11 広義積分

(b∈ℝ or b = +∞)

[定義] $f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする

$\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$ が収束するとき

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$ とかき

広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するという

$\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$ が存在しないとき

広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は発散するという

[補足] $f(x)$ が $(a, b]$ 上の連続関数のとき

$\lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)\,dx$ を用いて

広義積分を定義する

例1 広義積分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ は収束する

証 $\int_1^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\beta} = 1 - \frac{1}{\beta}$ より

$\lim_{\beta \to +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = 1$ で収束するから。

例2 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ は発散する。

証 $\int_1^{\beta} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_1^{\beta} x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^{\beta}$

$= 2\sqrt{\beta} - 2$

$\lim_{\beta \to +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \lim_{\beta \to +\infty} 2\sqrt{\beta} - 2 = +\infty$ で発散するから

例3 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ は発散する

証 $\int_1^{\beta} \frac{1}{x} dx = \left[\log x \right]_1^{\beta} = \log \beta$

$\lim_{\beta \to +\infty} \log \beta = +\infty$ で発散するから

命題

① 広義積分 $\int_1^\infty x^p\,dx$ は
　$p<-1$ のとき収束し, $p \geqq -1$ のときは発散する

② 広義積分 $\int_0^1 x^p\,dx$ は
　$p \leqq -1$ のとき ~~収束し~~ 発散し, $p>-1$ のときは ~~発散する~~ 収束する

証① $p \neq -1$ のとき

$$\int_1^\beta x^p\,dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^\beta = \frac{\beta^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}.$$

$p+1>0$ のとき $\lim_{\beta\to+\infty} \frac{\beta^{p+1}}{p+1} = +\infty$　発散

$p+1<0$ のとき $\lim_{\beta\to+\infty} \frac{\beta^{p+1}}{p+1} = 0$　収束

$p=-1$ のとき　発散 (左をみよ)

② も同じ.

[定理1] $f(x)$を$[a,b)$上の連続関数とする
($b \in \mathbb{R}$ or $b=+\infty$)
$[a,b)$上の連続関数$g(x)$で
- $[a,b)$上で $|f(x)| \leq g(x)$
- $\int_a^b g(x)dx$が収束する。ならば、

広義積分$\int_a^b f(x)dx$は収束する

[定理2] $f(x)$を$[a,b)$上の連続関数とする
$[a,b)$上の連続関数$g(x)$で
- $[a,b)$上で $0 \leq g(x) \leq f(x)$,
- $\int_a^b g(x)dx = +\infty$ ならば

広義積分$\int_a^b f(x)dx$も発散する。
($+\infty$に)

$\boxed{例1}$ $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$ は収束する

$\boxed{証}$ $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ で $(|\sin x| \leq 1)$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ は収束する

定理より $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}$ は収束する

$\boxed{例2}$ $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}dx$ は発散する

$\boxed{証}$ $2 \leq x$ なら $x-1 \leq x$ より

$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{x \cdot x}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\frac{1}{x(x-1)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\int_2^\infty x^{-\frac{2}{3}}dx = +\infty$$

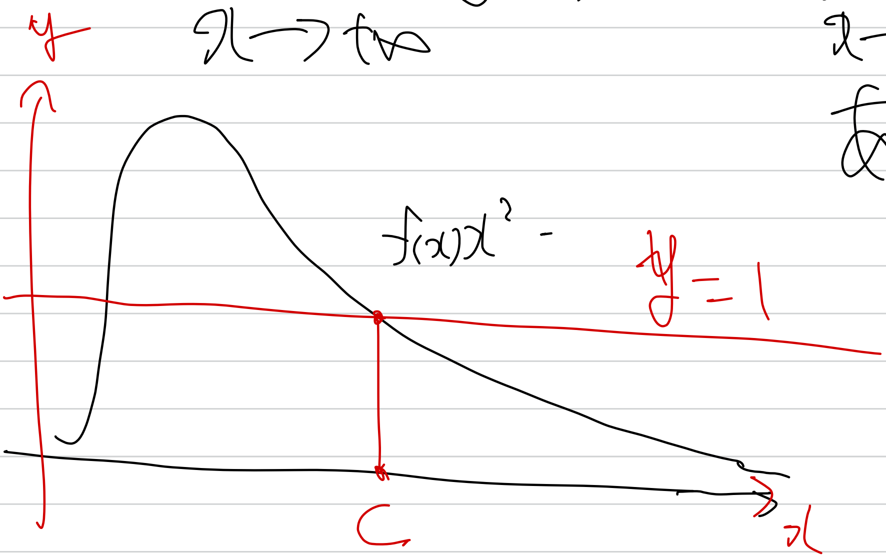
定理より $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}dx$ は発散する

例113 ガンマ関数

$s>0$ のとき、$\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する

[証] $f(x)=e^{-x}x^{s-1}$ とおく。

① $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot x^2 = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^{s+1} = 0$



ある $c>1$ があって、

$[c,+\infty)$ 上

$e^{-x}x^{s-1} \leqq x^{-2}$

となる。

よって、$g(x)=x^{-2}$ とおくと、

$\int_c^\infty x^{-2}dx$ は収束するので

$\int_c^\infty f(x)dx$ は収束する

② $(0,c]$ 上では $e^{-x}<1$ より

$e^{-x}x^{s-1} \leqq x^{s-1}$ となる

$g(x)=x^{s-1}$ とおくと

$\int_0^c g(x)\,dx = \int_0^c x^{s-1}\,dx$ は収束する

$(s-1 > -1$ より$)$

以上より $\int_0^c f(x)\,dx$ も収束する

$\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx$

$= \int_c^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx + \int_0^c e^{-x} x^{s-1}\,dx$ より

収束する

証明 定理2.

仮定より

$$0 \leq \int_a^\beta g(x)\,dx \leq \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

$+\infty$ $+\infty$

よって $\displaystyle\lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta g(x)\,dx = +\infty$ よりいえた

定理1の証明

$M = \int_a^b g(x)\,dx$ とおき

$A_n = \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,dx$ とおく $(n \in \mathbb{N})$

$$|A_n| \leq \int_a^{b-\frac{1}{n}} |f(x)|\,dx$$

$$\leq \int_a^{b-\frac{1}{n}} g(x)\,dx \quad \text{より}$$

A_n は有界数列. $\left(\int_a^{b-\frac{1}{n}} g(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} M \text{ より}\right)$

今 $\displaystyle\lim_{h \to +0} \int_{b-h}^{b} g(x)\,dx = 0$ より

$\left(\int_a^b g(x)\,dx \text{ が収束するため}\right)$

$$|A_n - A_m| \leq \int_{b-\frac{1}{m}}^{b-\frac{1}{n}} |f(x)|\,dx$$

$$\leq \int_{b-\frac{1}{m}}^{b-\frac{1}{n}} g(x)\,dx$$ のため

n, m が十分に大きいと $|A_n - A_m|$ は十分に小さい

$\Rightarrow$ $\{A_n\}$ はコーシー列

$\Rightarrow$ $^\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ となる

今 $h > 0$ について

$$F_h = \int_a^{\cancel{\beta}\, b - h} f(x)\,dx$$ とおくと

$$|F_h - \alpha| \leq \left|F_h - A_{[\frac{1}{h}]+1}\right| + \left|A_{[\frac{1}{h}]+1} - \alpha\right|$$

$\left([\frac{1}{h}]+1 \geq \frac{1}{h} \right)$

$$\xrightarrow[h\to+0]{} 0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} F_h = \lim_{\beta\to b-0} \int_a^{\beta} f(x)\,dx = \alpha \quad //$$

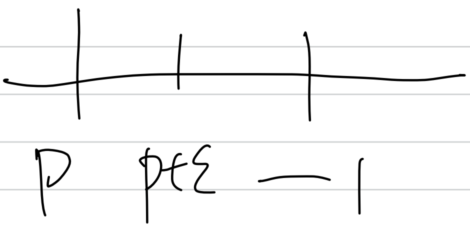
演習 $p\in\mathbb{R}$ として $f(x)=x^p\log x$ とする

① $p<-1$ ならば
広義積分 $\int_1^\infty f(x)\,dx$ は収束する

② $p\geq -1$ ならば
広義積分 $\int_1^\infty f(x)\,dx$ は発散する

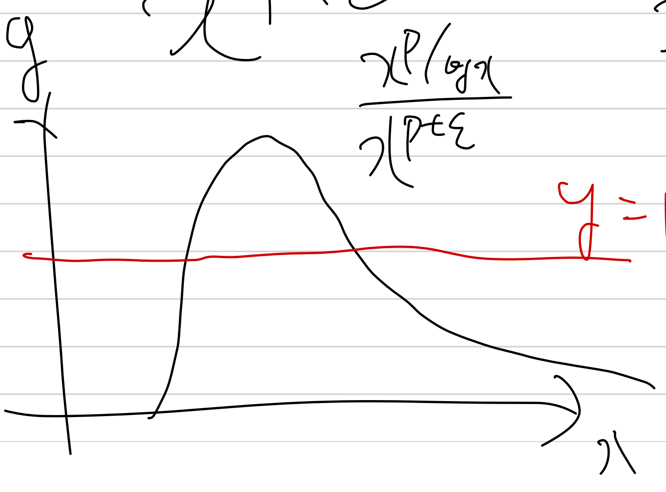
答え 計算でもできるがらくなかいとうをする

① $\varepsilon>0$ について、$\dfrac{\log x}{x^\varepsilon}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ である



$p+\varepsilon<-1$ となる $\varepsilon>0$ をとる。

$$\frac{x^p\log x}{x^{p+\varepsilon}}=\frac{\log x}{x^\varepsilon}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$



ある $c>1$ があって、

$x>c$ なら

$x^p\log x\leq x^{p+\varepsilon}$ となる

$p+\varepsilon<-1$ より $\int_c^\infty x^{p+\varepsilon}dx$ は収束

定理より $\int_c^\infty f(x)dx$ は収束

$\int_1^c f(x)dx$ は収束する（$f(x)$ は $[1,c]$ 上連続）
のでﾞ

$\int_1^\infty f(x)dx$ は収束する．

② $x \geqq 3$ 上 $\log x \geqq 1$ より

$x^p \log x \geqq x^p$．

$\int_3^\infty x^p dx$ は $p \geqq -1$ より$\boxed{+\infty に}$発散する

よって $\int_3^\infty x^p \log x$ も発散する

よって $\int_1^\infty x^p \log x$ も発散する

（$x^p \log x$ は $[1,3]$ 上連続より
$\int_1^3 x^p \log x dx$ はある実数である）