5 高次導関数とテイラーの定理

【定義】 $f(x)$ を区間 I 上の微分可能な関数とする

$f'(x)$ が I 上微分可能なとき f は2回微分可能といい

$f''(x) = (f'(x))'$ として2次の導関数とよぶ

$f''(x)$ は $\frac{d^2f}{dx^2}$, $f^{(2)}(x)$ とかく.

n回微分可能

$\left(f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'\right)$

同様に n次導関数 $f^{(n)}(x)$ も定義する.

$f^{(n)}(x)$ は $\frac{d^nf}{dx^n}$ とかく.

【例1】 $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

$f''''(x) = 0$

【例2】 $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f''''(x) = \sin x = f(x)$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & n = 2m \\ (-1)^m \cos x & n = 2m+1 \end{cases}$$

例2. $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x = f(x)$　$f^{(n)}(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$ ------

定義. $f(x)$ が n 回微分可能かつ

$f^{(n)}(x)$ が連続 のとき

f は C^n 級関数という.

- すべての n について f が C^n 級のとき
  f は C^∞ 級関数という

C^0 級 $\supset C^1$ 級 $\supset C^2$ 級 ------ $\supset C^\infty$ 級

$\parallel$

連続関数.

みんながよく知ってる関数は(だいたい) C^∞ 級

$(x^n,\ \sin x,\ \cos x,\ e^x,\ \log x \ldots)$

[定理] テーラーの定理 I.

$f(x)$ が開区間 I 上で C^2 級関数とする。
$a, b \in I\ (a<b)$ について、ある $c \in (a,b)$ があって、

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(c)}{2}(b-a)^2$$

となる。

[例] $f(x) = e^x$ のとき。
$a=0$, $b>0$ 実数 とすると ある $c \in (0,b)$ で、

$$f(b) = f(0) + f'(0)b + \frac{f^{(2)}(c)}{2}(b-a)^2$$

$$= 1 + b + \frac{f^{(2)}(c)}{2}b^2$$ となる。

とくに $f^{(2)}(c) = e^c \geq 1$ より

$$f(b) \geq 1 + b + \frac{1}{2}b^2$$ となる。

[証] $$A = \frac{f(b) - \{f(a) + f'(a)(b-a)\}}{(b-a)^2}$$ とし、

$$F(x) = f(b) - \{f(x) + \underline{f'(x)(b-x)} + A(b-x)^2\}$$

とおく。

$$F(a) = \underbrace{f(b) - \{f(a) + f'(a)(b-a)}\ + A(b-a)^2\}$$

$$= A(b-a)^2 - A(b-a)^2 = 0.$$

$$F(b) = f(b) - \{f(b) - f'(b)\cdot 0 - A\cdot 0^2\}$$

$$= 0.$$

F : $[a,b]$ 上連続 (a,b) 上微分可能

∴ ロルの定理より、ある $c \in (a,b)$ があって

$F'(c) = 0$.

$$F'(c) = \frac{d}{dx}\left(f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - A(b-x)^2 \right)\Big|_{x=c}$$

$$= -f'(c) - f''(c)(b-c) + f'(c) + 2A(b-c)$$

∴ $f''(c)(b-c) = 2A(b-c)$

$b \neq c$ より $A = \frac{1}{2} f''(c)$

$(b-a)^2$ をかけて

$$f(b) - \{f(a) + f'(a)(b-a)\} = \frac{1}{2} f''(c)(b-a)^2 \quad //$$

[応用] 2次の導関数をもちいた極値判定法

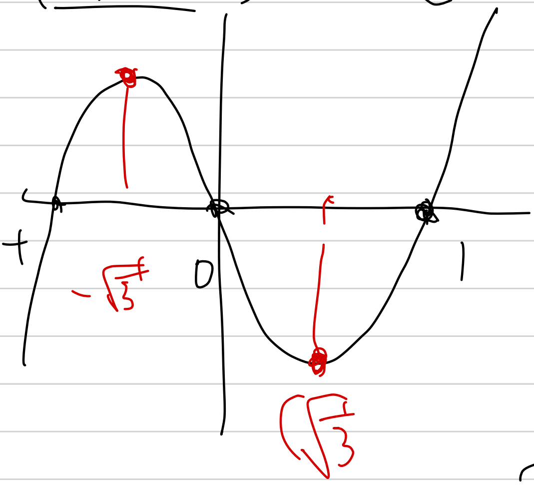
[定理] $f(x)$ を a のまわりで定義された C^2 級関数である

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば

$f(x)$ は a で極小

($f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば $f(x)$ は a で極大)

例1 $f(x)=x^3-x$ の極大値 極小値 は?



こたえ $f'(x)=3x^2-1$ より

$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ が極値の候補

$f''(x)=6x$ より

$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=-6\sqrt{\frac{1}{3}}<0$

$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ は極大値

$f''\left(+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=6\sqrt{\frac{1}{3}}>0$

$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ は極小値

$f''(a)=0$ の点にかんしては わからん

[証] $\varepsilon > 0$ を小さくとり、 全ての $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ について

$f''(x) > 0$ としてよい。

すると任意の $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ かつ $x \neq a$ について、

テイラーの定理より ある c があって、

(a と x の間の数)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

$$= f(a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 > f(a)$$

$\therefore$ $x \neq a$ なら $f(x) > f(a)$ より

f は a は極小である。

定理 テーラーの定理 II

$f(x)$ が区間 I 上の C^n 級関数とする.

$a, b \in I$ かつ $a<b$ なる実数について, ある $c \in (a,b)$ があって

$$f(b) = f(a) + f'(b)(b-a) + \frac{f''(b)}{2!}(b-a) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる

[例] $f(x) = e^x$,

$a=0$, $b>0$ とすると $c \in (0,b)$ があって.

$$f(b) = f(0) + f'(0)b + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}b^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}b^n$$

$$= 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}b^n.$$

となる

$e^c \geq 1$ より

$$e^b \geq 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}. \quad //$$

[証明] (ステップ4)

$$A = \frac{1}{(b-a)^n}\left\{f(b) - \left[f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}\right]\right\}$$

とし、

$$F(x) = f(b) - \left\{f(x) + f'(x)(b-x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + A(b-x)^n\right\}$$

とおくと

$F(b) = F(a) = 0$ より

ロル の定理から $F'(c) = 0$ なる $c \in (a, b)$ がある

これより ガチ計算から $A = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ となる。

ここで $a < c < b$ より、ある $0 < \theta < 1$ なる θ で

$c = a + \theta(b-a)$ とかける。

b を x とかくことで 次の定理をえる。

[定理] 有限テーラー展開

$f(x)$ を閉区間 I 上の C^n 級関数とする。

$a \in I$ を固定する。

任意の $x \in I$ についてある $\theta \in (0, 1)$ があって、

$$f(x) = f(a) + f'(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n.$$

右辺を $x=a$ における有限テーラー展開とよび、

$\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を剰余項とよぶ。

とくに、

$a=0$ のとき 有限マクローリン展開とよぶ。

[演習] (10分)

わかった

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ について、ある $0<\theta<1$ があって、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

となることを示せ。

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ について、ある $0<\theta<1$ があって、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{2n!}x^{2n}$$

となることを示せ。

(答え) ① $f(x) = e^x$ とすると

$f^{(k)}(0) = 1$ より 有限テーラー展開から

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$ である

② $f(x) = \sin x$ とすると、

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & k = 2m \\ (-1)^m \cos x & k = 2m+1 \end{cases}$$

よって

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k = 2m \\ (-1)^m & k = 2m+1 \end{cases}$$

よって $f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(2n)}(\theta x)}{2n!} x^{2n}$.

$k = 2m+1$ とへんおう へんかん

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} x^{2m+1} + \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{2n!} x^{2n}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{2n!} x^{2n}$$

$(2n-1 = 2m+1 \iff m = n-1.)$

$$= \underbrace{x}_{m=0} - \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{m=1} + \underbrace{\frac{x^5}{5!}}_{m=2} \cdots + \underbrace{\frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}}_{m=n-1}$$

$$+ \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{2n!} x^{2n}.$$