FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2016/2017
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

Seminar 10

(S10.1) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu $Form_n$ mulţimea acelor $\varphi \in Form$ ce verifică faptul că

$$Var(\varphi) = \{v_0, ..., v_{n-1}\}.$$

Calculaţi numărul de elemente al mulţimii cât $Form_n/\!\sim$.
Demonstraţie: Reamintim că pentru orice formulă φ, notăm cu $[\varphi]$ clasa de echivalenţă a lui φ, ce în cadrul nostru (mulţimea: $Form_n$; relaţia: $\sim$, de echivalenţă semantică) va fi mulţimea:

$$\{\psi \in Form_n \mid \psi \sim \varphi\}.$$

De asemenea, definim:

$$Bool_n := \{f : \{0,1\}^n \to \{0,1\} \mid f \text{ funcţie}\}.$$

Avem că $\{0,1\}^n$ are 2^n elemente, şi deci că mulţimea $Bool_n$, ce conţine fiecare funcţie booleană de n variabile, are 2^{2^n} elemente.
Considerăm funcţia $\Psi_n : Form_n/\!\sim \to Bool_n$, definită, pentru orice $\varphi \in Form_n$, prin:

$$\Psi_n([\varphi]) := F_\varphi.$$

Din Propoziţia 1.74.(ii).(b), rezultă că Ψ_n este bine definită şi injectivă, iar din Teorema 1.76 rezultă că Ψ_n este surjectivă. Aşadar, şi $Form_n/\!\sim$ are 2^{2^n} elemente. $\square$

(S10.2) Să se testeze dacă următoarele mulţimi de clauze sunt satisfiabile:

(i) $\{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_2, \neg v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;

(ii) $\{\{v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_2, v_3\}\}$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem că am avea un model e al mulţimii de clauze. Atunci $e(v_0) = e(v_2) = e(v_3) = 1$. Cum $e \vDash \{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}$, avem că $e(v_1) = 1$. Dar atunci $e \nvDash \{\neg v_2, \neg v_1\}$. Am obţinut o contradicţie. Rămâne că mulţimea de clauze din enunţ este nesatisfiabilă.

(ii) Fie evaluarea $e : V \to \{0, 1\}$ astfel încât $e(v_0) = 1$, $e(v_1) = 0$, şi $e(v_i) = 1$ pentru orice $i \geq 2$. Atunci e satisface fiecare clauză din mulţime, deci este model pentru mulţimea de clauze. Aşadar, mulţimea de clauze din enunţ este satisfiabilă.

$\square$

(S10.3) Să se determine mulţimea $Res(C_1, C_2)$ în fiecare din următoarele cazuri:

(i) $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{v_4, v_5, v_6\}$;

(ii) $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\}$;

(iii) $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}$; $C_2 := \{v_1, \neg v_2\}$.

Demonstraţie:

(i) Putem alege doar $L := \neg v_4$, deci există un singur rezolvent, anume $\{v_1, v_5, v_6\}$.

(ii) Putem rezolva clauzele, pe rând, după $L := v_3$ şi $L := \neg v_4$, obţinând aşadar

$$Res(C_1, C_2) = \{\{\neg v_4, v_5, v_1, v_6, v_4\}, \{v_3, v_5, \neg v_3, v_1, v_6\}\}.$$

(iii) Nu există L astfel încât $L \in C_1$ şi $L^c \in C_2$, deci $Res(C_1, C_2) = \emptyset$.

$\square$

(S10.4) Derivaţi prin rezoluţie clauza $C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ din mulţimea

$$\mathcal{S} := \{\{v_0, v_4\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, \{\neg v_4, v_0, v_1\}, \{\neg v_0, v_3\}\}.$$

Demonstraţie: Notăm:

$C_1 := \{v_0, v_4\}$
$C_2 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}$
$C_3 := \{\neg v_4, v_0, v_1\}$
$C_4 := \{\neg v_0, v_3\}$
$C_5 := \{v_0, v_1\}$ (rezolvent al C_1, C_3)
$C_6 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_2, C_4)
$C_7 := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_5, C_6)

Avem, aşadar, că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_6, C_7 = C)$ este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}$. □

(S10.5) Să se deriveze prin rezoluţie clauza $C := \{\neg v_0, v_2\}$ din forma clauzală a unei formule în FNC echivalente semantic cu:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_1) \to v_2) \wedge (v_0 \to v_1)$$

Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile şi aplicând legile de Morgan, obţinem că:

$$\begin{aligned}\varphi &\sim (\neg(v_0 \wedge v_1) \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1)\\ &\sim (\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1),\end{aligned}$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ', a cărei formă clauzală este

$$\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1 := \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}.$$

Din faptul că $v_1 \in C_2$ şi $\neg v_1 \in C_1$, avem că

$$C := (C_1 \setminus \{\neg v_1\}) \cup (C_2 \setminus \{v_1\}) = \{\neg v_0, v_2\}$$

este un rezolvent al clauzelor C_1 şi C_2. Cum C_1 şi C_2 sunt în $\mathcal{S}_{\varphi'}$, avem aşadar că (C_1, C_2, C) este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, forma clauzală a lui φ', formulă în FNC echivalentă semantic cu φ. □

(S10.6) Să se arate, folosind rezoluţia, că formula:

$$\varphi := (v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \to v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (v_0 \to v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (v_4 \to v_3)$$

este nesatisfiabilă.
Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile, obţinem că:

$$\varphi \sim (v_0 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (\neg v_0 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_4 \vee v_3),$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ'. Notând:

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \{v_0, v_2\} \\
C_2 &:= \{\neg v_2, v_1\} \\
C_3 &:= \{\neg v_1\} \\
C_4 &:= \{\neg v_0, v_4\} \\
C_5 &:= \{\neg v_3\} \\
C_6 &:= \{\neg v_4, v_3\}
\end{aligned}$$

se observă că $\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Notând mai departe:

$$\begin{aligned}
C_7 &:= \{\neg v_2\} && \text{(rezolvent al } C_2,\ C_3) \\
C_8 &:= \{v_0\} && \text{(rezolvent al } C_1,\ C_7) \\
C_9 &:= \{v_4\} && \text{(rezolvent al } C_4,\ C_8) \\
C_{10} &:= \{v_3\} && \text{(rezolvent al } C_6,\ C_9) \\
C_{11} &:= \square && \text{(rezolvent al } C_5,\ C_{10})
\end{aligned}$$

avem că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_{11})$ este o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, de unde, aplicând Teorema 1.93, rezultă că $\mathcal{S}_{\varphi'}$ este nesatisfiabilă. Din Propoziţia 1.87, rezultă că φ' este nesatisfiabilă, deci şi φ, care este echivalentă semantic cu φ', este nesatisfiabilă. $\square$

(S10.7) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstraţie: Notând mulţimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obţinem următoarea rulare:

$$
\begin{array}{ll}
 & i := 1 \\
 & \mathcal{S}_1 := \mathcal{S} \\
P1.1. & x_1 := v_0 \\
 & T_1^1 := \{\{v_0\}\} \\
 & T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\} \\
P1.2. & U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.3. & \mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.4. & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1. & x_2 := v_1 \\
 & T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\} \\
 & T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\} \\
P2.2. & U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.3. & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.4. & i := 3;\ \text{goto } P3.1 \\
P3.1. & x_3 := v_2 \\
 & T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
 & T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\} \\
P3.2. & U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P3.3. & \mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P3.4. & i := 4;\ \text{goto } P4.1 \\
P4.1. & x_4 := v_3 \\
 & T_4^1 := \{\{v_3\}\} \\
 & T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P4.2. & U_4 := \{\{v_4, v_6\}\} \\
P4.3. & \mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\} \\
P4.4. & i := 5;\ \text{goto } P5.1 \\
P5.1. & x_5 := v_4 \\
 & T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\} \\
 & T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\} \\
P5.2. & U_5 := \{\{v_5, v_6\}\} \\
P5.3. & \mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\} \\
P5.4. & i := 6;\ \text{goto } P6.1
\end{array}
$$

$P6.1.$	$x_6 := v_5$
	$T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$
	$T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
$P6.4.$	$i := 7;$ goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_6$
	$T_7^1 := \{\{v_6\}\}$
	$T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

$\square$

(S10.8) Există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din mulţimea de clauze $\mathcal{S} := \{C_1 := \{v_0, \neg v_1\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}$? Justificaţi.
Demonstraţie: Fie mulţimea de clauze $\mathcal{S}' := \{C_1, C_2, C_3 := \{v_0, \neg v_0\}, C_4 := \{v_1, \neg v_1\}\}$. Observăm că $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ şi că:

$$Res(C_1, C_1) = \emptyset$$

$$Res(C_1, C_2) = \{C_3, C_4\}$$

$$Res(C_1, C_3) = \{C_1\}$$

$$Res(C_1, C_4) = \{C_1\}$$

$$Res(C_2, C_2) = \emptyset$$

$$Res(C_2, C_3) = \{C_2\}$$

$$Res(C_2, C_4) = \{C_2\}$$

$$Res(C_3, C_3) = \{C_3\}$$

$$Res(C_3, C_4) = \emptyset$$

$$Res(C_4, C_4) = \{C_4\}$$

Am arătat, deci, că pentru orice $D_1, D_2 \in \mathcal{S}'$, $Res(D_1, D_2) \subseteq \mathcal{S}'$ (*). Presupunem prin absurd că există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}$ şi fie aceasta $(C_1', \ldots, C_n' = \square)$. Demonstrăm prin inducţie completă că pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C_i' \in \mathcal{S}'$. Fie un astfel de i. Din definiţia derivării, avem că ori $C'_i \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, ceea ce rezolvă problema, ori există $j, k < i$ cu $C'_i \in Res(C'_j, C'_k)$. Din ipoteza de inducţie completă, $C'_j, C'_k \in \mathcal{S}'$, iar din (*) avem $Res(C'_j, C'_k) \subseteq \mathcal{S}'$, deci $C'_i \in \mathcal{S}'$. Am obţinut că $C'_n = \square \in \mathcal{S}'$, ceea ce este o contradicţie. Rămâne că nu există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}$. $\square$

(S10.9) Demonstraţi, folosindu-vă de proprietăţile satisfacerii semantice şi de aplicarea sistematică (i.e., via algoritmul Davis-Putnam) a regulii rezoluţiei:

$$\{\neg v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4\} \vDash (\neg v_3 \to \neg(v_1 \to v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4.$$

Demonstraţie: Aplicând Propoziţia 1.33.(i), condiţia din enunţ este echivalentă cu faptul că mulţimea de formule:

$$\{\neg v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4, \neg((\neg v_3 \to \neg(v_1 \to v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)\}$$

este nesatisfiabilă şi, mai departe, din Propoziţia 1.34.(i), cu faptul că formula:

$$\neg v_2 \wedge (v_2 \to \neg v_3) \wedge (v_3 \to v_4) \wedge \neg((\neg v_3 \to \neg(v_1 \to v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)$$

este nesatisfiabilă. Aplicând transformări sintactice succesive, obţinem că formula de mai sus este echivalentă, pe rând, cu:

$$\neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg(\neg\neg v_3 \vee \neg(\neg v_1 \vee v_2) \vee \neg v_1 \vee (v_3 \wedge v_4) \vee v_4),$$

$$\neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg\neg\neg v_3 \wedge \neg\neg(\neg v_1 \vee v_2) \wedge \neg\neg v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4,$$

$$\neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee v_2) \wedge v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4,$$

$$\neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee v_2) \wedge v_1 \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4) \wedge \neg v_4,$$

ultima formulă fiind în FNC şi corespunzându-i forma clauzală:

$$\mathcal{S} := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\},$$

despre care vom arăta că este nesatisfiabilă, încheind astfel demonstraţia (prin aplicarea Propoziţiei 1.87). Folosim mulţimea $\mathcal{S}$ ca intrare a algoritmului Davis-Putnam, a cărui rulare se produce după cum urmează.

$$
\begin{array}{ll}
 & i := 1 \\
 & \mathcal{S}_1 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\} \\
P1.1. & x_1 := v_1 \\
 & T_1^1 := \{\{v_1\}\} \\
 & T_1^0 := \{\{\neg v_1, \neg v_2\}\} \\
P1.2. & U_1 := \{\{\neg v_2\}\} \\
P1.3. & \mathcal{S}_2 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\} \\
P1.4. & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1. & x_2 := v_2 \\
 & T_2^1 := \{\{v_2\}\} \\
 & T_2^0 := \{\{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_2\}\} \\
P2.2. & U_2 := \{\{\neg v_3\}, \square\} \\
P2.3. & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_3\}, \square\} \\
P2.4. & \square \in \mathcal{S}_3 \Rightarrow \mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă.}
\end{array}
$$

Rămâne, deci, că $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă. $\square$