FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen

1 Partea I

(P1) [2 puncte] Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ din logica propoziţională, avem:

(i) $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$;

(ii) $\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$;

(iii) $\vDash (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg\varphi \rightarrow \psi)$.

(P2) [1,5 puncte] Să se aducă următoarea formulă la FNC prin transformări sintactice:

$$(\neg((v_3 \rightarrow \neg v_4) \wedge v_5) \wedge (\neg v_4 \rightarrow v_5)) \vee (v_4 \wedge \neg v_3).$$

(P3) [1,5 puncte] Fie $\mathcal{E}$ o mulţime de evaluări şi

$$\Gamma := \{\psi \in Form \mid e \vDash \psi \text{ pentru orice } e \in \mathcal{E}\}.$$

Presupunem că $\mathcal{E}$ are cel puţin două elemente. Demonstraţi că există o formulă φ cu proprietatea că $\varphi \notin \Gamma$ şi $\neg\varphi \notin \Gamma$.

(P4) [2 puncte]

(i) Să se definească, folosind Principiul recursiei pe formule, funcţia $l : Form \rightarrow \mathbb{N}$ care asociază fiecărei formule φ lungimea sa.

(ii) Să se demonstreze că pentru orice $\varphi \in Form$, $c(\varphi) \leq \frac{l(\varphi)-1}{3}$, unde $c(\varphi)$ este numărul conectorilor din φ.

(P5) [1 punct] Fie $H : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ definită, pentru orice $x, y, z \in \{0,1\}$, prin:

$$H(x,y,z) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \cdot y \leq z, \\ 0, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Să se găsească o formulă φ în FND şi una ψ în FNC cu $F_\varphi = F_\psi = H$.

2 Partea a II-a

(P6) [2 puncte]

(i) Să se aplice algoritmul Davis-Putnam pentru mulţimea de clauze:

$$\mathcal{S} := \{\{v_4, v_1\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{\neg v_3, v_6\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_5\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Ce concluzie tragem?

(ii) Folosind primul subpunct şi eventual alte proprietăţi, să se arate că:

$$\{v_4 \vee v_1, v_1 \to (\neg v_2 \vee v_3), \neg v_2 \to v_5, v_3 \to v_6\} \vDash v_4 \vee v_5 \vee v_6.$$

(P7) [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi. Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ ale lui $\mathcal{L}$ şi orice variabilă x cu $x \notin FV(\chi)$,

(i) $\varphi \vDash \exists x \varphi$;

(ii) $\forall x(\psi \to \chi) \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} \exists x \psi \to \chi$.

(P8) [1,5 puncte] Să se dea exemplu de limbaj de ordinul întâi $\mathcal{L}$ şi de formulă φ a lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

$$\nvDash \varphi \to \forall v_0 \varphi.$$

(P9) [1,5 puncte] Să se dea exemplu de mulţime de $\mathcal{L}_=$-enunţuri Γ ce are proprietatea că pentru orice $\mathcal{L}_=$-structură finită $\mathcal{A}$, avem:

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff \mathcal{A} \text{ conţine un număr par de elemente.}$$

Este Γ completă?