第 1 回追加資料. 極限に関する厳密な定義 (三宅先生の本, 1.4 の内容)

岩井雅崇 2021/04/13

1 はじめに

この追加資料は第 2 回の内容を含みます. またかなり難しい部分もあるので理解できなくても構いません. (この内容を飛ばしてもらっても構いません.) 私はこの授業において追加資料の内容 (ϵ-δ 論法等) はほぼ使いません. 後期の先生によってはこの回の内容を使う可能性もあるので, その場合にはこの資料を見ていただければ幸いです.

1.1 数列の極限と ϵ-N 論法

定義 1 (ϵ-N 論法を用いた厳密な極限の定義)**.** 数列が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が極限 $\alpha \in \mathbb{R}$ を持つとは, 任意の正の実数 ϵ について, ある $N \in \mathbb{N}$ があって, $N < n$ ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となること. このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ と書く.}$$

例 2. $a_n = \frac{1}{n}$ とする. 数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する.
(証.) 任意の $\epsilon > 0$ について $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ をおくと $\frac{1}{N} = \frac{1}{[\frac{1}{\epsilon}]+1} \leqq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$ であるため,

$$N < n \quad \text{ならば } |a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{N} \leqq \epsilon \quad \text{となる.}$$

以上より, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある N(具体的には $[\frac{1}{\epsilon}]+1$) があって, $N < n$ ならば $|a_n - 0| < \epsilon$ となるので, 数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する.

命題 3. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ となる.

(証.) 任意の $\epsilon > 0$ についてある N_1, N_2 があって

$$N_1 < n \quad \text{ならば } |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$N_2 < n \quad \text{ならば } |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$$

となる. 以上より $N = \max(N_1, N_2)$ とおくと $N < n$ ならば

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

である. 以上より, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある N (具体的には $\max(N_1, N_2)$) があって, $N < n$ ならば $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$ となるので, 数列 $\{a_n + b_n\}$ は $\alpha + \beta$ に収束する.

授業で紹介した収束の極限の性質の証明は上のようにやれば良い.

命題 4 (極限の一意性)**.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ ならば $\alpha = \beta$ である.

(証.) $\alpha \neq \beta$ として矛盾を示す. $\epsilon = \frac{|\alpha-\beta|}{3}$ とおくと, ある N_1, N_2 があって

$$N_1 < n \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{3} \text{ かつ } N_2 < n \text{ ならば } |a_n - \beta| < \frac{\epsilon}{3} \text{ となる.}$$

以上より $m = \max(N_1, N_2) + 1$ とおくと $N_1 < m$ かつ $N_2 < m$ より

$$|\alpha - \beta| \leqq |a_m - \alpha| + |a_m - \beta| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2}{3}|\alpha - \beta|$$

である. しかし $|\alpha - \beta| > 0$ より矛盾である.

定理 5 (はさみうちの原理.)**.** $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ となる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ に関して $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ である.

(証.) 任意の $\epsilon > 0$ についてある N_1, N_2 があって

$$N_1 < n \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \epsilon \text{ かつ } N_2 < n \text{ ならば } |c_n - \alpha| < \epsilon \text{ となる.}$$

以上より $N = \max(N_1, N_2)$ とおくと $N < n$ ならば $a_n - \alpha \leqq b_n - \alpha \leqq c_n - \alpha$ であるので

$$|b_n - \alpha| \leqq \max(|a_n - \alpha|, |c_n - \alpha|) < \epsilon$$

である. 以上より, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある N (具体的には $\max(N_1, N_2)$) があって, $N < n$ ならば $|b_n - \alpha| < \epsilon$ となるので, 数列 $\{b_n\}$ は α に収束する.

授業でちょっとだけ触れたコーシー列や実数の構成に関しても触れておきます.

定義 6 (コーシー列)**.** 数列$\{a_n\}$ がコーシー列とは, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある $N \in \mathbb{N}$ があって, $N < m, n$ ならば $|a_n - a_m| < \epsilon$ となること.

命題 7 (収束するならばコーシー列)**.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\{a_n\}$ はコーシー列.

(証.) 任意の $\epsilon > 0$ についてある N があって

$$N < n \quad \text{ならば } |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

となる. 以上より $N < n, m$ ならば

$$|a_n - a_m| \leqq |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha| < \epsilon$$

となるので, 数列 $\{a_n\}$ はコーシー列である.

例 8. 逆に「コーシー列は収束するのか?」と思うがこれはどの世界で数列を考えているかによる. 有理数列 a_n がコーシー列であっても, 数列 $\{a_n\}$ が有理数には収束しないこともあります.

例として数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sqrt{2} \text{ の小数第 } n \text{ 位まで}$$

とおく．具体的には

$$a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, a_4 = 1.4142, \cdots$$

である．このとき a_n は有理数列でありコーシー列だが a_n は $\sqrt{2}$ に収束するため, a_n は有理数には収束しない. (もちろん実数には収束してます)

よって有理数の世界だけ考えても解析をするには少々不便である.(極限操作をするから.) したがってどんなコーシー列でも収束し, 有理数を含む最小の世界があれば良いと思われる．その思いからできたのが実数である.

定理 9 (実数の存在)**.** $\mathbb{Q}$ を有理数の集合とする．このとき $\mathbb{Q}$ を含む集合 X があって, 次を満たす.

1. 任意の $x \in X$ に関して, ある有理数列 $\{a_n\}$ があり, $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ となる.
2. X 上の数列 $\{a_n\}$ がコーシー列ならば, ある $\alpha \in X$ があり, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる. (コーシー列は収束する.)

この X を $\mathbb{R}$ と書き, 実数の集合と呼ぶ.

[1]

定理 10 (実数の連続性)**.** 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は収束する.

(証.) a_n がコーシー列であることを示す．$\{a_n\}$ は上に有界なので, $a_n < 0$ として良い．もしコーシー列でないとすると, ある $\epsilon > 0$ があり, 任意の N について $N < n < m$ となる n, m があって $|a_n - a_m| \geqq \epsilon$ となる.

そこで新たに数列 $\{b_l\}$ を次のように定義する． まず $1 < n_1 < m_1$ となる n_1, m_1 があって $|a_{n_1} - a_{m_1}| \geqq \epsilon$ である． よって, $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{m_1}$ とおく． 次に $k_2 = m_1 + 1$ とおくと, $k_2 < n_2 < m_2$ となる n_2, m_2 があって $|a_{n_2} - a_{m_2}| \geqq \epsilon$ である．よって, $b_3 = a_{n_2}, b_4 = a_{m_2}$ とおく．これを繰り返し行うことで帰納的に数列 $\{b_l\}$ を定める.

構成方法から $\{b_l\}$ は単調増加で, $b_l < 0$ である**.** さらに任意の自然数 l について, $b_{2l} - b_{2l-1} \geqq \epsilon$ かつ $b_{2l+1} - b_{2l} \geqq 0$ である．以上より任意の自然数 l について

$$b_{2l} = (b_{2l} - b_{2l-1}) + (b_{2l-1} - b_{2l-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1 \geqq b_1 + l\epsilon$$

である．$b_{2l} < 0$ のため, 任意の自然数 l について $b_1 + l\epsilon < 0$ である．しかし, $\epsilon > 0$ であったため, これは矛盾である.

[1] この証明は集合と位相という数学科の 2 年くらいで学ぶ内容です．証明は難しいです.

2 関数の極限

定義 11 (ϵ-δ 論法を用いた厳密な極限の定義)**.** $f(x)$ を $x = a$ の周りで定義された関数とする．$f(x)$ が $x = a$ で $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは任意の正の実数 ϵ について，ある正の実数 δ があって，$|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ となること．このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \text{ と書く．}$$

例 **12.** $f(x) = x^2$ は $x = 0$ で 0 に収束する．
(証.) 任意の $\epsilon > 0$ について $\delta = \sqrt{\epsilon}$ をおくと $|x - 0| < \delta$ ならば

$$|f(x) - 0| = |x^2| < \delta^2 = \epsilon \quad \text{となる．}$$

以上より，任意の $\epsilon > 0$ について，ある δ(具体的には $\sqrt{\epsilon}$) があって，$|x - 0| < \delta$ ならば $|f(x) - 0| < \epsilon$ となるので，関数 $f(x) = x^2$ は $x = 0$ で 0 に収束する．

命題 13. $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とするとき $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$ となる.

(証.) 任意の $\epsilon > 0$ についてある $\delta_1, \delta_2 > 0$ があって

$$|x - a| < \delta_1 \text{ならば } |f(x) - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} \text{ かつ } |x - a| < \delta_2 \text{ならば } |g(x) - \beta| < \frac{\epsilon}{2} \text{ となる．}$$

以上より $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ とおくと，$|x - a| < \delta$ ならば

$$|(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| \leqq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

である．以上より，任意の $\epsilon > 0$ について，ある δ (具体的には $\min(\delta_1, \delta_2)$) があって，$|x - a| < \delta$ ならば $|(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$ となるので，$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$ となる．

授業で紹介した収束の極限の性質の証明は上のようにやれば良い．

3 最後に

少々書きすぎてしまったが，この内容は理解する必要はないです．この内容が必要になることはあまりないと思います.[2]

[2] まあ一種の無駄知識と思っていただければ幸いです．私はこの内容が一番面白いですが...