FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2016/2017
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

Seminar 14

(S14.1) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol de operaţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \vDash \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \nvDash \varphi$.

Demonstraţie:

Prima soluţie: se ia φ ca fiind

$$\forall x \forall y ((\neg \exists z (x = z + z) \wedge \neg \exists z (x = z + z)) \to \exists z (x + y = z + z)),$$

ce exprimă faptul că suma a două elemente "nepare" este pară – în $\mathbb{Z}$, avem într-adevăr regula "impar + impar = par", dar în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avem contraexemplul $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.
A doua soluţie: se ia φ ca fiind

$$\exists t \forall x (\exists z (x = z + z) \vee \exists z (x = z + z + t)),$$

ce este adevărată în $\mathbb{Z}$, luând $t := 1$ (orice număr este ori de forma $2z$, ori de forma $2z + 1$), dar nu este adevărat în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, unde relaţia de congruenţă indusă de elementele pare are patru clase, şi nu două. $\square$

(S14.2) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol de operaţie, $\cdot$, de aritate 2. Fie $\mathcal{G} = (G, \cdot^{\mathcal{G}})$ un grup finit. Să se determine un enunţ φ_G astfel încât pentru orice grup $\mathcal{H} = (H, \cdot^{\mathcal{H}})$ avem că $\mathcal{H} \vDash \varphi_G$ dacă şi numai dacă $\mathcal{H}$ este izomorf cu $\mathcal{G}$.

Demonstraţie: Dat fiind că G este mulţime finită, există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $g : \{1, \ldots, n\} \to G$ o bijecţie. Luăm enunţul φ_G ca fiind

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg (x_i = x_j) \wedge \forall z \left(\bigvee_{1 \le i \le n} z = x_i \right) \wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \cdot x_j = x_{g^{-1}(g(i) \cdot^{\mathcal{G}} g(j))} \right),$$

unde primii doi termeni ai conjuncţiei din paranteză exprimă faptul că $x_1,\ldots,x_n$ sunt exact elementele potenţialei structuri, iar ultimul termen codifică “tabla” grupului G.
Astfel, notând porţiunea fără cuantificatori a lui φ_G cu ψ_G, avem că un grup $\mathcal{H} = (H, \cdot^{\mathcal{H}})$ satisface φ_G dacă şi numai dacă există $f : \{1,\ldots,n\} \to H$ astfel încât pentru orice $e : V \to H$ avem că $\mathcal{H} \vDash \psi_G[e_{x_1 \leftarrow f(1),\ldots,x_n \leftarrow f(n)}]$. Funcţiile f cu această proprietate corespund izomorfismelor $h : G \to H$ prin formulele $h := f \circ g^{-1}$ şi $f := h \circ g$. $\square$

(S14.3) Considerăm un limbaj $\mathcal{L}$ şi o mulţime Γ de enunţuri peste el astfel încât pentru orice $p \in \mathbb{N}$ există $m \geq p$ şi o $\mathcal{L}$-structură cu m elemente ce satisface Γ. Arătaţi că există o $\mathcal{L}$-structură infinită ce satisface Γ.

Demonstraţie: Fie $\Gamma' := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 2\}$.

Arătăm că Γ' este satisfiabilă. Din teorema de compacitate, e suficient să arătăm că orice submulţime finită a lui Γ' este satisfiabilă.
Fie Δ o submulţime finită a lui Γ'. Clar există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid 2 \leq n \leq p\}.$$

Luăm $m \geq p$ şi o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu m elemente ce satisface Γ. Atunci $\mathcal{A}$ satisface Δ şi deci Δ este satisfiabilă, ceea ce ne trebuia.
Orice model al lui Γ' este, în particular, un model infinit al lui Γ. Demonstraţia este încheiată. $\square$

(S14.4) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol de relaţie, $\dot{<}$, de aritate 2. Fie Γ o mulţime de enunţuri ce conţine axiomele de ordine strictă, totală şi ce admite măcar un model infinit. Să se arate că există un model $\mathcal{A}$ pentru Γ în care, mai mult, $(\mathbb{Q}, <)$ se scufundă, i.e. există $f : \mathbb{Q} \to A$ (necesar injectivă) cu proprietatea că pentru orice $q, r \in \mathbb{Q}$, $q < r$ dacă şi numai dacă $f(q) \dot{<}^{\mathcal{A}} f(r)$.

Demonstraţie: Notăm cu $\mathcal{L}'$ limbajul ce extinde $\mathcal{L}$ prin adăugarea unei familii de constante $\{c_q\}_{q \in \mathbb{Q}}$, câte una corespunzătoare fiecărui număr raţional. Mai departe, notăm cu Γ' mulţimea Γ la care adăugăm toate enunţurile de forma $c_q \dot{<} c_r$, cu $q < r$. Fie $\mathcal{B}$ un model infinit pentru Γ.
Arătăm că Γ' este finit satisfiabilă, deci satisfiabilă. Fie Δ o submulţime finită a lui Γ'. Există $n \in \mathbb{N}$ şi $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ astfel încât doar constantele $c_{q_1}, \ldots, c_{q_n}$ apar în Δ. Fără a restrânge generalitatea, considerăm $q_1 < \ldots < q_n$. Structura $\mathcal{B}$ fiind infinită, admite o secvenţă $b_1 \dot{<}^{\mathcal{B}} \ldots \dot{<}^{\mathcal{B}} b_n$. Construim o $\mathcal{L}'$-extensie $\mathcal{B}_\Delta$ a lui $\mathcal{B}$ în felul următor: pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, punem $c_{q_i}^{\mathcal{B}} := b_i$, iar pentru orice $q \notin \{q_1, \ldots, q_n\}$, punem $c_q^{\mathcal{B}} := b_1$ (o valoare arbitrară). Atunci $\mathcal{B}_\Delta$ va fi model pentru Δ.

Fie $\mathcal{C}$ un model pentru Γ'. Notăm cu $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}$-redusa lui $\mathcal{C}$. Atunci $\mathcal{A}$ este modelul căutat pentru Γ – scufundarea f va fi dată de formula:

$$f(q) := c_q^{\mathcal{C}},$$

pentru orice $q \in \mathbb{Q}$. $\square$

(S14.5) Peste orice limbaj $\mathcal{L}$, pentru orice enunţ φ, numim **spectrul finit al lui** φ mulţimea acelor $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că există o $\mathcal{L}$-structură cu n elemente ce satisface φ.

(i) Dacă $\mathcal{L}$ este limbajul cu un singur simbol de relaţie de aritate 2, să se scrie un enunţ φ ce spune că relaţia asociată simbolului este o relaţie de echivalenţă ale cărei clase au fiecare câte două elemente. Să se determine spectrul finit al lui φ.

(ii) Să se găsească câte un limbaj şi câte un enunţ peste el astfel încât spectrul finit al enunţului să fie, pe rând:

  (a) mulţimea puterilor de prime;

  (b) mulţimea numerelor de forma $2^n 3^m$, cu $n, m > 0$;

  (c) mulţimea numerelor compuse.

Demonstraţie:

(i) Enunţul φ va fi conjuncţia celor trei proprietăţi ale relaţiilor de echivalenţă, împreună cu:

$$\forall x \exists y (x \sim y \land \neg(x = y) \land \forall z (z \sim x \to (z = x \lor z = y))).$$

Este imediat faptul că o mulţime finită poate fi înzestrată cu o asemenea relaţie dacă şi numai dacă are un număr par de elemente. Aşadar, spectrul finit al lui φ este mulţimea numerelor pare nenule.

(ii) (a) Un rezultat de algebră spune că un corp finit are un număr de elemente ce este putere de prim, iar pentru orice putere de prim, există (şi este chiar unic până la izomorfism) un corp ce o are ca număr de elemente. Aşadar, luăm enunţul să fie conjuncţia axiomelor de corp.

  (b) Considerăm limbajul ce conţine un simbol de operaţie binar, $\cdot$, şi o constantă e. Luăm enunţul format din conjuncţia axiomelor de grup, în care e va juca rolul de element neutru, împreună cu:

$$\exists x (x \cdot x = e) \land \exists x (x \cdot x \cdot x = e) \land \forall x (x = e \lor x \cdot x = e \lor x \cdot x \cdot x = e \lor x^6 = e).$$

Pentru orice $n, m > 0$, grupul $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_3^m$ satisface enunţul, deci numărul $2^n 3^m$ este în spectru. Vrem să arătăm că acestea sunt toate elementele spectrului. Dacă ar mai fi un altul, k, atunci acela ar avea un divizor prim p diferit de 2 şi 3. Fie o structură cu k elemente ce satisface enunţul. Atunci aceasta este neapărat un grup. Cum p divide ordinul său, din teorema lui Cauchy, el va avea un element de ordin p, ceea ce contrazice aserţiunea din enunţ "orice element are ordin 1, 2, 3 sau 6".

(c) **Indicaţie:** un număr compus este de forma ab cu $a, b > 1$. Intuitiv, o mulţime cu ab elemente se poate desena în forma unui dreptunghi de laturi a şi b. Considerăm cele două relaţii de echivalenţă sugerate de această aşezare, anume "a fi pe aceeaşi linie" şi "a fi pe aceeaşi coloană". Limbajul va avea aşadar două simboluri de relaţie de aritate 2, iar enunţul va conţine suficiente constrângeri asupra celor două relaţii cât să garanteze formarea unei configuraţii de tip dreptunghi cu laturi de lungimi netriviale.

$\square$