EXAMEN WISKUNDE 1 (tweede zittijd academiejaar ’20-’21, reeks A)
Opleiding industrieel ingenieur
Omcirkel: Eerste bachelor / Schakelprogramma
Naam :

UNIVERSITEIT GENT

Nr.:

/40

Schrijf netjes. Vul in op de opengelaten plaatsen.
Geen rekenmachine, gsm, smartphone, ….
Geef uitleg bij de open vragen. Veel succes!

FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

1. Bepaal de asymptoten van de parameterkromme $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t^2+1}{t+2} \end{cases}$. /7

V.A. $y \to \infty$ als $t \to -2$ of als $t \to \infty$

$\lim_{t \to -2} x = -\frac{2}{3}$ $\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ is een VA.

$\lim_{t \to \infty} x = 0$ $\Rightarrow x = 0$ is een VA.

N.V.A. $x \to \infty$ als $t \to \pm 1$

$$\lim_{t \to \pm 1} \frac{y}{x} = \lim_{t \to \pm 1} \left(\frac{t^2+1}{t+2}\right) \cdot \left(\frac{t^2-1}{t}\right) = 0$$

$$\lim_{t \to 1} y = \lim_{t \to 1} \frac{t^2+1}{t+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \text{ is een HA}$$

$$\lim_{t \to -1} y = \lim_{t \to -1} \frac{t^2+1}{t+2} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ is een HA}$$

2. Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $\log_8(x^2 + 4\,x) - \frac{1}{6}\,\log_2(x+2) = \log_4(x+4)$. /5

(BV) bestaansvoorwaarde: $x^2+4x>0$ en $x+2>0$ en $x+4>0$

m.a.w. $x \in \mathbb{R}_0^+$

$$\log_8(x^2+4x) - \frac{1}{6}\log_2(x+2) = \log_4(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(x^2+4x)}{\underbrace{\log_2 8}_{=3}} - \frac{1}{6}\log_2(x+2) = \frac{\log_2(x+4)}{\underbrace{\log_2 4}_{=2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x^2+4x) - \log_2(x+2) = 3\log_2(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x^2+4x)^2}{x+2} = \log_2 (x+4)^3$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+4)^2 = (x+2)(x+4)^3$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \text{ of } x^2 = (x+2)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow x = \cancel{-4} \text{ of } x = \cancel{-\frac{4}{3}}$$

wegens BV

$OV = \emptyset$

3. Teken in het complexe vlak de oplossingen van $|z+1-j|^2 = |z|^2 + |1-j|^2$. /4

$z = a+bj$ invullen in $|z+1-j|^2 = |z|^2 + |1-j|^2$:

$$|(a+1)+(b-1)j|^2 = |a+bj|^2 + |1-j|^2$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 + (b-1)^2 = a^2+b^2+1^2+(-1)^2$$

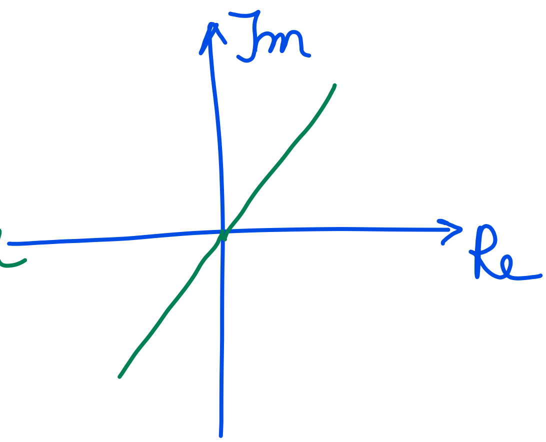
$$\Leftrightarrow a^2+2a+1+b^2-2b+1 = a^2+b^2+2$$

$$\Leftrightarrow 2a = 2b$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

a = reëel deel van z

b = imaginair deel van z



4. Voor welke waarden van a staan de vectoren $(a\,\vec{v_1} + \vec{v_2})$ en $(\vec{v_1} - a\,\vec{v_2})$ loodrecht op elkaar. Hou hierbij ook rekening met hetvolgende: de vector $\vec{v_1}$ is dubbel zo lang als $\vec{v_2}$, de vectoren $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ maken een hoek van $\pi/3$ met elkaar. $(\vec{v_1} \neq \vec{0})$ /4

$$(a\vec{v_1}+\vec{v_2})\cdot(\vec{v_1}-a\vec{v_2})=0$$

$$\Leftrightarrow a\|\vec{v_1}\|^2 - a^2\,\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} + \vec{v_2}\cdot\vec{v_1} - a\|\vec{v_2}\|^2 = 0$$

$\|\vec{v_1}\| = 2\|\vec{v_2}\|$

$$\Leftrightarrow 4a\,\|\vec{v_2}\|^2 + (1-a^2)\,\|\vec{v_2}\|\,2\|\vec{v_2}\|\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=1/2} - a\,\|\vec{v_2}\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a\,\|\vec{v_2}\|^2 + (1-a^2)\,\|\vec{v_2}\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a + 1 - a^2 = 0 \qquad D = 9+4 = 13$$

$\|\vec{v_2}\| \neq 0$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{-2} = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

5. Stel de integraal/integralen op (niet berekenen!) die de oppervlakte voorstelt van het gebied G zowel gelegen binnen $r = 2 - 2\sin\theta$ als binnen $r = 1$. Maak een tekening. /4

$r = 2 - 2\sin\theta$

- $r(\pi - \theta) = r(\theta)$
- $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

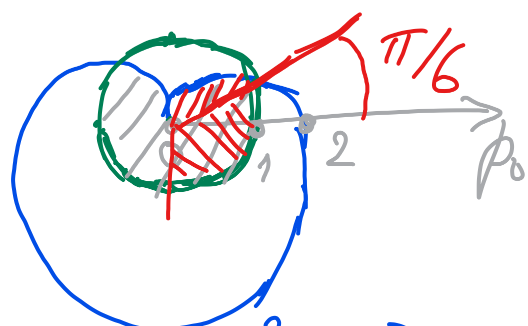
$\Rightarrow -2 \leq -2\sin\theta \leq 2$

$\Rightarrow 0 \leq 2 - 2\sin\theta \leq 4$

θ	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
r	4	2	0

snijpunten:

$$\begin{cases} r = 1 \\ r = 2 - 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \sin\theta = 1/2 \end{cases}$$



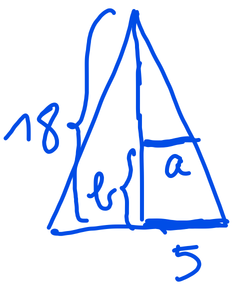
$$\text{opp} = 2\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \frac{1^2}{2}\,d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(2-2\sin\theta)^2}{2}\,d\theta\right)$$

6. Vul in onderstaande tabel met een hoofdletter de juiste oplossing aan. Er is telkens exact 1 juiste oplossing. Duid bij elke vraag een antwoord aan want standard setting wordt toegepast bij de evaluatie. /16

vraag	1	2	3	4	5	6	7	8
antwoord	A	B	A	D	A	A	B	D

(1) Water vloeit in een kegelvormig vat (straal $R = 5$ m en hoogte $H = 18$ m) met een constante snelheid van $3\text{m}^3/\text{min}$. Wat is de snelheid waarmee het waterniveau in de kegel stijgt op het ogenblik dat het water 9 m hoog staat? (Inhoud kegel $= \frac{1}{3}\,\pi\, R^2\, H$)

$$I = \frac{\pi}{3}\left(25\times 18 - (18-h)^3\left(\frac{5}{18}\right)^2\right)$$

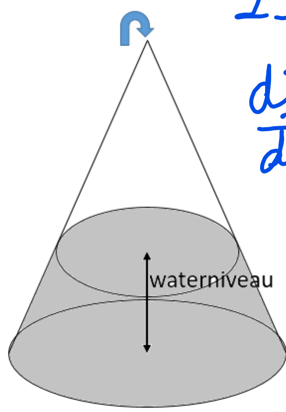


$\frac{a}{5} = \frac{18-h}{18}$

$$\frac{dI}{dt} = 3 \Leftrightarrow \pi(18-h)^2\left(\frac{5}{18}\right)^2\frac{dh}{dt} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{\pi}\left(\frac{18}{5}\right)^2\frac{1}{(18-h)^2}$$

A. $\frac{12}{25\,\pi}$ m/min
B. $\frac{12\,\pi}{25}$ m/min
C. 3 m/min
D. $\sqrt[3]{3}$ m/min



Als $h = 9$: $\frac{dh}{dt} = \frac{12}{25\pi}$

(2) Wat is de vergelijking van de raaklijn in $p(-1,\,-1)$ aan de kromme met vergelijking $e^{y+x^2} + \cos(y\,\frac{\pi}{2}) + x + y^2 = 1$?

impliciet afleiden:

$$e^{y+x^2}(y'+2x)+\frac{\pi}{2}y'\left(-\sin\left(y\frac{\pi}{2}\right)\right)+1+2yy'=0$$

in $p(-1,-1)$: $(y_p'-2)+\frac{\pi}{2}y_p'+1-2y_p'=0$

$\Leftrightarrow y_p' = \frac{2}{\pi-2}$

T: $(y+1) = \frac{2}{\pi-2}(x+1)$

$\Leftrightarrow (\pi-2)y = 2x-\pi+4$

A. $(\pi - 2)\,x + \pi = 2\,y + 4$
B. $(\pi - 2)\,y + \pi = 2\,x + 4$
C. $(\pi - 2)\,y + \pi + 2\,x = 0$
D. $(\pi - 2)\,x + \pi - 2\,y = 0$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[x\left(\frac{1}{3}\right)^{1/x}\right] = 0 \cdot 0 = 0$

A. 0
B. $-\infty$
C. 1
D. $+\infty$

(4) Wat is het beeld van $y = e^{-x}\,(1 - 2\,x)$?

$y' = e^{-x}(-1+2x-2)$
$= e^{-x}(2x-3)$

A. $\left]-\infty,\, 2\sqrt{e}\right]$
B. $\left]-\infty,\, \frac{-2}{\sqrt{e^3}}\right]$
C. $\left[2\sqrt{e},\, +\infty\right[$
D. $\left[\frac{-2}{\sqrt{e^3}},\, +\infty\right[$

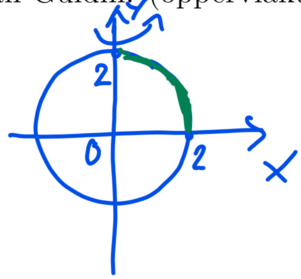
x		$3/2$	
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty \searrow$	$\frac{-2}{\sqrt{e^3}}$	$\nearrow 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

(5) Wat zijn de coördinaten van het zwaartepunt van het kwartje van de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=4$ gelegen in het eerste kwadrant van het vlak. Maak gebruik van een stelling van Guldin. (oppervlakte bol $= 4\pi R^2$)

A. $\left(\frac{4}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right)$
B. (π, π)
C. $\left(\frac{8}{\pi}, \frac{8}{\pi}\right)$
D. $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$



$$\frac{4\pi R^2}{2} = (2\pi x_0)\frac{2\pi R}{4}$$

lengte kwart cirkel

$$\iff \frac{2R}{\pi} = x_0$$

$$\iff x_0 = \frac{4}{\pi}$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (2+\sin x)\,\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)\,dx - \int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)\,d(\cos x)$

A. $\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}$
B. $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$
C. $\frac{11}{12}$
D. $-\frac{11}{12}$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} - \cos x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$$

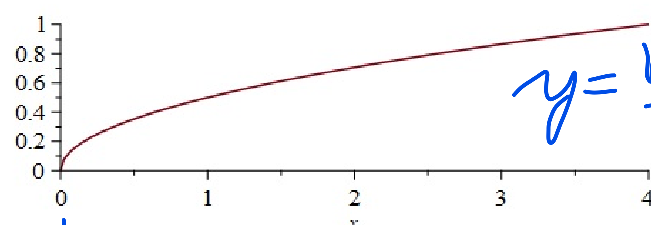
(7) Wat stelt $\begin{cases} x^2+2z^2=y^2 \\ x^2-2=0 \end{cases}$ voor?

A. 2 snijdende rechten
B. 2 hyperbolen
C. een parabolische cilinder
D. een vlak

$$\iff \begin{cases} y^2-2z^2=2 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

(8) Wat is het volume van de omwentelingsfiguur die ontstaat door het getekende stuk parabool (waarop o.a. de punten $(1, \frac{1}{2})$ en $(4, 1)$ liggen) te wentelen om de X-as?

A. 8π
B. $\frac{64\pi}{3}$
C. $\frac{256\pi}{3}$
D. 2π



$$y = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$V = \pi\int_0^4 \underbrace{\frac{x}{4}}_{=r^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 2\pi$$