TANA21: Projektrapport

Ickelinjära ekvationer

Namn	**Personnummer**	**Epostaddress**
Martin Söderén	900929-1098	marso329@student.liu.se
Alexander Yngve	930320-6651	aleyn573@student.liu.se

1 Inledning

Denna rapport behandlar konvergensordningen hos sekantsmetoden som används för att lösa olinjära ekvationer $f(x) = 0$.

2 Uppgift

Projektets uppgift är att skapa en MATLAB-funktion *mysol* som returnerar en approximativ rot till en ickelinjär ekvation med önskad noggrannhet.

Frågor att besvara:

- Är konvergensordningen som förväntad?

3 Teori

Den matematiska definitionen ser ut på följande sätt[1]:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1} - f(x_{n-2}))}$$

Detta ger en konvergensordning på $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$ Konvergensordningen beräknas med

$$lim_{x\to\infty} \frac{|x_{k+1} - L|}{|x_k - L|^p} = \mu|\mu > 0$$

Där L är talet som summan ska konvergera mot. Om gränsen är uppfylld så har konvergensordning p. Så man får testa olika p för att hitta rätt.

4 Metod

Funktionerna implementerades i enlighet med teorin och därefter testades *mysol* med koden i figur 2. Det testkoden i figur 2 gör är att för några godtyckliga funktioner med kända rötter så beräknas dessa och mellan varje iteration så jämförs hur mycket värdet har förändrats, det vill säga hur snabbt värdet konvergerar med hjälp av funktionen för konvergensordningen i teorin.

5 Kod

Funktionen *mysol* (figur 1) hittar en rot till funktionen f och använder x1 och x2 som startpunkter, error anger hur nära roten ska vara, det vill säga funktionen stannar när $|f(x)| \leq error$.

```
function[x,it,x_arr] = mysol(f,x1 ,x2 ,error)
x = (x1*f(x2) - x2*f(x1))/(f(x2) - f(x1));
it=1;
x_arr=[];
while abs(f(x2)) > error
    it=it+1;
    x1 = x2;
    x2 = x;
    x = (x1*f(x2) - x2*f(x1))/(f(x2) - f(x1));
    x_arr=[x_arr x];
end
end
```

Figur 1 – *mysol*

```
con=1.80;

%root in 1 and 1000
f=@(x) x.^2-1001*x+1000;
[x,it,x_arr]=mysol(f,-10,10,0.0000000001);
convergence1=zeros(1,length(x_arr)-1);
for i=1:length(x_arr)-1
convergence1(i)=abs(x_arr(i+1)-1)/abs(x_arr(i)-1)^con;
end

for i=1:length(convergence1)-1
if convergence1(i+1)<convergence1(i)
    disp('fail')
end
end

f=@(x) 3*x+sin(x)-exp(x);
[x,it,x_arr]=mysol(f,0,1,0.0000000000);
convergence2=zeros(1,length(x_arr)-1);
for i=1:length(x_arr)-1
convergence2(i)=abs(x_arr(i+1)-0.360421702960324)/abs(x_arr(i)-0.360421702960324)^con
end

for i=1:length(convergence2)-1
if convergence2(i+1)<convergence2(i)
    disp('fail')
end
end

f=@(x) cos(x)-x*exp(x);
[x,it,x_arr]=mysol(f,1,2,0.0000000000001);
convergence3=zeros(1,length(x_arr)-1);
for i=1:length(x_arr)-1
convergence3(i)=abs(x_arr(i+1)-0.517757363682458)/abs(x_arr(i)-0.517757363682458)^con
end

for i=1:length(convergence3)-1
```

```
if convergence3(i+1)<convergence3(i)
    disp('fail')
end
end

f=@(x) x.^4-x-10;
[x,it,x_arr]=mysol(f,-2,-1.5,0.0000001);
convergence4=zeros(1,length(x_arr)-1);
for i=1:length(x_arr)-1
convergence4(i)=abs(x_arr(i+1)+1.697471880844153)/abs(x_arr(i)+1.697471880844153)^con
end
for i=1:length(convergence4)-1
if convergence4(i+1)<convergence4(i) && convergence4(i+1)~=0
    disp('fail')
end
end
```

Figur 2 – Testkod för konvergensordningen

6 Validering

För samtliga funktioner i testkoden så hittar *mysol* den kända roten med den givna toleransen så man kan anta att den fungerar korrekt.

7 Resultat

Resultatet av testet beskrivet i avsnitt 4 återges i tabell 1, 2, 3 och 4.

Iteration	Värde för p=1	Värde för p=2
$\frac{\lvert x_2 - L\rvert}{\lvert x_1 - L\rvert^p}$	0.000099009811628	$10^{10} * 0.000000000011011$
$\frac{\lvert x_3 - L\rvert}{\lvert x_2 - L\rvert^p}$	0.000000900362447	$10^{10} * 0.000000001011317$
$\frac{\lvert x_4 - L\rvert}{\lvert x_3 - L\rvert^p}$	0.001385041551247	$10^{10} * 1.727887150716499$
$\frac{\lvert x_5 - L\rvert}{\lvert x_4 - L\rvert^p}$	X	X
$\frac{\lvert x_6 - L\rvert}{\lvert x_5 - L\rvert^p}$	X	X
$\frac{\lvert x_7 - L\rvert}{\lvert x_6 - L\rvert^p}$	X	X

Tabell 1 – Resultetet för funktionen $x^2 - 1001x + 1000 \quad [-10\ 10]$

Iteration	Värde för p=1	Värde för p=2
$\frac{\vert x_2 - L\vert}{\vert x_1 - L\vert^p}$	0.041417589533209	$10^{15} * 0.000000000000001$
$\frac{\vert x_3 - L\vert}{\vert x_2 - L\vert^p}$	.018151073167259	$10^{15} * 0.000000000000008$
$\frac{\vert x_4 - L\vert}{\vert x_3 - L\vert^p}$	0.000783911390405	$10^{15} * 0.000000000000020$
$\frac{\vert x_5 - L\vert}{\vert x_4 - L\vert^p}$	0.000014214666714	$10^{15} * 0.000000000000456$
$\frac{\vert x_6 - L\vert}{\vert x_5 - L\vert^p}$	0.000876643706951	$10^{15} * 0.000001977734388$
$\frac{\vert x_7 - L\vert}{\vert x_6 - L\vert^p}$	1.000000000000000	$10^{15} * 2.573485501354569$

Tabell 2 – Resultetet för funktionen $3x + sin(x) - e^x$

Iteration	Värde för p=1	Värde för p=2
$\frac{\vert x_2 - L\vert}{\vert x_1 - L\vert^p}$	0.211560916696176	$10^{14} * 0.000000000000010$
$\frac{\vert x_3 - L\vert}{\vert x_2 - L\vert^p}$	0.157355243766339	$10^{14} * 0.000000000000035$
$\frac{\vert x_4 - L\vert}{\vert x_3 - L\vert^p}$	0.036470298695798	$10^{14} * 0.000000000000052$
$\frac{\vert x_5 - L\vert}{\vert x_4 - L\vert^p}$	0.005861398055047	$10^{14} * 0.000000000000229$
$\frac{\vert x_6 - L\vert}{\vert x_5 - L\vert^p}$	0.000214492965481	$10^{14} * 0.000000000001428$
$\frac{\vert x_7 - L\vert}{\vert x_6 - L\vert^p}$	0.428571428571429	$10^{14} * 5.514611788616934$

Tabell 3 – Resultetet för funktionen $cos(x) - xe^x$

Iteration	Värde för p=1	Värde för p=2
$\frac{\vert x_2 - L\vert}{\vert x_1 - L\vert^p}$	0.040364291101974	$10^{2} * 0.046041753089641$
$\frac{\vert x_3 - L\vert}{\vert x_2 - L\vert^p}$	0.007342564217199	$10^{2} * 0.207493714710633$
$\frac{\vert x_4 - L\vert}{\vert x_3 - L\vert^p}$	0.000297545054916	$10^{2} * 1.145149468054755$
$\frac{\vert x_5 - L\vert}{\vert x_4 - L\vert^p}$	0.000000574416522	$10^{2} * 7.429911231660303$
$\frac{\vert x_6 - L\vert}{\vert x_5 - L\vert^p}$	X	X
$\frac{\vert x_7 - L\vert}{\vert x_6 - L\vert^p}$	X	X

Tabell 4 – Resultetet för funktionen $x^4 - x - 10$ [1 2]

8 Diskussion

Alla funktioner konvergerar med $p = 2$ mot ett värde >0. Vi testade lite olika värden och det minsta värdet på p som vi tyckte gav bra resultat var 1.8 vilket inte är så långt från det teoretiska värdet på 1.62. Så konvergensordningen verkar vara ungefär som förväntat.

Referenser

[1] Olof Runborg, *Konvergensordning för sekantmetoden*, http://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/DN1240/numfcl11/DN1242/sekant.pdf, [2015-10-14].