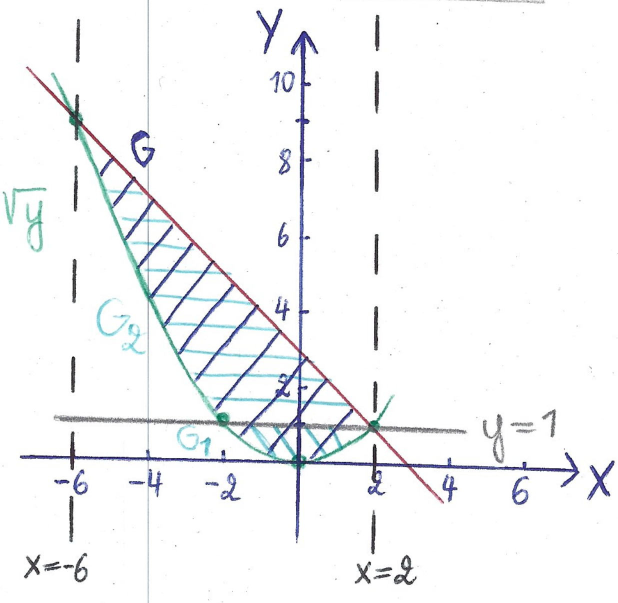
7c) Verwissel de integratievolgorde : $\int_{-6}^{2}\int_{x^2/4}^{3-x} f(x,y)\,dy\,dx$

(1) gebied G tekenen

* $x \in [-6,2]$
* $y = \frac{x^2}{4}$ parabool $\rightsquigarrow x = \pm 2\sqrt{y}$
  → top $t(0,0)$
  → $p_1(-6,9)$, $p_2(2,1)$, $p_3(-2,1)$
* $y = 3-x$ rechte $\rightsquigarrow x = 3-y$
  → $p_1(-6,9)$, $p_2(2,1)$



(2) integratievolgorde dxdy

opsplitsing van G in gebieden G_1 en G_2 door horizontale rechte $y=1$
(op figuur aangeduid)

(3) dubbelintegralen opstellen

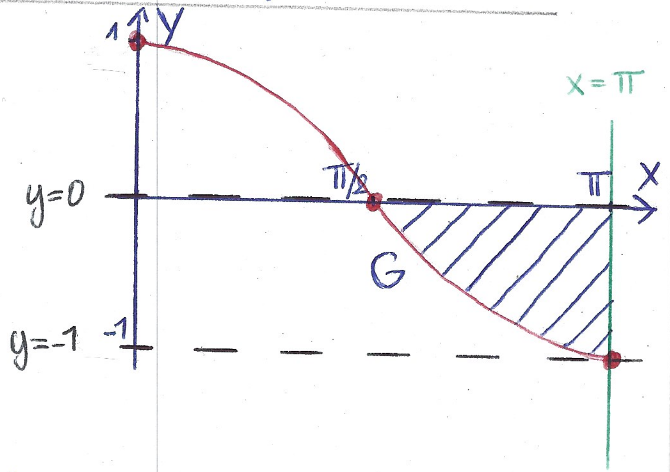
$$\iint_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^9 \int_{-2\sqrt{y}}^{3-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

7d) Verwissel de integratievolgorde : $\int_{-1}^{0}\int_{Bgcos\,y}^{\pi} f(x,y)\,dx\,dy$

(1) gebied G tekenen

* $y \in [-1,0]$
* $x = Bgcos\, y$
  $\rightsquigarrow y = \cos x$ met $x \in [0,\pi]$
* $x = \pi$



(2) dubbelintegraal met integratievolgorde dydx opstellen

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{\cos x}^{0} f(x,y)\,dy\,dx$$

(8c) Bereken $\iint_G \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}}\,dxdy$ met G het gebied binnen $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ met behulp v/d coördinatentransformatie

$$\begin{cases} x = 2r\cos t \\ y = 4r\sin t \end{cases} \quad (*)$$

---

(1) De Jacobiaan $J(r,t)$ $\qquad dxdy = |J(r,t)|\,drdt$

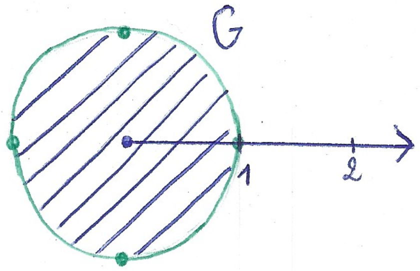
$$J(r,t) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial t \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos t & -2r\sin t \\ 4\sin t & 4r\cos t \end{vmatrix} = 8r\,(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1})$$

(grondformule v/d goniometrie)

$$J(r,t) = 8r$$

(2) Het gebied G na coördinatentransformatie: (*)

(**) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \xrightarrow{(*)} r^2(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1})=1 \overset{r>0}{\Rightarrow} r=1$



(*) na transformatie naar het nieuwe coördinatenstelsel (GEEN echte poolcoördinaten !!) kunnen we dit voorstellen zoals in de tekening hiernaast.

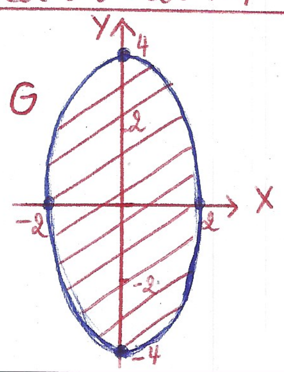
(3) $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}} \xrightarrow{(*)} \sqrt{1-r^2(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1})} = \sqrt{1-r^2}$

(4) Dubbelintegraal opstellen en berekenen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot 8r\,drdt = \int_0^{2\pi} dt \cdot \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot 8r\,dr$$

$$= [t]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\cdot(-4)\right]_0^1 = 2\pi\cdot\left[0-\left(-\frac{8}{3}\right)\right] = \frac{16\pi}{3}$$

(**) Het gebied in het XY-coördinatenstelsel



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

9d Zet om naar Po. Co. en bereken: $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{0} (x^3+xy^2)\,dx\,dy$

(1) Overgang van Ca. Co. naar Po. Co. & Jacobiaan

$$(*) \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dx\,dy = |J(r,\theta)|\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$

(2) Gebied G tekenen

$*$ $y \in [0,2]$

$*$ $x = -\sqrt{2y-y^2}$ $(x \leq 0)$

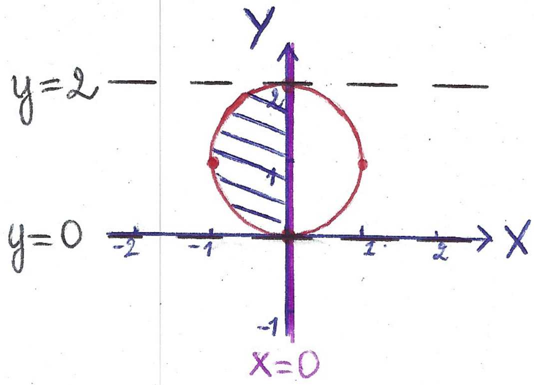
$\downarrow$

$x^2 = 2y - y^2$

$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ cirkel met $m(0,1)$ en $R = 1$

$\xrightarrow{(*)} r = 2\sin\theta$

$*$ $x = 0$



(3) $x^3 + xy^2 = x(x^2+y^2) \xrightarrow{(*)} r^3\cos\theta$

(4) Dubbelintegraal in Po. Co. opstellen en berekenen

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} r^4 \cos\theta \, dr\,d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{2^5}{5} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^5\theta . \cos\theta \, d\theta = \frac{2^5}{5} \left[\frac{\sin^6\theta}{6}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{2^4}{5.3}(0-1) = -\frac{16}{15}$$

(10b) Bereken met een dubbelintegraal de oppervlakte v/h gebied begrensd door $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$ en $y=0$.

Opperlakte v/e vlak gebied G:

$$S=\iint_G dxdy=\iint_G r\,dr\,d\theta \qquad \text{(cursus p. 37)}$$

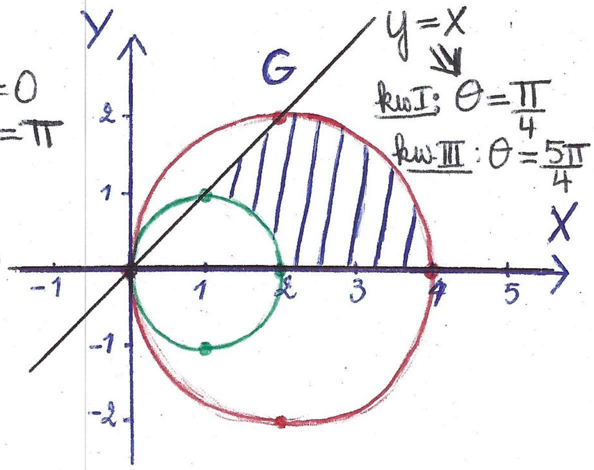
(1) <u>gebied G tekenen</u>

$x\geq 0: \theta=0$

$x\leq 0: \theta=\pi$

$\Uparrow$

$y=0$



* $x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$
cirkel met $m_1(1,0)$ en $R_1=1$
$\Rightarrow r=2\cos\theta$

* $x^2+y^2=4x \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$
cirkel met $m_2(2,0)$ en $R_2=2$
$\Rightarrow r=4\cos\theta$

(2) <u>dubbelintegraal opstellen en berekenen</u>

* bij Ca.Co. : → gebied G opsplitsen in 2 gebieden
→ minder eenvoudige integralen

* bij Po.Co. : → 1 eenvoudige dubbelintegraal

$$S=\int_0^{\pi/4}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}(8\cos^2\theta-2\cos^2\theta)\,d\theta = 3\int_0^{\pi/4}2\cos^2\theta\,d\theta$$

goniometrische formule

$$=3\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=3\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$=3\left[\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)-0\right]$$

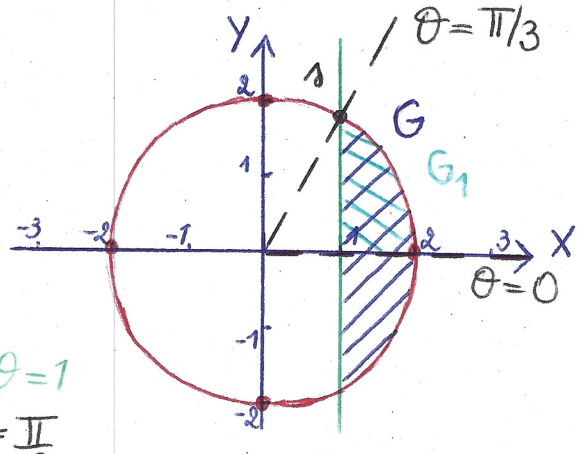
$$=\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}$$

10c Bereken met een dubbelintegraal de oppervlakte v/h gebied begrensd door $r\cos\theta = 1$ en $r = 2$ (gebied dat de pool niet bevat!)

Oppervlakte v/e vlak gebied G:

$$S = \iint_G dxdy = \iint_G r dr d\theta$$

(cursus p. 37)



(1) gebied G tekenen

$r = \frac{1}{\cos\theta}$ ← $*\ r\cos\theta = 1 \Rightarrow x = 1$

verticale rechte

$*\ r = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

cirkel met $m(0,0)$

en $R = 2$

$\Rightarrow$ θ-waarde v/h snijpunt s van $r\cos\theta = 1$

en $r = 2$: $\cos\theta = \frac{1}{2} \underset{\substack{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \text{want } s \in I}}{\Rightarrow} \theta = \frac{\pi}{3}$

(2) dubbelintegraal opstellen en berekenen

$S = 2 . S_1$ met S_1 = oppervlakte van G_1 (aangeduid op figuur)

* bij Ca.Co. : minder eenvoudige integralen

* bij Po.Co. : eenvoudige integralen

$$S = 2 \int_0^{\pi/3} \int_{1/\cos\theta}^{2} r dr d\theta = 2 \int_0^{\pi/3} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{1/\cos\theta}^{2} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left[4 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right] d\theta = \left[4\theta - tg\,\theta\right]_0^{\pi/3}$$

$$= \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) - (0)$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

11a

Stel de dubbelintegraal op voor het berekenen van het volume van het lichaam ingesloten door $z=0$, $z=x+y+2$ en $x^2+y^2=16$ in het eerste octant (in Ca.Co. en in Po.Co.)

---

cursus p.37

De inhoud v/h ruimtelichaam begrensd door het XY-vlak ($z=0$), het oppervlak $z=f(x,y)$ ($z=x+y+2$) en het cilinderoppervlak // Z-as, met richtkromme de rand v/e vlak gebied G in het XY-vlak (1)

$$V=\iint_G |f(x,y)|\,dS$$

(1) gebied G tekenen

* doorsnede v/h cilinderoppervlak $x^2+y^2=16$ met het XY-vlak: cirkel met $m(0,0)$ en $R=4$

$x^2+y^2=16 \Rightarrow r=4$

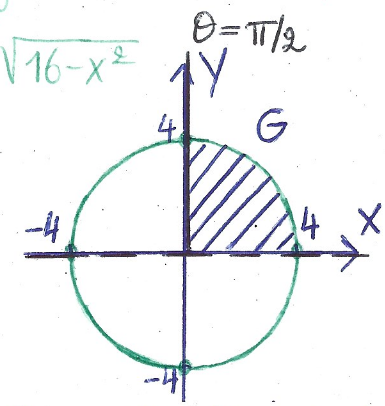
$\Downarrow$

$y=\pm\sqrt{16-x^2}$

* eerste octant: $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$

$\Downarrow$

gebied G is het deel v/d cirkelschijf in het eerste kwadrant



$y=0$

$\Downarrow$

$\underline{x\geq 0}$: $\theta=0$

$\underline{x<0}$: $\theta=\pi$

(2) dubbelintegraal in Ca.Co.

Voor elk punt $p(x,y)\in G$ geldt: $f(x,y)\geq 0 \Rightarrow |f(x,y)|=f(x,y)$ (namelijk $f(x,y)\geq 2$)

$$\Rightarrow V=\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}(x+y+2)\,dy\,dx$$

(3) dubbelintegraal in Po.Co.

* Jacobiaan: $J(r,\theta)=r \quad\Rightarrow dy\,dx = r\,dr\,d\theta$
* $x+y+2 \Rightarrow r\cos\theta + r\sin\theta + 2$

$$\Rightarrow V=\int_0^{\pi/2}\int_0^4(r\cos\theta+r\sin\theta+2)\,r\,dr\,d\theta$$