

Ondas gravitacionales: creación y detección

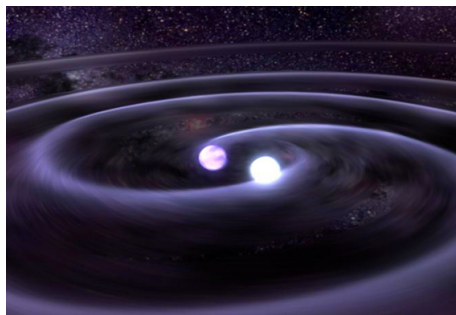
Federico Marcos

Departamento de Física, Universidad Nacional de La Plata

11 de febrero de 2014

Resumen

En el presente trabajo se estudia el formalismo de la teoría de Einstein de la relatividad general que conduce a la predicción de ondas gravitacionales, así como su descripción y efecto sobre la materia. Luego se detallan los posibles dispositivos de detección y las actuales dificultades de los mismos. Por ultimo se realiza el cálculo de la métrica creada por un sistema de estrellas binarias en la aproximación cuadrupolar.



Índice

1. Introducción	2
2. Formalismo teórico	2
2.1. Gravedad linealizada	2
2.2. La propagación de ondas gravitacionales	4
2.3. El efecto de las ondas en partículas libres	5
3. Detección de las ondas gravitacionales	6
3.1. Un detector resonante	6
3.2. Interferómetros Láser. Midiendo distancias con luz	8
4. La generación de ondas gravitacionales	9

1. Introducción

Las ondas gravitacionales son perturbaciones en la curvatura del espacio-tiempo que se propagan como ondas, alejándose de su fuente. Predichas por Albert Einstein en 1916 basado en su teoría de la relatividad general, las ondas gravitacionales transportan energía mediante radiación gravitacional. Las fuentes de ondas gravitacionales pueden incluir sistemas binarios, estrellas de neutrones o agujeros negros entre otros. Aunque no existe hasta el día de hoy evidencia directa de radiación gravitacional, contamos con evidencia indirecta; por ejemplo el premio Nobel en Física de 1993 fue concedido por las mediciones del sistema binario Hulse-Taylor que sugiere que las ondas gravitacionales son más que simples anomalías matemáticas.

2. Formalismo teórico

2.1. Gravedad linealizada

Dada una métrica $g_{\mu\nu}$ se propone escribirla como la suma de una métrica de fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$ y una pequeña perturbación $h_{\mu\nu}$ en la misma desarrollando a primer orden en h

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

la métrica inversa será

$$g^{-1} = (\bar{g} + h)^{-1} = ((1 + h \bar{g}^{-1}) \bar{g})^{-1} = \bar{g}^{-1} (1 - h \bar{g}^{-1} + O(h^2))$$

obtenemos

$$g^{-1} = \bar{g}^{-1} - \bar{g}^{-1} h \bar{g}^{-1} + O(h^2)$$

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma} + O(h^2)$$

vemos que h se comporta como un campo en la métrica de “fondo” y llamaremos $\bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma} = h^{\mu\nu}$ podemos calcular los símbolos de Christoffel a primer orden en h

$$\Gamma_{\rho;\mu\nu} = \bar{\Gamma}_{\rho;\mu\nu} + \frac{1}{2} (-\partial_\rho h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma;\mu\nu} = (\bar{g}^{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma}) \left(\bar{\Gamma}_{\rho;\mu\nu} + \frac{1}{2} (-\partial_\rho h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu}) \right)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho - h^{\rho\sigma}\bar{\Gamma}_{\sigma;\mu\nu} + \bar{g}^{\rho\sigma}\frac{1}{2}(-\partial_\rho h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu}) + O(h^2)$$

Utilizando que $\partial_\sigma h_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\sigma h_{\mu\nu} + \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\epsilon h_{\epsilon\nu} + \bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^\epsilon h_{\mu\epsilon}$ llegamos a:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{2} (-\bar{\nabla}_\rho h_{\mu\nu} + \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\rho} + \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\rho})$$

Teniendo las conexiones, podemos calcular el tensor de curvatura y Ricci a primer orden en h

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] + O(h^2)$$

con

$$L_{\mu\nu}[h] = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\rho} + \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\rho} - \bar{\nabla}^2 h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu h_\rho^\rho)$$

Podemos calcular el escalar de Ricci: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = (\bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2)) (\bar{R}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] + O(h^2))$

$$R = \bar{R} + L_\rho^\rho[h] - \bar{R}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

donde explícitamente:

$$L_\rho^\rho[h] = \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma h_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^2 h_\rho^\rho$$

con esto podemos calcular el tensor de Einstein $E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$

$$E_{\mu\nu} = \bar{E}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[h] - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} (L_\rho^\rho[h] - \bar{R}^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2} \bar{R} h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

Es útil introducir la traza transversa de $h_{\mu\nu}$: $H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{h_\rho^\rho}{2} \bar{g}_{\mu\nu}$ y su relación inversa $h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{H_\rho^\rho}{D-2} \bar{g}_{\mu\nu}$

$$L_{\mu\nu}[h] = L_{\mu\nu}[H] + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H_\sigma^\sigma + \frac{1}{2(D-2)} \bar{\nabla}^2 H_\rho^\rho \bar{g}_{\mu\nu}$$

Finalmente nos queda para el tensor de Einstein

$$E_{\mu\nu} = \bar{E}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}[H] + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H_\sigma^\sigma - \frac{\bar{R}}{2} H_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} (\bar{R}^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}) + O(h^2)$$

el término lineal en h puede expresarse explícitamente como:

$$E_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\mu H_{\nu\rho} + \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\nu H_{\mu\rho} - \bar{\nabla}^2 H_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H_\rho^\rho + \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu H_\sigma^\sigma - \bar{R} H_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu} (\bar{R}^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}))$$

simplificamos el conmutador de derivadas covariantes para finalmente llegar a la expresión para la parte del tensor de Einstein lineal en h

$$E_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_\mu (\bar{\nabla}^\rho H_{\nu\rho}) + \bar{\nabla}_\nu (\bar{\nabla}^\rho H_{\mu\rho}) + \bar{R}_\mu^\sigma H_{\nu\sigma} + \bar{R}_\nu^\sigma H_{\mu\sigma} - 2\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma} H^{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^2 H_{\mu\nu} - \bar{R} H_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu} (\bar{R}^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} - \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma H_{\rho\sigma}))$$

Si tenemos en cuenta la ecuación de Einstein $E_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$ en el vacío $T_{\mu\nu} = 0$ y la solución para g es $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Pero si pensamos que existe un $T_{\mu\nu}$ pequeño que sea la fuente de la perturbación, entonces $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ y podremos aplicar la teoría que hemos desarrollado previamente. la ecuación de Einstein a primer orden será

$$E_{\mu\nu}^{(1)}[h] = \kappa^2 T_{\mu\nu}|_\eta$$

Dado que en ausencia de la perturbación, nuestra métrica es la de Minkowski la expresión anterior se simplifica considerablemente:

$$E_{\mu\nu}^{(1)}[H] = \frac{1}{2} (-\square H_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\rho H_{\nu\rho} + \partial_\nu \partial^\rho H_{\mu\rho} - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma H_{\rho\sigma}) = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Ahora bien, aun tenemos a nuestra disposición la invarianza frente a reparametrizaciones de la ecuación de Einstein. Si efectuamos una transformación de la forma $x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x)$ con $J_\nu^\mu = \partial_\nu x'^\mu = \delta_\nu^\mu - \partial_\nu \epsilon^\mu(x)$ exigiendo $|\partial_\nu \epsilon^\mu| \ll 1$ estudiemos el cambio en la métrica debido a esta transformación.

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} + O(\epsilon^2) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu$$

entonces tenemos que

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu$$

Por lo cual verificamos que si exigimos que la transformación sea pequeña, seguiremos estando en la condición $|h| \ll 1$. Si calculamos ahora como transforma el tensor de Riemann frente a la transformación de gauge

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha \partial_\mu h_{\beta\nu})$$

vemos que permanece invariante frente a $h'_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu$. En cuanto a la traza transversa H tenemos que

$$H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \epsilon_\rho$$

Dado que tenemos la libertad de elegir el gauge vemos que si exigimos $\partial^\nu H_{\mu\nu} = 0$ (gauge de Lorentz) la ecuación de Einstein se simplifica considerablemente

$$\square H_{\mu\nu} = -2\kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Es importante verificar que efectivamente podemos elegir una transformación tal que la condición $\partial^\nu H_{\mu\nu} = 0$ sea válida. En general tomando la divergencia obtenemos:

$$\partial^\nu H'_{\mu\nu} = \partial^\nu H_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\nu \epsilon_\nu + \square \epsilon_\mu - \partial_\mu \partial^\nu \epsilon_\nu$$

dado que la ecuación de ondas con fuente $\partial^\nu H_{\mu\nu} + \square \epsilon_\mu = 0$ siempre tiene solución podemos exigir el gauge de Lorentz con tranquilidad. Incluso, cualquier transformación residual tal que $\square \epsilon_\mu = 0$ dejará la ecuación $\partial^\nu H_{\mu\nu} = 0$ invariante. Utilizaremos esto mas adelante para simplificar las cuentas.

2.2. La propagación de ondas gravitacionales

Las ecuaciones de Einstein en el vacío, lejos de la fuente del campo son:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) H^{\alpha\beta} = 0 \quad (1)$$

Sabemos que la ecuación de ondas anterior admite las soluciones de la forma

$$H^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha)$$

lo cual implica utilizando (1)

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0$$

la solución ondulatoria se propaga con un vector k^μ tipo nulo a la velocidad de la luz. Las ecuaciones de Einstein solo

asumen la forma simple 1 si imponemos la condición del gauge de Lorentz $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ lo cual implica que $A^{\alpha\beta} k_\beta = 0$

Dado que aun tenemos la transformación de gauge residual $\square \epsilon_\alpha = 0$ a nuestra disposición podemos utilizarla para simplificar aún mas el problema. Si elegimos una solución de la forma $\epsilon_\alpha = B_\alpha \exp(i k_\mu x^\mu)$ esto cambiará la amplitud de la onda en

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - i B_\alpha k_\beta - i B_\beta k_\alpha + i \eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu$$

se puede elegir B_α de manera de imponer 2 restricciones mas:

$$A_\alpha^\alpha = 0$$

y

$$A_{\alpha\beta} U^\beta = 0$$

donde U es una 4-velocidad fija (vector tipo tiempo constante) que deseemos elegir.

estas condiciones se conocen como el gauge de traza-transversa (TT) y lo utilizaremos múltiples veces en el curso del trabajo. Si elegimos a U como el vector base tipo tiempo en Minkowski $U^\beta = \delta_0^\beta$ implica $A_{\alpha 0} = 0$. Si ademas orientamos los ejes coordenados para que la onda se propague en la dirección $z \rightarrow (\omega, 0, 0, \omega)$ y esto implica $A_{\alpha z} = 0$. Estas restricciones implican que solo las componentes $A_{xx} A_{yy} A_{xy} = A_{yx}$ son distintas de cero. La condición de la traza ademas implica que $A_{xx} = -A_{yy}$ por lo que en forma de matriz queda

$$A_{\alpha\beta}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3. El efecto de las ondas en partículas libres

Consideremos la situación en la cual una partícula inicialmente en una región libre de ondas se encuentra con una onda gravitacional. Posicionémonos en un sistema en que la partícula este inicialmente en reposo y elijamos el gauge TT. la Partícula libre obedece la ecuación geodésica

$$\frac{d}{d\tau} U^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0$$

como la partícula esta en reposo inicialmente, el valor inicial de su aceleración es

$$\left(\frac{dU^\alpha}{d\tau}\right)_0 = -\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\partial_0 h_{\beta 0} + \partial_0 h_{0\beta} - \partial_\beta h_{00})$$

pero en el gauge TT $h_{\beta 0}^{TT}$ se anula por lo cual la aceleración inicial también. lo mismo pasará un instante después y todos los instantes siguientes, por lo cual en este sistema la partícula permanece en la misma posición por siempre sin importar la onda. Esto debe interpretarse con cuidado dado que solo significa que hemos encontrado un sistema (TT) en el cual la partícula siempre tiene las mismas coordenadas espaciales pero esto no significa que no se vea alterada por la onda. En efecto, consideremos el caso mas en detalle imaginando 2 partículas cercanas, una en el origen y otra en $x = \epsilon y = z = 0$. La distancia propia entre ellas es:

$$\Delta l = \int |ds^2|^{1/2} = \int |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{1/2} = \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{1/2} dx \approx |g_{xx}(x=0)|^{1/2} \epsilon \approx [1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(x=0)] \epsilon$$

Dado que h_{xx}^{TT} en general es distinto de 0, la distancia propia (a diferencia de la distancia de coordenadas) cambia con

el tiempo. Se ve la importancia de utilizar un numero independiente de las coordenadas.

3. Detección de las ondas gravitacionales

El gran progreso que la astronomía ha hecho desde 1960 se debe mayoritariamente al hecho que la tecnología ha permitido a los astrónomos observar distintas partes del espectro electromagnético. Todas las regiones del mismo han sido exploradas en algún nivel de sensibilidad al día de hoy, pero existe un espectro que no ha sido observado: el espectro de ondas gravitacionales. Casi todos los fenómenos astro físicos emiten ondas gravitacionales y en algunas situaciones la radiación gravitacional contiene información que ninguna radiación electromagnética puede proporcionarnos. Dado que las ondas electromagnéticas interactúan fuertemente con la materia, los haces son dispersados incontables veces antes de llegar a la tierra. por lo cual la información de la fuente de origen es muy complicada de obtener. Las ondas gravitacionales en cambio interactúan débilmente con la materia y siguen las geodésicas incluso dentro de la misma, conteniendo información de la fuente extraordinariamente valiosa.

Las dificultades técnicas involucradas en la detección de la radiación gravitacional son enormes, dado que las amplitudes de la perturbación en la métrica $h_{\mu\nu}$ que pueden ser esperadas de las fuentes lejanas son extraordinariamente pequeñas.

Los detectores se dividen en dos tipos: Barras e interferómetros

- Detectores de masa resonante. También conocidos como barras son masas sólidas que responden ante ondas gravitacionales incidentes poniéndose a vibrar. veremos un ejemplo de esto mas adelante, pero se están dejando de usar debido a que los interferómetros alcanzan mayor sensibilidad
- Interferómetros láser. Estos detectores utilizan un láser altamente estable para medir la distancia propia entre partículas libres. También veremos como utilizar lasers para lograr medir distancias en las paginas siguientes. Este método ha producido los detectores más sensibles al día de hoy y es probable que produzca las primeras detecciones.

3.1. Un detector resonante

Los detectores resonantes son un buen caso de estudio para entender la interacción de la radiación gravitatoria con la materia continua. Consideremos dos partículas puntuales de masa m unidas por un resorte sin masa de constante k constante de amortiguamiento ν y longitud en reposo l_0 .

El sistema se encuentra en el eje x de nuestro sistema de coordenadas TT con las masas en las posiciones x_1 y x_2 . Las ecuaciones que obedecen en el espacio plano son

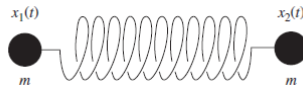


Figura 1: Detector resonante

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_2 + l_0) - \nu \frac{d}{dt}(x_1 - x_2)$$

y

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 + l_0) - \nu \frac{d}{dt}(x_2 - x_1)$$

definimos el estiramiento ξ , frecuencia de resonancia ω_0 y tasa de frenado γ

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 \quad \omega_0^2 = 2k/m \quad \gamma = \nu/m$$

con lo cual la ecuación queda la usual para un oscilador armónico amortiguado

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2\xi = 0$$

Supongamos que el único movimiento en el sistema es debido a la onda gravitacional. ($\xi = O(l_0 h_{\mu\nu}) \ll l_0$) entonces las velocidades de las masas serán pequeñas y las leyes de Newton serán validas en el sistema localmente inercial

$$m\frac{d^2x'^j}{dt'^2} = F'^j$$

donde F'^j son las componentes de cualquier fuerza no gravitacional. como las coordenadas en el sistema localmente inercial x'^α difieren de las coordenadas en el sistema TT solo por términos de orden $h_{\mu\nu}$ podemos utilizar la ecuación anterior con error despreciable.

$$m\frac{d^2x^j}{dt^2} = F^j + O(|h_{\mu\nu}|^2)$$

La única fuerza no gravitacional es la debida al resorte. El mismo ejercerá una fuerza proporcional a su longitud propia instantánea, medida por la métrica.

$$l(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [1 + h_{xx}^{TT}(t)]^{1/2} dx = [x_2(t) - x_1(t)][1 + \frac{1}{2}h_{xx}^{TT}(t)] + O(h^2)$$

Teniendo en cuenta que $\xi = l - l_0$

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)h_{xx}^{TT} + O(h^2)$$

restando las ecuaciones de movimiento obtenemos

$$\frac{d\xi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2\xi = \frac{1}{2}l_0\frac{dh_{xx}^{TT}}{dt^2}$$

esta ecuación valida a primer orden en h es simplemente la de un oscilador armónico amortiguado forzado. Podemos usar un detector de este tipo para detectar radiación gravitacional de una fuente con frecuencia fija (como pulsars o estrellas binarias cercanas). Supongamos que la onda incidente tiene la forma

$$h_{xx}^{TT} = A \cos \Omega t$$

entonces la solución estacionaria para ξ es

$$\xi = R \cos(\Omega t + \phi)$$

con

$$R = \frac{\frac{1}{2}l_0\Omega^2 A}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\gamma^2)^{1/2}}$$

$$\tan \phi = 2\gamma\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2)$$

el valor medio de la energía sobre un periodo $2\pi/\Omega$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8}mR^2(\omega_0^2 - \Omega^2)$$

y la amplitud de resonancia

$$R_{reso} = \frac{1}{4} l_0 A(\Omega/\gamma)$$

Ahora bien cuales serian las magnitudes reales en un detector de laboratorio? La mayoría de tales detectores son barras masivas cilíndricas donde el “resorte” es la elasticidad de la misma cuando es estirada. para un detector típico de este estilo $l_0 = 1,5m$ $\omega_0 = 10^4 s^{-1}$. Esto significa que una onda gravitacional fuerte de $A = 10^{-20}$ excitará la barra en un orden de energía de $10^{-20} J$. La amplitud de resonancia es de solo $10^{-15} m$! aproximadamente el diámetro de un núcleo atómico. La mayoría de las ondas incluso tendrán amplitudes menores a esa.

Otro problema con la detección es reducir el ruido. Por ejemplo el ruido térmico en un oscilador inducirá vibraciones aleatorias con una energía térmica kT donde T es la temperatura absoluta. Por este motivo los detectores modernos trabajan a temperaturas criogénicas de alrededor de 3K

Los severos desafíos técnicos de los detectores de barra vienen principalmente de su tamaño reducido: cualquier detector basado en resonancia de un objeto metálico no puede ser mas grande que unos metros de largo, y eso limita fuertemente la acción de la fuerza gravitacional. En cambio los interferómetros láser son construidos en escalas de kilómetros por lo cual poseen una sensibilidad mayor.

3.2. Interferómetros Láser. Midiendo distancias con luz

Una de las maneras mas convenientes de medir la distancia a un objeto lejano es por radar: se envía un pulso de radiación electromagnética, se mida cuanto tiempo tarda en regresar luego de ser reflejado en el objeto se divide por 2 y multiplica por c y eso es la distancia. Un principio similar también sirve para medir distancias en espacio-tiempos curvos, es el principio fundacional de los interferómetros láser para la detección de ondas gravitacionales.

Calculemos como utilizar la luz para medir la distancia entre dos partículas libres. No hacemos ninguna suposición sobre la proximidad de las mismas y utilizaremos las coordenadas TT.

Consideremos por simplicidad una onda viajando en la dirección z con polarización $+$. La métrica estará dada por

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + h_+]dx^2 + [1 - h_+]dy^2 + dz^2$$

Supongamos que los objetos se encuentran en el eje x una en el origen y otra en $x = L$. En el sistema de coordenadas TT permanecen con las mismas coordenadas todo el tiempo. Para realizar la medida el objeto en el origen envía un fotón a lo largo de eje x hacia el otro objeto el cual lo refleja. el primero objeto mide la cantidad de tiempo propio que ha pasado desde emitir el fotón. Éste esta relacionado con la distancia entre los objetos y la métrica

Notemos que el fotón viajando a lo largo del eje x se mueve en una linea de mundo nula $ds^2 = 0$ con $dy = dz = 0$ lo cual implica que tiene una velocidad efectiva

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1 + h_+}$$

Un fotón emitido a tiempo t_{start} alcanza la coordenada x en un tiempo $t(x)$. cuando llega al extremo $x = L$

$$t_{far} = t_{start} + \int_0^L [1 + h_+(t(x))]^{1/2} dx$$

esta es una ecuación implícita ya que la función que queremos hallar $t(x)$ está dentro de la integral. Pero teniendo en cuenta la teoría linealizada podemos resolver esto utilizando que h_+ es pequeño. Donde $t(x)$ aparece en el argumento de h_+ podemos usar su valor de espacio-tiempo plano ya que las correcciones debidas a h_+ solo traerán términos de orden cuadrático. Entonces ponemos $t(x) = t_{start} + x$ dentro de la integral y expandimos la raíz cuadrada. El resultado es

$$t_{far} = t_{start} + L + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{start} + x) dx$$

Teniendo en cuenta también el viaje de regreso

$$t_{return} = t_{start} + 2L + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{start} + x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{start} + L + x) dx$$

Podemos utilizar esta ecuación para medir la métrica de la onda. La manera más simple es diferenciar t_{return} con respecto a t_{start} es decir monitorear la tasa de cambio del tiempo de regreso a medida que la onda pasa.

$$\frac{dt_{return}}{dt_{start}} = 1 + \frac{1}{2} [h_+(t_{start} + 2L) - h_+(t_{start})]$$

Es remarcable que la tasa de cambio solo depende del valor de la métrica de la onda cuando el fotón fue emitido y cuando volvió al origen. Ahora si la señal enviada desde el origen no es un único fotón sino una onda electromagnética continua con cierta frecuencia ν , podemos pensar que cada “cresta” de la onda se puede pensar como un fotón enviado y reflejado. la derivada del tiempo que les toma a los rayos regresar no es otra cosa que el cambio en la frecuencia de la onda electromagnética

$$\frac{dt_{return}}{dt_{start}} = \frac{\nu_{return}}{\nu_{start}}$$

Como dijimos previamente esto constituye el principio fundacional para los interferómetros láser. En estos dispositivos la luz de un láser estable pasa por un separador de haz que envía la mitad del haz en una dirección y la otra mitad en una dirección perpendicular. Los haces tienen fases correlacionadas, cuando regresan luego de ser refractados por los espejos se vuelven a juntar para formar un patrón de interferencia. Si el patrón cambia porque una onda gravitacional pasa, entonces el patrón de interferencia nos permite detectar la onda.

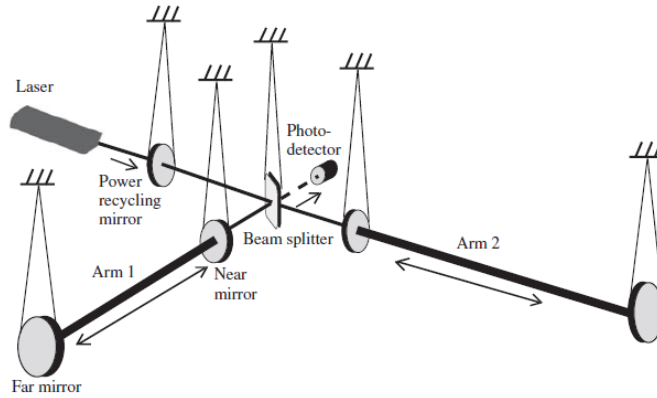


Figura 2: Interferómetro láser

Los interferómetros son hoy en día los detectores más sensibles, y probablemente sean los instrumentos que proporcionen las primeras medidas de ondas gravitacionales. Las dos principales ventajas sobre los detectores de barras son: su sensibilidad puede ser aumentada sin entrar en problemas de materiales y dado que no dependen en una frecuencia resonante de vibración operan en un rango amplio de frecuencias.

4. La generación de ondas gravitacionales

Hasta ahora hemos estudiado la propagación de ondas gravitacionales en ausencia de fuentes. Analicemos el caso concreto de un sistema binario de estrellas girando alrededor de su centro de masa en la aproximación de campo lejano y movimiento lento.

La ecuación de Einstein linealizada en el gauge de Lorentz nos da una ecuación de onda para cada componente

$$\square H_{\mu\nu} = -16\pi G_n T_{\mu\nu}$$

La solución de esta ecuación por medio de la función de Green para el operador D'Alambertiano es

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma)$$

$$H_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G_n \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4 y$$

Donde

$$G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \delta[\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - (x^0 - y^0)] \Theta(x^0 - y^0)$$

Esto implica

$$H_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G_n \int \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} T_{\mu\nu}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \mathbf{y}) d^3 y$$

donde $t = x^0$. Se utiliza el término “tiempo retrasado” para referirse a la cantidad $t_r = t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

Si se realiza una transformación de Fourier para las componentes de la métrica

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} \phi(t, \mathbf{x}) dt$$

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega, \mathbf{x}) d\omega$$

Nos queda:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} H_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) dt \\ &= \frac{4G_n}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} T_{\mu\nu}(t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \mathbf{y}) dt d^3 y \\ &= \frac{4G_n}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t_r} e^{i\omega \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dt_r d^3 y \\ &= 4G_n \int e^{i\omega \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3 y \end{aligned}$$

Si ahora realizamos las aproximaciones de campo lejano y velocidades no relativistas $\frac{e^{i\omega \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$ puede ser reemplazado por $\frac{e^{i\omega r}}{r}$. Esto nos deja

$$\tilde{H}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G_n \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3 y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})$$

Incluso no es necesario calcular todas las componentes de $\tilde{H}_{\mu\nu}$ ya que la condición del gauge de Lorentz $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$ implica en el espacio de Fourier

$$\tilde{H}^{0\nu} = -\frac{i}{\omega} \partial_i \tilde{H}^{i\nu}$$

por lo que solo nos tenemos que preocupar por las componentes espaciales. La integral sobre las componentes espaciales de $\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})$ puede escribirse de la siguiente manera integrando por partes

$$\int d^3 y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) = \int d^3 y \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) - \int d^3 y y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj})$$

El primer término desaparece pues integramos sobre todo el espacio mientras que el segundo se relaciona con \tilde{T}^{0j} por

la versión en el espacio de Fourier de la conservación del tensor de energía impulso $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

$$-\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) &= i\omega \int y^i \tilde{T}^{0j} d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2} \int (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2} \int [\partial_l (y^i y^j \tilde{T}^{0l}) - y^i y^j (\partial_l \tilde{T}^{0l})] d^3y \\ &= -\frac{\omega^2}{2} \int y^i y^j \tilde{T}^{00} d^3y \end{aligned}$$

Se suele definir el tensor momento cuadrupolar de la fuente

$$I_{ij}(t) = \int y^i y^j T^{00}(t, \mathbf{y}) d^3y$$

En términos de la transformada de Fourier del momento cuadrupolar la solución toma la forma compacta

$$\tilde{H}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -2G_n \omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega)$$

Podemos transformar inversamente para obtener la fórmula cuadrupolar:

$$H_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G_n}{r} \frac{d^2 I_{ij}(t_r)}{dt^2}$$

La onda gravitacional producida por un objeto no relativista aislado es proporcional a la derivada segunda del momento cuadrupolar de la densidad de energía. En contraste, la contribución dominante para la radiación electromagnética proviene del cambio en el momento dipolar de la densidad de carga. Esta diferencia puede ser comprendida de la siguiente manera: un cambio en el momento dipolar corresponde al movimiento del centro de densidad, densidad de carga en el caso del electromagnetismo y densidad de energía en el caso de la gravitación. Mientras que no hay nada que impida que el centro de carga de un objeto oscile, una oscilación en el centro de masa de un sistema aislado viola la conservación del impulso. El momento cuadrupolar, que mide la forma del sistema en general es menor que el momento dipolar y por esta razón la radiación gravitacional es típicamente mas débil que la electromagnética.

En nuestro caso del sistema de estrellas binarias de masa M , supongamos que poseen una órbita circular en el plano $x^1 - x^2$ a una distancia R de su centro de masa. Si tratamos el movimiento en la aproximación Newtoniana tendremos

$$v = \left(\frac{G_n M}{4R} \right)^{1/2}$$

donde v es la velocidad de las mismas. El tiempo que demoran en completar una vuelta es $T = \frac{2\pi R}{v}$ y su frecuencia angular $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{G_n M}{4R^3} \right)^{1/2}$

El recorrido explícito de la estrella A será

$$x_a^1 = R \cos \Omega t \quad x_a^2 = R \sin \Omega t$$

y la estrella B

$$x_b^1 = -R \cos \Omega t \quad x_b^2 = -R \sin \Omega t$$

La densidad de energía será

$$T^{00}(t, x) = M\delta(x^3) [\delta(x^1 - R \cos \Omega t)\delta(x^2 - R \sin \Omega t) + \delta(x^1 + R \cos \Omega t)\delta(x^2 + R \sin \Omega t)]$$

La presencia de funciones delta de Dirac nos permite integrar fácilmente los momentos cuadrupolares para obtener:

$$\begin{aligned} I_{11} &= 2MR^2 \cos^2 \Omega t = MR^2(1 + \cos 2\Omega t) \\ I_{22} &= 2MR^2 \sin^2 \Omega t = MR^2(1 - \cos 2\Omega t) \\ I_{12} &= I_{21} = 2MR^2(\cos \Omega t)(\sin \Omega t) = MR^2 \sin 2\Omega t \\ I_{i3} &= 0 \end{aligned}$$

Con estos resultados podemos calcular las componentes de la métrica

$$H_{ij}(t, x) = \frac{8G_n M}{r} \Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las componentes restantes se pueden hallar exigiendo la condición del gauge de Lorentz.

Referencias

- [1] Wald R.M. General relativity 1984
- [2] Schutz B. A first course in general relativity. 2009
- [3] Carroll, S. Spacetime and Geometry, an introduction to general relativity. 2004
- [4] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, John Wheeler, Kip Thorne-Gravitation-W. H. Freeman (1973)