2 連続関数

[定義] $A \subset \mathbb{R}$ 部分集合

任意の $x \in A$ について、実数 $f(x)$ が唯1つ定まるとき、$f(x)$ を A 上の関数といい、

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x)$$

とかき、

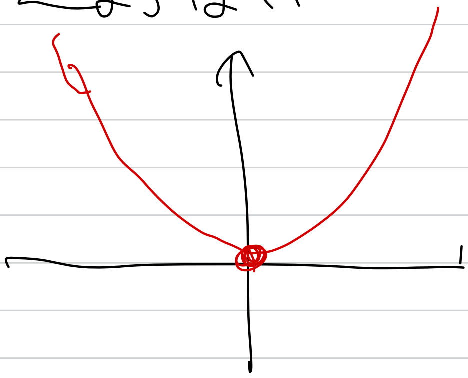
- $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ とする。
- $f(x)$ が有界関数であるとは、$f(A)$ が有界となること。

(ある $M > 0$ があって、任意の $x \in A$ について、$|f(x)| \leq M$ となること)

- $\max_{x \in A} f(x) = \max f(A)$ 　$f(x)$ の A での最大値
- $\min_{x \in A} f(x) = \min f(A)$ 　最小値
- $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$ 　上限
- $\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$ 　下限。

[例] ・ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$上の関数ではない
$x \mapsto \pm x^2$ ($f(2)=\pm 4$ で唯1に定まらない)

・ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$上の関数
$x \mapsto x^2$

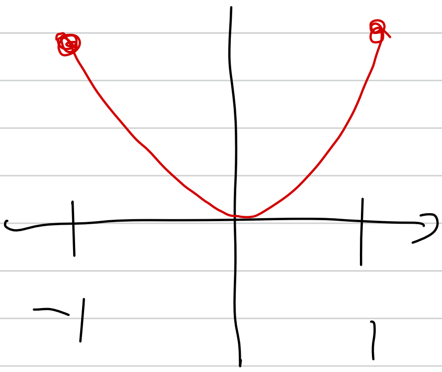


$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ 存在しない。

$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$, $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0 = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

有界ではない。

・ $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$



$\max_{x\in[-1,1]} f(x) = 1 = \sup_{x\in[-1,1]} f(x)$

$\min_{x\in[-1,1]} f(x) = 0 = \inf_{x\in[-1,1]} f(x)$

有界関数。 $\left(|f(x)| \leq 1 \quad x\in[-1,1] \text{なら} \right)$

【関数の極限】

$a\in\mathbb{R}$ とする。$f(x)$ を a のまわりで定義された関数とする。

$x\to a$ のとき、$f(x)$ が α ($\alpha\in\mathbb{R}$) に収束するとは、

$x\neq a$ をみたしながら x を a に近づけるとき $f(x)$ が α に限りなく近づくこと。

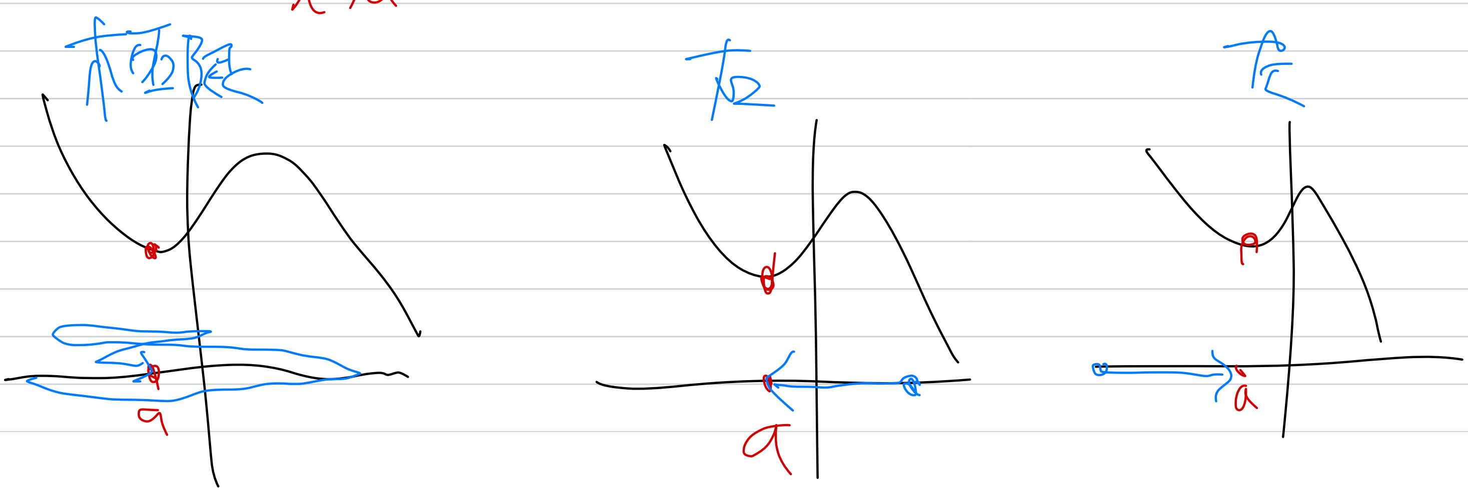
このとき $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ または $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\alpha$ とかく。

($\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ も同様)

・上において、x を a の右側(左側)から a に近づけたときの極限を点 a における右極限(左極限)といい、

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$$ とかく。

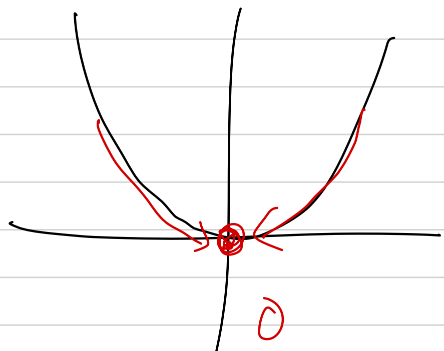
$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha\right)$$



[例1] $f=[-1,1]\to\mathbb{R}$ について.

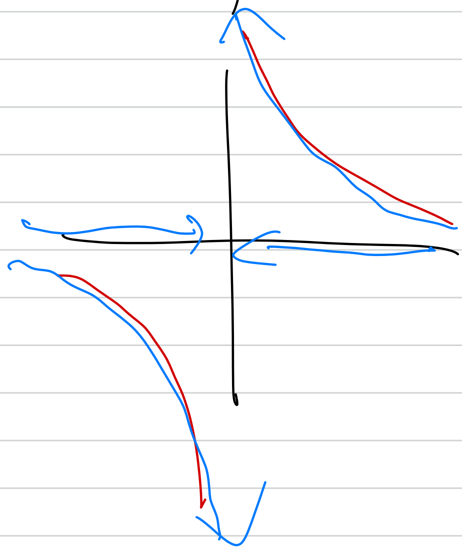
$$x\longmapsto x^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$



[例1] $f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$x\longmapsto \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=-\infty$$

[性質] $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ のとき

- $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\alpha\pm\beta$
- $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(cf(x)\right)=c\alpha$ $(c\in\mathbb{R}$ 定数$)$
- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$
- $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta\neq 0$ のとき.$)$

[定義]

- a のまわりで定義された関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続とは
  $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となること。

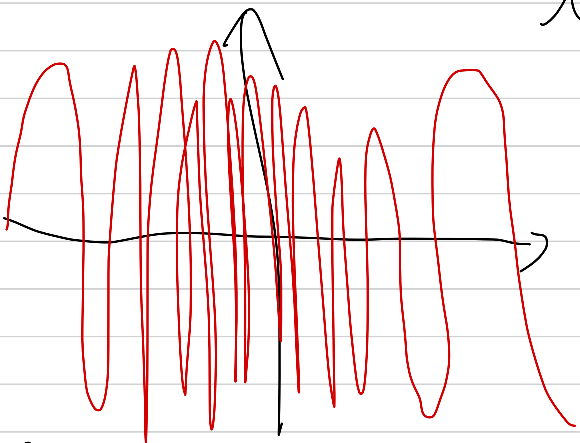
- $f(x)$ を区間 I 上の関数とする。
  $f(x)$ が I 上連続とは任意の $a \in I$ について、$f(x)$ が $x=a$ で連続となること。

[例] $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ より
$f(x)$ は $x=0$ で連続

[例] みなさんがよく知ってる関数は(だいたい)連続
(x^2, $\sin x$, $\cos x$, e^x は $\mathbb{R}$ 上連続
$\frac{1}{x}$ は $\mathbb{R} - \{0\}$ で連続
(0 以外))

[例] $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



f は $x=0$ で連続ではない

[証] 連続であると仮定すると

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x} = 0 \quad \cdots (☆)}$$

しかし $x_n = \dfrac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくと

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ であるが

$$f(x_n) = \sin\left(\left(2n+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right) = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 1.$$

よって $\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1}$ より (☆) に矛盾する

[性質] $f(x), g(x)$ が a で連続なら

$f(x) \pm g(x)$, $cf(x)$, $f(x)g(x)$,

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(a) \neq 0$ のとき) も a で連続.

[定理] $y=f(x)$ が点 a で連続.

$z=g(y)$ が点 $f(a)$ で連続なら

$z=g(f(x))$ は点 a で連続である

[証] $l=f(a)$ とおくと.

$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$ より ($f(x)$ の連続性から)

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) \underset{\sim}{=} g(l) = g(f(a))$$

(g の連続性)

[連続だとうれしい点]

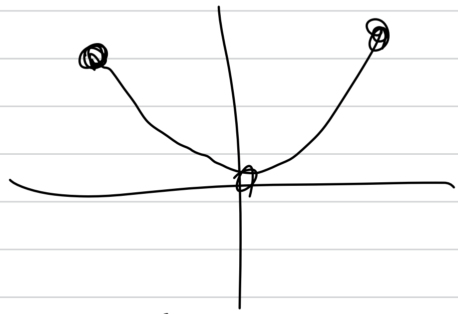
[定理] (最大 最小の存在)

$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で連続なら、

f は $[a,b]$ 上で最大値, 最小値をもつ.

[例] $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$

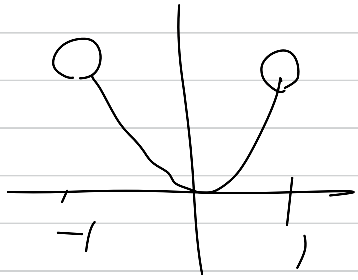
$x \mapsto x^2$.



$\max_{x\in[-1,1]} f(x) = 1 \quad \min_{x\in[-1,1]} f(x) = 0$

閉区間ではない

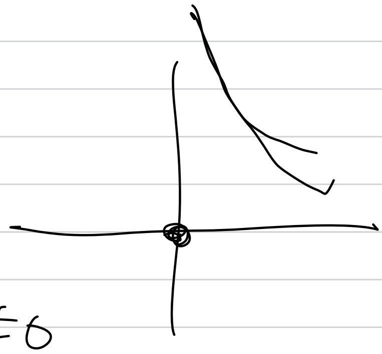
[例] $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$



$\max_{x\in(-1,1)} f(x)$ 存在しない。

$x=0$ で連続でない

[例] $f: [0,1] \to \mathbb{R}$



$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\max_{x\in[0,1]} f(x)$ は存在しない。

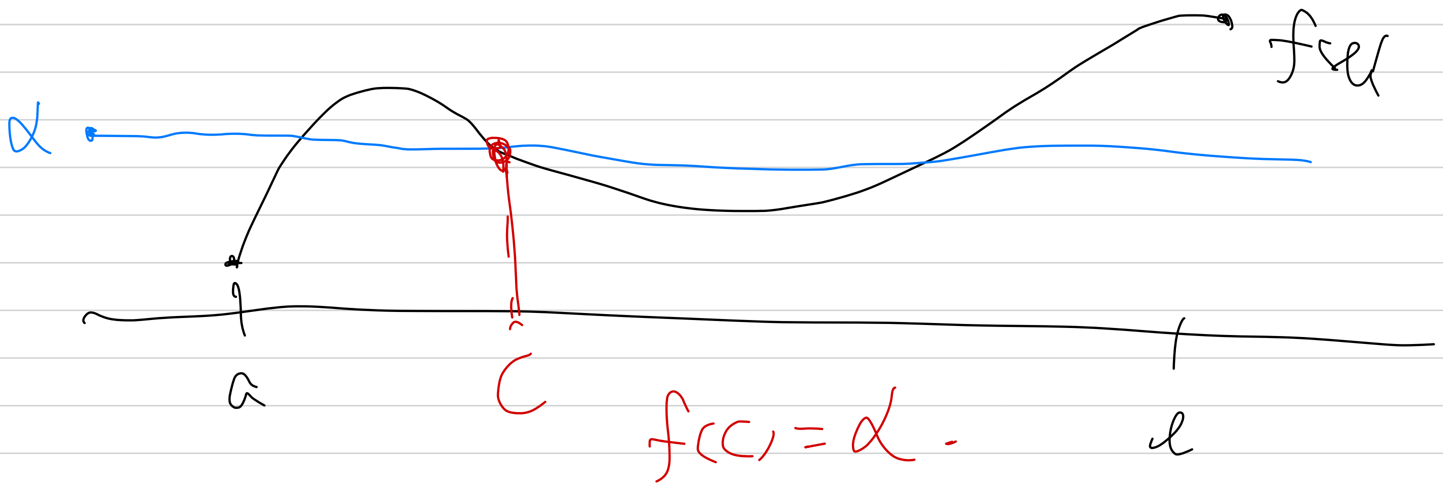
[定理2] (中間値の定理)

$f(x)$が 閉区間 $[a, b]$ 上で連続とする

$f(a) < f(b)$ ならば

任意の $\alpha \in [f(a), f(b)]$ について、

ある $c \in [a, b]$ があって $f(c) = \alpha$ となる



[証明]

・ $a_1 = a$, $b_1 = b$ とする

$f(a_1) = \alpha$ なら $c = a_1$ として そこで終了する

(b_1 のときも同じ)

以下 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を帰納的に定義する

・ a_n, b_n が定まっているとき

$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = \alpha$ ならば $c = \frac{a_n + b_n}{2}$ として

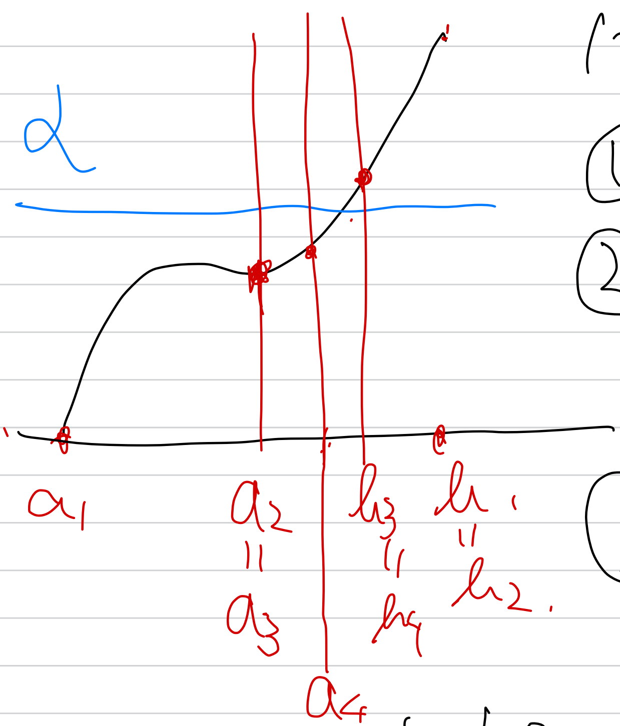
そこで終了する

・$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \alpha$ ならば

$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$ とする。

・$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > \alpha$ ならば

$a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ とする



性質として

① $a_n \leq b_n$,

② $\{a_n\}$は有界単調増加数列

$\{b_n\}$は有界単調減少数列

③ $|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{|a_n - b_n|}{2}$.

②から(実数の連続性により)

ある $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ があって

$\lim_{n\to\infty} a_n = d_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = d_2$ となる

③から $|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{|a_n - b_n|}{2} \leq \frac{|b-a|}{2^n}$,

$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$.

$\therefore$ $d_1 = d_2$ となる。$c = d_1 (= d_2)$ とおくと

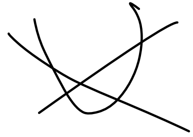
$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \leqq \alpha.$$

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) \geqq \alpha$$

よって、$f(c) = \alpha$.

[補足] 二分探索の一種の例である
(にぶたん)

[単調関数]



[定義]

$f(x)$をI上の関数とする. ($f(x)>f(y)$のとき)

$x<y$ならば $f(x)<f(y)$のとき

$f(x)$はI上単調増加という

(単調減少という)

[判定法] (第4回)

> $f(x)$が(a,b)上微分可能,
> $[a,b]$上連続とする.
>
> (a,b)上 $f'(x)>0$ ならば
> $f(x)$は単調増加.

[例] $f:[0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$.

$[0,+\infty)$上 $f'(x)=2x>0$ より

$[0,+\infty)$上 fは単調増加

[定義] $f(x)$を区間I上の関数
$g(x)$を区間J上の関数とする。

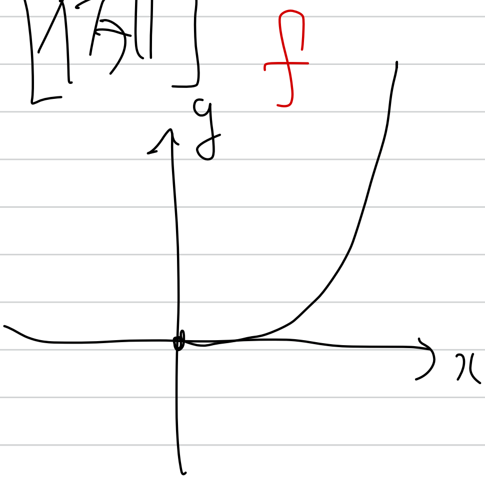
$f(I) = J$ かつ, $g(J) = I$ かつ,

$y = f(x)$ であることが $x = g(y)$ であることと同値であるとき、

g は f の逆関数といい、$g = f^{-1}$ とかく

$f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(y)) = y$ である。

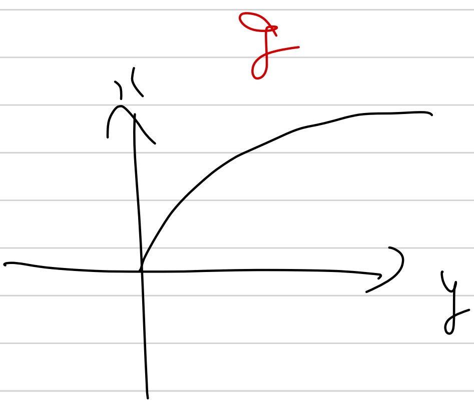
[例]



$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$y \mapsto \sqrt{y}$

とする。



f, g ともに $[0, +\infty)$ 上の関数で

$g = f^{-1}$ となる

[定理] (逆関数の存在定理)

f を $[a,b]$ 上の連続な単調増加関数とすると.

$[f(a), f(b)]$ 上連続な f の逆関数が存在する

[例] $f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

$[0,+\infty)$ 連続, 単調増加

$\Longrightarrow$ $[0,+\infty)$ 上 連続な f の逆関数がある

実際 $g: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto \sqrt{y}$ が逆関数にあたる.

【演習】

(1) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$ とおく。

$f(x)$ は $[-1,1]$ 上連続であることを示せ。

(2) 厚さが均一なお好みやきは包丁をまっすぐに1回いれることで二等分にできることを示せ。

(ただし(具材等にかんして)細かいことは考えなくてよく、ある種の連続性は仮定してよい)

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $a \in [-1, 1]$ とする。

・$a \neq 0$ なら、x, $\sin\frac{1}{x}$ は連続より
$x\sin\frac{1}{x}$ も連続。

・$a = 0$ のとき

($|\sin\theta| \leq 1$)

$0 \leq |f(x) - f(0)| = |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$ かつ

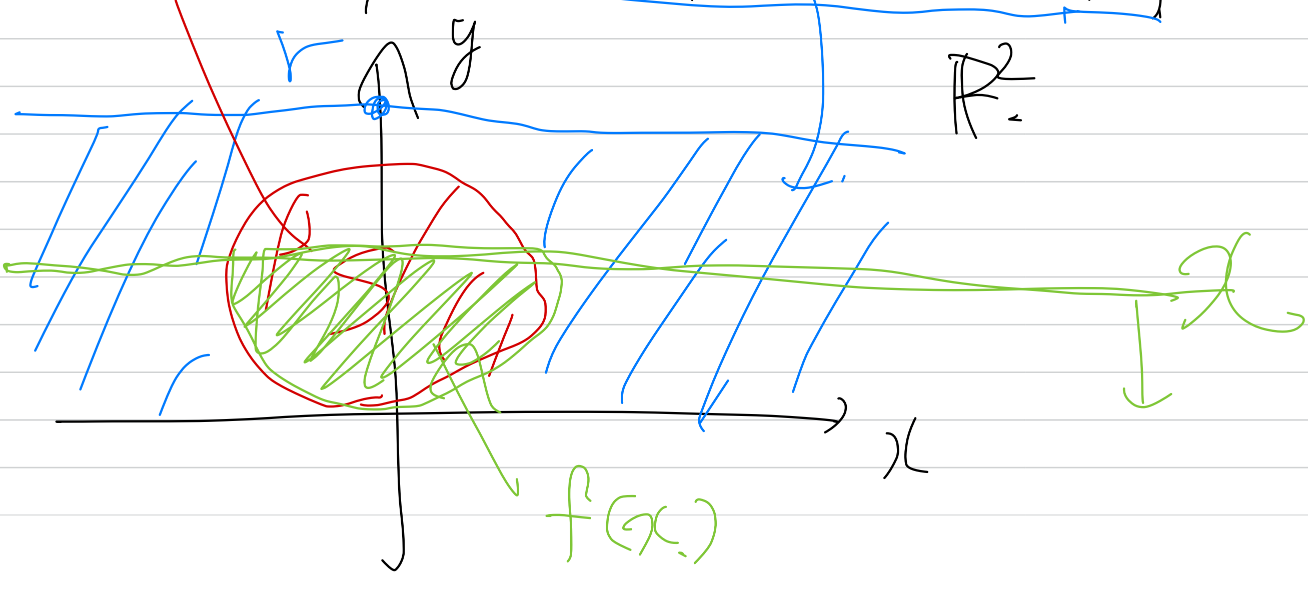
$\lim_{x \to 0} |x| = 0$ より

$\lim_{x \to 0} |f(x) - f(0)| = 0$

よって、$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ $f(x)$は$x=0$で連続。

(2) S をお好みやきとし、$r \in \mathbb{R}$。

$S \subset \{(s,t) \mid 0 \leq t \leq r\}$ としてよい。

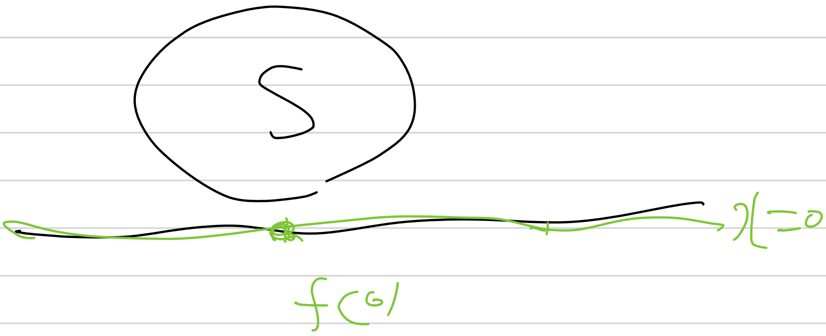


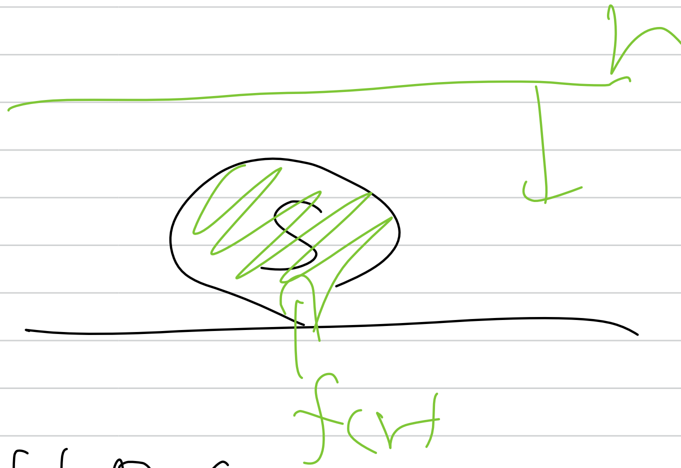
$$f : [0, r] \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto S \cap \{(s, t) \mid 0 \le t \le x\} \text{ の面積}$$

- f は連続
- S の面積(おこのみやきの面積)を A とすると

$f(0) = 0$ $\qquad$ $f(r) = A$





$f(0) < f(r)$ より 中間値の定理より

$\exists\ \frac{1}{2}A = f(c)$ となる $c \in [0, r]$ に存在する

よって $\{(s, c) \mid s \in \mathbb{R}\}$ で

それは二等分できる。

(ハムサンドウィッチ定理
パンケーキ問題)