**FMI, Info, Anul I**
**Semestrul I, 2016/2017**
**Logică matematică şi computaţională**
**Laurenţiu Leuştean,**
**Alexandra Otiman, Andrei Sipoş**

# Seminar 2

**(S2.1)**

(i) Demonstraţi că orice intervale deschise $(a, b)$, $(c, d)$ ale lui $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

(ii) Demonstraţi că $(0, 1), (0, 1], [0, 1), [0, 1]$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

**Demonstraţie:**

(i) Fie funcţia

$$f : (a, b) \to (c, d), \quad f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \text{ pentru orice } x \in (a, b).$$

Dacă $a < x < b$, avem că $0 < x - a < b - a$ şi $0 < \frac{d-c}{b-a}(x-a) < d - c$. Adăugând $c$, rezultă că funcţia noastră este bine definită, i.e. valoarea dată de noi pentru $f(x)$ se află într-adevăr în $(c, d)$. Definim funcţia

$$g : (c, d) \to (a, b), \quad g(x) = \frac{b-a}{d-c}(x-c) + a \text{ pentru orice } x \in (c, d).$$

Se observă uşor că $f$ şi $g$ sunt inverse una celeilalte. Prin urmare, $(a, b)$ şi $(c, d)$ sunt echipotente.

(ii) Ştim că $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ este bijectivă, iar din punctul anterior avem că $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este echipotent cu $(0, 1)$.

O soluţie directă este: se ia funcţia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, definită, pentru orice $x \in (0, 1)$, prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-x} - 2, & \text{altminteri} \end{cases}$$

ce are inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0,1)$, definită, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, prin:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & \text{dacă } y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2+y}, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

Se ia apoi funcţia $h : (0,1] \to (0,1)$, definită, pentru orice $x \in (0,1]$, prin:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $h^{-1} : (0,1) \to (0,1]$ este definită, pentru orice $y \in (0,1)$, prin:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1]$ şi $(0,1)$ sunt echipotente.

Considerăm apoi funcţia $j : [0,1] \to (0,1)$, definită, pentru orice $x \in [0,1]$, prin:

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $j^{-1} : (0,1) \to [0,1]$ este definită, pentru orice $y \in (0,1)$, prin:

$$j^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{dacă } y = \frac{1}{2} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1)$ şi $[0,1]$ sunt echipotente.

În sfârşit, se observă uşor că funcţia $F : (0,1] \to [0,1)$, $F(x) = 1 - x$ este bijectivă (inversa lui $F$ fiind tot $F$). Prin urmare, $(0,1]$ şi $[0,1)$ sunt echipotente.

$\square$

**(S2.2)** Fie $X$ o mulţime. Să se arate că nu există o funcţie surjectivă cu domeniul $X$ şi codomeniul $\mathcal{P}(X)$.
**Demonstraţie:** Presupunem că ar exista, şi fie $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulţimea

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că $f$ este surjectivă, există $y \in X$ cu $f(y) = A$. Dar atunci: $y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A \Leftrightarrow y \notin A$ ceea ce este o contradicţie. $\square$

**(S2.3)** Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) $\mathbb{N}^*$ este numărabilă.

(ii) $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

(iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

**Demonstraţie:**

(i) Definim
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n + 1.$$
Se demonstrează imediat că $f$ este bijecţie, inversa sa fiind
$$f^{-1} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, \quad f^{-1}(n) = n - 1.$$

(ii) Enumerăm elementele lui $\mathbb{Z}$ astfel:
$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$$
Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ corespunzătoare acestei enumerări este următoarea:
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ e par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ e impar.} \end{cases}$$
E clar că $f$ e bijectivă şi că $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definită prin:
$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{dacă } s \geq 0 \\ -2s - 1 & \text{dacă } s < 0 \end{cases}$$
este inversa lui $f$.

(iii) Ordonăm elementele lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ după suma coordonatelor şi în cadrul elementelor cu aceeaşi sumă după prima componentă în ordine crescătoare:

$$\begin{array}{rc} \text{linia } 0 & (0,0), \\ \text{linia } 1 & (0,1),(1,0), \\ \text{linia } 2 & (0,2),(1,1),(2,0), \\ \text{linia } 3 & (0,3),(1,2),(2,1),(3,0), \\ \vdots & \\ \text{linia } k & (0,k),(1,k-1),\ldots,(k-1,1),(k,0), \\ \vdots & \end{array}$$

Prin urmare, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, pe linia $k$ sunt $k+1$ perechi $(i, k-i), i = 0, \ldots, k$. Definim $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel: $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 2$, $\ldots$. În general, $f(i,j)$ se defineşte ca fiind numărul perechilor situate înaintea lui $(i,j)$. Deoarece $(i,j)$ este al $(i+1)$-lea element pe linia $i+j$, rezultă că înaintea sa sunt $1+2+3+\ldots+(i+j)+i = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ elemente. Aşadar, bijecţia va fi funcţia

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i.$$

Această funcţie se numeşte şi *funcţia numărare diagonală a lui Cantor* (în engleză, *Cantor pairing function*).

□

**(S2.4)** Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Produsul cartezian a două mulţimi numărabile este numărabil.

(ii) Produsul cartezian al unui număr finit ($\geq 2$) de mulţimi numărabile este numărabil.

**Demonstraţie:**

(i) Fie $A_1$ şi $A_2$ două mulţimi numărabile. Prin urmare, le putem enumera:

$$A_1 = \{a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, \ldots,\}, \; A_2 = \{a_{2,0}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}, \ldots,\}.$$

Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A_1 \times A_2, \quad f(m,n) = (a_{1,m}, a_{2,n}).$$

Se demonstrează uşor că $f$ este bijecţie.

(ii) Demonstrăm prin inducţie după $n$ că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi pentru orice mulţimi numărabile $A_1, \ldots, A_n$, $A_1 \times A_2 \ldots A_n$ este numărabilă.

$n = 2$: Aplicăm (i).

$n \Rightarrow n+1$. Fie $A_1, \ldots, A_{n+1}$ mulţimi numărabile şi $B = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Atunci $B$ este numărabilă, conform ipotezei de inducţie, deci, conform (i), $B \times A_{n+1}$ este numărabilă. Se observă imediat că funcţia

$$f : \prod_{i=1}^{n+1} A_i \to B \times A_{n+1}, \quad f((a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})) = ((a_1, a_2, \ldots, a_n), a_{n+1})$$

este bijecţie. Prin urmare, $\prod_{i=1}^{n+1} A_i$ este numărabilă.

□

**Definiţia 1.** *O familie de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$ se numeşte* **disjunctă** *dacă pentru orice $i, j \in I$ cu $i \neq j$ avem $A_i \cap A_j = \emptyset$.*

**(S2.5)** Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi. Pentru orice $i \in I$ notăm $A_i' := \{i\} \times A_i$. Să se arate că $A_i' \sim A_i$ pentru orice $i \in I$ şi că $(A_i')_{i \in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi.
**Demonstraţie:** Este evident că, pentru orice $i \in I$, funcţia

$$f_i : A_i \to A_i', \quad f_i(a) = (i, a)$$

este bijecţie.
Presupunem prin reducere la absurd că $(A_i')_{i \in I}$ nu este o familie disjunctă de mulţimi. Atunci există $j, k \in I$ cu $j \neq k$ a.î. $A_j' \cap A_k' \neq \emptyset$, deci există $x \in A_j' \cap A_k'$. Deoarece $x \in A_j'$, există $a \in A_j$ cu $x = (j, a)$. Similar, deoarece $x \in A_k'$, există $b \in A_k$ cu $x = (k, b)$. Rezultă că $(j, a) = (k, b)$, deci $k = j$, ceea ce contrazice presupunerea. □