FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2016/2017
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

Seminar 11

(S11.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$. Să se demonstreze că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x:

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \neg\varphi^{\mathcal{A}}(e) \to \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg(\varphi \to \neg\psi))^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \neg(\varphi^{\mathcal{A}}(e) \to \neg\psi^{\mathcal{A}}(e)) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(iii) Avem:

$$\begin{aligned}(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) \to \psi^{\mathcal{A}}(e)) \wedge (\psi^{\mathcal{A}}(e) \to \varphi^{\mathcal{A}}(e)) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1.\end{aligned}$$

(iv) Avem:

$$\begin{aligned}(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \neg(\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1.\end{aligned}$$

□

(S11.2) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

(i) Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$, şi $t = \dot{S}x\dot{\times}\dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \to \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ şi $e(y) = 7$.

(ii) Fie $\varphi = x\dot{<}\dot{S}y \to (x\dot{<}y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. Să se arate că $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

Demonstraţie:

(i) Pentru orice interpretare $e : V \to \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned}t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\ &= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\ &= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))).\end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x) = 3$ şi $e(y) = 7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

(ii) Pentru orice interpretare $e : V \to \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \nvDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\
&\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x), S(e(y)) \text{ nu e satisfăcută sau} \\
&\qquad \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (x = y)[e] \\
&\iff < (e(x), S(e(y)) \text{ nu e satisfăcută sau } < (e(x), e(y)) \\
&\qquad \text{sau } e(x) = e(y) \\
&\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\
&\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y).
\end{aligned}$$

Prin urmare, $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

De obicei, scriem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \nvDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\
&\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\
&\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y).
\end{aligned}$$

□

(S11.3) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.
Demonstraţie: Fie $e : V \to \mathbb{N}$. Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1 &\iff (\forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4))^{\mathcal{N}}(e) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) \vee (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \text{ sau } (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) < e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \text{ sau } e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) = e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) \leq e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e(v_3) \leq a \\
&\iff e(v_3) = 0.
\end{aligned}$$

□