Definiția 1.75

O funcție booleană este o funcție $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, unde $n \geq 1$. Spunem că n este numărul variabilelor lui F.

Exemplu: Pentru orice formulă φ, F_φ este funcție Booleană cu n variabile, unde $n = |Var(\varphi)|$.

Teorema 1.76

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă φ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 0$ pentru orice $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, luăm $\varphi := \bigvee_{i=0}^{n-1} (v_i \wedge \neg v_i)$. Avem că $Var(\varphi) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$, așadar, $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Cum $v_i \wedge \neg v_i$ este nesatisfiabilă pentru orice i, rezultă că φ este de asemenea nesatisfiabilă. Deci, F_φ este de asemenea funcția constantă 0.

Altcumva, mulțimea

$$T := H^{-1}(1) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 1\}$$

este nevidă.
Considerăm formula

$$\varphi := \bigvee_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in T} \left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} v_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg v_i \right).$$

Deoarece $Var(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, avem că $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Demonstrăm că pentru orice $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{0,1\}^n$, avem că

$$F_\varphi(\delta_1, \ldots, \delta_n) = 1 \iff H(\delta_1, \ldots, \delta_n) = 1,$$

de unde va rezulta imediat că $H = F_\varphi$.

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e(v_i) = \delta_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Atunci

$$
\begin{aligned}
e^+(\varphi) = 1 \quad & \iff \quad \bigvee_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in T}\left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} e(v_i) \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg e(v_i)\right) = 1 \\
& \iff \quad \bigvee_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in T}\left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} \delta_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg \delta_i\right) = 1 \\
& \iff \quad \text{există } (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in T \text{ a.î. } \bigwedge_{\varepsilon_i=1} \delta_i = 1 \\
& \qquad\quad \text{și } \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg \delta_i = 1 \\
& \iff \quad \text{există } (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in T \text{ a.î. } \delta_i = \varepsilon_i \\
& \qquad\quad \text{pentru orice } i \in \{1, \ldots, n\} \\
& \iff \quad (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in T \\
& \iff \quad H(\delta_1, \ldots, \delta_n) = 1.
\end{aligned}
$$

Prin urmare, $F_\varphi(\delta_1, \ldots, \delta_n) = 1 \iff e^+_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(\varphi) = 1$
$\iff e^+(\varphi) = 1$ pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e(v_i) = \delta_i$
pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\} \iff H(\delta_1, \ldots, \delta_n) = 1.$ $\square$

Teorema 1.77

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă ψ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 1$ pentru orice $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, atunci luăm

$$\psi := \bigwedge_{i=0}^{n-1} (v_i \vee \neg v_i).$$

Altcumva, mulțimea

$$F := H^{-1}(0) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 0\}$$

este nevidă.

Considerăm formula $\psi := \bigwedge_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in F} \left(\bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg v_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} v_i \right).$

Se demonstrează că $H = F_\psi$ (exercițiu!). $\square$

Caracterizarea funcțiilor Booleene

Exemplu: Fie $H : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ descrisă prin tabelul:

ε_1	ε_2	ε_3	$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	
0	0	0	0	$D_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$
0	0	1	0	$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$
0	1	0	1	$C_1 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
0	1	1	0	$D_3 = v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$
1	0	0	1	$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
1	0	1	1	$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$
1	1	0	1	$C_4 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
1	1	1	1	$C_5 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

$\varphi = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5$ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

$\psi = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Teorema 1.78

Orice formulă φ este echivalentă cu o formulă φ^{FND} în FND și cu o formulă φ^{FNC} în FNC.

Dem.:

Fie $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ și $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ funcția booleană asociată. Aplicând Teorema 1.76 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FND} în FND a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FND}}$. Așadar, conform Propoziției 1.74.(ii), $\varphi \sim \varphi^{FND}$.

Similar, aplicând Teorema 1.77 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FNC} în FNC a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FNC}}$. Prin urmare, $\varphi \sim \varphi^{FNC}$. $\square$

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Algoritm pentru a aduce o formulă la FNC/FND:

Pasul 1. Se înlocuiesc implicațiile și echivalențele, folosind:

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \quad \text{și} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi).$$

Pasul 2. Se înlocuiesc dublele negații, folosind $\neg\neg\psi \sim \psi$, și se aplică regulile De Morgan pentru a înlocui

$$\neg(\varphi \vee \psi) \text{ cu } \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \text{și} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \text{ cu } \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

Pasul 3. Pentru FNC, se aplică distributivitatea lui $\vee$ fața de $\wedge$, pentru a înlocui

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \text{ cu } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \text{ cu } (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi).$$

Pentru FND, se aplică distributivitatea lui $\wedge$ fața de $\vee$, pentru a înlocui

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \text{ cu } (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \vee \chi) \wedge \varphi \text{ cu } (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi).$$

Exemplu

Considerăm formula $\varphi := (\neg v_0 \to \neg v_2) \to (v_0 \to v_2)$.

Avem

$$
\begin{array}{lcll}
\varphi & \sim & \neg(\neg v_0 \to \neg v_2) \vee (v_0 \to v_2) & \text{Pasul 1} \\
 & \sim & \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (v_0 \to v_2) & \text{Pasul 1} \\
 & \sim & \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 1} \\
 & \sim & \neg(v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 2} \\
 & \sim & (\neg v_0 \wedge \neg\neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 2} \\
 & \sim & (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2 & \text{Pasul 2.}
\end{array}
$$

Putem lua $\varphi^{FND} := (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2$.

Pentru a obține FNC, continuăm cu Pasul 3:

$$
\begin{array}{lcl}
\varphi & \sim & (\neg v_0 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \\
 & \sim & (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2).
\end{array}
$$

Putem lua $\varphi^{FNC} := (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2)$. Se observă, folosind idempotența, că $\varphi^{FNC} \sim \neg v_0 \vee v_2$.

Definiția 1.79

O clauză este o mulțime finită de literali:

$$C = \{L_1, \ldots, L_n\}, \text{ unde } L_1, \ldots, L_n \text{ sunt literali.}$$

Dacă $n = 0$, obținem clauza vidă $\square := \emptyset$.

O clauză nevidă este considerată implicit o disjuncție.

Definiția 1.80

Fie C o clauză și $e : V \to \{0, 1\}$. Spunem că e este model al lui C sau că e satisface C și scriem $e \vDash C$ dacă există $L \in C$ a.î. $e \vDash L$.

Definiția 1.81

O clauză C se numește

(i) satisfiabilă dacă are un model.

(ii) validă dacă orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui C.

Definiția 1.82

O clauză C este trivială dacă există un literal L a.î. $L, L^c \in C$.

Propoziția 1.83

(i) Orice clauză nevidă este satisfiabilă.

(ii) Clauza vidă $\square$ este nesatisfiabilă.

(iii) O clauză este validă ddacă este trivială.

Dem.: Exercițiu.

Clauze

$\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ este o mulțime de clauze.
Dacă $m = 0$, obținem mulțimea vidă de clauze $\emptyset$.

$\mathcal{S}$ este considerată implicit ca o formulă în FNC: conjuncție de disjuncții ale literalilor din fiecare clauză.

Definiția 1.84

Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Spunem că e este model al lui $\mathcal{S}$ sau că e satisface $\mathcal{S}$ și scriem $e \vDash \mathcal{S}$ dacă $e \vDash C_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Definiția 1.85

$\mathcal{S}$ se numește

(i) satisfiabilă dacă are un model.

(ii) validă dacă orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui $\mathcal{S}$.

Clauze

Propoziția 1.86

- Dacă $\mathcal{S}$ conține clauza vidă $\square$, atunci $\mathcal{S}$ nu este satisfiabilă.
- $\emptyset$ este validă.

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ este satisfiabilă.

Dem.: Considerăm $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e(v_1) = e(v_2) = 1$. Atunci $e \vDash \mathcal{S}$. $\square$

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{v_3\}\}$ nu este satisfiabilă.

Dem.: Presupunem că $\mathcal{S}$ are un model e. Atunci $e(v_1) = e(v_3) = 1$ și, deoarece $e \vDash \{\neg v_3, \neg v_2\}$, trebuie să avem $e(v_2) = 0$. Rezultă că $e(v_2) = e(\neg v_1) = 0$, deci e nu satisface $\{\neg v_1, v_2\}$. Am obținut o contradicție. $\square$

Clauze și FNC

Unei formule φ în FNC îi asociem o mulțime de clauze $\mathcal{S}_\varphi$ astfel:

Fie

$$\varphi := \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right),$$

unde fiecare $L_{i,j}$ este literal. Pentru orice i, fie C_i clauza obținută considerând toți literalii $L_{i,j}, j \in \{1, \ldots, k_i\}$ distincți. Fie $\mathcal{S}_\varphi$ mulțimea tuturor clauzelor $C_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ distincte.

$\mathcal{S}_\varphi$ se mai numește și forma clauzală a lui φ.

Propoziția 1.87

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e \vDash \varphi$ ddacă $e \vDash \mathcal{S}_\varphi$.

Dem.: Exercițiu.