Relația de satisfacere

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 2.12

Fie φ o formulă. Spunem că:

- e satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.
- e nu satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Notație: $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

Corolarul 2.13

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x,

(i) $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ implică $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
$\iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Relația de satisfacere

Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 2.14

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor.

Corolarul 2.15

(i) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iv) $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.16

Spunem că φ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ satisface φ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui φ.

Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Definiția 2.17

Spunem că φ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\vDash \varphi$

Semantică

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.18

φ și ψ sunt logic echivalente dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \dashv\vDash \psi$

Definiția 2.19

ψ este consecință semantică a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vDash \psi$

Observație

(i) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

(ii) $\varphi \dashv\vDash \psi$ ddacă $(\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi)$ ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Propoziția 2.20

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y,

$$\neg\exists x\varphi \quad \mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \quad \forall x\neg\varphi \tag{1}$$

$$\neg\forall x\varphi \quad \mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \quad \exists x\neg\varphi \tag{2}$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \quad \mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \quad \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \tag{3}$$

$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \quad \vDash \quad \forall x(\varphi \vee \psi) \tag{4}$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \quad \vDash \quad \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \tag{5}$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \quad \mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \quad \exists x\varphi \vee \exists x\psi \tag{6}$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \quad \vDash \quad \forall x\varphi \to \forall x\psi \tag{7}$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \quad \vDash \quad \exists x\varphi \to \exists x\psi \tag{8}$$

$$\forall x\varphi \quad \vDash \quad \exists x\varphi \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi &\vDash \exists x\varphi && (10)\\
\forall x\varphi &\vDash \varphi && (11)\\
\forall x\forall y\varphi &\mathrel{\text{⫤}}\vDash \forall y\forall x\varphi && (12)\\
\exists x\exists y\varphi &\mathrel{\text{⫤}}\vDash \exists y\exists x\varphi && (13)\\
\exists y\forall x\varphi &\vDash \forall x\exists y\varphi. && (14)
\end{aligned}
$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.21

Pentru orice termeni s, t, u,

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \to t = s$;

(iii) $\vDash s = t \land t = u \to s = u$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.22

Pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m, R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni $t_i, u_i, i = 1, \ldots, m$,

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m \tag{15}$$

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow (Rt_1 \ldots t_m \leftrightarrow Ru_1 \ldots u_m). \tag{16}$$

Dem.: Arătăm (15). Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare a.î. $\mathcal{A} \models ((t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m))[e]$. Atunci $\mathcal{A} \models (t_i = u_i)[e]$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$, deci $t_i^{\mathcal{A}}(e) = u_i^{\mathcal{A}}(e)$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$. Rezultă că

$$\begin{aligned} (ft_1 \ldots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) = f^{\mathcal{A}}(u_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, u_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ &= (fu_1 \ldots u_m)^{\mathcal{A}}(e) \end{aligned}$$

Așadar, $\mathcal{A} \models (ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m)[e]$.

Definiția 2.23

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui $\mathcal{L}$ și x o variabilă.

- spunem că variabila x apare legată pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \le i \le k \le j \le n-1$ a.î. (i,j)-subexpresia lui φ este o subformulă a lui φ de forma $\forall x \psi$;
- spunem că x apare liberă pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în ϕ;
- x este variabilă legată (*bounded variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ;
- x este variabilă liberă (*free variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ.

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \to x = z$. Variabile libere: x, y, z. Variabile legate: x.

Variabile legate și libere

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ.

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$
\begin{array}{lcll}
FV(\varphi) & = & Var(\varphi), & \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\
FV(\neg\varphi) & = & FV(\varphi); & \\
FV(\varphi \rightarrow \psi) & = & FV(\varphi) \cup FV(\psi); & \\
FV(\forall x \varphi) & = & FV(\varphi) \setminus \{x\}. &
\end{array}
$$

Notație: $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Propoziția 2.24

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Propoziția 2.25

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice formulă φ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Propoziția 2.26

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \exists x\varphi \tag{17}$$

$$\varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \forall x\varphi \tag{18}$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \wedge \forall x\psi \tag{19}$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \vee \forall x\psi \tag{20}$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \wedge \exists x\psi \tag{21}$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \vee \exists x\psi \tag{22}$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \rightarrow \forall x\psi \tag{23}$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \rightarrow \exists x\psi \tag{24}$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \exists x\psi \rightarrow \varphi \tag{25}$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \forall x\psi \rightarrow \varphi \tag{26}$$

Dem.: Exercițiu.

Notație

Fie $t(x_1, \ldots, x_n)$ un termen. Scriem

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]$$

în loc de $t^{\mathcal{A}}(e)$, unde $e : V \to A$ este o (orice) interpretare a.î. $e(x_1) = a_1, \ldots, e(x_n) = a_n$.

Notație

Fie $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ o formulă. Scriem

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

în loc de $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$, unde $e : V \to A$ este o (orice) interpretare a.î. $e(x_1) = a_1, \ldots, e(x_n) = a_n$.

Definiția 2.27

O formulă φ se numește enunț (*sentence*) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.

Notație: $Sent_{\mathcal{L}}$:= mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziția 2.28

Dacă φ este un enunț, atunci

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$$

pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$.

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 2.25 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. $\square$

Exemplu

- $\vDash \exists x(x = x)$;
- $\mathcal{A} \nvDash \neg\exists x(x = x)$ pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$.

Tautologii

Noțiunea de tautologie se poate aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectivelor $\neg, \rightarrow$.

Definiția 2.29

O $\mathcal{L}$-evaluare (de adevăr) este o funcție $F : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ,

- $F(\neg\varphi) = \neg F(\varphi)$;
- $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$.

Propoziția 2.30

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$, funcția

$$V_{e,\mathcal{A}} : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}, \quad V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o $\mathcal{L}$-evaluare.

Dem.: Exercițiu ușor.

Tautologii

Definiția 2.31

φ este tautologie dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare F.

Propoziția 2.32

Orice tautologie este validă.

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e,\mathcal{A}}$ este $\mathcal{L}$-evaluare, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. $\square$

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu e tautologie.