3 微分法と初等関数の性質

定義: $f(x)$を点aを含む開区間上の関数とする。

$f(x)$が $x=a$ で微分可能とは $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在すること。

このとき $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

・$f(x)$が区間I上で微分可能とは
任意の$a\in I$において、$f(x)$が$x=a$で微分可能であること。

このとき
$$f' : I \to \mathbb{R},\quad x \mapsto f'(x)$$
を$f(x)$の導関数という

・$f'(a)$は $\frac{df}{dx}\Big|_{x=a}$, $\frac{df}{dx}(a)$ とも書く。$f(x)$は $\frac{df}{dx}$ と書く。

例1 ・$f(x)=x^n$ のとき $f'(x)=nx^{n-1}$ (微分可能)

・$f(x)=\sin x$ のとき $f'(x)=\cos x$.
$f(x)=\cos x$ のとき $f'(x)=-\sin x$

すべて$\mathbb{R}$上微分可能!!

[例2] 接線の方程式

$f(x)$の点$(a,f(a))$での接線は

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$で与えられる

[定理] $f(x)$が $x=a$ で微分可能なら $x=a$ で連続.

[証] $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ $(x \neq a)$ とおくと

$\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ となる.

よって $\lim_{x \to a} f(x)-f(a) = \lim_{x \to a} f'(a)\overset{\to 0}{(x-a)} + \overset{\to 0}{\varepsilon(x)}\overset{\to 0}{(x-a)}$

$= 0$ より連続.

[微分の性質]

f, g を区間 I 上の微分可能関数とすると

以下が成立する. (cは定数)

- $(cf)' = cf'$
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ($g(x) \neq 0$ なる点x~~除~~く)

[合成関数の微分法]

関数 $y=f(x)$が $x=a$ で微分可能で

関数 $z=g(y)$が $y=f(a)$ で 〃 であるとき

$z=g(f(x))$ は $x=a$ で微分可能で

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

$$\left(\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=f(a)} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}. \right.$$

$\boxed{\text{例1}}$ $z=\cos(x^2)$ 普通に微分すると

$$\frac{dz}{dx} = -2x\sin x^2$$

一方 $y=x^2$, $z=\cos y$ とすると、

$\dfrac{dy}{dx} = 2x$, $\dfrac{dz}{dy} = -\sin y$ より

$$\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (-\sin x^2)\cdot 2x = -2x\sin x^2$$

[証明] $b=f(a)$ として.

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & y \neq b \\ g'(b) & y=b \end{cases}$$ とすると.

$\displaystyle\lim_{y\to b} h(y) = h(b)$ で $y=b$ で連続.

$g(y)-g(b) = h(y)(y-b)$ が成立するので

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} \underset{\substack{y=f(x)\\ b=f(a).}}{=} \lim_{x\to a} \underline{h(f(x))}\,\frac{(f(x)-f(a))}{x-a}.$$

$f(a)=b$ がれんぞくで

ていぎ、

$$= \underline{h(b)}\cdot f'(a)$$

$$= g'(f(a))\cdot f'(a) \quad //$$

[定理] 逆関数の微分

(証明もok)

$f(x)$ が区間 I で微分可能かつ単調増加とする

さらに すべての $x \in I$ で $f'(x) \neq 0$ を仮定する.

このとき 逆関数 $f^{-1}(y)$ は. $f(I)$ 上で微分可能で

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}, \left(\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=b} = \frac{1}{\left.\left(\frac{df}{dx}\right)\right|_{x=a}} \quad (f(a)=b). \right)$$

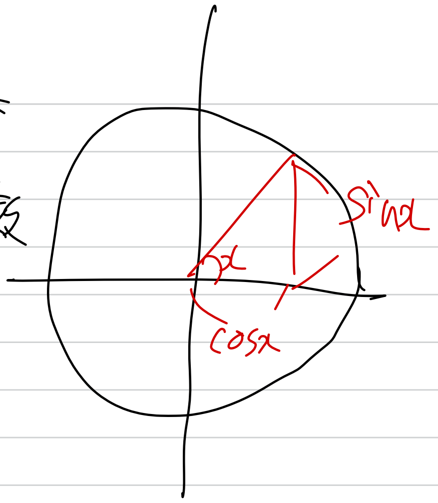
[証] $b=f(a)$, $y=f(x)$ とおくと

$$\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{\left.\left(\frac{df}{dx}\right)\right|_{x=a}}$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad /\!/$$

$$\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=b}$$

初等関数の性質



$\sin x$, $\cos x$, R上の微分可能関数

$$(\sin x)' = \cos x$$

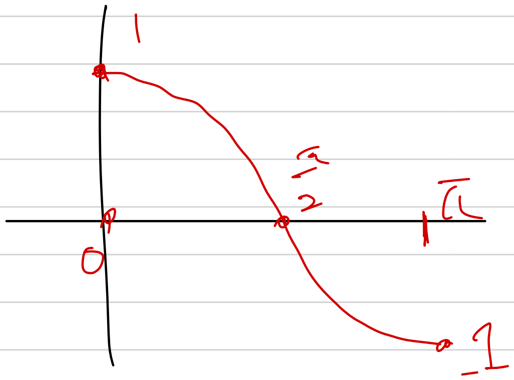
$$(\cos x)' = -\sin x.$$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ R上の微分可能関数.

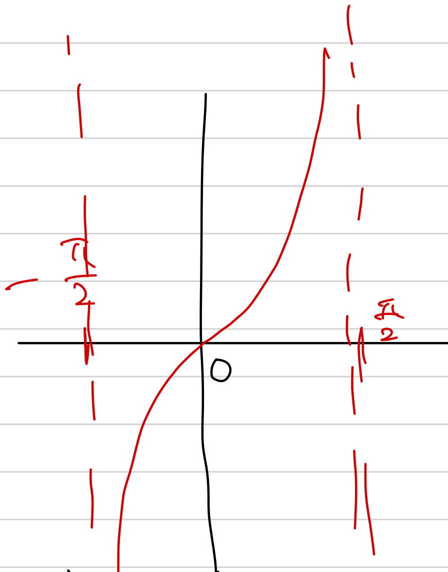
$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} \quad //$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x.$

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上

$(\sin x)' > 0$

$\|$

$\cos x.$

$f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

$\|$

$[-1, 1]$

$[0, \pi]$ 上

$(\cos x)' > 0$

$\|$

$\sin x.$

$f([0, \pi])$

$\|$

$[-1, 1]$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上

$(\tan x)' > 0$

$\|$

$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$

$\|$

$(-\infty, \infty)$

微分可能な逆関数が存在する！

[定義] 逆三角関数. $(\mathrm{Sin}^{-1}([-1,1]) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

$\mathrm{Sin}^{-1} y : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\sin x$ の逆関数とする

アークサインとよぶ (arc sin y とも書く)

$(\mathrm{Cos}^{-1}[-1,1]) = [0,\pi])$

$\mathrm{Cos}^{-1} y : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\cos x$ の逆関数とする

アークコサインとよび (arc cos y とも書く)

$\mathrm{Tan}^{-1}(-\infty,\infty) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\mathrm{Tan}^{-1} y : (-\infty,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\tan x$ の逆関数とする

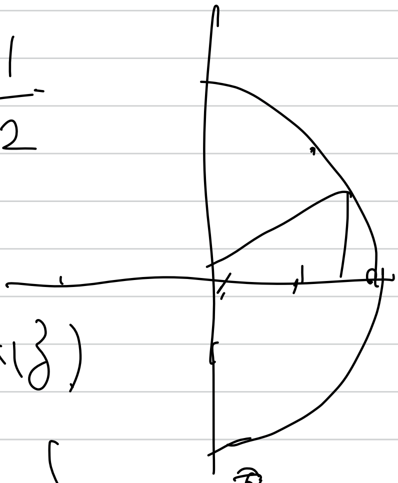
アークタンジェントとよぶ (arc tan y とも書く)

[例] $\mathrm{Sin}^{-1} \frac{1}{2}$ を求めよ.

(答) $x = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2}$ とおくと $\sin x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$

$(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ は仮定されている$)$



$\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. $(\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, 0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \pi$ より$)$

$\mathrm{Tan}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$,, とかとか.

性質

$$\frac{d}{dy}(\mathrm{Sin}^{-1}y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (-1<x<1)$$

$$\frac{d}{dy}(\mathrm{Cos}^{-1}y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (-1<x<1)$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Tan}^{-1}y) = \frac{1}{1+y^2} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

[証] $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ であった。

$\mathrm{Sin}^{-1}y$ のとき $y = \sin x$ とすると

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2}.$$

$$\therefore \frac{d}{dy}(\mathrm{Sin}^{-1}y) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\mathrm{Cos}^{-1}y$ のとき $y = \cos x$ とすると

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x = -\sqrt{1-y^2}.$$

$$\therefore \frac{d}{dy}(\mathrm{Cos}^{-1}y) = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}.$$

$\mathrm{Tan}^{-1}y$ のとき $y = \tan x$ とすると

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+y^2.$$

こいつをyであらわしたい

$$\therefore \frac{d}{dy}(\mathrm{Tan}^{-1}y) = \frac{1}{1+y^2}$$

//

指数関数

[定理]（ネピアの定数）

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は収束する．この値を e とかく．

いきん
なわったら
ぬい本

[証]　$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおく．

$\{a_n\}$ が有界単調増加数列を示す．

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k.$$

$\left({}_nC_k = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right)$

$$= \overset{k=0}{1} + \overset{k=1}{1} + \overset{k=2}{\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}} + \overset{k=3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{\boxed{n}}\right)\right)+\frac{1}{3!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{\boxed{n}}\right)\left(1-\frac{2}{\boxed{n}}\right)\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{\boxed{n}}\right)\left(1-\frac{2}{\boxed{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{\boxed{n}}\right)$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{\boxed{n+1}}\right)\right)+\frac{1}{3!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{\boxed{n+1}}\right)\left(1-\frac{2}{\boxed{n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{\boxed{n+1}}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= a_{n+1}.$$

単調増加．

$$a_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{1}{3!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$1\,2\,3\,4\,5 = 5!$

$\qquad\qquad\quad\ \vee\!\shortmid$

$1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4.$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}} = 3$$

有界

やりたいこと　$a>0$, $a\neq 1$ なる a について.

a^x をさだめたい.

?

TeX

$a>1$ のとき a^x をつぎで定める

① $n\in\mathbb{N}$ のとき $z^n=a$ となる $z>1$ が唯一存在する

このzを $a^{\frac{1}{n}}$ とかく.

② $x\in\mathbb{Q}$ のとき $x=\frac{n}{m}$ とかき a^x を $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$ とていぎする

③ $x\in\mathbb{R}$, $x\geqq 0$ のとき $x_n\to x$ なる有理数列 (x_n) をとって.

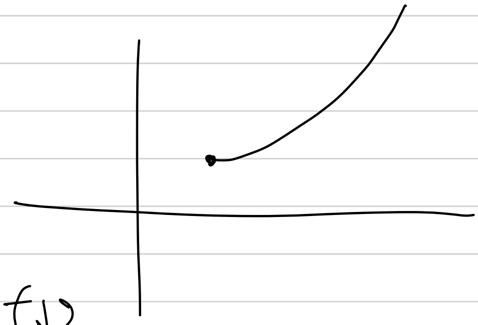
$$a^x=\lim_{x_n\to x}a^{x_n}$$ とさだめる.

$x<0$ のとき. $a^x=\frac{1}{a^x}$ とさだめる.

これにより a^x は[illegible]連続となる.

$a<1$ のとき　$a^x=$　a^{-x} とさだめる.

[補足] ① $f(y)=y^n$ とするとき.



$f(1)=1<a$ より

中間値の定理より $f(z)=a$ なる

z がある。$f(y)$ は単調増加より唯一存在する

② $$\left(\left(a^{\frac{1}{lm}}\right)^{ln}\right)^m=a^n\Longrightarrow\left(a^{\frac{1}{lm}}\right)^{ln}=a^{\frac{n}{m}}.$$

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m=a^n$$

とくに $\frac{n}{m}$ のとりかたによらない!

③ $x_n \to x$, $y_n \to x$ のとき $a^{x_n - y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^0 = 1$ より

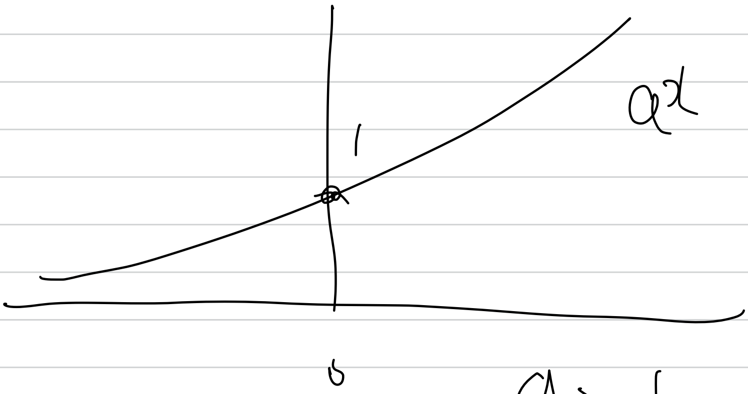
$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{y_n}$$

連続性.

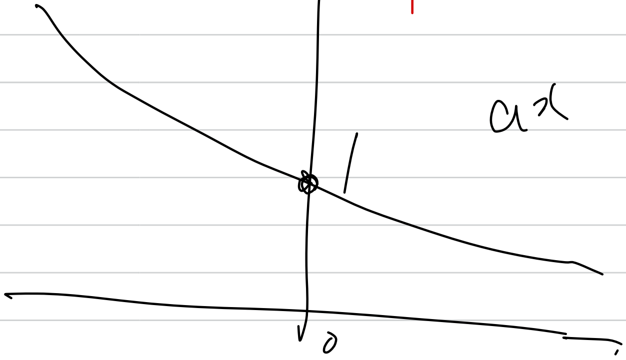
$x_n \to x$ のとき $a^{x_n - x} \to a^0 = 1$ より ok.

ここも [$p_n \le x_n \le q_n$ $q_n - p_n \to 0$ と有理数列(単調)

[定義] $a>0$, $a \neq 1$ のとき, 上で定めたように 指数関数 a^x を さだめる. ($a=e$ のとき $\exp x$ ともかく)



$a>1$



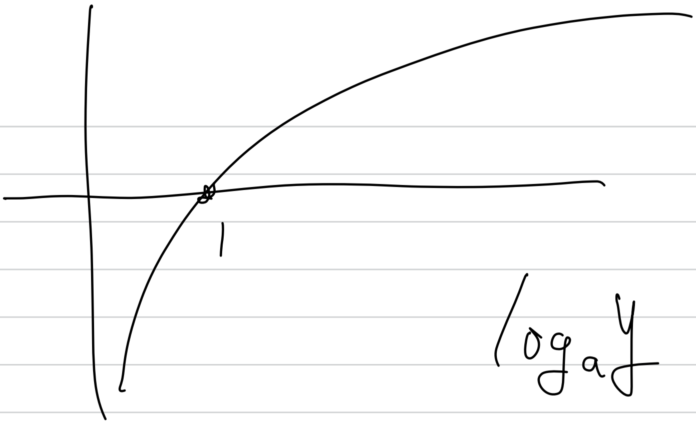
$0<a<1$

$\mathbb{R}$上単調増加. $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ $\mathbb{R}$上単調減少

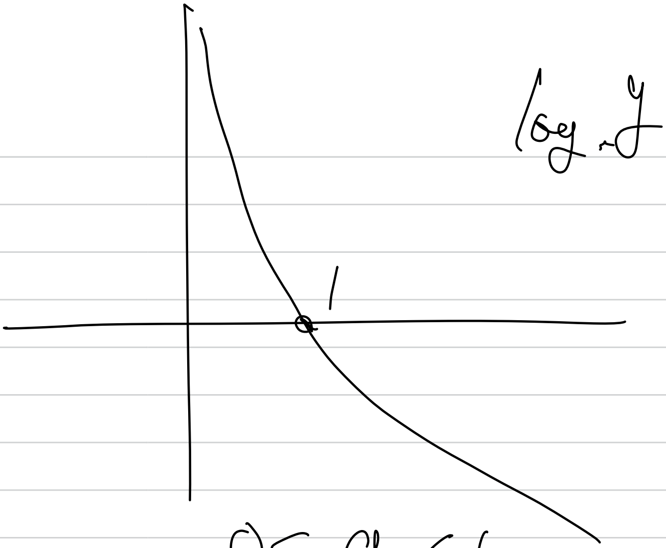
逆関数が定まる!

[定義] $\log_a y : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ を a^xの逆関数として 対数関数 とよぶ

$a=e$ のとき $\log y$ とかく.



$a>1$



$0<a<1$

[小性質] $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

$\frac{d}{dx}a^x=(\log a)a^x$ とくに $\frac{d}{dx}e^x=e^x$.

$\frac{d}{dy}\log_a y=\frac{1}{y\log a}$ とくに $\frac{d}{dy}\log y=\frac{1}{y}$.

[証] $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$ より

$t=\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$.

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log(t+1)}=1$.

$e^x-1=t$

$\frac{d}{dx}e^x=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$.

$a^x=e^{\log a^x}=e^{x\log a}$ より

$\frac{d}{dx}a^x=\log a\cdot e^{x\log a}=(\log a)a^x$ (合成微分)

$y = a^x$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = (\log a) e^x = (\log a)\ a^x = (\log a)\ y$$ より

$$\frac{d}{dy}(\log_a y) = \frac{1}{(\log a)\ y}$$ （逆関数微分）

［双曲線関数］

［定義］

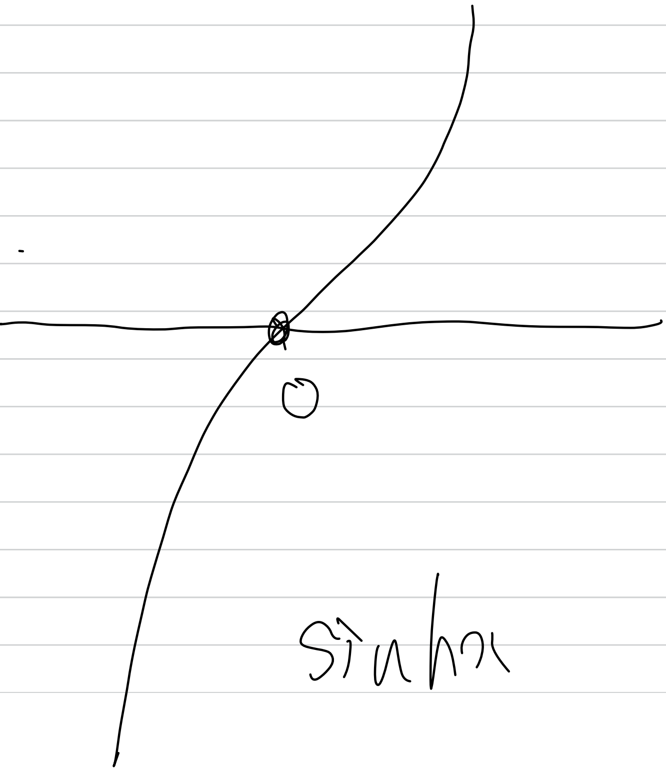
すべて階微分可能なかんすう

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ ハイパボリックサイン

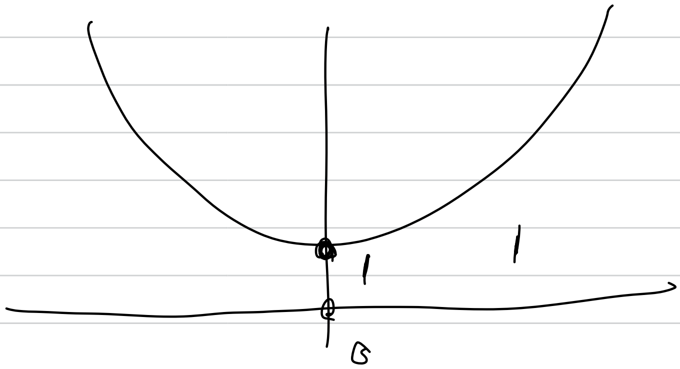
$$\cosh x = \frac{e^x + e^x}{2}$$ ハイパボリックコサイン（カテナリー曲線）

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ハイパバリックタンジェント（シグモイド曲線）

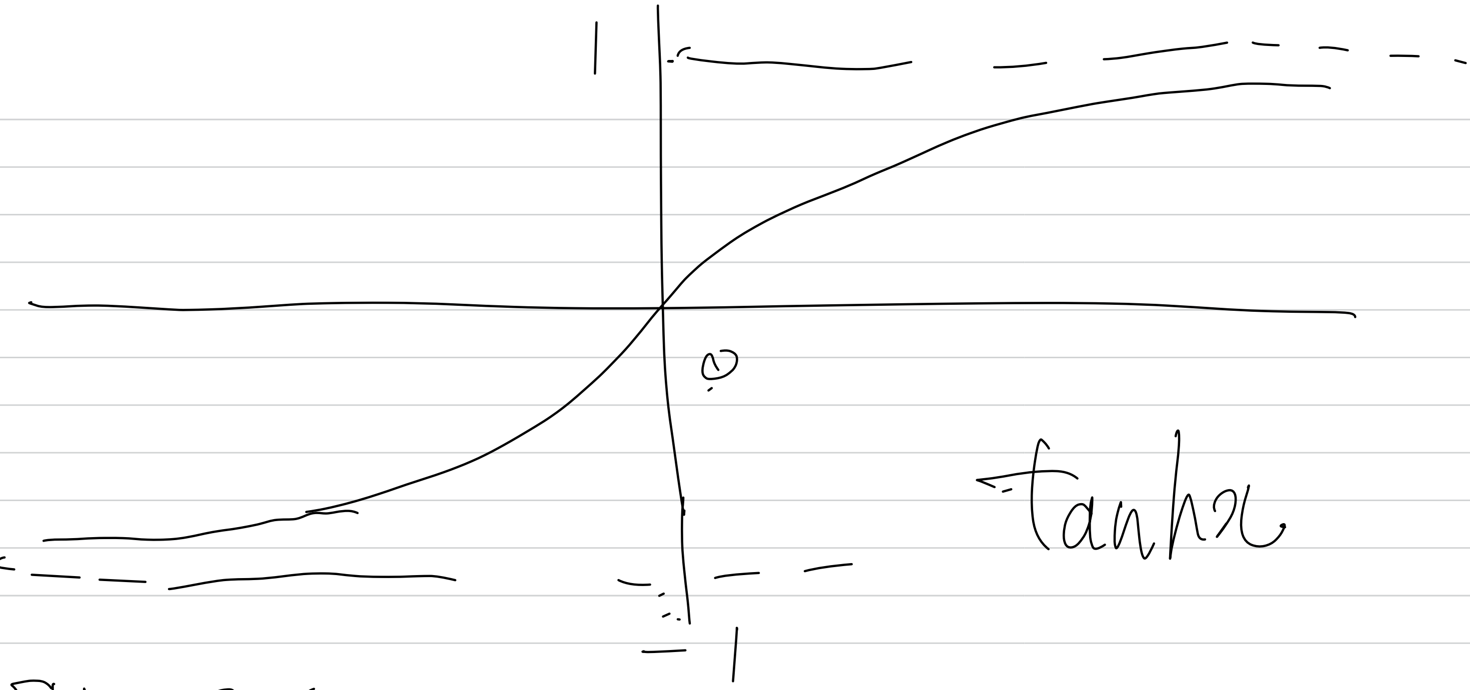


sinhx



$(\cosh x \geqq 1)$

coshx



[性質] ・$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$.

・$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$.

・$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

・$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{(\cosh x)^2}$

[証明] $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2$

$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = 1.$$

・$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}-e^{x}}{2}\right)$

$$= \frac{e^{x}+e^{x}}{2} = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2}{(\cosh x)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2}.$$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

1

[演習] ① ・$\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

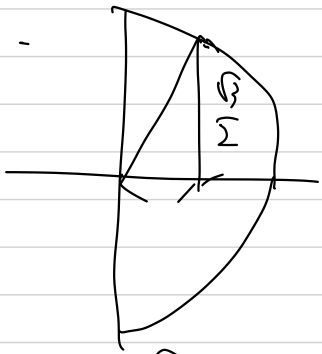
・$\mathrm{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

・$\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をもとめよ.

② $f(x) = \log(\log x)$ にて $f'(x)$ をもとめよ

[解答] ・$x = \mathrm{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とする $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ となる

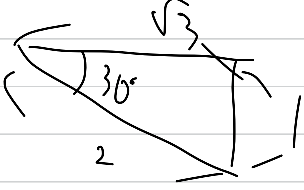
$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ より $x = -\frac{\pi}{3}$.



・$x = \mathrm{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ とする $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ より

$x = -\frac{\pi}{6}$



・$x = \mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とする

$0 \leq x \leq \pi$ なので

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ より, $x = \frac{5}{6}\pi$

② $z = g(y) = \log y$, $y = f(x) = \log x$ とする

$z = g(f(x))$ である.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\Big|_{y=f(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x \log x}$$ //