FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2016/2017
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

Seminar 13

(S13.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\varphi \tag{1}$$
$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \wedge \forall x\psi \tag{2}$$
$$\exists x(\varphi \vee \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \vee \exists x\psi \tag{3}$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \to \forall x\psi \tag{4}$$
$$\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\psi \to \varphi \tag{5}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

$\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\varphi$:
$\mathcal{A} \vDash \exists x\varphi[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$, deoarece $x \notin FV(\varphi)$ (aplicând Propoziţia 2.25).

$\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \wedge \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e]$ $\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\varphi \vee \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \vee \exists x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \exists x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \exists x\psi)[e]$.

$\forall x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \varphi \to \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \forall x\psi \to \varphi$:
$\mathcal{A} \vDash \exists x(\psi \to \varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \forall x\psi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi \to \varphi)[e]$.

□

(S13.2) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x,
$$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$$
este validă (A2);

(ii) pentru orice formulă φ şi orice variabilă x cu $x \notin Var(\varphi)$,
$$\varphi \to \forall x\varphi$$
este validă (A3);

(iii) pentru orice variabilă x şi orice termen t cu $x \notin Var(t)$,
$$\exists x(x = t)$$
este validă (A4).

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare.

(i) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, vom avea că are loc $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$ (*). Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[e]$. Presupunem prin absurd că nu e aşa – atunci avem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \nvDash (\forall x\psi)[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ (**) şi există un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$ (***). Luând în (*) şi (**) $a := b$, obţinem că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow b}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$, ceea ce contrazice (***).

(ii) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. Vrem să arătăm $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Clar $FV(\varphi) \subseteq Var(\varphi)$. Cum $x \notin Var(\varphi)$, $x \notin FV(\varphi)$. Avem că e şi $e_{x\leftarrow a}$ diferă cel mult pe "poziţia" x, deci restricţionate la $FV(\varphi)$ ele devin egale. Aplicând Propoziţia 2.25, rezultă că avem într-adevăr $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

(iii) Trebuie arătat, folosind (S12.1).(iv), că există un $b \in A$ astfel încât $\mathcal{A} \vDash (x = t)[e_{x\leftarrow b}]$, i.e. că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow b})$. Cum $x \notin Var(t)$, aplicând Propoziţia 2.24, avem $t^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow b}) = t^{\mathcal{A}}(e)$. Deci trebuie arătat doar că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e)$. Dar acum e simplu, luăm $b := t^{\mathcal{A}}(e)$.

□

(S13.3) Să se axiomatizeze:

(i) clasa mulţimilor strict ordonate care au un element minimal;

(ii) clasa mulţimilor strict ordonate care au un element maximal;

(iii) clasa mulţimilor strict ordonate cu proprietatea că orice element are un unic succesor.

Demonstraţie: Folosim notaţiile din curs. Se ia $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<})$.

(i) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (MINIMAL)))$, unde

$$(MINIMAL): \quad \exists x \forall y \neg(y \dot{<} x)$$

(ii) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (MAXIMAL)))$, unde

$$(MAXIMAL): \quad \exists x \forall y \neg(x \dot{<} y)$$

(iii) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (SUCC)))$, unde

$$(SUCC): \quad \forall x \exists y (x \dot{<} y \wedge \forall z (x \dot{<} z \rightarrow (z = y \vee y \dot{<} z)))$$

□

(S13.4) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile care au cel puţin un drum de lungime 3;

(iii) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3;

(iv) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;

(v) grafurile infinite.

Demonstraţie: Folosim notaţiile din curs. Se ia $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E})$. Teoria grafurilor este $Th((IREFL),(SIM))$.

(i) Adaug enunţul

$$\varphi = \forall x \forall y (\neg(x = y) \to \dot{E}(x, y)).$$

Deci, $Th((IREFL),(SIM),\varphi)$.

(ii) Adaug enunţul

$$\varphi = \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \exists v_4 \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 4} \neg(v_i = v_j) \wedge \dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_4) \right).$$

Deci, $Th((IREFL),(SIM),\varphi)$.

(iii) Adaug enunţul

$$\varphi = \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \left(\dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_1) \right).$$

Deci, $Th((IREFL),(SIM),\varphi)$.

(iv) Adaug enunţul

$$\varphi = \forall x \exists y \dot{E}(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (\dot{E}(x, y) \wedge \dot{E}(x, z) \Rightarrow y = z).$$

Deci, $Th((IREFL),(SIM),\varphi)$.

(v) Adaug mulţimea de enunţuri

$$\Gamma := \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 2\}.$$

Deci, $Th((IREFL),(SIM),\Gamma)$.

$\square$