6：漸近展開とべキ級数展開

[定理] 有限テーラー展開（復習）

$f(x)$ を開区間 I 上 C^n 級関数とする

$a \in I$ を固定する

任意の $x \in I$ について、ある $\theta \in (0,1)$ があって、

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots \\ &\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \end{aligned}}$$

右辺を $x=a$ における有限テーラー展開といい、

$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を $\boxed{\text{剰余項}}$ という

とくに $a=0$ のとき 有限マクローリン展開

とよぶ。

今日やること

$$\boxed{\text{関数 } f \text{ を多項式で近似する}}$$

定義 (ランダウの記号)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ のとき}$$

$f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ とかく.

(例1) $x^5 = o(x^3)$ $(x \to 0)$.

[証] $\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^3} = 0$ より.

(例2) $\sin x = x + o(x^2)$. $(x \to 0)$

[証] $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{2x}$

ロピタル

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2} = 0$ より.

$\alpha > 0$ について,

(例3) $\log x = o(x^\alpha)$ $(x \to \infty)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{\alpha t}} = 0$$

$(x = e^t)$ より.

とくに $x \log x = o(x^{1+\alpha})$ $\alpha > 0$. $(x \to \infty)$

$x = o(e^{\alpha x})$ $(x \to \infty)$

[性質] $m, n \in \mathbb{N}$ として、

① $x^m o(x^n) = o(x^{m+n}) \ (x \to 0)$

② $o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n}) \ (x \to 0)$

③ $m \leq n$ ならば $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$

[証明]
① $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^m o(x^n)}{x^{m+n}} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$ より

② $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{o(x^m) o(x^n)}{x^{m+n}} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^m)}{x^m} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$ より

③ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{o(x^m) + o(x^n)}{x^m} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^m)}{x^m} + \lim_{x \to 0} \frac{x^{n-m} o(x^n)}{x^n}$

$= 0$ より $(n \geq m)$

[定理] 漸近展開.

$f(x)$ が a を含む開区間において C^n 級なら

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \to a)$$

とくに $a = 0$ のとき

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0)$$

[例1] $f(x) = e^x$ のとき

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$f(x) = \sin x$ のとき

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

[証] 有限テーラー展開を用いる.

十分小さな $\varepsilon > 0$ をとる. 任意の $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ について, ある $0 < \theta < 1$ があって,

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= \boxed{\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

剰余項 R_n

示すこと. $g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ として,

$$\frac{g(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$ を示す.

$$\frac{g(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a)) - f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\xrightarrow[x \to a]{} 0 \quad (f^{(n)}\text{は連続}).$$

[補足] べキ級数展開

$f(x)$ を区間 I 上の C^∞ 級関数とし $a \in I$ とする。任意の $x \in I$ についてある $0<\theta<1$ があって

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$ である。

今、$b \in I$ において $|R_n(b)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ となるとき

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}$$ となる

$f(b)$ を $(b-a)$ の多項式でかいた。

[例] $f(x) = e^x$, $a=0$, $b \in \mathbb{R}$ とすると

$$R_n(b) = \frac{e^{b\theta}}{n!} b^n$$ より

$$|R_n(b)| = \frac{(e^{b\theta})}{n!} b^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\left(\frac{b^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right)$$

よって $\overset{\text{マクローリン}}{e^b} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(b-0)^k$

$= 1 + b + \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{4!}b^4 + \cdots$

とくに $b=1$ のとき

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$ となる

$\boxed{\text{例12}}$ $f(x) = \sin x$, $a=0$, $b \in \mathbb{R}$ とする.

$R_{2n}(b) = \frac{(-1)^n \sin(\theta b)}{2n!} b^{2n}$ より

$|R_{2n}(b)| = \left|\frac{(-1)^n \sin(\theta b)}{2n!} b^{2n}\right| \leq \frac{b^{2n}}{2n!}$ より

$\lim_{n\to\infty} |R_{2n}(b)| = 0$

$\boxed{\lvert 0\theta\rvert^n \text{は限りなく大きくなる}}$

$\therefore \sin b = b - \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{5!}b^5 - \frac{1}{7!}b^7 + \cdots$

$\boxed{\text{注意}}$ $\boxed{|R_n(b)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ という条件は必要}}$!!

なぜなら; $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + (\theta x)^n$ だが、

$R_n(b) = (\theta b)^n$ より $R_n(10)$ は $n\to\infty$ にて 0 に いかない

よって $x = 10$ いれても ただしくない

~~$-\frac{1}{9} = \frac{1}{1-10} = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots$~~ まちがい

初等関数の漸近展開

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$

$(x \to 0)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$

$(x \to 0)$

($f(x) = \cos x$ として $f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \cos x & n = 2m \\ (-1)^m \sin x & n = 2m-1 \end{cases}$)

$\tan x$ は?? 〜〜〉めちゃくちゃやばい

(きれいにかけない

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

$\sin^{-1}$ $\cos^{-1}$ やばい (わからん)

$\tan^{-1} x$ レポートにでた.

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$(x \to 0)$

$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

$|x| < 1$

〈証〉 $f(x) = \log(1+x)$ とおくと

$f'(x) = (1+x)^{-1}$ $f'(0) = 1$

$$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2} \quad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \quad f^{(3)}(0) = 2$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$$
$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{n-1}(n-1)! & n \geqq 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

よって $\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

$\boxed{\text{補足}}$ $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

（実は $R_n(1)$ の厳密な評価がいる）

$\cosh x$ レポートに出した

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

[証] $f(x) = \sinh x$ とすると $f'(x) = \cosh x$

$f''(x) = \sinh x$ 　　よって

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & n=2m+1 \\ 0 & n=2m \end{cases}$$

別解 $\sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ より求める

$$e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^{2} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

$$-)\ e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^{2} + \cdots + \frac{(-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = 0 + \frac{2x}{2} - 0 + \frac{2x^{3}}{3!} \cdots + \frac{2x^{2n-1}}{2(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

$$= x + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

演習 $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^{2} + \cdots + x^{n} + o(x^{n})$

$(|x|<1)$ $(x \to 0)$ を示せ

解2 $f(x) = (1-x)^{-1}$ とおく。

$$f'(x) = (-1)(1-x)^{-2}\cdot(-1) = (1-x)^{-2}.$$

$$f''(x) = (-2)(1-x)^{-3}\cdot(-1) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 2\cdot(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 3!(1-x)^{-4}$$

$\therefore$ $f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-n-1}$ となる

$f^{(n)}(0) = n!$ より

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{k!} x^k + o(x^n)$$ より

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$ //