^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}) + O(h^2)$$

El término lineal en h puede expresarse explícitamente como:

$$E_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\mu H_{\nu\rho} + \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\nu H_{\mu\rho} - \bar{\nabla}^2 H_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H^\rho_\rho + \\ + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H^\sigma_\sigma - \bar{R} H_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu} (\bar{R}^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}))$$

Simplificamos el conmutador de derivadas covariantes:

$$E_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_\mu (\bar{\nabla}^\rho H_{\nu\rho}) + \bar{\nabla}_\nu (\bar{\nabla}^\rho H_{\mu\rho}) + \bar{R}^\sigma_\mu H_{\nu\sigma} + \bar{R}^\sigma_\nu H_{\mu\sigma} - 2\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma} H^{\rho\sigma} \\ - \bar{\nabla}^2 H_{\mu\nu} - \bar{R} H_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu} (\bar{R}^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}))$$

Tensor de Einstein

Finalmente tenemos para el tensor de Einstein:

$$E_{\mu\nu} = \bar{E}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[H] + \frac{1}{2}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu H^\sigma_\sigma - \frac{\bar{R}}{2}H_{\mu\nu} + \\ + \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{R}^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho\bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}) + O(h^2)$$

El término lineal en h puede expresarse explícitamente como:

$$E_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}^\rho\bar{\nabla}_\mu H_{\nu\rho} + \bar{\nabla}^\rho\bar{\nabla}_\nu H_{\mu\rho} - \bar{\nabla}^2 H_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu H^\rho_\rho + \\ + \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu H^\sigma_\sigma - \bar{R}H_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{R}^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho\bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}))$$

Simplificamos el conmutador de derivadas covariantes:

$$E_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}^\rho H_{\nu\rho}) + \bar{\nabla}_\nu(\bar{\nabla}^\rho H_{\mu\rho}) + \bar{R}^\sigma_\mu H_{\nu\sigma} + \bar{R}^\sigma_\nu H_{\mu\sigma} - 2\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma}H^{\rho\sigma} \\ - \bar{\nabla}^2 H_{\mu\nu} - \bar{R}H_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{R}^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho\bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}))$$

Ecuación de Einstein

si pensamos que existe un $T_{\mu\nu}$ pequeño que sea la fuente de la perturbación, entonces $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$

$$E_{\mu\nu}^{(1)}[h] = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Dado que en ausencia de perturbación $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ las expresiones anteriores se simplifican considerablemente

$$E_{\mu\nu}^{(1)}[H] = \frac{1}{2} \left(-\square H_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\rho H_{\nu\rho} + \partial_\nu \partial^\rho H_{\mu\rho} - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma H_{\rho\sigma} \right) = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Ecuación de Einstein

si pensamos que existe un $T_{\mu\nu}$ pequeño que sea la fuente de la perturbación, entonces $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$

$$E_{\mu\nu}^{(1)}[h] = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Dado que en ausencia de perturbación $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ las expresiones anteriores se simplifican considerablemente

$$E_{\mu\nu}^{(1)}[H] = \frac{1}{2} \left(-\square H_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\rho H_{\nu\rho} + \partial_\nu \partial^\rho H_{\mu\rho} - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma H_{\rho\sigma} \right) = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Elección del Gauge

Tenemos a nuestra *disposición* la invarianza frente a reparametrizaciones:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \varepsilon^{\mu}(x) \text{ con } J^{\mu}_{\nu} = \partial_{\nu} x'^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \partial_{\nu} \varepsilon^{\mu}(x)$$

Exigiendo que $|\partial_{\nu} \varepsilon^{\mu}| \ll 1$

El cambio en la métrica será

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\varepsilon} g_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \varepsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \varepsilon_{\mu}$$

Por lo que vemos que

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \varepsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \varepsilon_{\mu}$$

Elección del Gauge

Tenemos a nuestra *disposición* la invarianza frente a reparametrizaciones:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \varepsilon^{\mu}(x) \text{ con } J^{\mu}_{\nu} = \partial_{\nu} x'^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \partial_{\nu} \varepsilon^{\mu}(x)$$

Exigiendo que $|\partial_{\nu} \varepsilon^{\mu}| \ll 1$

El cambio en la métrica será

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\varepsilon} g_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \varepsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \varepsilon_{\mu}$$

Por lo que vemos que

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \varepsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \varepsilon_{\mu}$$

Elección del Gauge

Tenemos a nuestra *disposición* la invarianza frente a reparametrizaciones:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \varepsilon^{\mu}(x) \text{ con } J_{\nu}^{\mu} = \partial_{\nu} x'^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu} \varepsilon^{\mu}(x)$$

Exigiendo que $|\partial_{\nu} \varepsilon^{\mu}| \ll 1$

El cambio en la métrica será

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\varepsilon} g_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \varepsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \varepsilon_{\mu}$$

Por lo que vemos que

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \varepsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \varepsilon_{\mu}$$

Tensor de Riemann

Si calculamos ahora como transforma el tensor de Riemann frente a la transformación de gauge

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha \partial_\mu h_{\beta\nu})$$

Vemos que permanece invariante frente a

$$h'_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu$$

En cuanto a la traza transversa de H tenemos que

$$H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \varepsilon_\rho$$

Tensor de Riemann

Si calculamos ahora como transforma el tensor de Riemann frente a la transformación de gauge

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha \partial_\mu h_{\beta\nu})$$

Vemos que permanece invariante frente a

$$h'_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu$$

En cuanto a la traza transversa de H tenemos que

$$H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \varepsilon_\rho$$

Tensor de Riemann

Si calculamos ahora como transforma el tensor de Riemann frente a la transformación de gauge

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha \partial_\mu h_{\beta\nu})$$

Vemos que permanece invariante frente a

$$h'_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu$$

En cuanto a la traza transversa de H tenemos que

$$H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \varepsilon_\rho$$

Ecuación en el gauge de Lorentz

Dado que tenemos la libertad de elegir el gauge vemos que si exigimos $\partial^\nu H_{\mu\nu} = 0$ (gauge de Lorentz) la ecuación de Einstein se simplifica considerablemente

$$\square H_{\mu\nu} = -2\kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Siempre podemos elegir este gauge pues

$$\partial^\nu H'_{\mu\nu} = \partial^\nu H_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\nu \varepsilon_\nu + \square \varepsilon_\mu - \partial_\mu \partial^\nu \varepsilon_\nu$$

y la ecuación $\partial^\nu H_{\mu\nu} + \square \varepsilon_\mu = 0$ tiene solución.

Cualquier transformación residual tal que $\square \varepsilon_\mu = 0$ dejará la ecuación $\partial^\nu H_{\mu\nu} = 0$ invariante

Ecuación en el gauge de Lorentz

Dado que tenemos la libertad de elegir el gauge vemos que si exigimos $\partial^\nu H_{\mu\nu} = 0$ (gauge de Lorentz) la ecuación de Einstein se simplifica considerablemente

$$\square H_{\mu\nu} = -2\kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Siempre podemos elegir este gauge pues

$$\partial^\nu H'_{\mu\nu} = \partial^\nu H_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\nu \epsilon_\nu + \square \epsilon_\mu - \partial_\mu \partial^\nu \epsilon_\nu$$

y la ecuación $\partial^\nu H_{\mu\nu} + \square \epsilon_\mu = 0$ tiene solución.

Cualquier transformación residual tal que $\square \epsilon_\mu = 0$ dejará la ecuación $\partial^\nu H_{\mu\nu} = 0$ invariante

Ecuación en el gauge de Lorentz

Dado que tenemos la libertad de elegir el gauge vemos que si exigimos $\partial^\nu H_{\mu\nu} = 0$ (gauge de Lorentz) la ecuación de Einstein se simplifica considerablemente

$$\square H_{\mu\nu} = -2\kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Siempre podemos elegir este gauge pues

$$\partial^\nu H'_{\mu\nu} = \partial^\nu H_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\nu \epsilon_\nu + \square \epsilon_\mu - \partial_\mu \partial^\nu \epsilon_\nu$$

y la ecuación $\partial^\nu H_{\mu\nu} + \square \epsilon_\mu = 0$ tiene solución.

Cualquier transformación residual tal que $\square \epsilon_\mu = 0$ dejará la ecuación $\partial^\nu H_{\mu\nu} = 0$ invariante

Índice

- 1 Formalismo teórico
 - Gravedad linealizada
 - La propagación de ondas gravitacionales
 - El efecto de las ondas en partículas libres
- 2 Detección de las ondas gravitacionales
 - Un detector resonante
 - Interferómetros Láser. Midiendo distancias con luz
- 3 La generación de las ondas
 - Cálculo de un sistema binario

Soluciones de la ecuación

Las ecuaciones de Einstein en el vacío, lejos de la fuente del campo son:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) H^{\alpha\beta} = 0$$

Sabemos que admite las soluciones de la forma

$$H^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha)$$

Lo cual implica

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0$$

La solución ondulatoria se propaga con un vector k^μ tipo nulo a la velocidad de la luz

Soluciones de la ecuación

Las ecuaciones de Einstein en el vacío, lejos de la fuente del campo son:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) H^{\alpha\beta} = 0$$

Sabemos que admite las soluciones de la forma

$$H^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha)$$

Lo cual implica

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0$$

La solución ondulatoria se propaga con un vector k^μ tipo nulo a la velocidad de la luz

Soluciones de la ecuación

Las ecuaciones de Einstein en el vacío, lejos de la fuente del campo son:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) H^{\alpha\beta} = 0$$

Sabemos que admite las soluciones de la forma

$$H^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha)$$

Lo cual implica

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0$$

La solución ondulatoria se propaga con un vector k^μ tipo nulo a la velocidad de la luz

El gauge TT

La condición del gauge de Lorentz $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ implica que

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0$$

Dado que aun tenemos el gauge residual $\square \varepsilon_\alpha = 0$ podemos elegir

$$\varepsilon_\alpha = B_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu)$$

Esto cambiará la amplitud de la onda en

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu$$

Se puede elegir B_α de manera de imponer

$$A^\alpha_\alpha = 0$$

$$A_{\alpha\beta} U^\beta = 0$$

El gauge TT

La condición del gauge de Lorentz $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ implica que

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0$$

Dado que aun tenemos el gauge residual $\square \varepsilon_\alpha = 0$ podemos elegir

$$\varepsilon_\alpha = B_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu)$$

Esto cambiará la amplitud de la onda en

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu$$

Se puede elegir B_α de manera de imponer

$$A^\alpha_\alpha = 0$$

$$A_{\alpha\beta} U^\beta = 0$$

El gauge TT

La condición del gauge de Lorentz $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ implica que

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0$$

Dado que aun tenemos el gauge residual $\square \varepsilon_\alpha = 0$ podemos elegir

$$\varepsilon_\alpha = B_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu)$$

Esto cambiará la amplitud de la onda en

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu$$

Se puede elegir B_α de manera de imponer

$$A^\alpha_\alpha = 0$$

$$A_{\alpha\beta} U^\beta = 0$$

El gauge TT

La condición del gauge de Lorentz $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ implica que

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0$$

Dado que aun tenemos el gauge residual $\square \varepsilon_\alpha = 0$ podemos elegir

$$\varepsilon_\alpha = B_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu)$$

Esto cambiará la amplitud de la onda en

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu$$

Se puede elegir B_α de manera de imponer

$$A^\alpha_\alpha = 0$$

$$A_{\alpha\beta} U^\beta = 0$$

Amplitud en el gauge TT

Si elegimos a U como el vector base tipo tiempo en Minkowski

$U^\beta = \delta_0^\beta$ implica $A_{\alpha 0} = 0$

Si la onda se propaga en la dirección z $A_{\alpha z} = 0$.

Esto implica que las únicas componentes no nulas son

$A_{xx}A_{yy}A_{xy} = A_{yx}$

En forma de matriz queda

$$A_{\alpha\beta}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Índice

- 1 **Formalismo teórico**
 - Gravedad linealizada
 - La propagación de ondas gravitacionales
 - El efecto de las ondas en partículas libres
- 2 **Detección de las ondas gravitacionales**
 - Un detector resonante
 - Interferómetros Láser. Midiendo distancias con luz
- 3 **La generación de las ondas**
 - Cálculo de un sistema binario

Efecto de la onda en el gauge TT

Consideremos una partícula libre en una región libre de ondas. Si elegimos el gauge TT la partícula obedece

$$\frac{d}{d\tau} U^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0$$

Como la partícula está en reposo inicialmente, el valor inicial de su aceleración es

$$\left(\frac{dU^\alpha}{d\tau}\right)_0 = -\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_0 h_{\beta 0} + \partial_0 h_{0\beta} - \partial_\beta h_{00})$$

Pero en el gauge TT $h_{\beta 0}^{TT}$ se anula por lo cual la aceleración inicial también. Lo mismo pasará en todos los instantes siguientes, por lo cual en este sistema la partícula permanece en la misma posición

Efecto de la onda en el gauge TT

Consideremos una partícula libre en una región libre de ondas. Si elegimos el gauge TT la partícula obedece

$$\frac{d}{d\tau} U^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0$$

Como la partícula está en reposo inicialmente, el valor inicial de su aceleración es

$$\left(\frac{dU^\alpha}{d\tau}\right)_0 = -\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_0 h_{\beta 0} + \partial_0 h_{0\beta} - \partial_\beta h_{00})$$

Pero en el gauge TT $h_{\beta 0}^{TT}$ se anula por lo cual la aceleración inicial también. Lo mismo pasará en todos los instantes siguientes, por lo cual en este sistema la partícula permanece en la misma posición

Interpretación

En el gauge TT la partícula siempre tiene las mismas coordenadas espaciales pero esto no significa que no se vea afectada.

Consideremos el caso de 2 partículas, una en el origen y otra en $x = \varepsilon y = z = 0$. La distancia propia es:

$$\begin{aligned}\Delta l &= \int |ds^2|^{1/2} = \int \left| g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right|^{1/2} = \int_0^\varepsilon |g_{xx}|^{1/2} dx \approx \\ &\approx |g_{xx}(x=0)|^{1/2} \varepsilon \approx \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(x=0) \right] \varepsilon\end{aligned}$$

Dado que h_{xx}^{TT} en general es distinto de 0, la distancia propia (a diferencia de la distancia de coordenadas) cambia con el tiempo

Interpretación

En el gauge TT la partícula siempre tiene las mismas coordenadas espaciales pero esto no significa que no se vea afectada.

Consideremos el caso de 2 partículas, una en el origen y otra en $x = \varepsilon y = z = 0$. La distancia propia es:

$$\begin{aligned}\Delta l &= \int |ds^2|^{1/2} = \int \left| g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right|^{1/2} = \int_0^\varepsilon |g_{xx}|^{1/2} dx \approx \\ &\approx |g_{xx}(x=0)|^{1/2} \varepsilon \approx \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(x=0) \right] \varepsilon\end{aligned}$$

Dado que h_{xx}^{TT} en general es distinto de 0, la distancia propia (a diferencia de la distancia de coordenadas) cambia con el tiempo

Interpretación

En el gauge TT la partícula siempre tiene las mismas coordenadas espaciales pero esto no significa que no se vea afectada.

Consideremos el caso de 2 partículas, una en el origen y otra en $x = \varepsilon y = z = 0$. La distancia propia es:

$$\begin{aligned}\Delta l &= \int |ds^2|^{1/2} = \int \left| g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right|^{1/2} = \int_0^\varepsilon |g_{xx}|^{1/2} dx \approx \\ &\approx |g_{xx}(x=0)|^{1/2} \varepsilon \approx \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(x=0) \right] \varepsilon\end{aligned}$$

Dado que h_{xx}^{TT} en general es distinto de 0, la distancia propia (a diferencia de la distancia de coordenadas) cambia con el tiempo

Índice

- 1 Formalismo teórico
 - Gravedad linealizada
 - La propagación de ondas gravitacionales
 - El efecto de las ondas en partículas libres
- 2 Detección de las ondas gravitacionales
 - Un detector resonante
 - Interferómetros Láser. Midiendo distancias con luz
- 3 La generación de las ondas
 - Cálculo de un sistema binario

Introducción

- El progreso que la astronomía ha realizado desde 1960 se debe mayoritariamente a las observaciones de distintas partes del espectro electromagnético
- Todas las regiones del mismo han sido exploradas al día de hoy
- Existe un espectro que no ha sido observado: el espectro de ondas gravitacionales
- Dado que las ondas electromagnéticas interactúan fuertemente con la materia, los haces son dispersados incontables veces antes de llegar a la tierra

Introducción

- El progreso que la astronomía ha realizado desde 1960 se debe mayoritariamente a las observaciones de distintas partes del espectro electromagnético
- Todas las regiones del mismo han sido exploradas al día de hoy
- Existe un espectro que no ha sido observado: el espectro de ondas gravitacionales
- Dado que las ondas electromagnéticas interactúan fuertemente con la materia, los haces son dispersados incontables veces antes de llegar a la tierra

Introducción

- El progreso que la astronomía ha realizado desde 1960 se debe mayoritariamente a las observaciones de distintas partes del espectro electromagnético
- Todas las regiones del mismo han sido exploradas al día de hoy
- Existe un espectro que no ha sido observado: el espectro de ondas gravitacionales
- Dado que las ondas electromagnéticas interactúan fuertemente con la materia, los haces son dispersados incontables veces antes de llegar a la tierra

Introducción

- El progreso que la astronomía ha realizado desde 1960 se debe mayoritariamente a las observaciones de distintas partes del espectro electromagnético
- Todas las regiones del mismo han sido exploradas al día de hoy
- Existe un espectro que no ha sido observado: el espectro de ondas gravitacionales
- Dado que las ondas electromagnéticas interactúan fuertemente con la materia, los haces son dispersados incontables veces antes de llegar a la tierra

Tipos de detectores

Las dificultades técnicas involucradas en la detección son enormes, dado que las amplitudes son extraordinariamente pequeñas.

Los detectores se dividen en dos tipos: Barras e interferómetros

- Detectores de masa resonante. responden ante ondas gravitacionales incidentes poniéndose a vibrar.
- Interferómetros láser. Utilizan un láser altamente estable para medir la distancia propia entre partículas libres. Ha producido los detectores más sensibles y es probable que produzca las primeras detecciones.

Tipos de detectores

Las dificultades técnicas involucradas en la detección son enormes, dado que las amplitudes son extraordinariamente pequeñas.

Los detectores se dividen en dos tipos: Barras e interferómetros

- Detectores de masa resonante. responden ante ondas gravitacionales incidentes poniéndose a vibrar.
- Interferómetros láser. Utilizan un láser altamente estable para medir la distancia propia entre partículas libres. Ha producido los detectores más sensibles y es probable que produzca las primeras detecciones.

Tipos de detectores

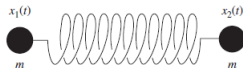
Las dificultades técnicas involucradas en la detección son enormes, dado que las amplitudes son extraordinariamente pequeñas.

Los detectores se dividen en dos tipos: Barras e interferómetros

- Detectores de masa resonante. responden ante ondas gravitacionales incidentes poniéndose a vibrar.
- Interferómetros láser. Utilizan un láser altamente estable para medir la distancia propia entre partículas libres. Ha producido los detectores más sensibles y es probable que produzca las primeras detecciones.

Un detector resonante

Consideremos dos partículas de masa m unidas por un resorte de constante k amortiguamiento ν y longitud en reposo l_0 .



Las ecuaciones que obedecen en el espacio plano son

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_2 + l_0) - \nu \frac{d}{dt}(x_1 - x_2)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 + l_0) - \nu \frac{d}{dt}(x_2 - x_1)$$

Ecuación de movimiento

Definimos el estiramiento ξ , frecuencia de resonancia ω_0 y tasa de frenado γ

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 \quad \omega_0^2 = 2k/m \quad \gamma = v/m$$

Con lo cual la ecuación queda la usual para un oscilador armónico amortiguado

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2\xi = 0$$

Ecuación de movimiento

Supongamos que el único movimiento es debido a la onda gravitacional. ($\xi = O(l_0 h_{\mu\nu}) \ll l_0$) entonces las velocidades de las masas serán pequeñas.

En el sistema localmente inercial

$$m \frac{d^2 x'^j}{dt'^2} = F'^j$$

Pero las coordenadas en el s.l.i. x'^α difieren de las TT solo por términos de orden $h_{\mu\nu}$.

$$m \frac{d^2 x^j}{dt^2} = F^j + O(|h_{\mu\nu}|^2)$$

Ecuación de movimiento

Supongamos que el único movimiento es debido a la onda gravitacional. ($\xi = O(l_0 h_{\mu\nu}) \ll l_0$) entonces las velocidades de las masas serán pequeñas.

En el sistema localmente inercial

$$m \frac{d^2 x'^j}{dt'^2} = F'^j$$

Pero las coordenadas en el s.l.i. x'^α difieren de las TT solo por términos de orden $h_{\mu\nu}$.

$$m \frac{d^2 x^j}{dt^2} = F^j + O(|h_{\mu\nu}|^2)$$

Distancia propia

El resorte ejercerá una fuerza proporcional a su longitud propia instantánea.

$$l(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [1 + h_{xx}^{TT}(t)]^{1/2} dx = [x_2(t) - x_1(t)] [1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t)] + O(h^2)$$

Teniendo en cuenta que $\xi = l - l_0$

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)h_{xx}^{TT} + O(h^2)$$

Restando las ecuaciones de movimiento obtenemos

$$\frac{d\xi}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = \frac{1}{2} l_0 \frac{dh_{xx}^{TT}}{dt^2}$$

Distancia propia

El resorte ejercerá una fuerza proporcional a su longitud propia instantánea.

$$l(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [1 + h_{xx}^{TT}(t)]^{1/2} dx = [x_2(t) - x_1(t)] [1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t)] + O(h^2)$$

Teniendo en cuenta que $\xi = l - l_0$

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 + \frac{1}{2} (x_2 - x_1) h_{xx}^{TT} + O(h^2)$$

Restando las ecuaciones de movimiento obtenemos

$$\frac{d\xi}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = \frac{1}{2} l_0 \frac{dh_{xx}^{TT}}{dt^2}$$

Distancia propia

El resorte ejercerá una fuerza proporcional a su longitud propia instantánea.

$$l(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [1 + h_{xx}^{TT}(t)]^{1/2} dx = [x_2(t) - x_1(t)] [1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t)] + O(h^2)$$

Teniendo en cuenta que $\xi = l - l_0$

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)h_{xx}^{TT} + O(h^2)$$

Restando las ecuaciones de movimiento obtenemos

$$\frac{d\xi}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = \frac{1}{2} l_0 \frac{dh_{xx}^{TT}}{dt^2}$$

Solución

Supongamos que la onda incidente tiene la forma

$$h_{xx}^{TT} = A \cos \Omega t$$

Entonces la solución estacionaria para ξ es

$$\xi = R \cos(\Omega t + \phi)$$

Con

$$R = \frac{\frac{1}{2} I_0 \Omega^2 A}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 \gamma^2)^{1/2}}$$

$$\tan \phi = 2\gamma\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2)$$

Solución

Supongamos que la onda incidente tiene la forma

$$h_{xx}^{TT} = A \cos \Omega t$$

Entonces la solución estacionaria para ξ es

$$\xi = R \cos(\Omega t + \phi)$$

Con

$$R = \frac{\frac{1}{2} I_0 \Omega^2 A}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 \gamma^2)^{1/2}}$$

$$\tan \phi = 2\gamma\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2)$$

Solución

El valor medio de la energía sobre un periodo $2\pi/\Omega$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8} m R^2 (\omega_0^2 - \Omega^2)$$

y la amplitud de resonancia

$$R_{reso} = \frac{1}{4} I_0 A(\Omega/\gamma)$$

Dificultades del método

- Para un detector típico de este estilo $l_0 = 1,5m$ $\omega_0 = 10^4 s^{-1}$
- Esto significa que una onda gravitacional fuerte de $A = 10^{-20}$ excitará la barra en un orden de energía de $10^{-20} J$
- La amplitud de resonancia es de solo $10^{-15} m$! aproximadamente el diámetro de un núcleo atómico
- Otro problema con la detección es el ruido térmico. Se inducirán vibraciones aleatorias con una energía kT . Los detectores trabajan temperaturas de alrededor de 3K
- Cualquier detector basado en resonancia no puede ser mas grande que unos metros de largo, y eso limita la acción de la fuerza gravitacional.
- Los interferómetros láser son construidos en escalas de kilómetros por lo cual poseen una sensibilidad mayor.

Dificultades del método

- Para un detector típico de este estilo $l_0 = 1,5m$ $\omega_0 = 10^4 s^{-1}$
- Esto significa que una onda gravitacional fuerte de $A = 10^{-20}$ excitará la barra en un orden de energía de $10^{-20} J$
- La amplitud de resonancia es de solo $10^{-15} m$!
aproximadamente el diámetro de un núcleo atómico
- Otro problema con la detección es el ruido térmico. Se inducirán vibraciones aleatorias con una energía kT . Los detectores trabajan temperaturas de alrededor de 3K
- Cualquier detector basado en resonancia no puede ser mas grande que unos metros de largo, y eso limita la acción de la fuerza gravitacional.
- Los interferómetros láser son contruidos en escalas de kilómetros por lo cual poseen una sensibilidad mayor.

Dificultades del método

- Para un detector típico de este estilo $l_0 = 1,5m$ $\omega_0 = 10^4 s^{-1}$
- Esto significa que una onda gravitacional fuerte de $A = 10^{-20}$ excitará la barra en un orden de energía de $10^{-20} J$
- La amplitud de resonancia es de solo $10^{-15} m$!
aproximadamente el diámetro de un núcleo atómico
- Otro problema con la detección es el ruido térmico. Se inducirán vibraciones aleatorias con una energía kT . Los detectores trabajan temperaturas de alrededor de 3K
- Cualquier detector basado en resonancia no puede ser mas grande que unos metros de largo, y eso limita la acción de la fuerza gravitacional.
- Los interferómetros láser son contruidos en escalas de kilómetros por lo cual poseen una sensibilidad mayor.

Dificultades del método

- Para un detector típico de este estilo $l_0 = 1,5m$ $\omega_0 = 10^4 s^{-1}$
- Esto significa que una onda gravitacional fuerte de $A = 10^{-20}$ excitará la barra en un orden de energía de $10^{-20} J$
- La amplitud de resonancia es de solo $10^{-15} m$!
aproximadamente el diámetro de un núcleo atómico
- Otro problema con la detección es el ruido térmico. Se inducirán vibraciones aleatorias con una energía kT . Los detectores trabajan temperaturas de alrededor de 3K
- Cualquier detector basado en resonancia no puede ser mas grande que unos metros de largo, y eso limita la acción de la fuerza gravitacional.
- Los interferómetros láser son construidos en escalas de kilómetros por lo cual poseen una sensibilidad mayor.

Dificultades del método

- Para un detector típico de este estilo $l_0 = 1,5m$ $\omega_0 = 10^4 s^{-1}$
- Esto significa que una onda gravitacional fuerte de $A = 10^{-20}$ excitará la barra en un orden de energía de $10^{-20} J$
- La amplitud de resonancia es de solo $10^{-15} m$!
aproximadamente el diámetro de un núcleo atómico
- Otro problema con la detección es el ruido térmico. Se inducirán vibraciones aleatorias con una energía kT . Los detectores trabajan temperaturas de alrededor de 3K
- Cualquier detector basado en resonancia no puede ser mas grande que unos metros de largo, y eso limita la acción de la fuerza gravitacional.
- Los interferómetros láser son construidos en escalas de kilómetros por lo cual poseen una sensibilidad mayor.

Dificultades del método

- Para un detector típico de este estilo $l_0 = 1,5m$ $\omega_0 = 10^4 s^{-1}$
- Esto significa que una onda gravitacional fuerte de $A = 10^{-20}$ excitará la barra en un orden de energía de $10^{-20} J$
- La amplitud de resonancia es de solo $10^{-15} m$!
aproximadamente el diámetro de un núcleo atómico
- Otro problema con la detección es el ruido térmico. Se inducirán vibraciones aleatorias con una energía kT . Los detectores trabajan temperaturas de alrededor de 3K
- Cualquier detector basado en resonancia no puede ser mas grande que unos metros de largo, y eso limita la acción de la fuerza gravitacional.
- Los interferómetros láser son construidos en escalas de kilómetros por lo cual poseen una sensibilidad mayor.

Índice

- 1 Formalismo teórico
 - Gravedad linealizada
 - La propagación de ondas gravitacionales
 - El efecto de las ondas en partículas libres
- 2 Detección de las ondas gravitacionales
 - Un detector resonante
 - Interferómetros Láser. Midiendo distancias con luz
- 3 La generación de las ondas
 - Cálculo de un sistema binario

Midiendo distancias con luz en espacios curvos

Consideremos por simplicidad una onda viajando en la dirección z con polarización $+$. La métrica estará dada por

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + h_+]dx^2 + [1 - h_+]dy^2 + dz^2$$

El fotón viajando a lo largo del eje x se mueve en una línea de mundo nula $ds^2 = 0$ con $dy = dz = 0$ lo cual implica que tiene una velocidad efectiva

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1 + h_+}$$

Un fotón emitido a tiempo t_{start} alcanza la coordenada x en un tiempo $t(x)$. cuando llega al extremo $x = L$

$$t_{far} = t_{start} + \int_0^L [1 + h_+(t(x))]^{1/2} dx$$

Midiendo distancias con luz en espacios curvos

Consideremos por simplicidad una onda viajando en la dirección z con polarización $+$. La métrica estará dada por

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + h_+]dx^2 + [1 - h_+]dy^2 + dz^2$$

El fotón viajando a lo largo del eje x se mueve en una línea de mundo nula $ds^2 = 0$ con $dy = dz = 0$ lo cual implica que tiene una velocidad efectiva

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1 + h_+}$$

Un fotón emitido a tiempo t_{start} alcanza la coordenada x en un tiempo $t(x)$. cuando llega al extremo $x = L$

$$t_{far} = t_{start} + \int_0^L [1 + h_+(t(x))]^{1/2} dx$$

Midiendo distancias con luz en espacios curvos

Consideremos por simplicidad una onda viajando en la dirección z con polarización $+$. La métrica estará dada por

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + h_+]dx^2 + [1 - h_+]dy^2 + dz^2$$

El fotón viajando a lo largo del eje x se mueve en una línea de mundo nula $ds^2 = 0$ con $dy = dz = 0$ lo cual implica que tiene una velocidad efectiva

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1 + h_+}$$

Un fotón emitido a tiempo t_{start} alcanza la coordenada x en un tiempo $t(x)$. cuando llega al extremo $x = L$

$$t_{far} = t_{start} + \int_0^L [1 + h_+(t(x))]^{1/2} dx$$

Midiendo distancias con luz en espacios curvos

- La función que queremos hallar $t(x)$ está dentro de la integral
- Donde $t(x)$ aparece en el argumento de h_+ podemos usar su valor de espacio-tiempo plano ya que las correcciones debidas a h_+ solo traerán términos de orden cuadrático
- Entonces insertamos $t(x) = t_{start} + x$ dentro de la integral y expandimos a primer orden.

$$t_{far} = t_{start} + L + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{start} + x) dx$$

Midiendo distancias con luz en espacios curvos

Teniendo en cuenta también el viaje de regreso

$$t_{\text{return}} = t_{\text{start}} + 2L + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{\text{start}} + x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{\text{start}} + L + x) dx$$

Podemos utilizar esta ecuación para medir la métrica de la onda

$$\frac{dt_{\text{return}}}{dt_{\text{start}}} = 1 + \frac{1}{2} [h_+(t_{\text{start}} + 2L) - h_+(t_{\text{start}})]$$

Si la señal enviada no es un único fotón sino una onda electromagnética con cierta frecuencia ν , la derivada del tiempo que les toma a los rayos regresar es el cambio en la frecuencia de la onda electromagnética

$$\frac{dt_{\text{return}}}{dt_{\text{start}}} = \frac{\nu_{\text{return}}}{\nu_{\text{start}}}$$

Midiendo distancias con luz en espacios curvos

Teniendo en cuenta también el viaje de regreso

$$t_{\text{return}} = t_{\text{start}} + 2L + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{\text{start}} + x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{\text{start}} + L + x) dx$$

Podemos utilizar esta ecuación para medir la métrica de la onda

$$\frac{dt_{\text{return}}}{dt_{\text{start}}} = 1 + \frac{1}{2} [h_+(t_{\text{start}} + 2L) - h_+(t_{\text{start}})]$$

Si la señal enviada no es un único fotón sino una onda electromagnética con cierta frecuencia ν , la derivada del tiempo que les toma a los rayos regresar es el cambio en la frecuencia de la onda electromagnética

$$\frac{dt_{\text{return}}}{dt_{\text{start}}} = \frac{\nu_{\text{return}}}{\nu_{\text{start}}}$$

Midiendo distancias con luz en espacios curvos

Teniendo en cuenta también el viaje de regreso

$$t_{\text{return}} = t_{\text{start}} + 2L + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{\text{start}} + x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{\text{start}} + L + x) dx$$

Podemos utilizar esta ecuación para medir la métrica de la onda

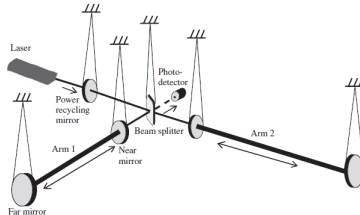
$$\frac{dt_{\text{return}}}{dt_{\text{start}}} = 1 + \frac{1}{2} [h_+(t_{\text{start}} + 2L) - h_+(t_{\text{start}})]$$

Si la señal enviada no es un único fotón sino una onda electromagnética con cierta frecuencia ν , la derivada del tiempo que les toma a los rayos regresar es el cambio en la frecuencia de la onda electromagnética

$$\frac{dt_{\text{return}}}{dt_{\text{start}}} = \frac{\nu_{\text{return}}}{\nu_{\text{start}}}$$

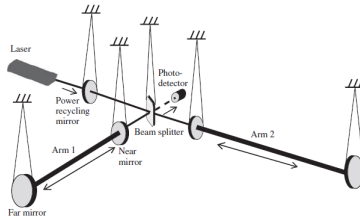
Interferómetro Láser

- La luz de un láser estable pasa por un separador de haz que envía la mitad del haz en una dirección y la otra mitad en una dirección perpendicular
- Los haces tienen fases correlacionadas, luego de ser refractados por los espejos se vuelven a juntar para formar un patrón de interferencia
- El patrón de interferencia nos permite detectar la onda



Interferómetro Láser

- La luz de un láser estable pasa por un separador de haz que envía la mitad del haz en una dirección y la otra mitad en una dirección perpendicular
- Los haces tienen fases correlacionadas, luego de ser refractados por los espejos se vuelven a juntar para formar un patrón de interferencia
- El patrón de interferencia nos permite detectar la onda



Ventajas y dificultades

- Los interferómetros son hoy en día los detectores más sensibles
- Probablemente sean los instrumentos que proporcionen las primeras medidas de ondas gravitacionales
- Las principales ventajas sobre los detectores de barras son: su sensibilidad puede ser aumentada sin entrar en problemas de materiales
- Dado que no dependen en una frecuencia resonante de vibración operan en un rango amplio de frecuencias.

Ventajas y dificultades

- Los interferómetros son hoy en día los detectores más sensibles
- Probablemente sean los instrumentos que proporcionen las primeras medidas de ondas gravitacionales
- Las principales ventajas sobre los detectores de barras son: su sensibilidad puede ser aumentada sin entrar en problemas de materiales
- Dado que no dependen en una frecuencia resonante de vibración operan en un rango amplio de frecuencias.

Ventajas y dificultades

- Los interferómetros son hoy en día los detectores más sensibles
- Probablemente sean los instrumentos que proporcionen las primeras medidas de ondas gravitacionales
- Las principales ventajas sobre los detectores de barras son: su sensibilidad puede ser aumentada sin entrar en problemas de materiales
- Dado que no dependen en una frecuencia resonante de vibración operan en un rango amplio de frecuencias.

Índice

- 1 Formalismo teórico
 - Gravedad linealizada
 - La propagación de ondas gravitacionales
 - El efecto de las ondas en partículas libres
- 2 Detección de las ondas gravitacionales
 - Un detector resonante
 - Interferómetros Láser. Midiendo distancias con luz
- 3 La generación de las ondas
 - Cálculo de un sistema binario

Ecuación en presencia de fuentes

La ecuación de Einstein linealizada en el gauge de Lorentz nos da una ecuación de onda para cada componente

$$\square H_{\mu\nu} = -16\pi G_n T_{\mu\nu}$$

La solución de esta ecuación por medio de la función de Green para el operador D'Alambertiano es

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma)$$

$$H_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G_n \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4 y$$

Donde

$$G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi \|x - y\|} \delta[\|x - y\| - (x^0 - y^0)] \Theta(x^0 - y^0)$$

Ecuación en presencia de fuentes

La ecuación de Einstein linealizada en el gauge de Lorentz nos da una ecuación de onda para cada componente

$$\square H_{\mu\nu} = -16\pi G_n T_{\mu\nu}$$

La solución de esta ecuación por medio de la función de Green para el operador D'Alambertiano es

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma)$$

$$H_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G_n \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4y$$

Donde

$$G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi \|x - y\|} \delta[\|x - y\| - (x^0 - y^0)] \Theta(x^0 - y^0)$$

Ecuación en presencia de fuentes

La ecuación de Einstein linealizada en el gauge de Lorentz nos da una ecuación de onda para cada componente

$$\square H_{\mu\nu} = -16\pi G_n T_{\mu\nu}$$

La solución de esta ecuación por medio de la función de Green para el operador D'Alambertiano es

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma)$$

$$H_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G_n \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4y$$

Donde

$$G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \delta[\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - (x^0 - y^0)] \Theta(x^0 - y^0)$$

Ecuación en presencia de fuentes

Esto implica

$$H_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G_n \int \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} T_{\mu\nu}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \mathbf{y}) d^3y$$

Donde $t = x^0$. Se utiliza el término “tiempo retardado” para referirse a la cantidad $t_r = t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

Si se realiza una transformación de Fourier para las componentes de la métrica

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} \phi(t, \mathbf{x}) dt$$

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) d\omega$$

Ecuación en presencia de fuentes

Esto implica

$$H_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G_n \int \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} T_{\mu\nu}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \mathbf{y}) d^3y$$

Donde $t = x^0$. Se utiliza el término “tiempo retardado” para referirse a la cantidad $t_r = t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

Si se realiza una transformación de Fourier para las componentes de la métrica

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} \phi(t, \mathbf{x}) dt$$

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) d\omega$$

Ecuación en presencia de fuentes

Nos queda:

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} H_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) dt \\
 &= \frac{4G_n}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} T_{\mu\nu}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \mathbf{y}) dt d^3y \\
 &= \frac{4G_n}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t_r} e^{i\omega\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dt_r d^3y \\
 &= 4G_n \int e^{i\omega\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3y
 \end{aligned}$$

Ecuación en presencia de fuentes

Si ahora realizamos las aproximaciones de campo lejano y velocidades no relativistas $\frac{e^{i\omega\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}$ puede ser reemplazado por $\frac{e^{i\omega r}}{r}$. Esto nos deja

$$\tilde{H}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G_n \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})$$

No es necesario calcular todas las componentes de $\tilde{H}_{\mu\nu}$ ya que la condición del gauge de Lorentz $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$ implica en el espacio de Fourier

$$\tilde{H}^{0\nu} = -\frac{i}{\omega} \partial_i \tilde{H}^{i\nu}$$

La integral sobre las componentes espaciales de $\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})$ puede escribirse de la siguiente manera integrando por partes

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) = \int d^3y \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) - \int d^3y y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj})$$

Ecuación en presencia de fuentes

Si ahora realizamos las aproximaciones de campo lejano y velocidades no relativistas $\frac{e^{i\omega\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}$ puede ser reemplazado por $\frac{e^{i\omega r}}{r}$. Esto nos deja

$$\tilde{H}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G_n \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})$$

No es necesario calcular todas las componentes de $\tilde{H}_{\mu\nu}$ ya que la condición del gauge de Lorentz $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$ implica en el espacio de Fourier

$$\tilde{H}^{0\nu} = -\frac{i}{\omega} \partial_i \tilde{H}^{i\nu}$$

La integral sobre las componentes espaciales de $\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})$ puede escribirse de la siguiente manera integrando por partes

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) = \int d^3y \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) - \int d^3y y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj})$$

Ecuación en presencia de fuentes

El primer término desaparece pues integramos sobre todo el espacio mientras que el segundo se relaciona con \tilde{T}^{0j} por la versión en el espacio de Fourier de la conservación del tensor de energía impulso $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

$$-\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, y) &= i\omega \int y^i \tilde{T}^{0j} d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2} \int (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2} \int [\partial_l (y^i y^j \tilde{T}^{0l}) - y^i y^j (\partial_l \tilde{T}^{0l})] d^3y \\ &= -\frac{\omega^2}{2} \int y^i y^j \tilde{T}^{00} d^3y \end{aligned}$$

Ecuación en presencia de fuentes

El primer término desaparece pues integramos sobre todo el espacio mientras que el segundo se relaciona con \tilde{T}^{0j} por la versión en el espacio de Fourier de la conservación del tensor de energía impulso $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

$$-\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) &= i\omega \int y^i \tilde{T}^{0j} d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2} \int (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2} \int [\partial_l (y^i y^j \tilde{T}^{0l}) - y^i y^j (\partial_l \tilde{T}^{0l})] d^3y \\ &= -\frac{\omega^2}{2} \int y^i y^j \tilde{T}^{00} d^3y \end{aligned}$$

Ecuación en presencia de fuentes

Se suele definir el tensor momento cuadrupolar de la fuente

$$I_{ij}(t) = \int y^i y^j T^{00}(t, \mathbf{y}) d^3 y$$

En términos de la transformada de Fourier del momento cuadrupolar la solución toma la forma compacta

$$\tilde{H}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -2 G_n \omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega)$$

Podemos transformar inversamente para obtener la fórmula cuadrupolar:

$$H_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2 G_n}{r} \frac{d^2 I_{ij}(t_r)}{dt^2}$$

Ecuación en presencia de fuentes

Se suele definir el tensor momento cuadrupolar de la fuente

$$I_{ij}(t) = \int y^i y^j T^{00}(t, \mathbf{y}) d^3 y$$

En términos de la transformada de Fourier del momento cuadrupolar la solución toma la forma compacta

$$\tilde{H}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -2G_n \omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega)$$

Podemos transformar inversamente para obtener la fórmula cuadrupolar:

$$H_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G_n}{r} \frac{d^2 I_{ij}(t_r)}{dt^2}$$

Ecuación en presencia de fuentes

Se suele definir el tensor momento cuadrupolar de la fuente

$$I_{ij}(t) = \int y^i y^j T^{00}(t, \mathbf{y}) d^3y$$

En términos de la transformada de Fourier del momento cuadrupolar la solución toma la forma compacta

$$\tilde{H}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -2G_n \omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega)$$

Podemos transformar inversamente para obtener la fórmula cuadrupolar:

$$H_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G_n}{r} \frac{d^2 I_{ij}(t_r)}{dt^2}$$

Diferencia con la radiación electromagnética

- La onda gravitacional es proporcional a la derivada segunda del momento cuadrupolar de la densidad de energía
- La contribución dominante para la radiación EM proviene del cambio en el momento dipolar de la densidad de carga.
- Un cambio en el momento dipolar corresponde al movimiento del centro de densidad de carga en el caso del EM y densidad de energía en el caso de la gravitación.
- Mientras que no hay nada que impida que el centro de carga de un objeto oscile, una oscilación en el centro de masa de un sistema aislado viola la conservación del impulso
- El momento cuadrupolar, en general es menor que el momento dipolar y por esta razón la radiación gravitacional es típicamente mas débil que la EM.

Diferencia con la radiación electromagnética

- La onda gravitacional es proporcional a la derivada segunda del momento cuadrupolar de la densidad de energía
- La contribución dominante para la radiación EM proviene del cambio en el momento dipolar de la densidad de carga.
- Un cambio en el momento dipolar corresponde al movimiento del centro de densidad de carga en el caso del EM y densidad de energía en el caso de la gravitación.
- Mientras que no hay nada que impida que el centro de carga de un objeto oscile, una oscilación en el centro de masa de un sistema aislado viola la conservación del impulso
- El momento cuadrupolar, en general es menor que el momento dipolar y por esta razón la radiación gravitacional es típicamente mas débil que la EM.

Diferencia con la radiación electromagnética

- La onda gravitacional es proporcional a la derivada segunda del momento cuadrupolar de la densidad de energía
- La contribución dominante para la radiación EM proviene del cambio en el momento dipolar de la densidad de carga.
- Un cambio en el momento dipolar corresponde al movimiento del centro de densidad de carga en el caso del EM y densidad de energía en el caso de la gravitación.
- Mientras que no hay nada que impida que el centro de carga de un objeto oscile, una oscilación en el centro de masa de un sistema aislado viola la conservación del impulso
- El momento cuadrupolar, en general es menor que el momento dipolar y por esta razón la radiación gravitacional es típicamente mas débil que la EM.

Diferencia con la radiación electromagnética

- La onda gravitacional es proporcional a la derivada segunda del momento cuadrupolar de la densidad de energía
- La contribución dominante para la radiación EM proviene del cambio en el momento dipolar de la densidad de carga.
- Un cambio en el momento dipolar corresponde al movimiento del centro de densidad de carga en el caso del EM y densidad de energía en el caso de la gravitación.
- Mientras que no hay nada que impida que el centro de carga de un objeto oscile, una oscilación en el centro de masa de un sistema aislado viola la conservación del impulso
- El momento cuadrupolar, en general es menor que el momento dipolar y por esta razón la radiación gravitacional es típicamente mas débil que la EM.

Diferencia con la radiación electromagnética

- La onda gravitacional es proporcional a la derivada segunda del momento cuadrupolar de la densidad de energía
- La contribución dominante para la radiación EM proviene del cambio en el momento dipolar de la densidad de carga.
- Un cambio en el momento dipolar corresponde al movimiento del centro de densidad de carga en el caso del EM y densidad de energía en el caso de la gravitación.
- Mientras que no hay nada que impida que el centro de carga de un objeto oscile, una oscilación en el centro de masa de un sistema aislado viola la conservación del impulso
- El momento cuadrupolar, en general es menor que el momento dipolar y por esta razón la radiación gravitacional es típicamente mas débil que la EM.

Cálculo para el sistema binario

Supongamos que poseen una órbita circular a una distancia R de su centro de masa. En la aproximación Newtoniana

$$v = \left(\frac{G_n M}{4R} \right)^{1/2}$$

El tiempo que demoran en completar una vuelta es $T = \frac{2\pi R}{v}$ y su frecuencia angular $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{G_n M}{4R^3}\right)^{1/2}$

El recorrido explícito de la estrella λ será

$$x_a^1 = R \cos \Omega t \quad x_a^2 = R \sin \Omega t$$

y la estrella B

$$x_b^1 = -R \cos \Omega t \quad x_b^2 = -R \sin \Omega t$$

Cálculo para el sistema binario

Supongamos que poseen una órbita circular a una distancia R de su centro de masa. En la aproximación Newtoniana

$$v = \left(\frac{G_n M}{4R} \right)^{1/2}$$

El tiempo que demoran en completar una vuelta es $T = \frac{2\pi R}{v}$ y su frecuencia angular $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{G_n M}{4R^3} \right)^{1/2}$

El recorrido explícito de la estrella A será

$$x_a^1 = R \cos \Omega t \quad x_a^2 = R \sin \Omega t$$

y la estrella B

$$x_b^1 = -R \cos \Omega t \quad x_b^2 = -R \sin \Omega t$$

Cálculo para el sistema binario

La densidad de energía será

$$T^{00}(t, x) = M\delta(x^3)[\delta(x^1 - R\cos\Omega t)\delta(x^2 - R\sin\Omega t) + \delta(x^1 + R\cos\Omega t)\delta(x^2 + R\sin\Omega t)]$$

La presencia de funciones delta de Dirac nos permite integrar fácilmente los momentos cuadrupolares para obtener:

$$I_{11} = 2MR^2 \cos^2 \Omega t = MR^2(1 + \cos 2\Omega t)$$

$$I_{22} = 2MR^2 \sin^2 \Omega t = MR^2(1 - \cos 2\Omega t)$$

$$I_{12} = I_{21} = 2MR^2(\cos\Omega t)(\sin\Omega t) = MR^2 \sin 2\Omega t$$

$$I_{i3} = 0$$

Cálculo para el sistema binario

La densidad de energía será

$$T^{00}(t, \mathbf{x}) = M\delta(x^3)[\delta(x^1 - R\cos\Omega t)\delta(x^2 - R\sin\Omega t) + \delta(x^1 + R\cos\Omega t)\delta(x^2 + R\sin\Omega t)]$$

La presencia de funciones delta de Dirac nos permite integrar fácilmente los momentos cuadrupolares para obtener:

$$I_{11} = 2MR^2 \cos^2 \Omega t = MR^2(1 + \cos 2\Omega t)$$

$$I_{22} = 2MR^2 \sin^2 \Omega t = MR^2(1 - \cos 2\Omega t)$$

$$I_{12} = I_{21} = 2MR^2 (\cos \Omega t)(\sin \Omega t) = MR^2 \sin 2\Omega t$$

$$I_{i3} = 0$$

Cálculo para el sistema binario

Con estos resultados podemos calcular las componentes de la métrica

$$H_{ij}(t, x) = \frac{8G_n M}{r} \Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las componentes restantes se pueden hallar exigiendo la condición del gauge de Lorentz.

FIN

FIN

