Propoziția 1.61

Pentru o mulțime de formule Γ sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iv) $\Gamma \vdash \bot$.

Dem.: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ și $(i) \Rightarrow (iv)$ sunt evidente.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Fie φ o formulă. Conform (4) din Propoziția 1.52,

$$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi).$$

Aplicând (iii) și de două ori modus ponens, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.
$(iv) \Rightarrow (iii)$. Presupunem că $\Gamma \vdash \bot$. Avem că $\bot = \neg\top$. Deoarece $\top$ este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a conclude că $\vdash \top$, deci și $\Gamma \vdash \top$. □

Propoziția 1.62

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.

Dem.:

(i) Avem

$$
\begin{array}{rcl}
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \\
 & & \text{P. 1.60.(iv)} \\
 & \iff & \Gamma \vdash \neg\varphi \to \bot \\
 & & \text{Teorema Deducției} \\
 & \iff & \Gamma \vdash \varphi \\
 & & \neg\varphi \to \bot \sim \varphi \text{ și P.1.57.}
\end{array}
$$

(ii) Similar. □

Propoziția 1.63

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

(i) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ ddacă $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$ ddacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$.

(ii) Γ este consistentă ddacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.64

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este inconsistentă ddacă Γ are o submulțime finită inconsistentă.

Dem.: "$\Leftarrow$" este evidentă.

"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci, conform Propoziției 1.60.(iv), $\Gamma \vdash \bot$. Aplicând Propoziția 1.47, obținem o submulțime finită $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \bot$. Prin urmare, Σ este inconsistentă.

Un rezultat echivalent:

Propoziția 1.65

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este consistentă ddacă orice submulțime finită a lui Γ este consistentă.

Teorema 1.66

Pentru orice formulă φ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă } \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: Avem

$$\begin{array}{lcl}
\{\varphi\} \text{ este inconsistentă} & \iff & \vdash \neg\varphi \\
 & & \text{conform Propoziției 1.61.(ii)} \\
 & \iff & \models \neg\varphi \\
 & & \text{conform Teoremei de completitudine} \\
 & \iff & \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\
 & & \text{conform Propoziției 1.33.(ii).}
\end{array}$$

Așadar, $\{\varphi\}$ este consistentă $\iff$ $\{\varphi\}$ este satisfiabilă. □

Teorema 1.67 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule Γ,

$$\Gamma \text{ este consistentă } \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: "$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este satisfiabilă, deci are un model $e : V \to \{0, 1\}$. Presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci $\Gamma \vdash \perp$ și, aplicând Teorema de corectitudine 1.54, rezultă că $\Gamma \vDash \perp$. Ca urmare, $e \vDash \perp$, ceea ce este o contradicție.

"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este consistentă. Demonstrăm că Γ este finit satisfiabilă și aplicăm apoi Teorema de compacitate 1.37 pentru a conclude că Γ este satisfiabilă.

Fie $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o submulțime finită a lui Γ. Atunci Σ este consistentă, conform Propoziției 1.64. Din Propoziția 1.62.(ii), rezultă că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă. Aplicând acum Teorema 1.65, obținem că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este satisfiabilă. Deoarece, conform Propoziției 1.34.(i), $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$, avem că Σ este satisfiabilă. $\square$

Teorema 1.68 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

Dem.:

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma \vdash \varphi & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\
 & & \text{conform Propoziției 1.61.(i)} \\
 & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\
 & & \text{conform Teoremei de completitudine tare - versiunea 1} \\
 & \iff & \Gamma \vDash \varphi \\
 & & \text{conform Propoziției 1.33.(i).}
\end{array}
$$

$\square$

Observație

Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (exercițiu).

Definiția 1.69

Un literal este o

- variabilă (în care caz spunem că este literal pozitiv) sau
- negația unei variabile (în care caz spunem că este literal negativ).

Exemple: v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi; $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Definiția 1.70

O formulă φ este în formă normală disjunctivă (FND) dacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar, φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Definiția 1.71

O formulă φ este în formă normală conjunctivă (FNC) dacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.

Așadar, φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Exemple:

- $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC

Notație: Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Propoziția 1.72

(i) Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.

(ii) Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.

Dem.:

(i) Aplicând Propoziția 1.26, obținem

$$\begin{aligned} \neg\varphi &= \neg \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \sim \bigvee_{i=1}^{n} \neg \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \\ &\sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} \neg L_{i,j} \right) \sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right). \end{aligned}$$

(ii) Exercițiu. $\square$

Funcția asociată unei formule

Exemplu: Arătați că $\models v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2))$.

v_1	v_2	$v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2))$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Acest tabel definește o funcție $F : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$

ε_1	ε_2	$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Funcția asociată unei formule

Fie φ o formulă și $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Fie $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$. Definim $e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} : Var(\varphi) \to \{0,1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i \quad \text{pentru orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definim $e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) \in \{0,1\}$ astfel:

$$e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) := e^+(\varphi),$$

unde $e : V \to \{0,1\}$ este orice evaluare care extinde $e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$, adică, $e(x_i) = e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Conform Propoziției 1.14, definiția nu este ambiguă.

Definiția 1.73

Funcția asociată lui φ este $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) \text{ pentru orice } (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n.$$

Așadar, F_φ este funcția definită de tabela de adevăr pentru φ.

Propoziția 1.74

(i) Fie φ o formulă. Atunci

(a) $\vDash \varphi$ ddacă F_φ este funcția constantă 1.

(b) φ este nesatisfiabilă ddacă F_φ este funcția constantă 0.

(ii) Fie φ, ψ două formule. Atunci

(a) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $F_\varphi \leq F_\psi$.

(b) $\varphi \sim \psi$ ddacă $F_\varphi = F_\psi$.

(iii) Există formule diferite φ, ψ a.î. $F_\varphi = F_\psi$.

Dem.: Exercițiu.