EXAMEN WISKUNDE 2 (tweede zittijd academiejaar '20-'21, reeks A)
Opleiding industrieel ingenieur
Omcirkel: Eerste bachelor / Schakelprogramma

UNIVERSITEIT GENT

Nr.:

Naam : /40

Schrijf netjes. Vul in op de opengelaten plaatsen.
Geen rekenmachine, gsm, smartphone, ...
Geef uitleg bij de open vragen. Veel succes!

FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

1. Een tank bevat initieel 50 g zout dat opgelost is in 100 liter water. De oplossing wordt constant gemixt en stroomt uit de tank met een constante snelheid van 2 liter/min. Tegelijkertijd wordt met een snelheid van 2 liter/min een mengsel toegevoegd aan de tank met een concentratie van 5 g zout per liter. Na hoeveel minuten is de hoeveelheid zout in de tank gelijk aan 200 g? /8

$V_{uit} = 2l/min$ $\quad C_{uit} = \frac{x}{100}$ $\quad V_{in} = 2l/min$ $\quad C_{in} = 5g/l$

$x(t)$ = aantal gram zout in de tank op tijdstip t

$x(0) = 50$

$\frac{dx}{dt} = C_{in} V_{in} - V_{uit} C_{uit} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 10 - \frac{2x}{100}$

oplossen met scheiding der veranderlijken of als lineaire DVG in x en x'.

$\int \frac{dx}{10 - 0.02x} = \int dt \iff -\frac{1}{0.02} \ln|10 - 0.02x| = t + C$

$x(0) = 50 \Rightarrow -50 \ln|10-1| = C \Rightarrow C = -50 \ln 9$

$x(t_0) = 200 \Rightarrow -50 \ln|10-4| = t_0 - 50 \ln 9$

$\Rightarrow t_0 = 50 \ln \frac{9}{6}$

$\Rightarrow t_0 = 50 \ln \frac{3}{2}$

2. Bepaal de loodrechte projectie van $A: \begin{cases} x+y=2 \\ y-z=3 \end{cases}$ op $\alpha: x+y+z=0$. /4

$$\vec{u}_A = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{-1,-1,-1\}$$

β: vlak dat A bevat en dat loodrecht staat op α

$p(1,1,-2) \in A \Rightarrow p \in \beta$

$$\beta: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \underset{R_2-R_3}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)2 - 2(z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - z = 3$$

loodrechte projectie

$\rightarrow \begin{cases} y-z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ $(\alpha \cap \beta)$

3. Bepaal de maxima/minima van z met $z = 3x^3 - 2y^3 + 3xy^2 - 9x + 18$.
Voor welke (x, y)-koppels worden die bereikt? Geef ook deze bijzondere z-waarde. /4

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+3y^2-9=0 \\ -6y^2+6xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=x \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 18x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y + 6x$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 36y^2 - 18x(6x-12y) = 36(y^2 - 3x^2 + 6xy)$$

$\Delta_{(1,0)} = 36(-3) < 0$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(1,0)} > 0 \Rightarrow (1,0)$: minimum

$z = 12$

$\Delta_{(-1,0)} = 36(-3) < 0$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-1,0)} < 0 \Rightarrow (-1,0)$: maximum

$z = 24$

$\Delta_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \Delta_{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 36(3) > 0$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: zadelpunten

4. Bespreek de rang van de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ in functie van x en y. /4

$|A| = -xy$

Als $x = y = 0$: rang van A is 1

Als $x = 0$ en $y \neq 0$: rang van A is 2

Als $x \neq 0$ en $y = 0$: rang van A is 2

Als $x \neq 0$ en $y \neq 0$: rang van A is 3

5. Bepaal a zodat de matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ de waarde $\lambda = 5$ als eigenwaarde heeft met dubbele algebraïsche multipliciteit. Bepaal ook alle eigenvectoren bij $\lambda = 5$ voor die a-waarde. /4

$$|B - \lambda I| = 0 \iff \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (3-\lambda)^2(a-\lambda) - 4(a-\lambda) = 0$$

$$\iff (a-\lambda)((3-\lambda)^2 - 4) = 0$$

$$\iff \lambda = a \text{ of } \lambda = 5 \text{ of } \lambda = 1$$

dubbele multiplicitei voor $\lambda = 5$ als $a = 5$.

eigenvectoren : $B\vec{v} = 5\vec{v} \iff \begin{cases} 3x + 2z = 5x \\ 5y = 5y \\ 2x + 3z = 5z \end{cases}$

$\iff x = z$

$\begin{pmatrix} k \\ l \\ k \end{pmatrix}$, $k, l \in \mathbb{R}$ (k en l niet tegelijk 0)

6. Vul in onderstaande tabel met een hoofdletter de juiste oplossing aan. Er is telkens exact 1 juiste oplossing. Duid bij elke vraag een antwoord aan want standard setting wordt toegepast bij de evaluatie. /16

vraag	1	2	3	4	5	6	7	8
antwoord	B	D	D	A	C	C	A	D

(1) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{-\ln x}} f(x,\, y)\, dy\, dx =$

$y = \sqrt{-\ln x} \Rightarrow y^2 = \ln \frac{1}{x}$

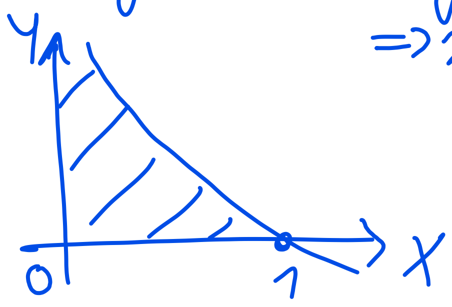
$\Rightarrow x = e^{-y^2}$

A. $\int_0^{+\infty} \int_0^{-e^{y^2}} f(x,\, y)\, dx\, dy$

B. $\int_0^{+\infty} \int_0^{e^{-y^2}} f(x,\, y)\, dx\, dy$

C. $\int_0^{1} \int_0^{e^{-y^2}} f(x,\, y)\, dx\, dy$

D. $\int_0^{1} \int_0^{-e^{y^2}} f(x,\, y)\, dx\, dy$



(2) Wat stelt de verzameling V voor als V bestaat uit de punten die in het vlak $\alpha : x + y + z = 2$ gelegen zijn op een afstand 5 van het punt $p(2,\, 2,\, 2)$?

A. slechts 1 punt

B. een rechte

C. 2 evenwijdige rechten

D. een cirkel

$d(p,\alpha) = \frac{|2+2+2-2|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} < 5$

(doorsnede van bol en vlak)

(3) Wat stelt $\begin{cases} \varphi = 1 \\ \rho = 2 \end{cases}$ (uitgedrukt in bolcoördinaten) voor?

A. een cilinder

B. een kegel

C. een halve bol

D. een cirkel

(4) Wat is de orthogonale krommenbundel van $y = C\, \ln(2\,x)$ met $C \in \mathbb{R}$?

A. $y^2 = x^2 \left(\frac{1}{2} - \ln(2\,x)\right) + C$

B. $y^2 = x^2\, (2\, \ln(2\,x) - 1) + C$

C. $y^2 = x^2\, (1 - 2\, \ln(2\,x)) + C$

D. $y^2 = x^2 \left(\ln(2\,x) - \frac{1}{2}\right) + C$

$y' = \frac{C}{x} \Rightarrow C = y'x$

DVG: $y = xy' \ln(2x)$

DVG orthogonale bundel:

$y = -\frac{x}{y'} \ln(2x)$

$\Leftrightarrow \int y\, dy = -\int x \ln(2x)\, dx$

$\underset{PI}{\Leftrightarrow}$ $y^2/2 = -x^2/2 \ln(2x) + \frac{1}{2}\int x^2 \frac{dx}{x}$

$\Leftrightarrow y^2 = -x^2 \ln(2x) + \frac{x^2}{2} + C$

(5) Wat is y voor $(x = e)$ als $y(x)$ de singuliere oplossing is van $y + \ln y' = x\,y'$?

A. te weinig gegevens om exact te bepalen

B. $2\,C - \ln C$

C. 2

D. $e\,x - 1$

Stel $y' = p \Rightarrow y = xp - \ln p \overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} \cancel{p} = \cancel{p} + xp' - \frac{p'}{p}$

$\Rightarrow p' = 0$ of $x = \frac{1}{p}$

S.O.: $p = \frac{1}{x} \Rightarrow y = 1 - \ln\frac{1}{x} \Rightarrow y(e) = 1 - \ln\frac{1}{e} = 2$

(6) Wat is y voor $(x = \ln 2)$ als $y(x)$ de oplossing is van $y'' + y' - 2\,y = e^x$ met $y(0) = y'(0) = 0$.

A. $\frac{65}{36}$

B. $\frac{2}{3}\ln 2$

C. $\frac{1}{3}(\ln 4 - \frac{7}{12})$

D. 0

gereduceerd vgl.: $D^2 + D - 2 = 0 \Leftrightarrow D = 1 \vee D = -2$

part. opl. v/d vorm: $y = xae^x$

$\to y'' + y' - 2y = e^x \Leftrightarrow ae^x(2 + x + 1 + x - 2x) = e^x$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

A.O: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + xe^x\frac{1}{3}$

$y(0) = y'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{9}$ & $C_2 = -\frac{1}{9}$

$y(\ln 2) = \frac{1}{9}(\frac{1}{4} - 2) + \frac{2}{3}\ln 2 = \frac{\ln 4}{3} - \frac{7}{36}$

(7) Beschouw de lineaire transformatie T die $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ afbeeldt op $\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ en die $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ afbeeldt op $\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$. Wat is een eigenvector van T?

A. $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$

want $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$

en $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-12\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$

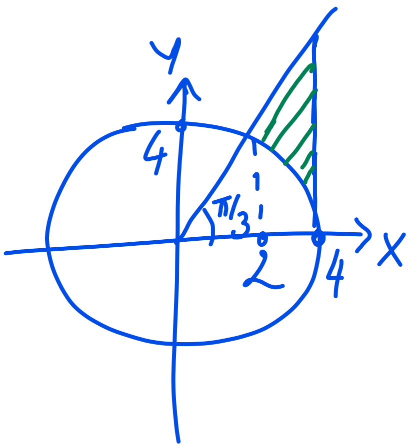
(8) $\int_2^4 \int_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{3}\,x} \operatorname{Bgtg}\frac{y}{x}\, dy\, dx =$

A. $\int_0^{\pi/6}\int_4^{4/\cos\theta} r\theta\, dr\, d\theta$

B. $\int_0^{\pi/6}\int_4^{2\sqrt{3}} r\,\theta\, dr\, d\theta$

C. $\int_0^{\pi/3}\int_4^{2\sqrt{3}} r\,\theta\, dr\, d\theta$

D. $\int_0^{\pi/3}\int_4^{4/\cos\theta} r\,\theta\, dr\, d\theta$



$y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = \sqrt{3}\,x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$\vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2\sqrt{3} \end{cases}$

$x = 4 \Leftrightarrow r\cos\theta = 4$

$\Leftrightarrow r = \frac{4}{\cos\theta}$