Geometrie Computațională – Preliminarii

Mihai-Sorin Stupariu

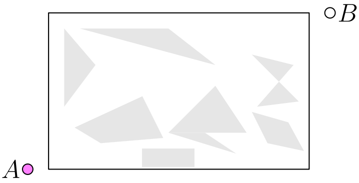
Sem. I, 2017 - 2018

Introducere

- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]

Introducere

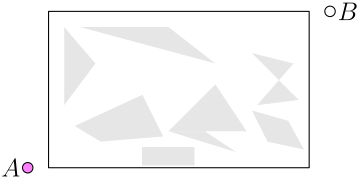
- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- Problemă (exemplu):



Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?

Introducere

- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- Problemă (exemplu):

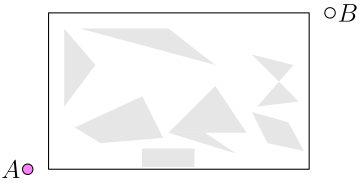


Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?

- Complexitatea: memorie, timp, calcule

Introducere

- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- Problemă (exemplu):

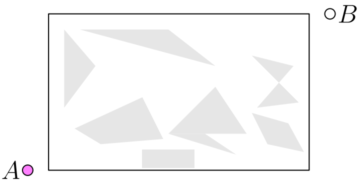


Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?

- Complexitatea: memorie, timp, calcule
- Probleme abordate: acoperiri convexe, proximitate, intersecții, căutare, etc.

Introducere

- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- Problemă (exemplu):



Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?

- Complexitatea: memorie, timp, calcule
- Probleme abordate: acoperiri convexe, proximitate, intersecții, căutare, etc.
- Tehnici utilizate: construcții incrementale, divide et impera, plane-sweep, transformări geometrice, etc.

Introducere

- Note istorice:

Introducere

- Note istorice:
  - Ideea de construcție geometrică realizată într-un număr finit de pași: Elementele lui Euclid

Introducere

- Note istorice:
  - Ideea de construcție geometrică realizată într-un număr finit de pași: Elementele lui Euclid
  - Abordare numerică - sistem de coordonate în plan: Descartes (sec. XVII)

Introducere

- Note istorice:
  - Ideea de construcție geometrică realizată într-un număr finit de pași: Elementele lui Euclid
  - Abordare numerică - sistem de coordonate în plan: Descartes (sec. XVII)
  - "Simplicitatea" construcțiilor geometrice: Lemoine ($\sim$ 1900)

Introducere

- Note istorice:
  - Ideea de construcție geometrică realizată într-un număr finit de pași: Elementele lui Euclid
  - Abordare numerică - sistem de coordonate în plan: Descartes (sec. XVII)
  - "Simplicitatea" construcțiilor geometrice: Lemoine ($\sim$ 1900)
  - a doua jumătate a sec. XX: formularea / rezolvarea unor probleme de GC; în 1975 este folosit prima dată termenul de *Computational Geometry* (M.I. Shamos, "Geometric Complexity", Proc. 7th ACM Annual Symposium on Theory of Computing)

Introducere

- Note istorice:
  - Ideea de construcție geometrică realizată într-un număr finit de pași: Elementele lui Euclid
  - Abordare numerică - sistem de coordonate în plan: Descartes (sec. XVII)
  - "Simplicitatea" construcțiilor geometrice: Lemoine ($\sim$ 1900)
  - a doua jumătate a sec. XX: formularea / rezolvarea unor probleme de GC; în 1975 este folosit prima dată termenul de *Computational Geometry* (M.I. Shamos, "Geometric Complexity", Proc. 7th ACM Annual Symposium on Theory of Computing)
- Domenii de aplicabilitate: grafică pe calculator, pattern recognition, robotică, statistică, gestionarea bazelor de date numerice, cercetări operaționale

Criterii numerice — poziția relativă a unor puncte

- Stabilirea unor relații între puncte / ordonare

Criterii numerice – poziția relativă a unor puncte

- Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- **Context 1D**

Criterii numerice — poziția relativă a unor puncte

- Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- **Context 1D**
  - ordonare (**relativ la un sistem de coordonate**)

Criterii numerice — poziția relativă a unor puncte

- Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- **Context 1D**
  - ordonare (**relativ la un sistem de coordonate**)
  - raport (**independent de alegerea unui sistem de coordonate**)

Criterii numerice — poziția relativă a unor puncte

- Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- **Context 1D**
  - ordonare (**relativ la un sistem de coordonate**)
  - raport (**independent de alegerea unui sistem de coordonate**)
- **Context 2D**

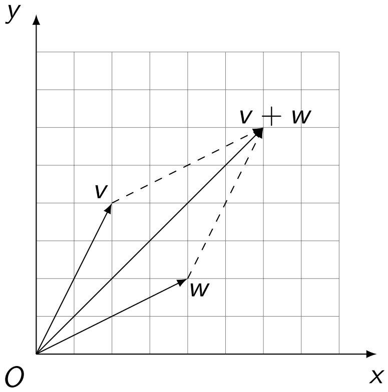
Criterii numerice — poziția relativă a unor puncte

- Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- **Context 1D**
  - ordonare (**relativ la un sistem de coordonate**)
  - raport (**independent de alegerea unui sistem de coordonate**)
- **Context 2D**
  - ordonare (**relativ la un sistem de coordonate** — posibile alegeri: coordonate carteziene, coordonate polare)

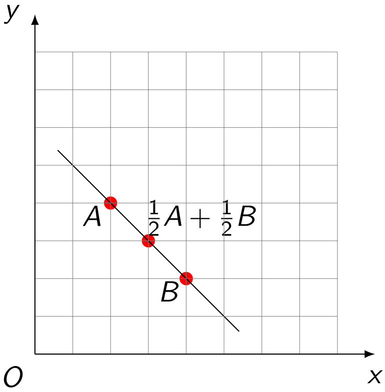
Criterii numerice – poziția relativă a unor puncte

- Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- **Context 1D**
  - ordonare (**relativ la un sistem de coordonate**)
  - raport (**independent de alegerea unui sistem de coordonate**)
- **Context 2D**
  - ordonare (**relativ la un sistem de coordonate** – posibile alegeri: coordonate carteziene, coordonate polare)
  - testul de orientare (**independent de alegerea unui sistem cartezian de coordonate**)

Vectori și puncte



Combinații liniare
$\alpha v + \beta w \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$



Combinații afine
$\lambda A + \mu B \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ **și** $\lambda + \mu = 1)$

Conceptul de raport

- **Lemă** Fie A și B două puncte distincte în $\mathbb{R}^n$. Pentru orice punct $P \in AB$, $P \neq B$ există un unic scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ astfel ca $\overrightarrow{AP} = r\ \overrightarrow{PB}$. Reciproc, fiecărui scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, îi corespunde un unic punct $P \in AB$.

Conceptul de raport

- **Lemă** Fie A și B două puncte distincte în $\mathbb{R}^n$. Pentru orice punct $P \in AB$, $P \neq B$ există un unic scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ astfel ca $\overrightarrow{AP} = r\ \overrightarrow{PB}$. Reciproc, fiecărui scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, îi corespunde un unic punct $P \in AB$.
- **Definiție** Scalarul r definit în lema anterioară se numește **raportul** punctelor A, B, P (sau **raportul în care punctul** P **împarte segmentul** $[AB]$) și este notat cu $r(A, P, B)$.

Conceptul de raport

- **Lemă** Fie A și B două puncte distincte în $\mathbb{R}^n$. Pentru orice punct $P \in AB$, $P \neq B$ există un unic scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ astfel ca $\overrightarrow{AP} = r \ \overrightarrow{PB}$. Reciproc, fiecărui scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, îi corespunde un unic punct $P \in AB$.
- **Definiție** Scalarul r definit în lema anterioară se numește **raportul** punctelor A, B, P (sau **raportul în care punctul P împarte segmentul** $[AB]$) și este notat cu $r(A, P, B)$.
- **Observație importantă.** În calcularea raportului, ordinea punctelor este esențială. Modul în care este definită această noțiune (mai precis ordinea în care sunt considerate punctele) diferă de la autor la autor.

Exemple

(i) În $\mathbb{R}^3$ considerăm punctele $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (0, 3, 7)$. Atunci punctele A, B, C sunt coliniare și avem $r(A, C, B) = -\frac{1}{2}$, $r(B, C, A) = -2$, $r(C, A, B) = 1$, $r(C, B, A) = -2$.

(ii) Fie A, B două puncte din $\mathbb{R}^n$ și $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Atunci $r(A, M, B) = 1$, $r(M, A, B) = -\frac{1}{2}$.

Legătura dintre raport și combinații afine. Interpretare

- **Propoziție** *Fie* A, B, P *trei puncte coliniare, cu* $P \neq B$. *Atunci:*

  (i) $P = \frac{1}{r+1}A + \frac{r}{r+1}B$, *unde* $r = r(A, P, B)$;

  (ii) $P = (1-\alpha)A + \alpha B$ *dacă și numai dacă* $r(A, P, B) = \frac{\alpha}{1-\alpha}$;

  (iii) $P = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B$ *dacă și numai dacă* $r(A, P, B) = \frac{\beta}{\alpha}$.

Legătura dintre raport și combinații afine. Interpretare

- **Propoziție** *Fie A, B, P trei puncte coliniare, cu $P \neq B$. Atunci:*

  (i) $P = \frac{1}{r+1}A + \frac{r}{r+1}B$, unde $r = r(A, P, B)$;

  (ii) $P = (1-\alpha)A + \alpha B$ dacă și numai dacă $r(A, P, B) = \frac{\alpha}{1-\alpha}$;

  (iii) $P = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B$ dacă și numai dacă $r(A, P, B) = \frac{\beta}{\alpha}$.
- **Observație.** Fie $P \in AB \setminus \{A, B\}$. Atunci:

  (i) $r(A, P, B) > 0$ dacă și numai dacă $P \in (AB)$;

  (ii) $r(B, P, A) = \frac{1}{r(A,P,B)}$.

Coordonate carteziene și coordonate polare

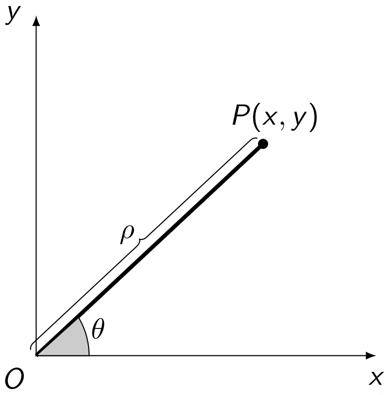
- Coordonate carteziene (x, y) și coordonate polare (ρ, θ) (pentru puncte din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care relațiile au sens):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases}$$

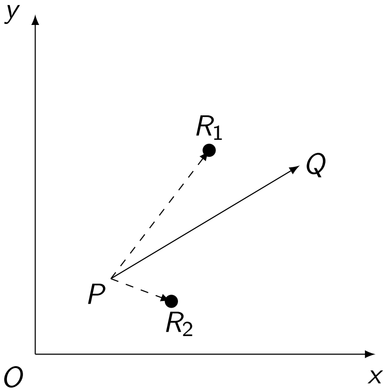
Coordonate carteziene și coordonate polare

- Coordonate carteziene (x, y) și coordonate polare (ρ, θ) (pentru puncte din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care relațiile au sens):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases}$$

- 

Motivație



Poziția relativă a două puncte față de un vector / o muchie orientată

Produs vectorial & aplicații

- Fie vectorii $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{R}^3$.
  Produsul vectorial $v \times w$ se calculează dezvoltând **determinantul formal**

$$v \times w = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

Produs vectorial & aplicații

- Fie vectorii $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{R}^3$.
  Produsul vectorial $v \times w$ se calculează dezvoltând **determinantul formal**
  $$v \times w = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix}$$
- **Notație** Fie $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ două puncte distincte din planul $\mathbf{R}^2$, fie $R = (r_1, r_2)$ un punct arbitrar. Notăm
  $$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Produs vectorial & aplicații

- Fie vectorii $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{R}^3$.
  Produsul vectorial $v \times w$ se calculează dezvoltând **determinantul formal**
$$v \times w = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix}$$
- **Notație** Fie $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ două puncte distincte din planul $\mathbf{R}^2$, fie $R = (r_1, r_2)$ un punct arbitrar. Notăm
$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$
- **Lemă.** *Fie P, Q, R puncte din $\mathbf{R}^2 \simeq \{x \in \mathbf{R}^3 | x_3 = 0\}$. Atunci*
$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (0, 0, \Delta(P, Q, R)).$$

Enunț principal

- **Propoziție.** *Fie* $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ *două puncte distincte din planul* $\mathbf{R}^2$, *fie* $R = (r_1, r_2)$ *un punct arbitrar și*

$$\Delta(P,Q,R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Atunci R *este situat:*
(i) pe dreapta $PQ \Leftrightarrow \Delta(P,Q,R) = 0$ *("ecuația dreptei");*
(ii) "în dreapta" segmentului orientat $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P,Q,R) < 0$*;*
(iii) "în stânga" segmentului orientat $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P,Q,R) > 0$*.*

Enunț principal

- **Propoziție.** *Fie* $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ *două puncte distincte din planul* $\mathbf{R}^2$, *fie* $R = (r_1, r_2)$ *un punct arbitrar și*

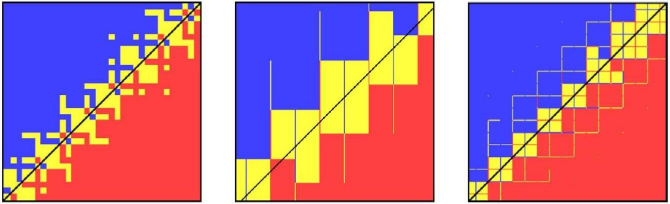
$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Atunci R *este situat:*
(i) pe dreapta $PQ \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) = 0$ *("ecuația dreptei");*
(ii) "în dreapta" segmentului orientat $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) < 0$*;*
(iii) "în stânga" segmentului orientat $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) > 0$*.*

- **Obs.** Testul de orientare se bazează pe calculul unui polinom de gradul II ($\Delta(P, Q, R)$).

Limitări - robustețe și erori de rotunjire

L. Kettner et al. / Computational Geometry 40 (2008) 61–78 65



(a) $p: \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $q: \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$, $r: \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0.50000000000002531 \\ 0.5000000000000171 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 17.300000000000001 \\ 17.300000000000001 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 24.00000000000005 \\ 24.0000000000000517765 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8.8000000000000007 \\ 8.8000000000000007 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12.1 \\ 12.1 \end{pmatrix}$

Fig. 2. The weird geometry of the float-orientation predicate: The figure shows the results of *float_orient*$(p_x + Xu_x, p_y + Yu_y, q, r)$ for $0 \leqslant X, Y \leqslant 255$, where $u_x = u_y = 2^{-53}$ is the increment between adjacent floating-point numbers in the considered range. The result is color coded: Yellow (red, blue, resp.) pixels represent collinear (negative, positive, resp.) orientation. The line through q and r is shown in black.

Sursa: Kettner et al, *Classroom examples of robustness problems in geometric computations*, 2008

Aplicații

- dacă un punct este în dreapta / stânga unei muchii orientate;

Aplicații

- dacă un punct este în dreapta / stânga unei muchii orientate;
- natura unui viraj în parcurgerea unei linii poligonale (la dreapta / la stânga);

Aplicații

- dacă un punct este în dreapta / stânga unei muchii orientate;
- natura unui viraj în parcurgerea unei linii poligonale (la dreapta / la stânga);
- natura unui poligon (convex / concav);

Aplicații

- dacă un punct este în dreapta / stânga unei muchii orientate;
- natura unui viraj în parcurgerea unei linii poligonale (la dreapta / la stânga);
- natura unui poligon (convex / concav);
- dacă două puncte sunt de o parte și de alta a unui segment / a unei drepte.