



---

# LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**, despre care se poate argumenta în principiu că sunt **adevărate** sau **false**.

### *Propoziții declarative*

- ▶ Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- ▶ Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- ▶ Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- ▶ Orice număr natural par  $> 2$  este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- ▶ Andrei este deștept.
- ▶ Marțienilor le place pizza.

### *Propoziții care nu sunt declarative*

- ▶ Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- ▶ Pleacă!

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm

$p, q, r, \dots$  sau  $p_1, p_2, p_3, \dots$

**Exemple:**  $p$ =Numărul 2 este par.  $q$ =Mâine plouă.  $r$ =Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate  $\varphi, \psi, \chi, \dots$ ) folosind conectorii logici  $\neg$  (negația),  $\rightarrow$  (implicația),  $\vee$  (disjuncția),  $\wedge$  (conjuncția),  $\leftrightarrow$  (echivalența).

**Exemple:**

$\neg p$  = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$  = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.

$p \wedge q$  = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.

$p \rightarrow q$  = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.

$p \leftrightarrow q$  = Numărul 2 este par **dacă și numai dacă** mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (, ).

**Exemplu:**  $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$



### Exemplu:

Fie propoziția:

$\varphi$  = *Azi este marți, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

$p$  = *Azi este marți.*      $q$  = *Avem curs de logică.*

Atunci  $\varphi = p \rightarrow q$ . Cine este  $\neg\varphi$ ?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$  = *Azi este marți și nu avem curs de logică.*



### Exemplu:

Fie propoziția:

$\varphi$  = *Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

$p$  = *Trenul întârzie.*

$q$  = *Sunt taxiuri la gară.*

$r$  = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci  $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$ .

Presupunem că  $\varphi, p$  sunt adevărate și  $r$  este falsă (deci  $\neg r$  este adevărată). Ce putem spune despre  $q$ ?  **$q$  este adevărată.**



### Definiția 1.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă  $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  de **variabile**;
  - ▶ conectori logici:  $\neg$  (se citește **non**),  $\rightarrow$  (se citește **implică**)
  - ▶ paranteze:  $(, )$ .
- Mulțimea **Sim** a **simbolurilor** lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (, )\}.$$

- Notăm variabilele cu  $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \dots$



### Definiția 1.2

Mulțimea *Expr* a **expresiilor** lui *LP* este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui *LP*.

- ▶ Expresia vidă se notează  $\lambda$ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii  $\theta$  este numărul simbolurilor din  $\theta$ .  $Sim^n$  este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui *LP* de lungime  $n$ .
- ▶ Prin convenție,  $Sim^0 = \{\lambda\}$ . Atunci  $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$ .

### Exemple:

$(((((v_7, v_1 \neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2, ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)), (\neg(v_1 \rightarrow v_2))).$



### Definiția 1.3

Fie  $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$  o expresie a lui LP, unde  $\theta_i \in Sim$  pentru orice  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ .

- ▶ Dacă  $0 \leq i \leq j \leq k-1$ , atunci expresia  $\theta_i \dots \theta_j$  se numește  $(i, j)$ -**subexpresia** lui  $\theta$ ;
- ▶ Spunem că o expresie  $\psi$  **apare** în  $\theta$  dacă există  $0 \leq i \leq j \leq k-1$  a.î.  $\psi$  este  $(i, j)$ -subexpresia lui  $\theta$ .





Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.

### Definiția 1.4

**Formulele** lui  $LP$  sunt expresiile lui  $LP$  definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
- (F1) Dacă  $\varphi$  este formulă, atunci  $(\neg\varphi)$  este formulă.
- (F2) Dacă  $\varphi$  și  $\psi$  sunt formule, atunci  $(\varphi \rightarrow \psi)$  este formulă.
- (F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

**Notății:** Mulțimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu  $\varphi, \psi, \chi, \dots$

- ▶ Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- ▶  $Form \subseteq Expr$ . Formulele sunt expresiile "bine formate".



### Exemple:

- ▶  $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$ ,  $\neg v_1 v_2$  nu sunt formule .
- ▶  $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$ ,  $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$  sunt formule.

### Citire unică (Unique readability)

Dacă  $\varphi$  este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶  $\varphi = v$ , unde  $v \in V$ ;
- ▶  $\varphi = (\neg\psi)$ , unde  $\psi$  este formulă;
- ▶  $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ , unde  $\psi, \chi$  sunt formule.

Mai mult, scrierea lui  $\varphi$  sub una din aceste forme este unică.

### Propoziția 1.5

Mulțimea *Form* a formulelor lui *LP* este numărabilă.

**Dem.:** Exercițiu.



## Principiul inducției pe formule

### Propoziția 1.6 (Principiul inducției pe formule)

Fie  $P$  o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea  $P$ .
- (1) Pentru orice formulă  $\varphi$ , dacă  $\varphi$  are proprietatea  $P$ , atunci și  $(\neg\varphi)$  are proprietatea  $P$ .
- (2) Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ , dacă  $\varphi$  și  $\psi$  au proprietatea  $P$ , atunci  $(\varphi \rightarrow \psi)$  are proprietatea  $P$ .

Atunci orice formulă  $\varphi$  are proprietatea  $P$ .

**Dem.:** Pentru orice formulă  $\varphi$ , notăm cu  $c(\varphi)$  numărul conectorilor logici care apar în  $\varphi$ . Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  definim proprietatea  $Q(n)$  astfel:

$Q(n)$  e adevărată ddacă orice formulă  $\varphi$  cu  $c(\varphi) \leq n$  are proprietatea  $P$ .

Demonstrăm prin inducție că  $Q(n)$  este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .



## Principiul inducției pe formule

**Pasul inițial.**  $Q(0)$  este adevărată, deoarece pentru orice formulă  $\varphi$ ,  $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$ , cu  $v \in V$  și, conform ipotezei (0),  $v$  are proprietatea **P**.

**Ipoteza de inducție.** Fie  $n \in \mathbb{N}$ . Presupunem că  $Q(n)$  este adevărată.

**Pasul de inducție.** Demonstrăm că  $Q(n+1)$  este adevărată. Fie  $\varphi$  o formulă cu  $c(\varphi) \leq n+1$ . Avem trei cazuri:

- ▶  $\varphi = v \in V$ . Atunci  $\varphi$  are proprietatea **P**, conform (0).
- ▶  $\varphi = (\neg\psi)$ , unde  $\psi$  este formulă. Atunci  $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$ , deci, conform ipotezei de inducție,  $\psi$  are proprietatea **P**.  
Aplicînd ipoteza (1), rezultă că  $\varphi$  are proprietatea **P**.
- ▶  $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ , unde  $\psi, \chi$  sunt formule. Atunci  $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$ , deci, conform ipotezei de inducție,  $\psi$  și  $\chi$  au proprietatea **P**. Rezultă din (2) că  $\varphi$  are proprietatea **P**.

Așadar,  $Q(n)$  este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Deoarece pentru orice formulă există  $N \in \mathbb{N}$  a.î.  $c(\varphi) \leq N$ , rezultă că orice formulă  $\varphi$  are proprietatea **P**.



## Principiul inducției pe formule

### Propoziția 1.7 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶  $V \subseteq \Gamma$ ;
- ▶  $\Gamma$  este închisă la  $\neg$ , adică  $\varphi \in \Gamma$  implică  $(\neg\varphi) \in \Gamma$ ;
- ▶  $\Gamma$  este închisă la  $\rightarrow$ , adică  $\varphi, \psi \in \Gamma$  implică  $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$ .

Atunci  $\Gamma = \text{Form}$ .

**Dem.:** Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă  $\varphi$ ,  
 $\varphi$  are proprietatea **P** ddacă  $\varphi \in \Gamma$ .

Conform definiției lui  $\Gamma$ , rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 1.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea **P**, deci orice formulă  $\varphi$  este în  $\Gamma$ . Așadar,  $\Gamma = \text{Form}$ . □

Conectorii derivați  $\vee$  (se citește **sau**),  $\wedge$  (se citește **și**),  $\leftrightarrow$  (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$(\varphi \vee \psi) \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \quad := \quad (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

### Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem  $\neg\varphi$ ,  $\varphi \rightarrow \psi$ , dar scriem  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$ .
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$  are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$  au precedență mai mare decât  $\rightarrow, \leftrightarrow$ .

Prin urmare, formula  $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$  va fi scrisă  $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$ .



## Principiul recursiei pe formule

---

### Propoziția 1.8 (Principiul recursiei pe formule)

Fie  $A$  o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_{\neg} : A \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Form} \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0)  $F(v) = G_0(v)$  pentru orice variabilă  $v \in V$ .

(R1)  $F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi))$  pentru orice formulă  $\varphi$ .

(R2)  $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi))$  pentru orice formule  $\varphi, \psi$ .

**Dem.:** Exercițiu suplimentar.

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da **definiții recursive** ale diverselor funcții asociate formulelor.

### Exemplu:

Fie  $c : \text{Form} \rightarrow \mathbb{N}$  definită astfel: pentru orice formulă  $\varphi$ ,  
 $c(\varphi)$  este numărul conectorilor logici care apar în  $\varphi$ .

O definiție recursivă a lui  $c$  este următoarea:

$$\begin{aligned}c(v) &= 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v \\c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi \\c(\varphi \rightarrow \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi.\end{aligned}$$

În acest caz,  $A = \mathbb{N}$ ,  $G_0 : V \rightarrow A$ ,  $G_0(v) = 0$ ,

$$\begin{aligned}G_{\neg} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, & G_{\neg}(n) &= n + 1, \\G_{\rightarrow} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, & G_{\rightarrow}(m, n) &= m + n + 1.\end{aligned}$$





### Notăție:

Pentru orice formulă  $\varphi$ , notăm cu  $Var(\varphi)$  mulțimea variabilelor care apar în  $\varphi$ .

### Observație

Mulțimea  $Var(\varphi)$  poate fi definită și recursiv.

**Dem.:** Exercițiu.



## Principiul recursiei pe formule

---

### Propoziția 1.9 (Principiul recursiei pe formule - varianta 2)

Fie  $A$  o mulțime și funcțiile  $G_0 : V \rightarrow A$ ,

$$G_{\neg} : A \times Form \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \times Form \times Form \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : Form \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0)  $F(v) = G_0(v)$  pentru orice variabilă  $v \in V$ .

(R1)  $F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi), \varphi)$  pentru orice formulă  $\varphi$ .

(R2)  $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi), \varphi, \psi)$  pentru orice formule  $\varphi, \psi$ .

**Dem.:** Exercițiu suplimentar.



### Definiția 1.10

Fie  $\varphi$  o formulă a lui  $LP$ . O **subformulă** a lui  $\varphi$  este orice formulă  $\psi$  care apare în  $\varphi$ .

**Notăție:** Mulțimea subformulelor lui  $\varphi$  se notează  $SubForm(\varphi)$ .

### Exemplu:

Fie  $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$ . Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \rightarrow v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$



## Subformule

### Definiție alternativă

Mulțimea  $SubForm(\varphi)$  poate fi definită și recursiv:

$$SubForm(v) = \{v\}$$

$$SubForm(\neg\varphi) = SubForm(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$$

$$SubForm(\varphi \rightarrow \psi) = SubForm(\varphi) \cup SubForm(\psi) \cup \{\varphi \rightarrow \psi\}.$$

În acest caz,

$$SubForm : Form \rightarrow 2^{Form}, \text{ deci } A = 2^{Form},$$

și

$$G_0 : V \rightarrow A,$$

$$G_0(v) = \{v\},$$

$$G_{\neg} : A \times Form \rightarrow A,$$

$$G_{\neg}(\Gamma, \varphi) = \Gamma \cup \{\neg\varphi\},$$

$$G_{\rightarrow} : A \times A \times Form \times Form \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow}(\Gamma, \Delta, \varphi, \psi) = \Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi \rightarrow \psi\}.$$



## SEMANTICA LP

### Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr:

**1** pentru **adevărat** și **0** pentru **fals**. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este  $\{0, 1\}$ .

Definim următoarele operații pe  $\{0, 1\}$  folosind **tabelele de adevăr**.

$$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

$p$	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că  $\neg p = 1 \iff p = 0$ .

$$\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că  $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$ .



Operațiile  $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  și  $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  se definesc astfel:

$p$	$q$	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$p$	$q$	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

### Observație

Pentru orice  $p, q \in \{0, 1\}$ ,  $p \vee q = \neg p \rightarrow q$ ,  $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$  și  $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ .

**Dem.:** Exercițiu.



### Definiția 1.11

O **evaluare** (sau **interpretare**) este o funcție  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ .

### Teorema 1.12

Pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  există o unică funcție

$$e^+ : Form \rightarrow \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- ▶  $e^+(v) = e(v)$  pentru orice  $v \in V$ .
- ▶  $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$  pentru orice  $\varphi \in Form$ ,
- ▶  $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$  pentru orice  $\varphi, \psi \in Form$ .

**Dem.:** Aplicăm Principiul Recursiei pe formule (Propoziția 1.8) cu  $A = \{0, 1\}$ ,  $G_0 = e$ ,  $G_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $G_{\neg}(p) = \neg p$  și  $G_{\rightarrow} : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $G_{\rightarrow}(p, q) = p \rightarrow q$ . □





### Propoziția 1.13

Dacă  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este o evaluare, atunci pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi).$$

**Dem.:** Exercițiu.