FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2016/2017
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

Seminar 6

(S6.1) Să se găsească toate modelele fiecăreia din mulţimile de formule:

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Demonstraţie:

(i) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n) \to e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \to e(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$$
\begin{aligned}
e \vDash \Gamma \quad & \text{dacă şi numai dacă} \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \\
& \text{dacă şi numai dacă} \quad e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \ldots \\
& \text{dacă şi numai dacă} \quad (e(v) = 0 \text{ pentru orice } v \in V) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sau } (e(v) = 1 \text{ pentru orice } v \in V) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sau (există } k \geq 1 \text{ a.î. } e(v_i) = 0 \text{ pentru orice } i < k \text{ şi} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad e(v_i) = 1 \text{ pentru orice } i \geq k).
\end{aligned}
$$

Definim $e^0 : V \to \{0, 1\}$, $e^0(v) = 0$, $e^1 : V \to \{0, 1\}$, $e^1(v) = 1$ şi, pentru orice $k \geq 1$,

$$
e_k : V \to \{0, 1\}, \quad e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}
$$

Atunci

$$
Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \geq 1\} \cup \{e^0, e^1\}.
$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$. Atunci

$$\begin{array}{lll} e \vDash \Gamma & \text{dacă şi numai dacă} & e \vDash v_0 \text{ şi } e \vDash v_n \to v_{n+1} \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 7 \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_0) = 1 \text{ şi } e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_7) \leq e(v_8) \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } n \in \{0, 1, \ldots, 8\}. \end{array}$$

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v_n) = 1 \ \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

□

(S6.2) Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$$

Demonstraţie: Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\}$. Atunci $e^+(v_0) = 1$ (deci $e(v_0) = 1$) şi $e^+(\neg v_0 \vee v_1 \vee v_2) = 1$. Aşadar,

$$1 \;=\; \bar{\neg} e(v_0) \,\bar{\vee}\, e(v_1) \,\bar{\vee}\, e(v_2) = \bar{\neg} 1 \,\bar{\vee}\, e(v_1) \,\bar{\vee}\, e(v_2) = 0 \,\bar{\vee}\, e(v_1) \,\bar{\vee}\, e(v_2) = e(v_1) \,\bar{\vee}\, e(v_2).$$

Conform definiţiei lui $\vee$, avem că $v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \to v_2$, deci

$$e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_1 \vee v_2) = e(v_1) \,\bar{\vee}\, e(v_2) = 1.$$

Prin urmare,

$$e^+((v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)) = e^+(v_3 \to v_2) \,\bar{\vee}\, e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_3 \to v_2) \,\bar{\vee}\, 1 = 1,$$

adică $e \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$. □

(S6.3) Să se demonstreze Propoziţia 1.31 din curs.
Demonstraţie:

(i) Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui ψ. Cum $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \varphi \to \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \,\bar{\to}\, e^+(\psi) = 1 \,\bar{\to}\, e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(ii) "$\Rightarrow$" Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui $\varphi \to \psi$. Avem două cazuri:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \to \psi) = 0 \,\bar{\to}\, e^+(\psi) = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

(b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \vDash \varphi$. Atunci $e \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, şi prin urmare, $e \vDash \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \to \psi) = 1 \to 1 = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

"$\Leftarrow$" Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e \vDash \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Obţinem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \psi \iff \Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

□

Notaţie

Pentru orice mulţime Γ de formule şi orice formulă φ, notăm

$$\Gamma \vDash_{fin} \varphi \quad :\iff \quad \textit{există o submulţime finită } \Delta \textit{ a lui } \Gamma \textit{ a.î. } \Delta \vDash \varphi.$$

(S6.4) Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ avem că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

Demonstraţie: Avem întâi că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi \iff$ există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \vDash \varphi \iff$ (din Propoziţia 1.33.(i)) există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ nesatisfiabilă (*).
Apoi, cum o mulţime finit satisfiabilă înseamnă o mulţime pentru care orice submulţime finită a sa e satisfiabilă, avem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu e finit satisfiabilă $\iff$ există $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ finită astfel încât Δ' e nesatisfiabilă (**).
Noi vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**).
Pentru "(*) implică (**)", luăm $\Delta' := \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, ce este, clar, o submulţime finită a lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.
Pentru "(**) implică (*)", luăm $\Delta := \Delta' \cap \Gamma$. Clar, Δ este o submulţime finită a lui Γ. Rămâne de arătat că $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. Cum $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, avem:

$$\Delta' = \Delta' \cap (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = (\Delta' \cap \Gamma) \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) = \Delta \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) \subseteq \Delta \cup \{\neg\varphi\}.$$

Cum Δ' e nesatisfiabilă, rezultă că şi $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. □

(S6.5) Să se demonstreze Propoziţia 1.35 din curs.

Demonstraţie: Avem de demonstrat că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

(V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

(V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$.

Echivalenţa între (V1) şi (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) $\Rightarrow$ (V3):

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma \vDash \varphi & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 1.33.(i))} \\
& \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru } \Gamma \cup \{\neg\varphi\}) \\
& \iff & \Gamma \vDash_{fin} \varphi \text{ (conform (S6.4)).}
\end{array}
$$

Demonstrăm că (V3) $\Rightarrow$ (V2):

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma \text{ este nesatisfiabilă} & \iff & \Gamma \vDash \bot \text{ (conform Propoziţiei 1.32)} \\
& \iff & \Gamma \vDash_{fin} \bot \text{ (conform (V3) pentru } \Gamma \text{ şi } \bot) \\
& \iff & \text{există o submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Delta \vDash \bot \\
& \iff & \text{există o submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î.} \\
& & \Delta \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 1.32)} \\
& \iff & \Gamma \text{ nu este finit satisfiabilă.}
\end{array}
$$

$\square$