Integrals by Example

©Mario Rodas Palomino

2 de setiembre del 2008

Echo con $\LaTeX\,2_\varepsilon$+ Vim como Dios manda.

1. Introducción

Históricamente, el concepto de integral de una función surgió en relación con dos problemas aparentemente distintos, pero en realidad íntimamente relacionados[1]. Por un lado, la *integral definida* de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un intervalo $[a, b]$ (en el cual f está definida y no es negativa) se define como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje de las abscisas en el intervalo $[a, b]$. Por otro lado la *integral indefinida* ó *primitiva* de f es cualquier función derivable cuya derivada es f. Algo que debo de aclarar es que si f es una función integrable en $[a, b]$, f no tiene por qué tener una primitiva. El objeto de estos apuntes no es definir analíticamente la *integral definida* sino el elaborar métodos para hallar la integral indefinida en general trabajaremos con la integral indefinida

$$\int f(x)\,dx$$

Cuya solución tiene la forma $g(x) + C$, donde g es una función que satisface[2] :

$$g'(x) = f(x)$$

El proceso de hallar la solución de una integral es lo que se denomina *integrar una función*, o simplemente *integración.* En la expresión $\int f(x)\,dx = g(x) + C$, la función $f(x)$ se llama *integrando* y la función $g(x)$ se llama *primitiva* o *antiderivada* de $f(x)$ y C es la *constante de integración* la cual olvidaremos escribir en general (muchas veces

[1] Veáse: Teorema fundamental del Cálculo

[2] Utilizaremos esta condición para verificar que g es una solución de la integral

por motivos de espacio). Sin embargo, se debe tener siempre presente que son infinitas las soluciones de una integral indefinida y cualquier par de difieren en una constante. ¿Es importante conocer la primitiva de una función? Sí, su importancia se deriva de la regla de Barrow

2. Un poco de teoría

Definición 2.1 (Definición de primitiva)**.** Llamaremos primitiva (o integral indefinida) de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo J a cualquier función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g' = f$ en J

Donde estamos utilizando la convenio de escribir $g'(x)$ por $g'(x+0)$ ó $g'(x-0)$) si x es uno de los extremos de J.

Teorema 2.2. *Si g_1 y g_2 son primitivas de la función f en un intervalo J . Entonces $g_1 - g_2 = constante$*

En efecto si g_2 es otra primitiva de f entonces $(g_1 - g_2)' = f - f = 0$ en J.

2.1. Propiedades

Estas son algunas propiedades de las primitivas (donde F es la primitiva de f) :

$$\begin{aligned}
&\int \lambda f(x) \pm \mu g(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx \pm \mu \int g(x)\, dx && \text{(linealidad)} \\
&\int f(x)\, g(x)\, dx = F(x)\, g(x) - \int F(x)\, g'(x)\, dx && \text{(integración por partes)} \\
&\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int F(g(x)) && \text{(sustitución)} \\
&\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b)
\end{aligned}$$

Acerca de la linealidad de la integrales[3], si f y g admiten una primitiva en un intervalo J, entonces otro tanto ocurre con $\lambda f(x) + \mu g(x)$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Nótese que la existencia de la primitiva de (por ejemplo) de $f+g$ no implica la existencia de la primitiva de f y g por separado.

[3]La cual se puede deducir facilmente de la igualdad de derivadas: $(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$

2.2. Integrales básicas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad , \forall n \in \mathbb{R}/n \neq -1 \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \tag{2}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{3}$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C \tag{4}$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C \tag{5}$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \tag{6}$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C \tag{7}$$

$$\int (\sec x)(\tan x)\, dx = \sec x + C \tag{8}$$

$$\int (\csc x)(\cot x)\, dx = -\csc x + C \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + C = -\operatorname{arc\,cos} x + C \qquad , |x| < 1 \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arcsec}|x| + C = -\operatorname{arccsc}|x| + C \qquad , |x| > 1 \tag{12}$$

$$\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + C \tag{13}$$

$$\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + C \tag{14}$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C \tag{15}$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + C \tag{16}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsenh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C \tag{17}$$

$$\int \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arccosh} x + C = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) + C \qquad , |x| > 1 \tag{18}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} & , |x| < 1 \\ \operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1} & , |x| > 1 \end{cases} \tag{19}$$

3. Métodos de integración

3.1. Sustitución o cambio de variable

Éste método es la forma integral de la regla de la cadena[4]:

Teorema 3.1. *Sea* $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *una función con derivada continua en* $[a,b]$*, y sea* $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *continua en* $g\left([a,b]\right)$*.Si* F *es una primitiva de* f *entonces se cumple:*

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx=F\left(g\left(x\right)\right) \tag{20}$$

Este método de hallar primitivas efectuando un cambio de variable adecuado es muy poderoso y flexible, pero tiene el incoveniente de depender esencialmente de la habilidad en escoger el cambio de varible indicado en cada caso, lo cual escapa a la sistematización.

Ejemplo 3.2. Calcular $\int\cos 2xdx$. Este es un ejemplo sencillo, pero voy a resolverlo para mostrar la simplicidad de este método:

$$\int\cos 2xdx=\left\{\begin{array}{c} y=2x\\ dy=2dx\end{array}\right\}=\int\cos y\,\frac{dy}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$$

Ejemplo 3.3. Calcular $\int\sqrt{1-x^2}dx$. Notamos que la integral no aparece en nuestra tabla de integrales básicas (2.2). Es necesario *convertirla* en una de la tabla, vamos a realizar el cambio de varible $x=\operatorname{sen}y$.

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\left\{\begin{array}{c} x=\operatorname{sen}y\\ dx=\cos ydy\end{array}\right\}=\int\sqrt{1-\operatorname{sen}^2y}\cos y\,dy=\int\cos^2y\,dy$$

Esta última integral se calcula facilmente usando la identidad trigonométrica $\cos^2\lambda=\frac{(1+\cos 2\lambda)}{2}$.

$$\int\cos^2y\,dy=\frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2y\right)\,dy=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2y\right)=\frac{1}{2}\left(y+\operatorname{sen}\cos y\right)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\left[\int\sqrt{1-x^2}dx\right]_{x=\operatorname{sen}y} &= \frac{1}{2}\left(y+\operatorname{sen}y\cos y\right)\\ \Longleftrightarrow\int\sqrt{1-x^2}dx &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc}\operatorname{sen}x+x\sqrt{1-x^2}\right)\end{aligned}$$

Ya que $x=\operatorname{sen}y$ si y solo si $y=\operatorname{arc}\operatorname{sen}x$.

[4]Si $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es derivable en a y $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es derivable en $g\left(x\right)$, entonces $f\circ g$ es derivable en a y se verifica

$$\left(f\circ g\right)'\left(a\right)=f'\left(g\left(a\right)\right)g'\left(a\right)$$

Ejemplo 3.4. Calcular $\int \sec x \, dx$. Esta integral es un poco mas complicada que el anterior, y como no aparece en nuestra tabla (2.2) vamos a *convertirla* en una de la tabla:

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \underbrace{\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right)}_{1} dx = \int \frac{\sec x \tan x + \tan^2 x}{\sec x + \tan x} dx$$

Hacemos el cambio de variable $y = \sec x + \tan x$, luego:

$$\int \frac{\sec x \tan x + \tan^2 x}{\sec x + \tan x} dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \sec x + \tan x \\ dy = \left(\sec x \tan x + \tan^2 x\right) dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{y} \, dy = \ln |y|$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x|$$

3.2. Integración por partes

Teorema 3.5 (Fórmula de Integración por partes). *Si $f'(x)$ y $g'(x)$ son continuas en un intervalo$[a, b]$ entonces:*

$$\int f(x) \, g'(x) \, dx = f(x) \, g(x) - \int f'(x) \, g(x) \, dx \tag{21}$$

La fórmula anterior es la versión en terminos de primitivas de la regla de Leibniz.

Ejemplo 3.6. Calcular $\int \arctan x dx$. Para resolver esta integral utilizaremos la integración por partes:

$$\int \arctan x dx = \int (x)' \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1 + x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln \left(1 + x^2\right)$$

Ejemplo 3.7. Calcular $\int x^n \ln x dx$. Para resolver esta integral utilizaremos la integración por partes:

$$\int x^n \ln x dx = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = \frac{x^n}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)$$

Ejemplo 3.8. Calcular $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$. Aparentemente mas difícil que el problema anterior:

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx = \int e^{ax} \left(\frac{\operatorname{sen} bx}{b}\right)' dx = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$$

La integral $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$ es de la misma forma que la original asi que volvemos a aplicar la integración por partes:

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \int e^{ax} \left(-\frac{\cos bx}{b}\right)' dx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

Juntando las dos fórmulas anteriores

$$I = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a}{b^2} e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2} I$$

de donde, resolviendo la ecuación respecto a I obtenemos:

$$I = \int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{b\operatorname{sen} bx + a\cos bx}{a^2+b^2} e^{ax}.$$

Una pequeña observación acerca de la integración por partes, la primitiva de un polinomio es otro polinomio, que se calcula fácilmente utilizando la fórmula para la primitiva x^n con $n \in \mathbb{N} \cup 0$. Si P es un polinomio y f es una función (por ejemplo) infinitamente diferenciable con una primitiva g conocida, la regles de Leibniz proporciona

$$\int P(x) f(x)\, dx = \int P(x) g'(x)\, dx = P(x) g(x) - \int P'(x) g(x)\, dx$$

donde aparece la integral de g por un polinomio de grado inferior en una unidad al de P. Si $\int g$ es también conocida, se puede aplicar la regla de Leibniz para simplificar la última integral, y así sucesivamente. En particular si $f(x) = e^x$ ó $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ ó $f(x) = \cos(x)$, todas cuyas primitivas sucesivas son conocidas, es claro que este método permite calcular $\int P(x) f(x)\, dx$ para cualquier polinomio P. Por ejemplo:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x dx = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x$$

3.3. Integración de funciones racionales

Definición 3.9. Diremos que una función racional $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ es simple si el grado del polinomio $P_n(x)$ es menor que el del polinomio $Q_m(x)$, o sea , si $n < m$.

Si $n > m$ entonces podemos dividir los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ de tal forma que

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = p_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}, \qquad \text{donde} \quad k < m \tag{22}$$

Teorema 3.10 (Teorema de descomposición en Fracciones simples)**.** *Supongamos que* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *es una fracción simple , y que el polinomio denominador se pueda factorizar de la siguiente forma* [5]

$$Q_n(x) = c(x-x_1)^{n_1}\cdots(x-x_p)^{n_p}\left[(x-a_1)^2+b_1^2\right]^{m_1}\cdots\left[(x-a_k)^2+b_k^2\right]^{m_k} \tag{23}$$

Siendo $n_i, m_j \geq 1$ *y* $b_j > 0$ *para todo* $i = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,k$ *. Los numeros* $x_i \in \mathbb{R}$ *son las raices de* $Q_m(x)$ *, de multiplicidad* n_i *,y los números complejos* $a_i \pm i b_j \in \mathbb{C}$

[5]Esta descomposición siempre es posible debido al *Teorema fundamental del Álgebra*

son las raices complejas de dicho polinomio, de multiplicidad m_j . Entonces la fracción simple $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se puede descomponer en la suma de ***fracciones elementales simples***

$$\begin{aligned}
\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)} &= \frac{A_{11}}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_{1n_1}}{\left(x-x_1\right)^{n_1}}+\ldots \\
&+\frac{A_{p1}}{\left(x-x_p\right)}+\ldots\frac{A_{pn_p}}{\left(x-x_p\right)^{n_p}}+\ldots \\
&+\frac{B_{11}x+C_{11}}{\left(x-a_1\right)^2+b_1^2}+\ldots+\frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{\left[\left(x-a_1\right)^2+b_1^2\right]^{m_1}}+\ldots \\
&+\frac{B_{k1}x+C_{k1}}{\left(x-a_k\right)^2+b_k^2}+\ldots+\frac{B_{km_k}x+C_{km_k}}{\left[\left(x-a_k\right)^2+b_k^2\right]^{m_k}}. \qquad (24)
\end{aligned}$$

donde A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} son ciertas contantes reales

Para determinar dichas constantes sumamos los términos de la derecha. Nótese que el denominador cumún conincide con la descomposición de $Q_n\left(x\right)$ y el numerador es un polinomio de grado a lo sumo n. Luego comparamos el polinomio numerador que se obtiene al sumar las fracciones simples con $P_n\left(x\right)$. Igualando los coeficientes de ambos obtendremos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas que podremos resolver para encontrar los coeficientes indeterminados A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}. No obstante existen *casos* en los que es posible hallar los coeficientes sin resolver un sistema de ecuaciones, los cuales detallaré en la resolución de problemas.

Luego de hallar las fracciones parciales, basta por lo tanto saber calcular las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}
&\int\frac{dx}{\left(x-a\right)^n}=\int\left(x-a\right)^{-n}dx=\frac{\left(x-a\right)^{1-n}}{1-n}, \qquad n\in\mathbb{N},\ n>1 \\
&\int\frac{dx}{x-a}=\ln\left|x-a\right| \\
&\int\frac{Cx+D}{\left[\left(x-a\right)^2+b^2\right]^n}dx, \qquad b\neq0
\end{aligned}$$

Esta ultima integral se simplifica primero mediante un cambio de variable $x-a=bu$, que la transforma en una integral mas simple del tipo

$$\int\frac{Au+B}{\left(u^2+1\right)^n}du=A\int\frac{u\,du}{\left(u^2+1\right)^n}+B\int\frac{du}{\left(u^2+1\right)^n}$$

La primera integral se calcula fácilmente mediante el cambio $u^2+1=v$, obteniendose:

$$\int\frac{u}{\left(u^2+1\right)^n}du=\frac{1}{2}\int v^{-n}dv=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|v\right|=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right), & n=1\\ \frac{v^{1-n}}{2(1-n)}=\frac{\left(u^2+1\right)^{1-n}}{2(1-n)}, & n>1\end{cases}$$

Por lo tanto, el problema de integrar una función racional arbitraria se reduce a última instancia al problema de calcular la integral

$$I_n(u) = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Si $n = 1$, ya hemos visto que $I_1(u) = \arctan u$. Si $n \in \mathbb{N}$, integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} I_n(u) &= u\frac{1}{(u^2+1)^n} - \int u\frac{-2nu\,du}{(u^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n\int \frac{u^2du}{(u^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n\left[I_n(u) + I_{n+1}(u)\right] \end{aligned}$$

En cosecuencia

$$I_{n+1}(u) = \frac{2n-1}{2n} I_n(u) + \frac{1}{2n}\frac{u}{(u^2+1)^n}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{25}$$

Fórmula que permite calcular recursivamente[6] $I_n(u)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ a partir de $I_1(u) = \arctan u$. Por lo tanto, hemos demostrado que *la integral de una función racional es una función elemental expresable en términos de funciones racionales, logaritmos y arcotangentes.*

3.3.1. Factores lineales no repetidos

Si $Q_m(x)$ tiene m ceros reales y simples, o sea, si su factorización es de la forma

$$Q_m(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)$$

entonsces $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se puede descomponer en las fracciones *elementales simples*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{(x-x_{m-1})} + \frac{A_m}{(x-x_m)}$$

Donde $A_1, \ldots, A_m$ se calculan por la fórmula

$$A_k = \lim_{x \to x_k} \frac{P_n(x)(x-x_k)}{Q_m(x)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{26}$$

[6] *"To iterate is human, to recurse divine."* L. Peter Deutsch

Ejemplo 3.11. Calcular $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx$. Primero encontramos las fracciones mas elementales

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x-1}{x\,(x-2)\,(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+1}$$

Luego, aplicando lo mencionado anteriormente:

$$A_1 = \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)\,x}{x\,(x-2)\,(x+1)} = \frac{1}{2}\,, \qquad A_2 = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)\,(x-2)}{x\,(x-2)\,(x+1)} = \frac{1}{6}$$

$$A_3 = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\,(x+1)}{x\,(x-2)\,(x+1)} = -\frac{2}{3}\,.$$

Finalmente, integrando:

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx = \int \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/6}{x-2} + \frac{-2/3}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1|$$

Otra manera[7] de calcular los coeficientes sería de la siguiente forma:

$$A_k = \frac{P_n\,(x_k)}{Q'_m\,(x_k)}$$

Ahora para el ejemplo anterior tenemos:

$$A_k = \left[\frac{x-1}{(x^3-x^2-2x)'}\right]_{x=k} = \left[\frac{x-1}{3x^2-2x-2}\right]_{x=k}$$

luego

$$A_1 = \left[\frac{x-1}{3x^2-2x-2}\right]_{x=0} = \frac{1}{2}\,, \qquad A_2 = \left[\frac{x-1}{3x^2-2x-2}\right]_{x=2} = \frac{1}{6}$$

$$A_3 = \left[\frac{x-1}{3x^2-2x-2}\right]_{x=-1} = -\frac{2}{3}$$

3.3.2. Factores lineales repetidos

Si $Q_m\,(x)$ se puede descomponear en factores lineales y algunos se repiten. Supongamos que $(x-x_1)$ se repite k veces, o sea se descompone en:

$$Q_m\,(x) = (x-x_1)^k\, H_{m-k}\,(x)$$

con $H_{m-k}\,(x_1) \neq 0$, entonces $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se descompone en la forma:

$$\frac{P_n\,(x)}{Q_m\,(x)} = \frac{P_n\,(x)}{(x-x_1)^k\, H_{m-k}\,(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^k} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{(x-x_1)} + \frac{R\,(x)}{H_{m-k}\,(x)}$$

[7]Fácilmente demostrable teniendo en cuenta que $Q'_n\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq 1} (x-x_j)$

Multiplicando por $(x - x_1)$, obtenemos:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = A_1 + A_1(x - x_1) + \ldots + A_k(x - x_k)^{k-1} + (x - x_1)^k \frac{R(x)}{H_{m-k}(x)}$$

De aqui se deduce que $A_1 = \frac{P_n(x_1)}{H_{m-k}(x_1)}$, $A_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{P_n(x_1)}{H_{m-k}(x_1)}\right)$; en general:

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\frac{P_n(x_1)}{H_{m-k}(x_1)}\right) \tag{27}$$

Ejemplo 3.12. Calcular $\int \frac{5x^2-23x}{(2x-2)(2x+4)^4}\,dx$, esta es una integral un poco más complicada, primero hallamos las fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{5x^2-23x}{(2x-2)(2x+4)^4} &= \frac{1}{32}\frac{5x^2-23x}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{1}{32}\left[\frac{A_1}{(x+2)^4} + \frac{A_2}{(x+2)^3} + \frac{A_3}{(x+2)^2} + \frac{A_4}{(x+2)} + \frac{B_1}{(x-1)}\right]\end{aligned}$$

Hallamos los coeficientes:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{0!}\left[\frac{5x^2-23x}{x-1}\right]_{x=-2} = -22 \\ A_2 &= \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2-23x}{x-1}\right)\right]_{x=-2} = \left[\frac{5x^2-10x+23}{(x-1)^2}\right]_{x=-2} = 7 \\ A_3 &= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{5x^2-23x}{x-1}\right)\right]_{x=-2} = \frac{1}{2!}\left[\frac{-36}{(x-1)^3}\right]_{x=-2} = \frac{2}{3} \\ A_4 &= \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{5x^2-23x}{x-1}\right)\right]_{x=-2} = \frac{1}{3!}\left[\frac{108}{(x-1)^4}\right]_{x=-2} = \frac{2}{9} \\ B_1 &= \frac{1}{0!}\left[\frac{5x^2-23x}{(x+2)^4}\right]_{x=1} = -\frac{2}{9}\end{aligned}$$

Finalmente integramos:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2-23x}{(2x-2)(2x+4)^4}dx &= \frac{1}{32}\int\left[\frac{-22}{(x+2)^4} + \frac{7}{(x+2)^3} + \frac{2/3}{(x+2)^2} + \frac{2/9}{(x+2)} + \frac{-2/9}{(x-1)}\right]dx \\ &= \frac{1}{32}\left[\frac{22}{3(x+2)^3} - \frac{7}{2(x+2)^2} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{2}{9}\ln|x+2| - \frac{2}{9}\ln|x-1|\right]\end{aligned}$$

3.4. Integrales reducibles a integrales de funciones racionales

3.4.1. De la forma $\int R(e^x)\,dx$

Las integrales de la forma $\int R(e^x)\,dx$ donde R es una función racional se reducen a la integral de una función racional mediante el cambio de variable $u = e^x$:

$$\int R(e^x)\,dx = \left\{\begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x dx \end{array}\right\} = \left[\int \frac{R(u)}{u}dx\right]_{u=e^x} \tag{28}$$

3.4.2. De la forma $\int R\left(\operatorname{sen} x, \cos x\right) dx$

La integral de la forma:$\int R\left(\operatorname{sen} x, \cos x\right) dx$ donde $R\left(s, t\right)$ es una función racional de dos variables s y t, también se reduce a la integral de una función racional, mediante el cambio de variable $u = \tan x$:

$$\begin{aligned}\int R\left(\operatorname{sen} x, \cos x\right) dx &= \left\{\begin{array}{ll} u = \tan x & dx = \frac{2du}{1+u^2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2} & \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{array}\right\} \\ &= \int \frac{2}{1+u^2} R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) dx \qquad (29)\end{aligned}$$

Existen varios tipos de integrales trigonométricas que se pueden *racionalizar* con cambios más sencillos. Ellas son las siguientes:

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x) dx, \text{ donde } f(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x), \text{ cambio } t = \cos x$$

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x) dx, \text{ donde } f(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x), \text{ cambio } t = \operatorname{sen} x$$

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x) dx, \text{ donde } f(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = f(\operatorname{sen} x, \cos x), \text{ cambio } t = \tan x$$

3.4.3. De la forma $\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

Las integrales de la forma

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

donde de nuevo R es una función racional de dos variable y

$$\Delta = ad - bc \neq 0$$

Tambien se reducen a la integral de una función racional mediante el cambio de variable

$$u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \Longrightarrow x = \frac{du^2 - b}{a - cu^2}$$

en efecto

$$du = \frac{\Delta}{2u} \frac{dx}{(cx+d)^2} = \frac{(a-cu^2)^2}{2\Delta u} dx$$

de donde

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = 2\Delta \left[\int \frac{u}{(a-cu^2)^2} R\left(\frac{du^2-b}{a-cu^2}, u\right) du\right]_{u=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}}$$

En particular, si R es una función racional de dos variables, la integral

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})dx \qquad a \neq 0$$

se convierte mediante el cambio

$$u = \sqrt{ax+b}$$

en lka integral de una función racional:

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})dx = \frac{2}{a}\left[\int R\left(\frac{u^2-b}{a}, u\right) udu\right]_{u=\sqrt{ax+b}}$$

3.4.4. De la forma $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

Las integrales del tipo

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \qquad a \neq 0,\ \Delta = b^2 - 4ac \neq 0$$

Donde R es una función racional de dos variables, no se transformanm en integrales de funciones racionales mediante el cambio $u = \sqrt{ax^2+bx+c}$, Para racionalizar esta integral, se efectua en primer lugar un cambio de variable lieal

$$ax + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}u$$

que lo transforman en los siguientes tipos mas sencillos:

$$\int \tilde{R}\left(u, \sqrt{1-u^2}\right) du \qquad (a < 0,\ \Delta > 0) \tag{30}$$

$$\int \tilde{R}\left(u, \sqrt{u^2-1}\right) du \qquad (a > 0,\ \Delta > 0) \tag{31}$$

$$\int \tilde{R}\left(u, \sqrt{1+u^2}\right) du \qquad (a > 0,\ \Delta < 0) \tag{32}$$

Donde $\tilde{R}$ es de nuevo una función racional de dos variables.

Si la integral es del tipo (30), el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} t, \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$$

(ó $u = \cos t$) la reduce a una integral trigonométrica (sección 3.4.2):

$$\int \tilde{R}\left(u, \sqrt{1-u^2}\right) du = \left[\int \tilde{R}\left(\operatorname{sen} x, \cos x\right) \cos t dt\right]_{t=\operatorname{arc\,sen} x}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\cos t \geq 0$ si $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Análogamente si la integral es del tipo (31) el cambio de variable

$$u = \sec t, \qquad t \in [0, \pi] - \frac{\pi}{2}$$

la reduce a una integral trigonométrica (sección 3.4.2):

$$\int \tilde{R}\left(u, \sqrt{u^2 - 1}\right) = \left[\int \tilde{R}\left(\sec t, \pm \tan t\right) \sec t \tan t dt\right]_{t=\mathrm{arcsec} u}$$

donde el signo + (resp. −) corresponde a $u \geq 1$ (resp. $u \leq -1$).

Finalmente una integral del tipo (32) se convierte de nuevo en una integral trigonométrica (sección 3.4.2) mediante el cambio

$$u = \tan t, \qquad t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$

En efecto

$$\int \tilde{R}\left(u, \sqrt{1 + u^2}\right) du = \left[\int \tilde{R}\left(\tan t, \sec t\right) \sec^2 t dt\right]_{t=\arctan u}$$

4. Anexo

4.1. Aplicaciones de la Integral Definida

1. **Área de una figura plana asociada a una curva**[8]

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \qquad \text{Explícita} \qquad (33)$$

$$A = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) \right| dt \qquad \text{Paramétrica} \qquad (34)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^2 d\theta \qquad \text{Polar} \qquad (35)$$

2. **Longitud de arco de una curva plana**

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \qquad \text{Explícita} \qquad (36)$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \qquad \text{Paramétrica} \qquad (37)$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta \qquad \text{Polar} \qquad (38)$$

[8]Usando el teorema de Green, el área definida por el contorno C simple, cerrado, positivamente-orientado es:

$$A = \oint_C x dy = \oint_C y dx$$

3. **Volumen del sólido de revolución asociado a una curva plana**

$$V = \int_a^b f(x)^2 dx \qquad \text{Alrededor del eje } X \tag{39}$$

$$V = 2\pi \int_a^b x|f(x)|dx \qquad \text{Alrededor del eje } Y \tag{40}$$

$$V = \pi \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t)^2 x'(t) dt \right| \qquad \text{Paramétrica} \tag{41}$$

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^3 \operatorname{sen} \theta d\theta \qquad \text{Polar} \tag{42}$$

4. **Volumen de un solido de área conocida**

$$V = \int_a^b S(x) dx \tag{43}$$

5. **Área de una superficie de revolución alrededor del eje x generada por una curva plana**

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \qquad \text{Explícita} \tag{44}$$

$$A = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} |y(t)| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \qquad \text{Paramétrica} \tag{45}$$

$$A = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta) |\operatorname{sen} \theta| \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta \qquad \text{Polar} \tag{46}$$

6. **Centro de gravedad (baricentro) de una curva plana con una densidad de masa δ**

Explicita (x_0, x_0)

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\delta(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{\int_a^b \delta(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx} \tag{47}$$

$$y_0 = \frac{\int_a^b f(x)\delta(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{\int_a^b \delta(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx} \tag{48}$$

Paramétrica (x_0, y_0)

$$x_0 = \frac{\int_{t_0}^{t_1} x(t)\delta(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt}{\int_{t_0}^{t_1} \delta(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt} \tag{49}$$

$$y_0 = \frac{\int_{t_0}^{t_1} y(t)\delta(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt}{\int_{t_0}^{t_1} \delta(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt} \tag{50}$$

Polar (x_0, y_0)

$$x_0 = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \delta(\theta)\rho(\theta)\cos\theta\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \delta(\theta)\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta} \tag{51}$$

$$y_0 = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \delta(\theta)\rho(\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \delta(\theta)\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta} \tag{52}$$

7. **Momento de Inercia de una curva plana con densidad δ, con respecto a una recta o un punto**

   Explícita: $d(x)$ es la distancia del punto $(x, f(x))$ a la recta o al punto.

$$I = \int_a^b d(x)^2\delta(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx \tag{53}$$

   Paramétrica: $d(t)$ es la distancia del punto $(x(t), y(t))$ a la recta o al punto.

$$I = \int_{t_0}^{t_1} d(t)^2\delta(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \tag{54}$$

   Polar: $d(\theta)$ es la distancia del punto $(\theta, \rho(\theta))$ a la recta o al punto.

$$I = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d(\theta)^2\delta(\theta)\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta \tag{55}$$

4.2. Tabla de integrales

Coming soon :-), mientras tanto, puedes echarle un vistazo al libro *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*[9] con una tabla de nada menos 708 integrales, eso sí bien ordenaditas ;-)

[9] I love this book