**FMI, Info, Anul I**
**Semestrul I, 2016/2017**
**Logică matematică şi computaţională**
**Laurenţiu Leuştean,**
**Alexandra Otiman, Andrei Sipoş**

# Seminar 3

**(S3.1)** Daţi exemple, pe rând, de relaţii care:

(i) sunt reflexive şi tranzitive, dar nu sunt simetrice;

(ii) sunt reflexive şi simetrice, dar nu sunt tranzitive;

(iii) sunt simetrice şi tranzitive, dar nu sunt reflexive.

**Demonstraţie:** Notăm, pentru orice mulţime $C$, $\Delta_C := \{(x,y) \in C \times C \mid x = y\}$ (**relaţia diagonală**).

(i) $\leq$ pe $\mathbb{Z}$; $\leq$ pe $\mathbb{R}$; relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$.

(ii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \cup \{(7,8),(8,7),(8,9),(9,8)\}$ pe $\mathbb{Z}$. Nu este tranzitivă, deoarece $(7,8) \in R$ şi $(8,9) \in R$, dar $(7,9) \notin R$. Alt exemplu este $R' = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x-y| \leq 1\}$ ($R'$ nu este tranzitivă, pentru că $(1,2)$ şi $(2,3)$ sunt în $R'$, dar $(1,3)$ nu este).

În general, o intuiţie potrivită pentru acest gen de relaţii este relaţia de prietenie între oameni (considerând că orice om este prieten cu sine). Doi oameni pot fi prieteni cu un al treilea fără să fie prieteni între ei. Pornind de la această idee, putem construi următorul exemplu "minimal" − luăm mulţimea $A := \{1,2,3\}$ şi relaţia $R$ pe ea egală cu $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$.

(iii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \setminus \{(7,7)\}$ pe $\mathbb{Z}$. Alt exemplu (tot pe $\mathbb{Z}$) este $R' = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \neq 0 \text{ şi } y \neq 0\}$.

Observăm, de asemenea, că pe orice mulţime nevidă relaţia vidă satisface condiţia (de ce, totuşi, relaţia vidă pe mulţimea vidă nu este un exemplu?). Un exemplu "minimal", dar nevid, este următorul: $A := \{1,2\}$, $R := \{(2,2)\}$.

$\square$

**(S3.2)** Fie $R \subseteq A \times A$ o relaţie descrisă în fiecare situaţie de mai jos. Verificaţi, pe rând, dacă $R$ este relaţie de ordine parţială, strictă sau totală sau relaţie de echivalenţă.

(i) $A = \mathbb{N}$ şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $a \mid b$.

(ii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ şi $(a, b)R(c, d)$ dacă şi numai dacă $a \leq b$ sau $b \leq d$.

(iii) $A = \mathbb{N}$ şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $b = a$ sau $b = a + 1$.

(iv) $A$ este mulţimea tuturor cuvintelor în limba engleză şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $a$ nu este mai lung ca $b$.

**Demonstraţie:**

(i) $R$ este

(a) tranzitivă: Fie $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in R$, deci $a \mid b$ şi $b \mid c$. Rezultă că $a \mid c$, deci $(a, c) \in R$.

(b) reflexivă: Pentru orice $a \in \mathbb{N}$, avem că $a \mid a$, deci $(a, a) \in R$.

(c) antisimetrică: Presupunem că $(a, b) \in R$ şi $(b, a) \in R$, deci că $a \mid b$ şi $b \mid a$. Deoarece $a, b \in \mathbb{N}$, rezultă că $a = b$.

$R$ nu este

(a) simetrică: avem că $(3, 6) \in R$, deoarece $3 \mid 6$. Pe de altă parte $6 \nmid 3$, prin urmare $(6, 3) \notin R$.

(b) totală: $2 \nmid 3$ şi $3 \nmid 2$. Aşadar, $(2, 3) \notin R$ şi $(3, 2) \notin R$.

Prin urmare, $R$ este relaţie de ordine parţială, dar $R$ nu este relaţie de ordine strictă sau totală şi nici relaţie de echivalenţă.

(ii) $R$ este reflexivă, deoarece $b \leq b$, prin urmare $(a, b)R(a, b)$ pentru orice $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aşadar, $R$ nu este relaţie de ordine strictă. Observăm că $R$ nu este

(a) simetrică: $(2, 2)R(4, 3)$, dar $((4, 3), (2, 2)) \notin R$.

(b) antisimetrică: $(3, 5)R(7, 2)$ (deoarece $3 \leq 5$) şi $(7, 2)R(3, 5)$ (deoarece $2 \leq 5$), dar $(3, 5) \neq (7, 2)$.

(c) tranzitivă: $(5, 4)R(5, 6)$ şi $(5, 6)R(3, 3)$, dar $((5, 4), (3, 3)) \notin R$.

Prin urmare, $R$ nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

(iii) În acest caz, $R = \Delta_{\mathbb{N}} \cup \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{N}\}$. Este clar că $R$ este reflexivă, deci $R$ nu este o relaţie de ordine strictă. Se observă că $R$ nu este tranzitivă: $(5,6) \in R$ şi $(6,7) \in R$, dar $(5,7) \notin R$. Prin urmare, $R$ nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

(iv) $R$ este reflexivă, deci $R$ nu este o relaţie de ordine strictă. Observăm că $R$ nu este

   (a) antisimetrică: dacă $(a,b)$ şi $(b,a)$ sunt în $R$, atunci $a$ şi $b$ au aceeaşi lungime, dar nu coincid neapărat. De exemplu, $a =$"do" şi $b =$"go".

   (b) simetrică: ("it", "and") $\in R$, dar ("and","it") $\notin R$.

   Prin urmare, $R$ nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

□

**Definiţia 1.** *Fie $A$ o mulţime şi $n \in \mathbb{N}$. Spunem că $A$* **are** $n$ **elemente** *dacă este echipotentă cu $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq n\}$ (mulţime notată şi $\{1, ..., n\}$).*

**Definiţia 2.** *O mulţime $A$ se numeşte* **finită** *dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A$ are $n$ elemente.*

**Definiţia 3.** *O mulţime se numeşte* **infinită** *dacă nu e finită.*

**(S3.3)** Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $A$ o mulţime infinită. Să se arate că există $B \subseteq A$ astfel încât $B$ are $n$ elemente.

**Demonstraţie:** Demonstrăm prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $n = 0$, iau $B := \emptyset$. Ea are 0 elemente, pentru că este echipotentă cu $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq 0\}$, care este tot $\emptyset$ (echipotenţa se realizează via "funcţia vidă", $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$).
Presupunem acum că am arătat existenţa unei mulţimi $C$ cu $n$ elemente şi dorim să construim o mulţime $B$ cu $n+1$ elemente. Fie $g : \{1, 2, ..., n\} \to C$ o bijecţie. Dacă am avea $C = A$, atunci existenţa lui $g$ ar indica faptul că $A$ este finită, contrazicând ipoteza noastră. Rămâne că există $x \in A \setminus C$. Luăm $B := C \cup \{x\}$. Definim $h : \{1, 2, ..., n+1\} \to B$, pentru orice $j \in \{1, 2, ..., n+1\}$, prin:

$$h(j) := \begin{cases} g(j), & \text{dacă } j \in \{1, 2, ..., n\} \\ x, & \text{dacă } j = n+1. \end{cases}$$

Avem că $h$ este bijecţia căutată. □

**(S3.4)** Fie $A, B$ mulţimi a.î. există $f : B \to A$ injectivă. Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă $B$ este infinită, atunci şi $A$ este infinită.

(ii) Dacă $B$ este infinită şi $A$ este numărabilă, atunci $B$ este numărabilă. În particular, orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.

**Demonstraţie:**

(i) Presupunem prin absurd că $A$ este finită. Atunci există $n$ astfel încât $A$ are $n$ elemente. Vom demonstra că există $m$ astfel încât $B$ are $m$ elemente, ceea ce va contrazice ipoteza noastră.

Demonstrăm prin inducţie după $n$.

Pentru $n = 0$, avem $A = \emptyset$. Dacă am avea un $x \in B$, atunci $f(x) \in A = \emptyset$, contradicţie. Rămâne că $B = \emptyset$. Prin urmare $B$ are 0 elemente, deci putem lua $m := 0$.

Presupunem că am arătat propoziţia pentru mulţimi cu $n$ elemente şi considerăm acum că $A$ are $n+1$ elemente. Luăm $g : \{1, ..., n+1\} \to A$ bijecţie. Notăm $C := g(\{1, ..., n\})$ şi $D := \{x \in B \mid f(x) \in C\}$.

Cum $f(D) \subseteq C$, putem atât restricţiona cât şi corestricţiona pe $f$ la o funcţie $f' : D \to C$ ce ia aceleaşi valori ca $f$ şi este deci tot injectivă. Facem acelaşi lucru pornind de la $g(\{1, ..., n\}) = C$ şi obţinem o bijecţie $g' : \{1, ..., n\} \to C$. Rezultă că $C$ are $n$ elemente. Aplicând ipoteza de inducţie pentru $f'$, obţinem că există $p$ astfel încât $D$ are $p$ elemente şi deci există o bijecţie $h : \{1, ..., p\} \to D$.

Distingem două cazuri. Dacă nu există $a \in B$ cu $f(a) = g(n + 1)$, atunci $B = D$ şi deci $B$ are $p$ elemente. Luăm aşadar $m := p$. În celălalt caz, dacă există $a \in B$ cu $f(a) = g(n + 1)$, avem că $B = D \cup \{a\}$, iar reuniunea este disjunctă. Luăm acum funcţia $h' : \{1, 2, ..., p + 1\} \to B$, definită, pentru orice $j$, prin:

$$h'(j) := \begin{cases} h(j), & \text{dacă } j \leq p \\ a, & \text{dacă } j = p + 1. \end{cases}$$

Cum $h'$ este bijectivă, $B$ are $p + 1$ elemente. Luăm, aşadar, în acest caz, $m := p + 1$.

(ii) Demonstrăm prima dată că orice submulţime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Fie $B \subseteq \mathbb{N}$ infinită, deci nevidă. Construim inductiv o enumerare a sa

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\},$$

unde pentru orice $n$ avem $b_n < b_{n+1}$ şi $b_n \geq n$.

Fie $b_0$ cel mai mic element al ei. Clar, $b_0 \geq 0$. Atunci, $B$ fiind infinită, $B \setminus \{b_0\}$ rămâne infinită şi deci nevidă. Punem $b_1$ ca fiind minimul acelei mulţimi. Clar, $b_1 \neq b_0$ şi cum $b_0$ este minimul lui $B$, avem că $b_0 < b_1$. Rezultă şi că $b_1 > b_0 \geq 0$, deci $b_1 \geq 1$.

Presupunem că am fixat pe $b_0, \ldots, b_n$ (pentru un $n \geq 1$) şi vrem să îl alegem pe $b_{n+1}$, Îl punem ca fiind minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_n\}$ şi deci $b_{n+1} \neq b_n$. Dat fiind că $b_n$ fusese ales ca minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$, avem că $b_n < b_{n+1}$ şi deci $b_{n+1} \geq n + 1$.

Luăm funcţia $g : \mathbb{N} \to B$, $g(n) = b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Funcţia fiind strict crescătoare, este injectivă. Fie acum $m \in B$. Atunci $b_{m+1} \geq m + 1 > m$. Cum $b_{m+1}$ este minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_m\}$, rezultă că $m \in \{b_0, \ldots, b_m\}$. Deci există $i \in \mathbb{N}$, $i \leq m$ cu $m = b_i = g(i)$. Am arătat aşadar că $g$ este surjectivă.

Demonstrăm acum enunţul principal. Fie $h : A \to \mathbb{N}$ o bijecţie. Atunci $B \sim g(B) \sim h(g(B))$, deci $h(g(B)$ e infinită şi este submulţime a lui $\mathbb{N}$, deci numărabilă, din cele anterioare. Rezultă că şi $B$ este numărabilă.

$\square$