9 積分の性質

定理（復習）

$f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とし、
$F(x)$ を $[a,b]$ 上の微分可能な関数で
$\boxed{F'(x)=f(x)}$ となるものとする。

このとき $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$ である。

（この $F(x)$ を $\displaystyle\int f(x)\,dx$ とかく）（不定積分）

[定理] f, g ともに $[a,b]$ 上の連続関数とする。

$F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$, $G(x)=\displaystyle\int g(x)\,dx$ とする。

(1) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$.

(2) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$.（$k$ 定数）

(3) $x(t): [\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b]$ C^1 級。

$t\longmapsto x(t)$.

$x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$ とするとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

(4) f を C^1 級とすると.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx.$$

〔証〕(1) $\frac{d}{dx}\left(F(x) \pm G(x)\right) = f(x) \pm g(x)$

よって. $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \Big[F(x) \pm G(x)\Big]_a^b$

基の定理

$$= \Big[F(x)\Big]_a^b \pm \Big[G(x)\Big]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

(2). $\frac{d}{dx}\left(kF(x)\right) = kf(x)$ より (1) と同様.

(3) $\frac{d}{dt}\left(F(x(t))\right) = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}$

よって $\boxed{F(x(t)) = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}\cdot dt}$

(f(x(t)) の不定積分).

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{定理}}{=} \Big[F(x)\Big]_a^b = \Big[F(x(t))\Big]_\alpha^\beta$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}\,dt.$$

(4). $\frac{d}{dx}\left(f(x)G(x)\right) = f'G + fg$ より

$$\Big[f(x)G(x)\Big]_a^b = \int\{f'G + fg\}\,dx.$$

(1) により いえる.

不定積分の例

$$\left(\int f(x)\,dx = F(x) \iff \underline{F'(x) = f(x)} \right)$$

以下は覚えなくてよい

- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ $(a \neq -1$ のとき$)$
  $\left(\left(\dfrac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a \text{ より} \right)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|.$
  $\left((\log|x|)' = \dfrac{1}{x} \text{ より} \right)$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{|a|}$ $(a \neq 0)$.
  $\left((\mathrm{Sin}^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ より} \right)$
  $$\left(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{|a|}\right)' = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{|a|^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a}.$
  $$(\mathrm{Tan}^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
  $$\left(\frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

- $\int e^x dx = e^x \quad ((e^x)' = e^x \text{より})$
- $\int a^x dx = \dfrac{1}{\log a} a^x \quad \left(\begin{matrix} 0<a<1 \\ 1<a \end{matrix}\right)$

$\left((a^x)' = (\log a) \cdot a^x \text{より} \right)$

- $\int \log x \, dx = x \log x - x$

$\left((x \log x - x)' = \log x + 1 - 1 = \log x \text{より} \right)$

- $\int \sin x \, dx = -\cos x$

$\int \cos x \, dx = \sin x$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$

とかとか…

[補足] 何でもかんでも積分がかんたんにかけるとは限らない。

[例] $\int \dfrac{dx}{\log x}$ ムリ。

[漸化式による定積分の求め方]

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$ を求める $(n=0,1,2,\cdots)$

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$,

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$\boxed{n \geq 2}$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-1} (\sin x)' dx$.

$= \underbrace{\left[(\cos x)^{n-1} \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos x)^{n-1}\right)' \sin x\, dx$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\cos x)^{n-2} \cdot (-\sin x) \sin x\, dx$

$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-2} \cdot (\sin x)^2 dx$.

$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-2} (1 - (\cos x)^2)\, dx$.

$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$.

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$n=2m$ のとき.

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}I_{2m-2}=\cdots$$
$$=\left(\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\right)I_0$$
$$=\left(\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

$n=2m+1$ のとき

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}I_{2m-1}=\cdots$$
$$=\left(\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\right)I_1$$
$$=\left(\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\right)$$

今, $n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2 & n\text{偶数} \\ n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 1 & n\text{奇数} \\ 1 & n=0 \end{cases}$ とおくと

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & n\text{偶数}\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{奇数}.\end{cases}$$

$\left(I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx\right.$

$\left.(x=\frac{\pi}{2}-t \text{ とおく})\right)$

・ウォリスの公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \cdot \frac{(2m-2)^2}{(2m-1)(2m-3)} \cdots \frac{2^2}{3\cdot 1}$$

$$= \frac{2\,2\,4\,4\,6\,6\,8\,8\,10\,10\cdots}{1\,3\,3\,5\,5\,7\,7\,9\,9\,11\cdots}$$

[証明] $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で

$$(\cos x)^{2m+2} \leq (\cos x)^{2m+1} \leq (\cos x)^{2m}$$ より

$$I_{2m+2} \leq I_{2m+1} \leq I_{2m}$$

左より $$\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\frac{\pi}{2} \leq \frac{2m!!}{(2m+1)!!} \leq \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\frac{\pi}{2}$$

$\left(\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right)$ をかける

$$\left(\frac{2m+1}{2m+2}\right)\frac{\pi}{2} \leq \boxed{\frac{(2m!!)^2}{(2m+1)!!(2m-1)!!}} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2m\,2m}{(2m+1)(2m-1)} \cdot \frac{(2m-2)(2m-2)}{(2m-1)(2m-3)} \cdots \frac{2^2}{3\cdot 1}$$

よって $\lim_{m\to\infty}$ するとはさみうちの原理より

いえる//

(補足) π のおはなし

・ $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$

マーダヴァ－ライプニッツ級数.

(ラフな証明)

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \cdots$$

$\int$ 積分して.

$$\mathrm{Tan}^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

$\boxed{x = 1 \text{ 代入して}}$ ← 数学的にまずい.

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Tan}^{-1} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

・ $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots$

バーゼル問題.

・ $\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Tan}^{-1} \frac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1} \frac{1}{239}$.

マチンの公式

$\mathrm{Tan}^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots\cdots$ d_1

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \cdots\cdots\right)$$

$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 + \cdots\right.$$

Question　πをプログラミングで求めるにはどれがいい？

（ウォリス，ライプニッツ，バーゼル，マチン）etc…

$\boxed{\text{演習}}$ $\int x \log x \, dx$ を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$ $\int x \log x \, dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x \, dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 \text{」．}$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2\right)' = x \log x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x \log x\right)$$