

Seminar 8

(S8.1) Să se arate că pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

Demonstrație: Avem

(1)	$\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$	Teorema deducției pentru ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$	(S7.3) și Propoziția 1.42.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \varphi$	Teorema deducției pentru ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$	(S7.3) și Propoziția 1.42.(ii)
(6)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$	(MP): (4), (5)
(7)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$	Teorema deducției pentru (3)
(8)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi$	Teorema deducției pentru (6)
(9)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi))$	(S7.2).(ii) și Propoziția 1.42.(ii)
(10)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	(MP): (8), (9)
(11)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	(MP): (7), (10)
(12)	$\Gamma \vdash \varphi$	(11) și (S7.1).

□

(S8.2) Să se arate, folosind substituția, că formula

$$\chi := (((v_0 \rightarrow \neg(v_3 \rightarrow v_5)) \rightarrow v_6) \wedge (\neg(v_4 \rightarrow v_{10}) \rightarrow v_2)) \rightarrow ((v_0 \rightarrow \neg(v_3 \rightarrow v_5)) \rightarrow v_6)$$

este tautologie.

Demonstrație: Știm că $v_0 \wedge v_1 \rightarrow v_0$ este tautologie. Aplicăm Propoziția 1.24.(ii) pentru $\varphi := (v_0 \wedge v_1) \rightarrow v_0$, $v := v_0$ și $\theta := (v_0 \rightarrow \neg(v_3 \rightarrow v_5)) \rightarrow v_6$ pentru a obține că:

$$\psi := \varphi_v(\theta) = (((v_0 \rightarrow \neg(v_3 \rightarrow v_5)) \rightarrow v_6) \wedge v_1 \rightarrow ((v_0 \rightarrow \neg(v_3 \rightarrow v_5)) \rightarrow v_6))$$

este tautologie. Aplicăm încă o dată Propoziția 1.24.(ii) pentru $\varphi := \psi$, $v := v_1$ și $\theta := \neg(v_4 \rightarrow v_{10}) \rightarrow v_2$ pentru a obține că χ este tautologie. □

(S8.3)

- (i) Să se arate că mulțimea modelelor unei mulțimi satisfiabile și finite de formule este infinită.
- (ii) Găsiți o mulțime infinită de formule care nu este semantic echivalentă cu nicio mulțime finită de formule.

Demonstrație:

- (i) Fie Γ o mulțime de formule ca în enunț. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model și fie acesta e . Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} \text{Var}(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcție $e_k : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \dots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \dots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru $k \neq l$ avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulțime numărabilă. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ și $\varphi \in \Gamma$, aplicând Propoziția 1.14 pentru φ , e și e_k , avem că $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $e_k \models \varphi$.

Am obținut astfel că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Mod}(\Gamma)$. Așadar, $\text{Mod}(\Gamma)$ este infinită. (Cu ce mulțime este $\text{Mod}(\Gamma)$ echipotentă?)

- (ii) Considerăm $\Gamma := V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o mulțime infinită de formule. Demonstrăm că Γ nu este echivalentă cu nicio mulțime finită de formule. Observăm că o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă și numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă e este funcția constantă 1. Prin urmare, $\text{Mod}(\Gamma)$ are un singur element, pe e .

Fie acum Δ o mulțime finită de formule. Avem două cazuri:

- (a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $\text{Mod}(\Delta) = \emptyset$.
- (b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm (i) pentru a concluziona că $\text{Mod}(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obținem că $\text{Mod}(\Delta) \neq \{e\} = \text{Mod}(\Gamma)$, deci Γ nu este echivalentă cu Δ .

□

Definiția 1. Un graf (neorientat) este o pereche (X, E) unde X e o mulțime și E este o relație ireflexivă și simetrică pe X . Spunem că un graf (X, E) este **finit** (respectiv **numărabil**) dacă X este finită (respectiv numărabilă).

Definiția 2. Fie (X, E) un graf și $k \in \mathbb{N}$. O **k -colorare a lui (X, E)** este o funcție $c : X \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$ cu $(x, y) \in E$ avem $c(x) \neq c(y)$. Spunem că (X, E) este **k -colorabil** dacă există o k -colorare a lui (X, E) .

Definiția 3. Fie $(X, E), (X', E')$ grafuri. Spunem că (X', E') este **subgraf al lui (X, E)** dacă $X' \subseteq X$ și $E' \subseteq E$.

(S8.4) Fie (X, E) un graf numărabil și $k \in \mathbb{N}$. Arătați că dacă orice subgraf finit al lui (X, E) este k -colorabil, avem că și (X, E) este k -colorabil.

Demonstrație: Considerăm $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Notăm, pentru orice $i \in \mathbb{N}$ și $j \in \{0, \dots, k-1\}$, $a_{i,j} := v_{i,k+j}$ (unde v_0, v_1, v_2 etc. sunt variabilele logicii propoziționale). De remarcat că asocierea este bijectivă, adică pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există o unică pereche $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ cu $v_n = a_{i,j}$. (Intuitiv, $a_{i,j}$ va fi “adevărat” când vârful x_i va fi colorat în culoarea j .)

Considerăm următoarele mulțimi de formule:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &:= \{a_{i,0} \vee \dots \vee a_{i,k-1} \mid i \in \mathbb{N}\} \\ &\quad (\text{intuitiv, spune că fiecare vârf al grafului e colorat în cel puțin o culoare}) \\ \Gamma_2 &:= \{a_{i,j_1} \rightarrow \neg a_{i,j_2} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq j_1 < j_2 < k\} \\ &\quad (\text{intuitiv, spune că fiecare vârf al grafului e colorat în cel mult o culoare}) \\ \Gamma_3 &:= \{a_{i,j} \rightarrow \neg a_{p,j} \mid i, p \in \mathbb{N}, (x_i, x_p) \in E, 0 \leq j < k\} \\ &\quad (\text{intuitiv, spune că două vârfuri adiacente sunt colorate prin culori diferite}) \\ \Gamma &:= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.\end{aligned}$$

Afirmație: Dacă Γ este satisfiabilă, atunci (X, E) este k -colorabil.

Demonstrație: Fie $e \models \Gamma$. Deoarece $e \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, rezultă că pentru orice $i \in \mathbb{N}$ există un unic $J_i \in \{0, \dots, k-1\}$ a.î. $e(a_{i,J_i}) = 1$. Definim atunci

$$c : X \rightarrow \{0, \dots, k-1\}, \quad c(x_i) = J_i.$$

Demonstrăm că c este o k -colorare a lui (X, E) . Fie $i, p \in \mathbb{N}$ a.î. $(x_i, x_p) \in E$. Trebuie să arătăm că $c(x_i) \neq c(x_p)$, adică, $J_i \neq J_p$. Presupunem prin reducere la absurd că $J_i = J_p$ și notăm cu J valoarea comună. Atunci $e(a_{i,J}) = e(a_{p,J}) = 1$. Deoarece $e \models \Gamma_3$, avem că

$$1 = e^+(a_{i,J} \rightarrow \neg a_{p,J}) = e(a_{i,J}) \rightarrow \neg e(a_{p,J}) = 1 \rightarrow \neg 1 = 1 \rightarrow 0 = 0,$$

o contradicție. ■

Rămâne să arătăm că Γ este satisfiabilă. Din Teorema de compacitate, e suficient să demonstrăm că orice submulțime finită Δ a lui Γ este satisfiabilă.

Fie o asemenea mulțime Δ . Definim

$$\begin{aligned} A &:= \bigcup_{\varphi \in \Delta} \{i \in \mathbb{N} \mid \text{există } j \in \{0, \dots, k-1\} \text{ a.î. } a_{i,j} \in \text{Var}(\varphi)\}, \\ Y &:= \{x_i \mid i \in A\}. \end{aligned}$$

Deoarece Δ este finită, se arată ușor că A este finită. Prin urmare, Y este o mulțime finită de vârfuri ale grafului (X, E) . Ca urmare, subgraful indus $(Y, E \cap (Y \times Y))$ este un subgraf finit al lui (X, E) , ce admite, din ipoteza problemei, o k -colorare - să o notăm cu h_Y .

Definim $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ astfel: pentru orice $i \in \mathbb{N}$ și $j \in \{0, \dots, k-1\}$,

$$e(a_{i,j}) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } i \in A \text{ și } h_Y(x_i) = j; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Rezultă că pentru orice $i \in A$ există un unic $J_i \in \{0, \dots, k-1\}$ a.î. $h_Y(x_i) = J_i$, deci $e(a_{i,J_i}) = 1$.

Demonstrăm că e este model al lui Δ . Fie $\varphi \in \Delta$. Avem cazurile:

- (i) $\varphi \in \Gamma_1$, adică $\varphi = a_{i,0} \vee \dots \vee a_{i,k-1}$ pentru un $i \in \mathbb{N}$. Atunci $i \in A$ și $e(a_{i,J_i}) = 1$, adică $e \models a_{i,J_i}$. Rezultă că $e \models \varphi$.
- (ii) $\varphi \in \Gamma_2$, adică $\varphi = a_{i,j_1} \rightarrow \neg a_{i,j_2}$ pentru un $i \in \mathbb{N}$ și $0 \leq j_1 < j_2 < k$. Atunci $i \in A$. Avem cazurile:
 - (a) $j_1 \neq J_i$, deci $e(a_{i,j_1}) = 0$. Atunci $e^+(\varphi) = e(a_{i,j_1}) \rightarrow \neg e(a_{i,j_2}) = 1$, deci $e \models \varphi$.
 - (b) $j_1 = J_i$, deci $e(a_{i,j_1}) = 1$. Atunci $e(a_{i,j_2}) = 0$. Obținem că $e^+(\varphi) = 1 \rightarrow \neg 0 = 1$.
- (iii) $\varphi \in \Gamma_3$, adică $\varphi = a_{i,j} \rightarrow \neg a_{p,j}$, cu $i, p \in \mathbb{N}$ a.î. $(x_i, x_p) \in E$, $0 \leq j < k$. Atunci $i, p \in A$, așa că $x_i, x_p \in Y$ și, prin urmare, (x_i, x_p) este o muchie a grafului $(Y, E \cap (Y \times Y))$. Deoarece h_Y este o k -colorare, avem că $h_Y(x_i) \neq h_Y(x_p)$, adică $J_i \neq J_p$. Avem cazurile:
 - (a) $j \neq J_i$, deci $e(a_{i,j}) = 0$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \models \varphi$.
 - (b) $j = J_i$, deci $e(a_{i,j}) = 1$. Atunci $j \neq J_p$, deci $e(a_{p,j}) = 0$. Obținem că $e^+(\varphi) = 1$.

□