第 8 回. リーマン積分の定義と微分積分学の基本定理 (三宅先生の本, 3.1 と 3.4 の内容)

岩井雅崇 2021/06/08

1 はじめに

この回の内容はかなり難しいので, 積分の理論を気にせず計算だけしたい人はこの回の内容を読み飛ばして, 次の回の内容に移って良い. また証明等を少々省略するので, 詳しくリーマン積分を理解したい人は「杉浦光夫 解析入門 1 (東京大学出版会)」を見てほしい.

2 リーマン積分の定義

この節では $I = [a, b]$ とし, 関数 $f(x)$ は I 上で有界であるとする.

- Δ が I の分割とは, 正の自然数 m と $a = x_0 < x_1 < \ldots, x_{m-1} < x_m = b$ となる数の組 $(a, x_1, \ldots, x_{m-1}, b)$ のこと. 以下 $\Delta = (a, x_1, \ldots, x_{m-1}, b)$ とかく. (この授業だけの記号である.)
- Δ を I の分割として, Δ の長さを $|\Delta| = \max_{1 \leqq i \leqq m,}\{|x_i - x_{i-1}|\}$ とする.
- Δ を I の分割とする. $1 \leqq i \leqq m$ となる自然数 i について

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i\} \text{ とし,}$$

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad T_\Delta = \sum_{i=1}^{m} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ とおく.}$$

定義から $T_\Delta \leqq S_\Delta$ となる.

定理 1 (ダルブーの定理)**.** ある実数 S, T があって,

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta = S, \quad \lim_{|\Delta| \to 0} T_\Delta = T.$$

[1]

定義 2 (リーマン積分の定義)**.** $I = [a, b]$ かつ $f(x)$ を I 上の有界関数とする.
f が I 上でリーマン積分可能 (リーマン可積分)とは $S = T$ となること. このとき,

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ と表す.}$$

$\int_a^b f(x)dx$ を $f(x)$ の $[a, b]$ における定積分という.

[1] $\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta = S$ の意味は, Δ の長さが 0 になるように分割をとっていくと, S_Δ は S に限りなく近くという意味である.

また

$$\int_a^a f(x)dx = 0,\quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \text{ とする.}$$

以下, リーマン積分可能を単に積分可能ということにする.

例 3.

- $I = [a, b]$ とし, f を I 上での連続関数とする. このとき f は I 上で積分可能.(みんながよく知っている関数は積分可能.)
- $I = [0, 1]$ とし, I 上の有界関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

とおくとき, 任意の I の分割 Δ について, $S_\Delta = 1$ であり, $T_\Delta = 0$ である. よって $S = 1$ かつ $T = 0$ より, f は I 上で積分可能ではない.

定理 4 (区分求積法)**.** $I = [a, b]$ とし, $f(x)$ を I 上の積分可能な関数とする. 任意の $n \in N$ について, $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$ (i は $1 \leqq i \leqq n$ なる自然数) とおき, $D_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n}$ とすると,

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \int_a^b f(x)dx \text{ となる.}$$

例 5. $I = [0, 1]$ とし, $f(x) = x^2$ を I 上の関数とする. 任意の $n \in N$ について, $x_i = 0 + \frac{(1-0)i}{n} = \frac{i}{n}$($i$ は $1 \leqq i \leqq n$ なる自然数) であるので,

$$D_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

以上より区分求積法から

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} D_n = \frac{1}{3} \text{ である.}$$

3 微分積分学の基本定理

定義 6. $f(x)$ を区間 I 上の連続関数とする. $a \in I$ を一つ固定する.

$$\begin{array}{cccc} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_a^x f(x)dx \end{array}$$

を<u>$f(x)$ の不定積分</u>と呼ぶ. <u>$F(x)$ を $\int f(x)dx$ とも表す.</u> 不定積分は定数を除いてただ一つに定まる.

定理 7 (微分積分学の基本定理)**.** $f(x)$ を区間 I 上の連続関数とする．不定積分 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ は I 上で微分可能で $F'(x) = f(x)$ である**.** 特に

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \text{ である.}$$

命題 8. $f(x)$ を区間 I 上の連続関数とし, $G(x)$ を I 上の関数とする．$G'(x) = f(x)$ ならばある定数 c があって,

$$G(x) = \int f(x)dx + c \text{ となる.}$$

例 **9.** $f(x) = x^2, G(x) = \frac{x^3}{3}$ とすると $G'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$ よりある定数 c があって $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + c$ となる.

定理 10. $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とし, $G(x)$ を $G'(x) = f(x)$ となる $[a,b]$ 上の関数とする．このとき

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a) \text{ となる.}$$

例 **11.**

$$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

である. (区分求積法を用いるよりもずっとずっと簡単である.)

4 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

$n, x \in \mathbb{N}$ について

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \text{ とする.}$$

次の問いに答えよ.

1. $\lim_{n\to\infty} S_n(1)$ は発散することを示せ.
2. $\lim_{n\to\infty} S_n(2)$ は収束することを示せ.

ちなみに

$$\frac{\pi^2}{6} = \lim_{n\to\infty} S_n(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$
$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{n\to\infty} S_n(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$
$$\frac{\pi^6}{945} = \lim_{n\to\infty} S_n(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots$$

であることが知られている.