16 不定積分の計算方法

① 有理式の積分

[定義] $f(x), g(x)$ を実数係数の多項式とする

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を有理式という

以下 f と g を同時にわりきる多項式はないとする。

[定理] 有理式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は次の3つの式の和に分解される

(1) 多項式

(2) $\dfrac{a}{(x+b)^m}$ $a, b \in \mathbb{R}$ $m \in \mathbb{N}$.

(3) $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^m}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$

特に $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{R}$ と $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{N}$ を用いて

$$g(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2} \cdots (x-\alpha_l)^{m_l}$$

とかけるとき

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は 多項式と $\dfrac{b_i}{(x-\alpha_i)^m}$ $(1 \leqq m \leqq m_i)$

の和で表わされる.

例 : $h(x)=\dfrac{5x-4}{2x^2+x-6}$ 、（分子と分母の次数が同じではない多項式はない）

$2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$ より定理から

$\dfrac{5x-4}{2x^2+x-6}=\dfrac{a}{2x-3}+\dfrac{b}{x+2}$ とおける

$$\dfrac{a}{2x-3}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)+b(2x-3)}{(2x-3)(x+2)}$$

$$=\dfrac{(a+2b)x+(2a-3b)}{(2x-3)(x+2)}$$

$5=a+2b,\quad 2a-3b=-4$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

未定係数法

$$\therefore\ \dfrac{5x-4}{2x^2+x-6}=\dfrac{1}{2x-3}+\dfrac{2}{x+2}$$

$h(x)=\dfrac{a}{2x-3}+\dfrac{b}{x+2}$ より

$$a=h(x)(2x-3)-\dfrac{b}{(x+2)}(2x-3)$$

$$=\dfrac{(5x-4)(2x-3)}{(2x-3)(x+2)}-\dfrac{b(2x-3)}{(x+2)}$$

$$= \frac{5x-4}{x+2} - \frac{b(2x-3)}{x+2}$$

$x = \frac{3}{2}$ を代入して、

$$a = \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)-4}{\frac{3}{2}+2} - 0$$

$$= \frac{15-8}{3+4} = 1.$$

$$b = h(x)(x+2) - \frac{x+2}{2x-3}a$$

$$= \frac{5x-4}{2x-3} - \frac{a(x+2)}{2x-3}$$

$x = -2$ を代入して。

テイラー展開法,

$$b = \frac{-10-4}{-4-3} - 0 = 2.$$

例12 $\dfrac{2}{(x-1)(x^2+1)}$.

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$ とおける.

通分すると

$$\frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2+(c-b)x+a-c}{(x-1)(x^2+1)}$$

$\therefore\ a+b = c-b = 0,\ a-c=2.$

$\therefore\ a=1,\ a=c=-1$

未定係数法

$$\boxed{\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}}$$

$\dfrac{2}{(x-1)(x^2+1)}$ は $\dfrac{a}{(x-1)}$ と $\dfrac{bx+c}{x^2+1}$ のパーツにわかれる.

はず

$$\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

念力

ハンドパワー

多項式が $\dfrac{a}{(x+b)^m}$, $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^m}$ の不定積分はわかっているので有理式の不定積分は計算できる!

例1 $\displaystyle\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}\,dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2x-3} + \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|2x-3| + 2\log|x+2|$$

例2 $\displaystyle\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x^2+1| - \mathrm{Tan}^{-1}x.$$

② 無理関数がある場合.

2-1 $\sqrt[n]{ax+b}$ があるとき $t=\sqrt[n]{ax+b}$ でおくと.

重要だよ

$x=\dfrac{t^n-b}{a}$, $dx=\dfrac{n}{a}t^{n-1}dt$ より

有理式に帰着できる

2-2 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ があるとき $a>0$ なら

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$ とおくと

できるかもしれない

2-3 $ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha<\beta$)

$t=\sqrt{\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ とおくとできるかもしれない

[例1] $\displaystyle\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$

$t=\sqrt{x-1}$ とおくと. $x=t^2+1$. $dx=2t\,dt$ より

$$\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}=\int\frac{2t\,dt}{t^2+1+2t}$$

$$= \int \frac{2t\,dt}{(t+1)^2} = \int \frac{2(t+1)-2}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{2}{t+1}\,dt - \int \frac{2}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= 2\log|t+1| + \frac{2}{t+1} \quad (t = \sqrt{x-1})$$

$$= 2\log(1+\sqrt{x-1}) + \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} \quad //$$

③ 三角関数の有理式の積分 $\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\text{など}\right)$

$t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと、$\boxed{\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2}}$。

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1+t^2}{2}$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{2t}{1-t^2}$$

けいさんできる！

例 $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$.　　$t=\tan\frac{x}{2}$

$$=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{(1+t^2)+2t}{(1+t^2)+(1-t^2)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{t^2+2t+1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

$$= t + \log(1+t^2) \qquad t = \tan\frac{x}{2}$$

$$= \tan\frac{x}{2} + \log\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) \quad //$$

[演習] $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-x-6}\,dx$ を求めよ。

$$\frac{x^2}{x^2-x-6} = \frac{x^2}{(x+2)(x-3)} \text{ より}$$

$$\frac{x^2}{x^2-x-6} = q(x) + \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ $q(x)$ 多項式，とおける

(テイラー展開的に)

① $\displaystyle\frac{x^2}{(x+2)(x-3)} = q(x) + \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ より，

$\times(x+2)$

$$\frac{x^2}{x-3} = q(x)(x+2) + a + \frac{b(x+2)}{x-3}$$

$x=-2$ を代入。

$$\frac{(-2)^2}{-2-3} = 0 + a + 0$$

$$\therefore \quad a = -\frac{4}{5}.$$

$x(x-3)$ をかけると $$\frac{x^2}{x+2} = q(x)(x-3) + \frac{a(x-3)}{x+2} + b.$$

$x=3$ を代入すると。 $$\frac{3^2}{3+2} = 0 + 0 + b$$

$$b = \frac{9}{5}.$$

$$q(x) = \frac{x^2}{(x+2)(x-3)} + \frac{4}{5}\frac{1}{x+2} - \frac{9}{5}\frac{1}{x-3}.$$

$$= \cdots\cdots = 1$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{(x+2)(x-3)} = 1 - \frac{4}{5(x+2)} + \frac{9}{5(x-3)}.$$

$$\int \frac{x^2}{(x+2)(x-3)}dx = \int 1 - \frac{4}{5(x+2)} + \frac{9}{5(x-3)}dx$$

$$= x - \frac{4}{5}\log(x+2) + \frac{9}{5}\log|x-3|_{\text{,}}$$

念か

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-3)} = \frac{x^2-x-6+x+6}{(x+2)(x-3)}$$

$$= 1 + \boxed{\frac{x+6}{(x+2)(x-3)}}$$

$$\frac{x+6}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$$

求定係数法

$$a = -\frac{4}{5} \quad b = \frac{9}{5}$$