FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2016/2017
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

Seminar 9 (Seminarul Prieteniei)

(S9.1) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i) $((v_0 \to v_1) \land v_1) \to v_0$;

(ii) $(v_1 \lor \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3)$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned} ((v_0 \to v_1) \land v_1) \to v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \lor v_1) \land v_1) \lor v_0 && \text{(înlocuirea implicaţiei)} \\ &\sim \neg(\neg v_0 \lor v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 && \text{(de Morgan)} \\ &\sim (\neg\neg v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 && \text{(de Morgan)} \\ &\sim (v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0, && \text{(reducerea dublei negaţii)} \end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned} (v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 &\sim ((v_0 \lor \neg v_1) \land (\neg v_1 \lor \neg v_1)) \lor v_0 && \text{(distributivitate)} \\ &\sim (v_0 \lor \neg v_1 \lor v_0) \land (\neg v_1 \lor \neg v_1 \lor v_0) && \text{(distributivitate)} \\ &\sim (v_0 \lor \neg v_1) \land (\neg v_1 \lor v_0), && \text{(idempotenţă)} \end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă şi cu:

$$v_0 \lor \neg v_1,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3) &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee (\neg\neg v_2 \vee v_3) && \text{(înlocuirea implicaţiilor)}\\
&\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(reducerea dublei negaţii)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge \neg\neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3 &\sim ((\neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_4 \vee v_2)) \vee v_3 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_4 \vee v_2 \vee v_3), && \text{(distributivitate)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC.

□

(S9.2) Să se aducă formula $\varphi = (v_0 \to v_1) \to v_2$ la cele două forme normale trecându-se prin funcţia booleană asociată (i.e. metoda tabelului).

Demonstraţie: Alcătuim tabelul de valori al funcţiei asociate $F_\varphi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, precum şi a funcţiei $\neg \circ F_\varphi$.

x_0	x_1	x_2	$x_0 \to x_1$	$F_\varphi(x_0,x_1,x_2) := (x_0 \to x_1) \to x_2$	$\neg F_\varphi(x_0,x_1,x_2)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Obţinem, aşadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.76 şi 1.78, că o formă normală disjunctivă a lui φ este:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.77 şi 1.78, obţinem că o formă normală conjunctivă a lui φ este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui $\neg \circ F_\varphi = F_{\neg\varphi}$ pentru a obţine (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui $\neg\varphi$:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziţia 1.72.(ii), obţinem că o formă normală conjunctivă a lui $\neg\neg\varphi$, şi deci a lui φ, este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

□

(S9.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ avem:

(i) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$;

(iii) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$;

(iv) $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$ ddacă $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$.

Demonstraţie: Reamintim că $\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$. De asemenea, oriunde folosim o teoremă formală cunoscută, aplicăm implicit Propoziţia 1.42.(ii).
Demonstrăm (i):

(1)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	Propoziţia 1.40.(ii)
(2)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$	(S7.2).(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash (\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow (\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi)$	(S7.3)
(4)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (4)
(6)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(S7.2).(iii)
(7)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (5), (6).

Demonstrăm (ii):

(1)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$	(A1) şi Propoziţia 1.40.(i)
(2)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	Propoziţia 1.40.(ii)
(5)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \bot)$	(S7.2).(ii)
(6)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \bot$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (3), (6)
(8)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	(7) şi (S7.1).

Demonstrăm (iii):

(1)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(2)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(3)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.40.(ii)
(4)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S7.2).(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$	(S7.2).(ii)
(8)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi \to \bot$	(MP): (6), (7)
(9)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \bot$	(MP): (2), (8)
(10)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	(9) şi (S7.1).

Demonstrăm (iv), implicaţia "$\Rightarrow$":

(1)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)	$\{\varphi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei
(4)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	(3)
(5)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \varphi$	(S9.1).(i)
(6)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \psi$	(S9.1).(ii)
(8)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (6), (7).

Demonstrăm (iv), implicaţia "$\Leftarrow$":

(1)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)		$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	(2)
(4)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash (\varphi \wedge \psi)$	(S9.1).(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$

(S9.4) Să se demonstreze Propoziţia 1.63 din curs.
Demonstraţie:

(i) Observăm mai întâi că ultima echivalenţă (între a doua şi a treia afirmaţie) este o instanţă a Teoremei deducţiei. E suficient, deci, să arătăm faptul că prima afirmaţie este echivalentă cu a treia. Demonstrăm prin inducţie după $n \geq 1$.

Pentru $n = 1$, enunţul este tautologic.

Fie $n \geq 1$. Presupunem adevărată concluzia pentru n şi o demonstrăm pentru $n + 1$.

Avem:

$$
\begin{aligned}
\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1}\} \vdash \psi &\Leftrightarrow \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi_{n+1} \to \psi && \text{(din Teorema deducţiei)}\\
&\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n\} \vdash \varphi_{n+1} \to \psi && \text{(din ipoteza de inducţie)}\\
&\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n, \varphi_{n+1}\} \vdash \psi && \text{(din Teorema deducţiei)}\\
&\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \varphi_{n+1}\} \vdash \psi. && \text{(din (S9.1).(iv))}
\end{aligned}
$$

(ii) Avem că:

$$
\begin{aligned}
\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \text{ este consistentă} &\Leftrightarrow \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \nvdash \bot && \text{(din Propoziţia 1.61)}\\
&\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n\} \nvdash \bot && \text{(din punctul (i))}\\
&\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n\} \text{ este consistentă.} && \text{(din Propoziţia 1.61)}
\end{aligned}
$$

□

(S9.5) Să se demonstreze Teorema de completitudine tare - versiunea 2, dar fără a se folosi, precum în curs, Teorema de completitudine tare - versiunea 1.

Demonstraţie: Fie $\varphi \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$. Abreviem Teorema de completitudine (slabă) cu TC, iar Teorema de compacitate cu TK. Avem că:

$$
\begin{aligned}
\Gamma \vdash \varphi &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi && \text{(din Propoziţia 1.47)}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vdash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi && \text{(din Propoziţia 1.63.(i))}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vDash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi && \text{(din TC)}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \varphi && \text{(din Propoziţia 1.34.(ii))}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi. && \text{(din TK - versiunea 3)}
\end{aligned}
$$

□

(S9.6) Să se arate că Teorema de completitudine tare - versiunea 2 implică imediat Teorema de completitudine tare - versiunea 1.

Demonstraţie: Vrem să arătăm că o mulţime de formule este consistentă dacă şi numai dacă este satisfiabilă. Fie $\Gamma \subseteq Form$. Abreviem Teorema de completitudine tare cu TCT. Avem că:

$$
\begin{aligned}
\Gamma \text{ este consistentă} &\Leftrightarrow \Gamma \nvdash \bot && \text{(din Propoziţia 1.61)}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \nvDash \bot && \text{(din TCT - versiunea 2)}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \text{ este satisfiabilă.} && \text{(din Propoziţia 1.32)}
\end{aligned}
$$

□