大阪市立大学 R3 年度 (2021 年度) 前期 全学共通科目 解析 I *TI 電 (都 1 〜 28)

# 期末レポート解答例

担当教官: 岩井雅崇 (いわいまさたか)

## 第 1 問. (授業第 9,10 回の内容.)

次の (1) から (4) までの不定積分を求めよ.

(1). $\int xe^{x^2}dx$ (2). $\int \frac{x^3-1}{x^2+1}dx$ (3). $\int \frac{2}{x(x-1)(x-2)}dx$ (4). $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$

ただし答えを導出する過程を記した上で, 答えは次のように書くこと.

(例題) $\int \sin x dx$
(答え) $\int \sin x dx = -\cos x$

## ● 第 1 問解答例.

以下, 積分定数は省略する.

(1). $\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)' = xe^{x^2}$ であるので,

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2} \quad \text{である.}$$

(2).

$$\frac{x^3-1}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x-1}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \quad \text{であるので,}$$

$$\int \frac{x^3-1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log|x^2+1| - \mathrm{Tan}^{-1}x \quad \text{である.}$$

(3).

$$\frac{2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} \quad \text{であるので,}$$

$$\int \frac{2}{x(x-1)(x-2)}dx = \log\left|\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right| \quad \text{である.}$$

(4). $t = \sqrt{x+1}$ とおくと, $t^2 = x+1$ より, $2tdt = dx$ であるので,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx &= \int \frac{1}{(t^2-1)t}2tdt = \int \frac{2}{(t^2-1)}dt \\ &= \int \frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}dt = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}dt \\ &= \log|t-1| - \log|t+1| = \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| \quad \text{である.}\end{aligned}$$

## 第 2 問. (授業第 9,10 回の内容.)

(1). $a$ を正の実数とし, $f(x)$ を $[-a,a]$ 上の連続関数とする. 任意の $x \in [-a,a]$ について $f(-x) = -f(x)$ であると仮定する. このとき $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ であることを示せ.

(2). 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-2}^{2} \left( x^3 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{4 - x^2} dx$$

- **第 2 問解答例.**

(1). $t = -x$ とおいて置換積分をすると, $dt = -dx$ より

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{-a} f(-t)dt = \int_{-a}^{a} f(-t)dt = -\int_{-a}^{a} f(t)dt = -\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

以上より $2\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ となるので, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ となる.

(2). $g(x) = x^3 \cos \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2}$ とおくと, $g(x)$ は $[-2,2]$ 上の連続関数で, 任意の $x \in [-2,2]$ について

$$g(-x) = (-x)^3 \cos \frac{(-x)}{2} \sqrt{4 - (-x)^2} = -x^3 \cos \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} = -g(x)$$

である. よって (1) より,

$$\int_{-2}^{2} \left( x^3 \cos \frac{x}{2} \right) \sqrt{4 - x^2} dx = 0 \quad \text{である.}$$

一方 $\int_{-2}^{2} \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} dx$ について, $x = 2\cos t$ と置換積分すれば, $dx = 2(-\sin t)dt$ であるので,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} dx &= \int_{\pi}^{0} \frac{1}{2}\sqrt{4 - 4(\cos t)^2} 2(-\sin t)dt \\ &= \int_{0}^{\pi} 2(\sin t)^2 dt = \int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2t)dt \\ &= \left[ t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_{0}^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

以上より $\int_{-2}^{2} \left( x^3 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{4 - x^2} dx = \pi$ である.

## 第 3 問. (授業第 9,10,11 回の内容.)

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$$

とおく. 以下の問いに答えよ. ただしこの広義積分が収束することは仮定してよい. (したがって置換積分法や部分積分法などは自由に使って良い.)

(1). $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx$ を示せ.

(2). $2I=-\frac{\pi}{2}\log 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)dx$ を示せ.

(3). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)dx$ を $I$ を用いて表せ.

(4). $I$ の値を求めよ.

## ● 第 3 問解答例.

(1). $t=\frac{\pi}{2}-x$ と置換積分すれば, $dx=-dt$ であるので,

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\log\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2}-t\Big)\Big)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx.$$

(2). (1) を用いると,

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{1}{2}\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)dx\\&=-\frac{\pi}{2}\log 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)dx.\end{aligned}$$

(3). $t=2x$ と置換積分すれば, $x=\frac{t}{2}$ より $dx=\frac{1}{2}dt$ であるので,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)dx&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log(\sin t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin t)dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin t)dt\\&=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin t)dt.\end{aligned}$$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin t)dt$ に関しては, $t=s+\frac{\pi}{2}$ と置換積分すれば,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\Big(\sin\Big(s+\frac{\pi}{2}\Big)\Big)ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos s)ds=I$$

以上より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)dx=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin t)dt=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}I=I \text{ である.}$$

[補足.] $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)dx=\frac{\pi}{2}\log 2+2I$ も正解としました.

(4). (2) と (3) により,

$$2I = -\frac{\pi}{2}\log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)dx = -\frac{\pi}{2}\log 2 + I$$

であるので, $I = -\frac{\pi}{2}\log 2$ である.

## 第 4 問. (授業第 11 回の内容.)

$p$ を実数とする. 広義積分

$$\int_1^{\infty} (1+2\sqrt{x})^{2p} \log x \, dx$$

が収束するような $p$ の範囲を求めよ.

- **第 4 問解答例.**

求める範囲が $p < -1$ であることを示す.

(1).$p < -1$ のとき, 広義積分 $\int_1^{\infty}(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x \, dx$ が収束することを示す.
$p+\epsilon < -1$ となるように $\epsilon > 0$ を取ると,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x}{x^{p+\epsilon}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+2\sqrt{x})^{2p}}{x^p}\frac{\log x}{x^{\epsilon}} = 0.$$

よって, ある $C > 0$ があって, $C \leqq x$ ならば $(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x \leqq x^{p+\epsilon}$ となる. $p+\epsilon < -1$ であるので, 広義積分 $\int_C^{\infty} x^{p+\epsilon}dx$ は収束する. これより第 11 回授業でやった定理から, 広義積分 $\int_C^{\infty}(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ も収束する. $\int_1^{C}(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ は定積分で有限の値を取るので, 広義積分 $\int_1^{\infty}(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ は収束する.

(2).$-1 \leqq p \leqq 0$ のとき, $\int_1^{\infty}(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x \, dx$ が $+\infty$ に発散することを示す.
$1 \leqq x$ ならば, $1+2\sqrt{x} \leqq \sqrt{x}+2\sqrt{x} \leqq 3\sqrt{x}$ より,

$$(1+2\sqrt{x})^{2p} \geqq 3^{2p}x^p$$

である. 一方 $3 \leqq x$ ならば $\log x \geqq 1$ であるので, $3 \leqq x$ ならば

$$(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x \geqq 3^{2p}x^p$$

である. $-1 \leqq p$ により広義積分 $\int_3^{\infty} 3^{2p}x^p dx$ は $+\infty$ に発散するので, 第 11 回授業でやった定理より, 広義積分 $\int_3^{\infty}(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ も $+\infty$ に発散する. $\int_1^{3}(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ は定積分で有限の値を取るので, 広義積分 $\int_1^{\infty}(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ は $+\infty$ に発散する.

(3).$0 < p$ のとき, $\int_1^{\infty}(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x \, dx$ が $+\infty$ に発散することを示す.
$1 \leqq x$ ならば, $1+2\sqrt{x} \geqq 2\sqrt{x}$ より,

$$(1+2\sqrt{x})^{2p} \geqq 2^{2p}x^p$$

である．一方 $3 \leqq x$ ならば $\log x \geqq 1$ であるので, $3 \leqq x$ ならば

$$(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x \geqq 2^{2p}x^p$$

である．$-1 \leqq p$ により広義積分 $\int_3^\infty 2^{2p}x^p dx$ は $+\infty$ に発散するので, 第 11 回授業でやった定理より, 広義積分 $\int_3^\infty (1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ も $+\infty$ に発散する．$\int_1^3 (1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ は定積分で有限の値を取るので, 広義積分 $\int_1^\infty (1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ は $+\infty$ に発散する．

(1) から (3) によって広義積分 $\int_1^\infty (1+2\sqrt{x})^{2p}\log x\, dx$ が収束するような $p$ の範囲は $p < -1$ である．

[別解.]

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x}{x^p\log x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)^{2p} = 2^{2p}$$

であるので, ある $C > 0$ があって, $C \leqq x$ ならば

$$\frac{2^{2p}}{2}x^p\log x \leqq (1+2\sqrt{x})^{2p}\log x \leqq \frac{3\cdot 2^{2p}}{2}x^p\log x$$

である.[1] 第 11 回授業演習問題から, $p < -1$ ならば広義積分 $\int_C^\infty x^p\log x dx$ は収束し, $p \geqq -1$ ならば広義積分 $\int_C^\infty x^p\log x dx$ は $+\infty$ に発散する．よって第 11 回授業でやった定理より, $p < -1$ ならば広義積分 $\int_C^\infty (1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ は収束し, $p \geqq -1$ ならば広義積分 $\int_C^\infty (1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ は $+\infty$ に発散する．よって求める範囲は $p < -1$ である．($\int_1^C (1+2\sqrt{x})^{2p}\log x dx$ は定積分で有限の値を取るため.)

## 期末レポートおまけ問題. (授業第 11 回の内容.)

次の問いに答えよ．

(1). 広義積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)}dx$$

は収束するか発散するか． 理由とともに答えよ．

(2). 広義積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2}dx$$

は収束するか発散するか． 理由とともに答えよ．

## • 期末レポートおまけ問題解答例.

(1).

$$(\log(-\log x))' = \frac{1}{-\log x}\frac{-1}{x} = \frac{1}{x\log x} \text{ であるので,}$$

[1] グラフを書いて見ればわかると思います．

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)}dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)}dx = \lim_{\epsilon\to+0}\Big[\log(-\log x)\Big]_\epsilon^{\frac{1}{2}} = \log\left(-\log\frac{1}{2}\right) - \lim_{\epsilon\to+0}\log(-\log\epsilon).$$

$\lim_{\epsilon\to+0}\log(-\log\epsilon) = +\infty$ であるため, 広義積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)}dx$ は $+\infty$ に発散する.

(2).

$$\left(\frac{-1}{\log x}\right)' = \frac{-1}{(\log x)^2}\frac{-1}{x} = \frac{1}{x(\log x)^2} \text{ であるので,}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2}dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2}dx = \lim_{\epsilon\to+0}\Big[\frac{-1}{\log x}\Big]_\epsilon^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\log\frac{1}{2}} - \lim_{\epsilon\to+0}\frac{-1}{\log\epsilon}.$$

$\lim_{\epsilon\to+0}\frac{-1}{\log\epsilon} = 0$ であるため, 広義積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2}dx$ は収束する.

## 期末レポートについて.

第 1 問から第 4 問を通して, 正答率 81%でした. とてもよくできていたと思います. 各問題を通しての感想は以下のとおりです.

第 1 問. 正答率 94%. 非常によくできていました. 大学入試で不定積分をかなり練習したと思うので, 解きやすかったのではないでしょうか.

第 2 問. 正答率 82%. これも高校でやったかもしれません. 元ネタの問題はノーヒントで (2) の値を求める問題だったのですが, ちょっと難しいかなと思って (1) の誘導をつけました.

第 3 問. 正答率 96%. 有名問題です. 元ネタの問題ではノーヒントで $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx$ の値を求める問題だったのですが, あまりに難しいので誘導をつけました. 複素解析でも求められる非常に面白い積分です.

第 4 問. 正答率 36%. 中間レポートの正答率が良かったので, この問題で調整しました. かなりの難問だと思います. こういう問題の解き方のコツとして, 解答を書く前におおよその正解を掴むことです. (議論を構築するのは正解を把握してからです.)

私が答えを書く前にやった考察は以下の通りです. 「$(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x$ は $[1,\infty)$ で連続だから, 広義積分が収束するか発散するかは $x$ が大きいところの話である. $(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x$ は $x$ が大きいときはだいたい $x^p\log x$ だ.[2] そして $x^p\log x$ は $p<-1$ のとき収束するから, だいたい答えは $p<-1$ だろう.」この考察を元に解答を作成しております.

[2]つまり $(1+2\sqrt{x})^{2p}\log x = O(x^p\log x)(x\to\infty)$ ということです.