**FMI, Info, Anul I**
**Semestrul I, 2016/2017**
**Logică matematică şi computaţională**
**Laurenţiu Leuştean,**
**Alexandra Otiman, Andrei Sipoş**

# Seminar 4

**(S4.1)** Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă $A$ este finită şi $B$ este numărabilă, atunci $A \cup B$ este numărabilă.

(ii) Dacă $I$ este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i\in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i\in I} A_i$ este numărabilă.

(iii) Dacă $I$ este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i\in I} A_i$ este numărabilă.

(iv) $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

**Demonstraţie:**

(i) Dacă $A$ este finită, atunci are un număr natural de elemente $n$. Demonstrăm prin inducţie după acel $n$.

Dacă $n = 0$, atunci $A = \emptyset$ şi $A \cup B = B$, numărabilă.

Presupunem acum adevărată pentru un $n$ şi demonstrăm pentru $n + 1$. Putem deci scrie $A = \{a\} \cup A'$ unde $|A'| = n$ şi $a \notin A'$. Atunci $A' \cup B$ e numărabilă, din ipoteza de inducţie – în particular, $A' \cup B \sim \mathbb{N}^*$. Scriem $A \cup B = \{a\} \cup A' \cup B$. Dacă $a \in B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B = A' \cup B$, numărabilă. Dacă $a \notin B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B \sim \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$.

(ii) Oferim mai întâi demonstraţia pentru $I = \mathbb{N}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $A_n$ este numărabilă, deci $A_n = \{a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,k}, \ldots\}$. Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in N} A_n, \quad f(n,m) = a_{n,m}.$$

Se observă uşor, în felul următor, că $f$ este bijecţie. Pentru orice $a \in A$ există un unic $n_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a \in A_{n_a}$ (deoarece $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este familie disjunctă), deci există un unic $m_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a = a_{n_a,m_a}$. Inversa lui $f$ se defineşte, aşadar, astfel:

$$f^{-1} : \bigcup_{n\in N} A_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f^{-1}(a) = (n_a, m_a).$$

Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, rezultă că $\bigcup_{n\in N} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când $I$ este mulţime numărabilă arbitrară şi fie $F : \mathbb{N} \to I$ o bijecţie. Notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $B_n := A_{F(n)}$. Atunci $\bigcup_{n\in N} B_n = \bigcup_{n\in N} A_{F(n)} = \bigcup_{i\in I} A_i$. Însă, din cazul particular de mai sus, rezultă că $\bigcup_{n\in N} B_n$ e numărabilă. Demonstraţia este încheiată.

(iii) Oferim mai întâi demonstraţia pentru $I = \mathbb{N}$.

Fie $A'_n := \{n\} \times A_n$. Atunci, conform (S2.5), $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile. Aplicăm (ii) pentru a concluziona că $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n$ este numărabilă. Definim

$$f : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n, \quad f(a) = (n_a, a),$$

unde $n_a = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a \in A_n\}$. Este evident că $f$ este bine definită (din faptul că $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ cu $a \in A_n$, deci mulţimea căreia îi căutăm minimul este nevidă) şi injectivă. De asemenea, din (S3.4).(i), $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ este infinită, deoarece $A_0$ este infinită şi incluziunea

$$j : A_0 \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad j(a) = a$$

este injecţie. În sfârşit, putem aplica (S3.4).(ii) pentru a conchide că $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când $I$ este o mulţime numărabilă arbitrară şi fie $F : \mathbb{N} \to I$ o bijecţie. Considerăm familia $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definită, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin:

$$B_n := A_{F(n)}$$

Atunci $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ şi deci $\bigcup_{i\in I} A_i \sim \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \sim \mathbb{N}$.

(iv) Notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{\frac{m}{n+1} \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Arătăm că mulţimile ce compun această familie numărabilă sunt şi ele numărabile. Luăm pentru orice $n \in \mathbb{N}$, bijecţia $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$, definită, pentru orice $m$, prin $f_n(m) = \frac{m}{n+1}$. Observăm acum că $\mathbb{Q}$ este reuniunea familiei, deci este şi ea numărabilă, aplicând (iii).

$\square$

**(S4.2)** Să se arate că mulţimea $Form$, a formulelor logicii propoziţionale, este numărabilă.

**Demonstraţie:** Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (, )\}$ şi $V$ este numărabilă, obţinem, din (S4.1).(i), că $Sim$ este numărabilă. Conform (S2.4).(ii), $Sim^n$ este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând (S4.1).(iii) şi (S4.1).(i), rezultă că $Expr$ este numărabilă. Deoarece $V \subseteq Form$, din (S3.4).(i) rezultă că $Form$ este infinită. Însă $Form \subseteq Expr$, deci $Form$ este o submulţime infinită a unei mulţimi numărabile. Aplicăm (S3.4).(ii) pentru a conchide că $Form$ este numărabilă. $\square$

**(S4.3)** Fie următoarele propoziţii exprimate în limbaj natural:

(i) Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva.

(ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.

(iii) Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul.

(iv) Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate.

Transpuneţi-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziţionale.
**Demonstraţie:**

(i) Fie $\varphi$ = Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva. Considerăm propoziţiile atomice:

$p$ = Merg în parc. $q$ = Îmi termin treaba. $r$ = Apare altceva.

Atunci $\varphi = (q \wedge (\neg r)) \rightarrow p$.

(ii) Fie $\psi$ = Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele. Considerăm propoziţiile atomice:

$s$ = Plouă. $t$ = Putem observa stelele.

Atunci $\psi = t \rightarrow \neg s$.

(iii) Fie $\theta$ = Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul. Considerăm propoziţiile atomice:

$w$ = Treci examenul la logică. $z$ = Înţelegi subiectul.

Atunci $\theta = w \to z$.

(iv) Fie $\chi$ = Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate. Considerăm propoziţiile atomice:

$u$ = Treci examenul la logică. $v$ = Faci o prezentare de calitate.

Atunci $\chi = v \to u$.

$\square$

**(S4.4)** Să se arate că pentru orice formulă $\varphi$, numărul parantezelor deschise care apar în $\varphi$ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în $\varphi$.
**Demonstraţie:** Notăm, pentru orice $\varphi \in Form$, cu $l(\varphi)$ numărul parantezelor deschise şi cu $r(\varphi)$ numărul parantezelor închise care apar în $\varphi$. Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă $\varphi$,

$\varphi$ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ dacă şi numai dacă $l(\varphi) = r(\varphi)$.

Demonstrăm că orice formulă $\varphi$ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducţiei pe formule. Avem următoarele cazuri:

- Formula $\varphi$ este în $V$, deci există $n \in \mathbb{N}$ cu $\varphi = v_n$. Atunci $l(\varphi) = l(v_n) = 0 = r(v_n) = r(\varphi)$.
- Există $\psi \in Form$ cu $\varphi = (\neg\psi)$. Presupunem că $\psi$ satisface $\boldsymbol{P}$. Obţinem

$$l(\varphi) = l(\psi) + 1 = r(\psi) + 1 = r(\varphi).$$

- Există $\psi, \chi \in Form$ cu $\varphi = (\psi \to \chi)$. Presupunem că $\psi, \chi$ satisfac $\boldsymbol{P}$. Obţinem

$$l(\varphi) = l(\psi) + l(\chi) + 1 = r(\psi) + r(\chi) + 1 = r(\varphi).$$

$\square$

$\square$

**(S4.5)** Să se dea o definiţie recursivă a mulţimii variabilelor unei formule.
**Demonstraţie:** Se observă că $Var : Form \to 2^V$ satisface următoarele condiţii:

$$\begin{array}{lll} (R0) & Var(v) & = \{v\} \\ (R1) & Var(\neg\varphi) & = Var(\varphi) \\ (R2) & Var(\varphi \to \psi) & = Var(\varphi) \cup V(\psi). \end{array}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = 2^V$ şi pentru

$$\begin{aligned} G_0 : V \to A, &\quad G_0(v) = \{v\}, \\ G_\neg : A \to A, &\quad G_\neg(\Gamma) = \Gamma, \\ G_\to : A \times A \to A, &\quad G_\to(\Gamma, \Delta) = \Gamma \cup \Delta. \end{aligned}$$

pentru a concluziona că $Var$ este unica funcţie care satisface (R0), (R1) şi (R2). $\square$

**(S4.6)** Să se arate că pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ şi pentru orice formule $\varphi, \psi$ avem:

(i) $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\vee} e^+(\psi)$;

(ii) $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi)$;

(iii) $e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\leftrightarrow} e^+(\psi)$.

**Demonstraţie:**

(i)

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\neg\varphi \to \psi) = e^+(\neg\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) \overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \boldsymbol{\vee} e^+(\psi).$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $\boldsymbol{\neg} x \boldsymbol{\to} y = x \boldsymbol{\vee} y$:

| $x$ | $y$ | $\boldsymbol{\neg} x$ | $\boldsymbol{\neg} x \boldsymbol{\to} y$ | $x \boldsymbol{\vee} y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

(ii)

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\neg(\varphi \to \neg\psi)) \\ &= \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi \to \neg\psi) \\ &= \boldsymbol{\neg}(e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\neg\psi)) \\ &= \boldsymbol{\neg}(e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg} e^+(\psi)) \\ &\overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $\neg(x \to \neg y) = x \wedge y$:

| $x$ | $y$ | $\neg y$ | $x \to \neg y$ | $\neg(x \to \neg y)$ | $x \wedge y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

(iii)

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} e^+(\varphi \to \psi) \wedge e^+(\psi \to \varphi) \\ &= (e^+(\varphi) \to e^+(\psi)) \wedge (e^+(\psi) \to e^+(\varphi)) \\ &\overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $(x \to y) \wedge (y \to x) = x \leftrightarrow y$:

| $x$ | $y$ | $x \to y$ | $y \to x$ | $(x \to y) \wedge (y \to x)$ | $x \leftrightarrow y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

□

**(S4.7)** Să se demonstreze că pentru orice $x_0$, $x_1$, $x_3$, $x_4$ din $\{0, 1\}$ avem:

(i) $((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0 = 1$;

(ii) $(x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)) = 1$.

**Demonstraţie:**

(i)

| $x_0$ | $x_1$ | $x_0 \to x_1$ | $(x_0 \to x_1) \to x_0$ | $((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1))$.

| $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_3 \to x_4$ | $x_4 \to x_1$ | $x_3 \to x_1$ | $(x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)$ | $f(x_1, x_3, x_4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$\square$