Propoziția 1.14

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

(*) $\quad e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ ddacă pentru orice evaluări
$e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.

Propoziția 1.14

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$,

(*) $\quad e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$ și ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\varphi) = Var(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$. Așadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface $\boldsymbol{P}$.

Propoziția 1.14

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

(*) $\quad e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: (continuare)

- $\varphi = (\psi \to \chi)$ și ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\psi) \subseteq Var(\varphi)$ și $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi) \cap Var(\chi)$. Așadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ și χ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \to e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \to e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface $\boldsymbol{P}$. $\square$

Modele. Satisfiabilitate. Tautologii

Fie φ o formulă.

Definiția 1.15

- O evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notație: $e \vDash \varphi$.
- φ este satisfiabilă dacă admite un model.
- Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este nesatisfiabilă sau contradictorie.
- φ este tautologie dacă orice evaluare este model al lui φ. Notație: $\vDash \varphi$.

Notație: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziția 1.16

(i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Dem.: Exercițiu.

Propoziție

Există o mulțime numărabilă de formule φ a.î. atât φ cât și $\neg\varphi$ sunt satisfiabile.

Dem.: Demonstrăm că mulțimea $V = \{\varphi_n := v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Form$ satisface condiția din enunț. Fie $n \in \mathbb{N}$. Considerăm interpretările $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$ definite astfel

$$e_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}, \quad e_2(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}.$$

Atunci

$$e_1^+(\varphi_n) = e_1^+(v_n) = e_1(v_n) = 1,$$

deci $e_1 \vDash \varphi_n$. Pe de altă parte,

$$e_2^+(\neg\varphi_n) = e_2^+(\neg v_n) = \neg e_2^+(v_n) = \neg e_2(v_n) = \neg 0 = 1,$$

deci $e_2 \vDash \neg\varphi_n$. $\square$

Metoda tabelului

Fie φ o formulă arbitrară și $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \ldots, e(x_k)$, conform Propoziției 1.14.
Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \ldots, x_k\} \to \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k de astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2 \ldots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$ subformule ale lui φ $\ldots$	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	$\ldots$	$e'_1(x_k)$	$\ldots$	${e'_1}^+(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	$\ldots$	$e'_2(x_k)$	$\ldots$	${e'_2}^+(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	$\ldots$	$e'_{2^k}(x_k)$	$\ldots$	${e'_{2^k}}^+(\varphi)$

Pentru orice i, ${e'_i}^+(\varphi)$ se definește similar cu Teorema 1.12

φ este tautologie ddacă ${e'_i}^+(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, 2^k\}$.

Metoda tabelului

Exemplu:

Fie

$$\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \land v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

$$Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

v_1	v_2	$v_1 \land v_2$	$v_2 \rightarrow (v_1 \land v_2)$	φ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Definiția 1.17

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- φ este consecință semantică a lui ψ dacă $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$. Notație: $\psi \vDash \varphi$.
- φ și ψ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$. Notație: $\varphi \sim \psi$.

Observație

Relația $\sim$ este o relație de echivalență pe mulțimea *Form* a formulelor lui *LP*.

Propoziția 1.18

Fie φ, ψ formule. Atunci

(i) $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\vDash \psi \to \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.19

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

terțul exclus	$\vDash \varphi \vee \neg\varphi$	(1)
modus ponens	$\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \psi$	(2)
afirmarea concluziei	$\psi \vDash \varphi \to \psi$	(3)
contradicția	$\vDash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	(4)
dubla negație	$\varphi \sim \neg\neg\varphi$	(5)
contrapoziția	$\varphi \to \psi \sim \neg\psi \to \neg\varphi$	(6)
negarea premizei	$\neg\varphi \vDash \varphi \to \psi$	(7)
modus tollens	$\neg\psi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \neg\varphi$	(8)
tranzitivitatea implicației	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$	(9)

Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

legile lui de Morgan	$\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$	(10)
	$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$	(11)
exportarea și importarea	$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \varphi \wedge \psi \to \chi$	(12)
idempotența	$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$	(13)
slăbirea	$\models \varphi \wedge \psi \to \varphi \qquad \models \varphi \to \varphi \vee \psi$	(14)
comutativitatea	$\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \qquad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$	(15)
asociativitatea	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	(16)
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$	(17)
absorbția	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$	(18)
	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$	(19)
distributivitatea	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	(20)
	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	(21)

$$\varphi \to \psi \land \chi \sim (\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \to \psi \lor \chi \sim (\varphi \to \psi) \lor (\varphi \to \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \land \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \lor (\psi \to \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \lor \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \land (\psi \to \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \psi \to (\varphi \to \chi) \sim (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi) \quad (26)$$

$$\neg\varphi \sim \varphi \to \neg\varphi \sim (\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \neg\psi) \quad (27)$$

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \lor \psi \sim \neg(\varphi \land \neg\psi) \quad (28)$$

$$\varphi \lor \psi \sim \varphi \lor (\neg\varphi \land \psi) \sim (\varphi \to \psi) \to \psi \quad (29)$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$

$$\models (\varphi \to \psi) \lor (\neg\varphi \to \psi) \quad (31)$$

$$\models (\varphi \to \psi) \lor (\varphi \to \neg\psi) \quad (32)$$

$$\models \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi)) \quad (33)$$

$$\models (\varphi \to \psi) \to (((\varphi \to \chi) \to \psi) \to \psi) \quad (34)$$

Dem.: Exercițiu.

Exemplu de demonstrație

Demonstrăm (1): $\models \varphi \vee \neg\varphi$.
Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$.
Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$. $\square$

Substituția

Definiția 1.20

Pentru orice formule φ, χ, χ', definim

$\varphi_\chi(\chi')$:= expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui χ cu χ'.

$\varphi_\chi(\chi')$ se numește substituția lui χ cu χ' în φ. Spunem și că $\varphi_\chi(\chi')$ este o instanță de substituție a lui φ.

- $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$.
- Dacă χ nu este subformulă a lui φ, atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$.

Exemple:

Fie $\varphi = (v_1 \to v_2) \to \neg(v_1 \to v_2)$.

- $\chi = v_1 \to v_2$, $\chi' = v_4$. $\varphi_\chi(\chi') = v_4 \to \neg v_4$
- $\chi = v_1$, $\chi' = \neg\neg v_2$. $\varphi_\chi(\chi') = (\neg\neg v_2 \to v_2) \to \neg(\neg\neg v_2 \to v_2)$
- $\chi = v_1 \to v_2$, $\chi' = v_4 \vee v_1$. $\varphi_\chi(\chi') = (v_4 \vee v_1) \to \neg(v_4 \vee v_1)$

Propoziția 1.21

Pentru orice formule φ, χ, χ', $\varphi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.

Dem.: Demonstrăm prin inducție după formula φ. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci
$$v_\chi(\chi') = \begin{cases} \chi' & \text{dacă } \chi = v \\ v & \text{dacă } \chi \neq v. \end{cases}$$
Prin urmare, $v_\chi(\chi')$ este formulă.
- $\varphi = \neg\psi$ și $\psi_\chi(\chi')$ este formulă. Dacă χ nu apare în φ, atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$, deci este formulă. Dacă χ este subformulă a lui φ, atunci avem două cazuri:
  - *(i)* $\chi = \varphi$. Rezultă că $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$ este formulă.
  - *(ii)* χ este subformulă a lui ψ. Atunci $\varphi_\chi(\chi') = \neg\psi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.

Substituția

- $\varphi = \psi \to \theta$ și $\psi_\chi(\chi')$, $\theta_\chi(\chi')$ sunt formule. Dacă χ nu apare în φ, atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$. Dacă χ este subformulă a lui φ, atunci avem două cazuri:
  - *(i)* $\chi = \varphi$. Rezultă că $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$.
  - *(ii)* χ este subformulă a lui ψ sau θ (e posibil sa apară atât în ψ cât și în θ). Atunci
  $$\varphi_\chi(\chi') = \psi_\chi(\chi') \to \theta_\chi(\chi')$$
  este de asemenea formulă.

$\square$

Propoziția 1.22

Pentru orice formule φ, χ, χ',

$$\chi \sim \chi' \quad \text{implică} \quad \varphi \sim \varphi_\chi(\chi').$$

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

Propoziția 1.22 poate fi aplicată pentru a arăta că o formulă este tautologie.

Exemplu:

Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ, formula $\theta = (\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg(\varphi \to \psi)$ este tautologie.

Dem.: Conform (28), $\neg\varphi \vee \psi \sim \varphi \to \psi$. Aplicăm Propoziția 1.22 cu $\chi = \neg\varphi \vee \psi$ și $\chi' = \varphi \to \psi$ pentru a obține că $\theta \sim (\varphi \to \psi) \vee \neg(\varphi \to \psi)$. Pe de altă parte, $(\varphi \to \psi) \vee \neg(\varphi \to \psi)$ este tautologie, din (1). Prin urmare, θ este tautologie. $\square$

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare și $v \in V$ o variabilă.

Notație

Pentru orice $a \in \{0, 1\}$, definim evaluarea $e_{v \leftarrow a} : V \to \{0, 1\}$ prin

$$e_{v \leftarrow a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

Propoziția 1.23

Fie θ o formulă și $a := e^+(\theta)$. Atunci pentru orice formulă φ,

$$(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = e^+(\varphi_v(\theta)).$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Propoziția 1.24

Pentru orice formule φ, ψ, θ și orice variabilă $v \in V$,

(i) $\varphi \sim \psi$ implică $\varphi_v(\theta) \sim \psi_v(\theta)$.

(ii) Dacă φ este tautologie atunci și $\varphi_v(\theta)$ este tautologie.

(iii) Dacă φ este nesatisfiabilă, atunci și $\varphi_v(\theta)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară și $a := e^+(\theta)$. Aplicând Propoziția 1.23, rezultă că $e^+(\varphi_v(\theta)) = (e_{v\leftarrow a})^+(\varphi)$ și $e^+(\psi_v(\theta)) = (e_{v\leftarrow a})^+(\psi)$.

(i) Deoarece $\varphi \sim \psi$, avem că $(e_{v\leftarrow a})^+(\varphi) = (e_{v\leftarrow a})^+(\psi)$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = e^+(\psi_v(\theta))$.

(ii) Deoarece φ este tautologie, avem că $(e_{v\leftarrow a})^+(\varphi) = 1$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = 1$.

(iii) Deoarece φ este nesatisfiabilă, avem că $(e_{v\leftarrow a})^+(\varphi) = 0$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = 0$. $\square$

$\top$ și $\perp$

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație

$v_0 \to v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \to v_0)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Exercițiu.

Notații

Notăm $v_0 \to v_0$ cu $\top$ și o numim adevărul. Notăm $\neg(v_0 \to v_0)$ cu $\perp$ și o numim falsul.

- φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \perp$.

Conjuncții și disjuncții finite

Notații

Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$. Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$
$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \ldots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$.
- $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$.

Propoziția 1.25

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

- $e^+(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $e^+(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru un $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.26

$$
\begin{array}{rcl}
\neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) & \sim & \neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n \\
\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) & \sim & \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n
\end{array}
$$

Dem.: Exercițiu.

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.27

- O evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \vDash \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).
  Notație: $e \vDash \Gamma$.
- Γ este satisfiabilă dacă are un model.
- Γ este finit satisfiabilă dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.
- Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este nesatisfiabilă sau contradictorie.

Notații: Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.
Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

- $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$.

Mulțimi de formule

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 1.28

O formulă φ este consecință semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$. Notație: $\Gamma \vDash \varphi$.

Notăm cu $Cn(\Gamma)$ mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ. Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Definiția 1.29

- Δ este consecință semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$. Notație: $\Gamma \vDash \Delta$.
- Γ și Δ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$. Notație: $\Gamma \sim \Delta$.

Proprietăți

Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

Observație

- $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \{\varphi\}$.
- $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 1.30

(i) $Mod(\emptyset) = \{0,1\}^V$, adică orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.

(ii) $Cn(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \vDash \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.