Relații binare

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A^2$ o relație binară pe A.
Notație: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiție

- R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- R este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx.
- R este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,
  $$xRy \text{ și } yRx \text{ implică } x = y.$$
- R este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
  $$xRy \text{ și } yRz \text{ implică } xRz.$$
- R este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx.

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară $R \subseteq A^2$ se numește relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemple

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Definim relația $\equiv (\text{mod } n) \subseteq \mathbb{Z}^2$ astfel:

  $$\equiv (\text{mod } n) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \text{ divide } (x - y)\}.$$

  Relația $\equiv (\text{mod } n)$ se numește congruența modulo n. Folosim notația $x \equiv y (\text{mod } n)$ pentru $(x, y) \in \equiv (\text{mod } n)$.

- Fie $f : A \to B$ o funcție. Definim relația $\ker f \subseteq A^2$ astfel:

  $$\ker f = \{(a_1, a_2) \in A^2 \mid f(a_1) = f(a_2)\}.$$

  $\ker f$ se numește și nucleul lui f.

Notații: Vom nota relațiile de echivalență cu $\sim$. Scriem $x \sim y$ dacă $(x, y) \in \sim$ și $x \not\sim y$ dacă $(x, y) \notin \sim$.

Fie A o mulțime nevidă și $\sim \subseteq A^2$ o relație de echivalență.

Definiție

Pentru orice $x \in A$, clasa de echivalență $[x]$ a lui x este definită astfel: $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Propoziție

- $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Dem.: Exercițiu.

Definiție

Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte ale elementelor lui A se numeșt mulțimea cât a lui A prin $\sim$ și se notează $A/\!\sim$.
Aplicația $\pi : A \to A/\!\sim, \quad \pi(x) = [x]$ se numește funcția cât.

Relații de echivalență

Fie A o mulțime nevidă și $\sim \subseteq A^2$ o relație de echivalență.

Definiție

Un sistem de reprezentanți pentru $\sim$ este o submulțime $X \subseteq A$ care satisface: pentru orice $a \in A$ există un unic $x \in X$ a.î. $a \sim x$.

Propoziție

Fie X un sistem de reprezentanți pentru $\sim$. Atunci $A = \bigcup_{x \in X} [x]$ și $A/\!\sim = \{[x] \mid x \in X\}$.

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

Considerăm congruența modulo 2, $\equiv (\text{mod } 2)$:
$[0] = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$, $[1] = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}+1$;
$[2n] = [0]$ și $[2n+1] = [1]$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$; mulțimea cât este $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$. Sisteme de reprezentanți: $X = \{0, 1\}$, $X = \{2, 5\}$, $X = \{999, 20\}$.

Partiții

Fie A o mulțime nevidă.

Definiție

O partiție a lui A este o familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulțimi nevide ale lui A care verifică proprietățile:

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \text{ și } A_i \cap A_j = \emptyset \ \text{ pentru orice } i \neq j.$$

Partiția $(A_i)_{i\in I}$ se numește finită dacă I este finită.

Propoziție

Există o bijecție între mulțimea relațiilor de echivalență pe A si mulțimea partițiilor lui A:

- $(A_i)_{i\in I}$ partiție a lui $A \mapsto$ relația de echivalență pe A definită prin: $x \sim y$ ddacă există $i \in I$ a.î. $x, y \in A_i$.
- $\sim$ relație de echivalență pe $A \mapsto$ partiția $([x])_{x\in X}$, unde $X \subseteq A$ este un sistem de reprezentanți pentru $\sim$.

Dem.: Exercițiu.

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A este relație de

- ordine parțială dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ordine strictă dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu $\leq$, iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

Definiție

Dacă $\leq$ este o relație de ordine parțială (totală) pe A, spunem că $(A, \leq)$ este mulțime parțial (total) ordonată.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Proprietăți

- Orice relație de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulțime total ordonată este mulțime parțial ordonată.
- Relația $<$ definită prin $x < y \iff x \leq y$ și $x \neq y$ este relație de ordine strictă.
- Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci $(S, \leq)$ este mulțime parțial ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in S$ se numește

- element minimal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \leq e$ implică $a = e$;
- element maximal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \geq e$ implică $a = e$;
- cel mai mic element (sau minim) al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- cel mai mare element (sau maxim) al lui S dacă $e \geq a$ pentru orice $a \in S$.

Proprietăți

- Atât minimul, cât și maximul lui S sunt unice (dacă există).
- Orice minim (maxim) este element minimal (maximal). Reciproca nu este adevărată.
- S poate avea mai multe elemente maximale sau minimale.

Dem.: Exercițiu.

Mulțimi parțial ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in A$ se numește

- majorant al lui S dacă $e \geq a$ pentru orice $a \in S$;
- minorant al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- supremumul lui S, notat $\sup S$, dacă e este cel mai mic majorant al lui S;
- infimumul lui S, notat $\inf S$, dacă e este cel mai mare minorant al lui S.

Proprietăți

- Atât mulțimea majoranților, cât și mulțimea minoranților lui S pot fi vide.
- Atât supremumul, cât și infimumul lui S sunt unice (dacă există).

Mulțimi bine/inductiv ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

Spunem că $(A, \leq)$ este mulțime bine ordonată dacă orice submulțime nevidă a lui A are minim. În acest caz, $\leq$ se numește relație de bună ordonare pe A.

Exemple

$(\mathbb{N}, <)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, <)$ nu este bine ordonată.

Observație

Orice mulțime bine ordonată este total ordonată.

Definiție

$(A, \leq)$ se numește inductiv ordonată dacă orice submulțime total ordonată a sa admite un majorant.

Axioma alegerii (în engleză Axiom of Choice*) (AC)*

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci există o funcție f_C care asociază la fiecare $i \in I$ un element $f_C(i) \in A_i$.

- formulată de Zermelo (1904)
- a provocat discuții aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi funcția alegere f_C.

Reformulare

Următoarea afirmație este echivalentă cu Axioma alegerii:
Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci $\prod_{i \in I} A_i$ este o mulțime nevidă.

Axioma alegerii

- Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- Cohen (1963) a demonstrat că negația axiomei alegerii este consistentă cu ZF. Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF. Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

Teoremă

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- Lema lui Zorn Orice mulțime inductiv ordonată are un element maximal.
- Principiul bunei ordonări: Orice mulțime nevidă X poate fi bine ordonată (adică, pentru orice X există o relație binară $\leq$ pe X a.î. $(X, \leq)$ este mulțime bine ordonată).

H. Rubin, J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice II, North Holland, Elsevier, 1985

Cardinale

- O mulțime se numește finită dacă are un număr finit de elemente. O mulțime care nu este finită se numește infinită.
- Numărul elementelor unei mulțimi finite A se notează $\mid A \mid$ și se mai numește și cardinalul lui A.

Numerele cardinale sau cardinalele sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.
Există o definiție riguroasă în teoria mulțimilor a cardinalului unei mulțimi, datorată lui von Neumann. Pentru orice mulțime A, cardinalul lui A, notat $\mid A \mid$, este tot o mulțime. Colecția tuturor cardinalelor nu este mulțime, ci clasă.

Cardinale

- $\mid A \mid = \mid B \mid$ ddacă A și B sunt echipotente.
- Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele transfinite sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- $\mid \mathbb{N} \mid$ se notează $\aleph_0$ (se citește *alef zero*).
- $\mid \mathbb{R} \mid$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și puterea continuumului.
- O mulțime A este numărabilă ddacă $\mid A \mid = \aleph_0$.
- $\mid 2^{\mathbb{N}} \mid \neq \aleph_0$.
- $\mid 2^{\mathbb{N}} \mid = \mathfrak{c}$.

Definim următoarea relație pe clasa tuturor cardinalelor: pentru orice două mulțimi A, B,

$$| A | \leq | B | \iff \text{există } f : A \to B \text{ funcție injectivă.}$$

Teorema Cantor-Schröder-Bernstein

Dacă există două funcții injective $f : A \to B$ și $g : B \to A$, atunci A și B sunt echipotente. Altfel scris, dacă $| A | \leq | B |$ și $| B | \leq | A |$, atunci $| A | = | B |$.

Proprietăți

- $\leq$ este o relație de ordine totală.
- Orice cardinal are un unic succesor, adică pentru orice cardinal κ există un unic cardinal κ^+ a.î. $\kappa < \kappa^+$ și nu există cardinale ν a.î. $\kappa < \nu < \kappa^+$.
- $\aleph_0$ este cel mai mic cardinal transfinit. Succesorul lui $\aleph_0$ se notează $\aleph_1$.

Ipoteza continuumului (Continuum Hypothesis (CH))

$$\text{Nu există nicio mulțime } S \text{ a.î. } \aleph_0 < |S| < \mathfrak{c}.$$
$$\Updownarrow$$
$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

- avansată de Cantor în 1878.
- prima problemă din lista lui Hilbert de 23 probleme prezentate în 1900.
- Gödel (1940) a demonstrat că (CH) este consistentă cu ZFC.
- Cohen (1963) a demonstrat că negația lui (CH) este consistentă cu ZFC. Prin urmare, (CH) este independentă de ZFC.