Tema 3 - CN

- Lupașcu Marian -

Ex 1

Algoritm:

Date de intrare $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $b=(b_i)_{i=\overline{1,n}}$

Date de ieșire $Inv=(inv_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $Det \in \mathbb{R}$

STEP 1:

$A=(A \mid I_n)=(a_{ij})_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,2n}}$

$Det=1$;

STEP 2:

for $k=1:n$ do

Determină primul indice p, $(k \le p \le n)$ a.î.

$|a_{pk}|=\max_{j=\overline{k,n}} |a_{jk}|$

if $a_{pk}=0$ then

OUTPUT('Avem coloana nulă, deci det=0')

STOP;

if($p \ne k$)

$L_p \leftrightarrow L_k$; $Det=-Det$;

for $l=1:n$ do

if $l \ne k$

$m_{lk}=\frac{a_{lk}}{a_{kk}}$;

$L_l \leftarrow L_l - m_{lk} L_k$;

$L_k \leftarrow L_k \cdot \frac{1}{a_{kk}}$

$Det \leftarrow Det * a_{kk}$;

STEP 3:

if $a_{kk} = 0$

  OUTPUT('~~Atun~~ coloana nula, det = 0');

  STOP;

end

STEP 4:

$$Inv = A(:, n+1 : end), \text{ unde } end = 2n;$$

$$= (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{n+1,2n}}} \quad (\cancel{\forall i,j}).$$

Ex 3.
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Aplicam Gauss fara pivotare

$k=1$: Se caute primul $p = \overline{1,3}$ cu $|a_{p1}| \neq 0 \Rightarrow p = 2$

Retinem $p1 = 2$. Interschimbam $L_1 \leftrightarrow L_2$ se obtine o matrice echivalenta A:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicatori

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0 = l_{21}$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 2 = l_{31}$$ in urma $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

avem
$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$k=2$: Se caută primul $p=\overline{2,3}$ cu $|a_{p2}|\neq 0 \Rightarrow p=2$

Reținem $p_2=2$

Multiplicatorul $m_{32}=\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}=0 \Rightarrow l_{32}$.

Obținem astfel

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}2&1&5\\0&1&1\\0&0&-9\end{pmatrix}$$

$$LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&5\\0&1&1\\0&0&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&5\\0&1&1\\4&2&1\end{pmatrix}=A'$$

matricea A cu liniile permutate.

b). Pentru a afla soluția sistemului $Ax=b$ vom aplica permutarea p pe b.

$$\begin{aligned}b_1&\leftrightarrow b_{p1}\\ b_2&\leftrightarrow b_{p2}\end{aligned} \Rightarrow b=(5\ \ 3\ \ 1)^T$$

Sistemul $Ly=b'$ se scrie $\begin{cases}y_1=5\\ y_2=3\\ 2y_1+y_3=1 \Rightarrow y_3=-9.\end{cases}$

Din relația $Ux=y$ se echivalent

$$\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3=5 \Rightarrow x_3=-1\\ x_2+x_3=3 \Rightarrow x_2=2\\ -9x_3=-9 \Rightarrow x_3=1\end{cases}$$

a). Aplicam Gauss cu pivotare parțială.

$k=1$: Se caută primul indice p a.î. $p=\overline{1,3}$

$$|a_{p1}| = \max_{j=\overline{1,3}} |a_{j1}|. \Rightarrow p=3.$$

Obținem $p_1 = 3$. Interschimbăm $L_1 \leftrightarrow L_3$ se obține

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Multiplicatorii: $m_{21}^{(1)} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0,5$

$m_{31}^{(1)} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0$

In urma $L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} \cdot L_1$.

Avem $$A \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4,5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$k=2$: Analog $p=3$ $p_2=3$ Interschimbăm $L_2 \leftrightarrow L_3$

Acum $k>1$, $L_{21} \leftrightarrow L_{31}$

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4,5 \end{pmatrix}.$$ multiplicatorul $m_{32}^{(1)} = 0$.

Obținem $$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4,5 \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ $= A'$ matricea A cu liniile permutate

b) Pt a afla soluția sistemului $Ax=b$ vom schimba pozițiile elementelor din b

$b_1 \leftrightarrow b_{p1}$
$b_2 \leftrightarrow b_{p2}$ $\mapsto b = (1 \ 3 \ 5)^T$

Sistemul $Ly = b^T$ se rescrie

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \\ 0{,}5y_1 + y_3 = 5 \Rightarrow y_3 = 4{,}5. \end{cases}$$

Sistemul $Ux = y$ devine

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 & \Rightarrow x_1 = -1. \\ x_2 + x_3 = 3 & \Rightarrow x_2 = 2 \\ 4{,}5x_3 = 4{,}5 & \Rightarrow x_3 = 1 \end{cases}$$

Ex 4

Algoritm: pe Baza Gauss-fară pivotare

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$

Date de ieșire $L = (l_{ij})$ —, $U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$x \in \mathbb{R}^n$.

STEP 1:

$U = A$;

$L = I_n$;

STEP 2:

for $k = 1:n$ do

Determina primul indice p a.î. $|a_{pk}| \neq 0$.

if (nu se gaste un astfel de indice) then

OUTPUT ('Sistem compatibil nedeterminat / incompatibil');

STOP;

if $p \neq k$.

$L_p \leftrightarrow L_k$

$b_p \leftrightarrow b_k$

if $k \geq 2$ then

$l_{p,i} \leftrightarrow l_{k,i} \ (\forall) \ i \in \overline{1, k-1}$

end

end

for $l = k+1 : n$

$m_{lk} = U_{lk} / U_{kk}$;

$L_l \leftarrow L_l - m_{lk} L_k$;

$l_{lk} = m_{lk}$;

end

end

STEP 3: $y = substAsc(L, b)$;

STEP 4: $x = substDesc(U, x)$;

Algoritm pe baza Gauss - cu pivotare parțială.

Analog cu excepția rândurilor cu roz care se înlocuiesc cu

Determină primul indice p ($k \leq p \leq n$) a.î.
$|a_{pk}| = \max_{j = \overline{k,n}} |a_{jk}|$

if $a_{pk} = 0$ then
Analog ca anteriorul algoritm

⋮

Ex 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$|1| = 1 > 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{vmatrix} = 1 > 0.$ $\Rightarrow$ cf criteriului lui Sylvester ca

A este pozitiv definita. cf. Th 11 2 admite factorizare Cholesky. Astfel $\exists L$ inf triunghiulara a.î. $A = LL^T$

b). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$

Aflăm mai întâi $l_{11} = \sqrt{1} = \underline{1}$ Calculam elementele de sub l_{11}. (l_{21}, l_{31})

$l_{21} = 2/l_{11} = 2$

$l_{31} = 3/l_{11} = 3$

Apoi $l_{22} = \sqrt{5 - l_{21}^2} = \underline{1}$

$l_{32} = \dfrac{8 - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \dfrac{8 - 3 \cdot 2}{1} = 2$

Apoi $l_{33} = \sqrt{14 - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{14 - 9 - 4} = \underline{1}$.

Am obtinut $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) Rezolvam $Ly = b$.

$$\begin{cases} y_1 = -5 \\ 2y_1 + y_2 = -14 \Rightarrow y_2 = -14 + 10 = -4 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = -25 \Rightarrow y_3 = -25 + 15 + 8 = -2 \end{cases}$$

Apoi rezolvam sistemul,

$L^T x = y$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5. \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -4 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$