Exemple - Teoria ordinii parțiale

- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{array}{rcl} (REFL) & := & \forall x (x \dot{\leq} x) \\ (ANTISIM) & := & \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y) \\ (TRANZ) & := & \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z) \end{array}$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este

$$T := Th((REFL), (ANTISIM), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine parțială.

Exemple - Teoria ordinii stricte

- $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (IREFL) \quad &:= \quad \forall x \neg (x \dot{<} x) \\ (TRANZ) \quad &:= \quad \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine strictă.

Exemple - Teoria ordinii totale

Considerăm următorul enunț:

$$(TOTAL) \quad := \quad \forall x \forall y (x = y \vee x \dot{<} y \vee y \dot{<} x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- modelele lui T sunt mulțimile total (liniar) ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine totală.

Exemple - Teoria ordinii dense

Considerăm următorul enunț:

$$(DENS) \quad := \quad \forall x \forall y \big(x \dot{<} y \rightarrow \exists z (x \dot{<} z \wedge z \dot{<} y) \big).$$

Definiție

Teoria ordinii dense este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine densă.

Exemple - Teoria grafurilor

- $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- $\mathcal{L}_{Graf}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x, x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)). \end{aligned}$$

Definiție

Teoria grafurilor este

$$T := Th((IREFL), (SIM)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- modelele lui T sunt grafurile.

Exemple

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \ldots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 2.56

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff A \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Exemple

Notații

- Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$.
- $\exists^{\leq n} := \neg\exists^{\geq n+1}$
- $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziția 2.57

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A} \vDash \exists^{\leq n} & \iff & A \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\ \mathcal{A} \vDash \exists^{=n} & \iff & A \text{ are exact } n \text{ elemente.} \end{array}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.58

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash T \iff A \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Teorema de compacitate 2.59

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- unul din cele mai importante rezultate ale logicii de ordinul întâi
- este punctul de pornire al teoriei modelelor, unul din domeniile principale ale logicii matematice

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 2.60

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

(*) pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură finită a.î. $|A| \geq \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$ și $\mathcal{A} \vDash \Gamma$ deoarece $\mathcal{A}$ este finită.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model $\mathcal{B}$.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \Gamma$, $\mathcal{B}$ este finită.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.
Am obținut o contradicție. $\square$

Corolarul 2.61

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Propoziția 2.62

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu $\mathcal{K}_{Inf}$ clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite.
Conform Propoziției 2.58, pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff A \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e infinit axiomatizabilă.

Presupunem că $\mathcal{K}_{Inf}$ este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = Mod(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\varphi)$.
Rezultă că pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \text{ este finită } \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi \iff \mathcal{A} \vDash \neg\varphi.$$

Așadar, clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 2.60. $\square$.

Corolarul 2.63

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Definiția 2.64

Fie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}; \mathsf{ari}_{\mathcal{L}})$ și $\mathcal{L}^+ = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}; \mathsf{ari}_{\mathcal{L}^+})$ două limbaje. Spunem că $\mathcal{L}^+$ este extensie a lui $\mathcal{L}$ sau că $\mathcal{L}$ este sublimbaj al lui $\mathcal{L}^+$ dacă

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}$$

și $\mathsf{ari}_{\mathcal{L}}$ este restricția lui $\mathsf{ari}_{\mathcal{L}^+}$ la simbolurile nelogice ale lui $\mathcal{L}$.
Notație: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$

Exemple

- $\mathcal{L}_= \subseteq \mathcal{L}$ pentru orice limbaj $\mathcal{L}$
- $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}) \subseteq (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}) \subseteq \mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$

Dacă $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, atunci orice termen (formulă) din $\mathcal{L}$ este termen (formulă) în $\mathcal{L}^+$.

Definiția 2.65

Fie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $\mathcal{A}^+$ o $\mathcal{L}^+$-structură.
Spunem că $\mathcal{A}$ este $\mathcal{L}$-redusa lui $\mathcal{A}^+$ sau că $\mathcal{A}^+$ este $\mathcal{L}^+$-extensia lui $\mathcal{A}$ dacă

- $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^+|$;
- pentru orice $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$, $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}^+}$;
- pentru orice $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}^+}$;
- pentru orice $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}^+}$.

Notație: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \upharpoonright \mathcal{L}$

Exemplu

$(\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ are redusele $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{N}, S, 0)$, $(\mathbb{N}, <)$.

Propoziția 2.66

Fie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $\mathcal{A}^+$ o $\mathcal{L}^+$-extensie a sa. Pentru orice enunț φ al lui $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi \iff \mathcal{A}^+ \vDash \varphi.$$

Definiția 2.66

Fie A o mulțime nevidă. O relație de bună ordonare pe A este o relație de ordine totală $<$ pe A cu proprietatea că orice submulțime nevidă a lui A are minim.
Spunem că $(A, <)$ este mulțime bine ordonată.

Exemple

$(\mathbb{N}, <)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, <)$ nu este bine ordonată.

Propoziția 2.67

Clasa mulțimilor bine ordonate nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{\dot{<}}$.

Dem.: Fie $\mathcal{K}$ clasa $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurilor $\mathcal{A} = (A, <)$ a.î. $(A, <)$ este bine ordonată. Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{K}$ este axiomatizabilă, deci că există Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ a.î. $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$.

Fie $\mathcal{L}$ extensia lui $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ obținută prin adăugarea simbolurilor de constantă c_n, $n \in \mathbb{N}$. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in I\}, \text{ unde } I \subseteq \mathbb{N} \text{ este finită} \\ &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n = 0, \ldots, M\} \text{ pentru un } M \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aplicație a Teoremei de compacitate - mulțimi bine ordonate

Fie $(A, <)$ o mulțime infinită bine ordonată. Definim $a_{M+1} := \min A$, $a_M := \min A \setminus \{a_{M+1}\}$, ..., $a_0 := \min A \setminus \{a_{M+1}, a_M, \ldots, a_1\}$. Atunci $a_{M+1} < a_M < \ldots < a_0$.
Fie $\mathcal{A}^+$ extensia lui $\mathcal{A} = (A, <)$ la $\mathcal{L}$ obținută astfel:

$$c_0^{\mathcal{A}^+} = a_0, \ldots, c_{M+1}^{\mathcal{A}^+} = a_{M+1}, \quad c_n^{\mathcal{A}^+} \text{ arbitrar pentru } n > M+1.$$

Atunci $\mathcal{A}^+ \vDash \Delta_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

are un model $\mathcal{B}^+ = (B, <, b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ (deci $c_n^{\mathcal{B}^+} = b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$).
Deoarece $\mathcal{B}^+ \vDash \Gamma$, rezultă că $(B, <)$ este bine ordonată.
Deoarece $\mathcal{B}^+ \vDash \{c_{n+1} \dot{<} c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ rezultă că $b_{n+1} < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, submulțimea nevidă

$$S := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{nu are minim.}$$

Am obținut o contradicție. $\square$