$\vdash \varphi \to \varphi$

Propoziția 1.48

Pentru orice formulă φ, $\vdash \varphi \to \varphi$.

Dem.:

(1) $\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$

(A2) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 1.40.(i)

(2) $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$

(A1) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$) și Propoziția 1.40.(i)

(3) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$

(1), (2) și Propoziția 1.40.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)

(4) $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$

(A1) (cu φ, $\psi := \varphi$) și Propoziția 1.40.(i)

(5) $\vdash \varphi \to \varphi$

(MP): (3), (4)

Teorema deducției 1.49

Fie $\Gamma \subseteq Form$ și $\varphi, \psi \in Form$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Dem.: "$\Leftarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 1.42.(i)
(3)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 1.40.(ii)
(4)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$	(MP): (2), (3).

"$\Rightarrow$" Fie

$$\Sigma := \{\psi \in \mathit{Form} \mid \Gamma \vdash \varphi \to \psi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $\mathit{Thm}(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după $\Gamma \cup \{\varphi\}$-teoreme.

- Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \psi$	Propoziția 1.40.(i), (ii)
(2)	$\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	(A1) și Propoziția 1.40.(i)
(3)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	(MP): (1), (2).

Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \to \psi = \varphi \to \varphi$ este teoremă, conform Propoziției 1.48, deci $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens.

Presupunem că $\psi, \psi \to \chi \in \Sigma$ și trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$.
Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteza inducție
(2)	$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	ipoteza inducție
(3)	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	(A2) și P. 1.40.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (2), (3).
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (1), (4).

Așadar $\chi \in \Sigma$. $\square$

Câteva consecințe

Teorema deducției este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Propoziția 1.50

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \qquad (1)$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că

$$\vdash \boxed{(\varphi \to \psi)} \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi\} \vdash \boxed{(\psi \to \chi)} \to (\varphi \to \chi)$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \boxed{\varphi} \to \chi$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

(1)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 1.40.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 1.40.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$	Propoziția 1.40.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$

Propoziția 1.51

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ,

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \chi. \tag{2}$$

Dem.:

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	P. 1.50 și P. 1.42.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$

Propoziția 1.52

Pentru orice formule φ, ψ,

$$
\begin{aligned}
\{\psi, \neg\psi\} &\vdash \varphi && (3)\\
&\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi) && (4)\\
&\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi && (5)\\
&\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi && (6)\\
\{\psi, \neg\varphi\} &\vdash \neg(\psi \to \varphi). && (7)
\end{aligned}
$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.53

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi. \qquad (8)$$

Dem.: Exercițiu.

SINTAXA și SEMANTICA

Teorema de corectitudine (Soundness Theorem) 1.54

Orice Γ-teoremă este consecință semantică a lui Γ, adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ și $\Gamma \subseteq Form$.

Dem.: Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după Γ-teoreme.

- Axiomele sunt în Σ (exercițiu).
- Evident, $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. Conform Propoziției 1.31.(i), obținem că $\Gamma \vDash \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$.

$\square$

Notații

Pentru orice variabilă $v \in V$ și orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar, $e^+(v^e) = 1$.
Pentru orice mulțime $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \ldots, x_k^e\}.$$

Propoziția 1.55

Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ,

(i) Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

(ii) Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

Dem.: Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$ și $e^+(v) = e(v)$.

  Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.

  Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.
- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi)$, deci $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \psi$.
  Deoarece $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ ((6) din Propoziția 1.52), putem aplica (MP) pentru a obține $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$.

- $\varphi = \psi \to \chi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

  Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$. Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$	$Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.42.(i)
$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \to \chi)$	(7) din Propoziția 1.52
$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \to \chi)$	Propoziția 1.42.(iv).

Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 1$, atunci fie $e^+(\psi) = 0$, fie $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obținem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	(4) din P. 1.52 și P.1.42.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.42.(i).

În al doilea caz, obținem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\chi)^e \vdash \chi \to (\psi \to \chi)$	(A1) și Propoziția 1.40.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.42.(i). $\square$

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție efectivă a unei demonstrații a lui φ sau $\neg\varphi$ din premizele $Var(\varphi)^e$.

Teorema 1.56 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Dem.: "$\Rightarrow$" Se aplică Teorema de corectitudine 1.54 pentru $\Gamma = \emptyset$.
"$\Leftarrow$" Fie φ o tautologie și $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducție după k următoarea proprietate:

$$(*) \quad \text{pentru orice } k \leq n, \text{ pentru orice } e : V \to \{0,1\}, \quad \{x_1^e, \ldots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Pentru $k = n$, (*) ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \to \{0,1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziția 1.55, obținem că

$$Var(\varphi)^e = \{x_1^e, \ldots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

$k \Rightarrow k+1$. Presupunem că (*) este adevărată pentru k și fie $e : V \to \{0,1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \leftarrow \neg e(x_{n-k})}$. Așadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n-k-1\}$ și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (*) pentru e și e', obținem

$$\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 1.53 cu $\Gamma := \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\}$ și $\psi := x_{n-k}$ pentru a conclude că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. $\square$

Propoziția 1.57

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq$ *Form*. Presupunem că $\varphi \sim \psi$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Observăm că

$$\begin{aligned} \varphi \sim \psi \quad & \Longleftrightarrow \quad \models \varphi \to \psi \text{ și } \models \psi \to \varphi \\ & \qquad\ \text{(conform Propoziției 1.18)} \\ & \Longleftrightarrow \quad \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \vdash \psi \to \varphi \\ & \qquad\ \text{(conform Teoremei de completitudine).} \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \to \psi$, rezultă din Propoziția 1.42.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obține că $\Gamma \vdash \psi$.
"$\Leftarrow$" Similar. $\square$

Notații

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

Notații

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma \nvdash \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este } \Gamma\text{-teoremă} \\
\nvdash \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este teoremă} \\
\Gamma \nvDash \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este consecință semantică a lui } \Gamma \\
\nvDash \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este tautologie.}
\end{array}
$$

Definiția 1.58

Fie Γ o mulțime de formule.

- Γ este consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.
- Γ este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.

Observație

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- Dacă Δ este consistentă, atunci și Γ este consistentă.
- Dacă Γ este inconsistentă, atunci și Δ este inconsistentă.

Propoziția 1.59

(i) $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Mulțimea teoremelor este consistentă.

Dem.:

(i) Dacă $\vdash \bot$, atunci, conform Teoremei de corectitudine 1.54, ar rezulta că $\models \bot$, o contradicție. Așadar $\not\vdash \bot$, deci $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziția 1.42.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obținem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ,

$$\vdash \varphi \;\text{ ddacă }\; Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că Thm este consistentă. $\square$