5 高次導関数とテイラーの定理

【定義】 $f(x)$ を区間 I 上の微分可能な関数とする。
$f'(x)$ が I 上微分可能であるとき、f を2回微分可能といい
$f''(x) = (f'(x))'$ として2次の導関数とよぶ。
$f''(x)$ は $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ や $f^{(2)}(x)$ とかくこともある。

同様に n 回微分可能や n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を
$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$ とさだめる。
$f^{(n)}(x)$ は $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ ともかく。

$\boxed{\text{例1}}$ $f(x) = x^3,\ f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x,$
$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 6,\ f^{(n)}(x) = 0\ (n \geqq 4)$

$\boxed{\text{例2}}$ $f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,$
$f^{(n)}(x) = e^x \quad (n \geqq 1)$

$\boxed{\text{例3}}$ $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,$
$f''(x) = -\sin x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & n = 2m \\ (-1)^m \cos x & n = 2m+1 \end{cases}$$

定義

・$f(x)$が n回微分可能かつ
$f^{(n)}(x)$が連続のとき
fは C^n級という

・任意の $n \in \mathbb{N}$ について、fがC^n級のとき
fは C^∞級という

連続 $\supset$ C^1級 $\supset$ C^2級 $\supset$ ------ $\supset$ C^∞級,
||
C^0級

$\boxed{\text{みんながよくしっている関数は だいたい } C^\infty\text{級}}$

x^n, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\log x$
x^2+x+1

[定理] テーラーの定理1.

$f(x)$が閉区間I上でC^2級な関数とする。

$a, b \in I \ (a<b)$について、ある$c \in (a, b)$があって、

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

となる

[例] $f(x) = e^x$, $a=0$, $b>0$とする.

このとき　ある$c \in (0, b)$があって、

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

$$\therefore e^b = 1 + b + \frac{f''(c)}{2} b^2$$ となる。

$f''(c) = e^c \geqq 1$ より

$$\boxed{f(b) = e^b \geqq 1 + b + \frac{1}{2} b^2 \text{ となる}}$$

e^bを多項式近似した.

[証] $\boxed{A = \dfrac{f(b) - \{f(a) + f'(a)(b-a)\}}{(b-a)^2}}$ とおく

$F(x) = f(b) - \{f(x) + f'(x)(b-x) + A(b-x)^2\}$ とする

$F(a) = \boxed{f(b) - \{f(a) + f'(a)(b-a)} + A(b-a)^2\}$

$A(b-a)^2$

$= A(b-a)^2 - A(b-a)^2 = 0$

$F(b) = f(b) - \{f(b) + f'(b)(b-b) + A(b-b)^2\}$

$= 0$.

よって $F(a) = F(b) = 0$ よりロルの定理から

ある $c \in (a, b)$ があって $F'(c) = 0$ となる

$F'(c) = -\{f'(c) + f''(c)(b-c) - f'(c) - 2A(b-c)\}$

$\therefore\ 0 = -f''(c)(b-c) + 2A(b-c)$

$\therefore\ A = \frac{1}{2} f''(c)$.

$\therefore\ f(b) - \{f(a) + f'(a)(b-a)\}$

$\times (b-a)^2$ すると

$= \frac{1}{2} f''(c)(b-a)^2$.

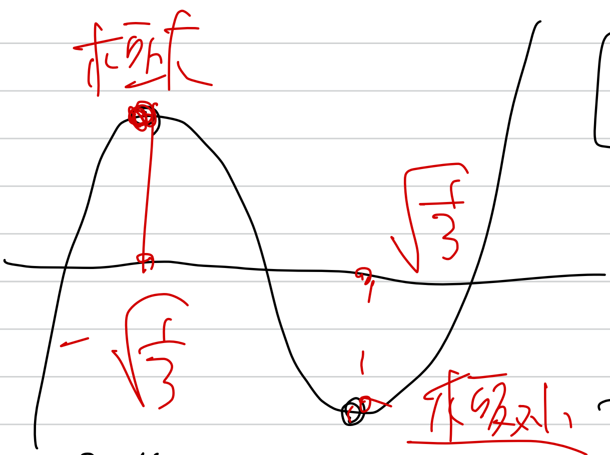
[応用] 2次の導関数を用いた極値判定法。

[定理] $f(x)$を点aのまわりで定義された C^2級関数とする。

$f'(a)=0$, $f''(a)>0$ なら $f(x)$はaで極小

($f'(a)=0$, $f''(a)<0$ なら $f(x)$はaで極大)

[例] $f(x)=x^3-x$ の極大値極小値は?



[注意] $f'(x)=3x^2-1$より、

($f'(x)=0$) $x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$が極値の候補。

$f''(x)=6x$より

$f''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=6\sqrt{\frac{1}{3}}>0$ より $f(x)$は$x=\sqrt{\frac{1}{3}}$で極小

$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=-6\sqrt{\frac{1}{3}}<0$ より $f(x)$は$x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$で極大。

[証] $\varepsilon > 0$ をとれば、

任意の $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ について

$f''(x) > 0$ としてよい。

任意の $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ かつ $x \neq a$ について、

テイラーの定理より、a と x の間の数 c があって、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

$$= f(a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

$$> f(a).$$

$\therefore$ $x \neq a$ ならば $f(x) > f(a)$ より

f は a で極小。

【定理】テーラーの定理2.

$f(x)$が区間I上のC^n級関数とする.

$a, b \in I$ かつ $a < b$ なら, ある $c \in (a, b)$ があって,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる

【例】 $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b > 0$ とする.

ある $c \in (0, b)$ があって.

$$f(b) = f(0) + f'(0)(b-0) + \frac{f''(0)}{2}(b-0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}(b-0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-0)^n$$

$$= 1 + b + \frac{1}{2}b^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}b^{n-1} + \frac{e^c}{n!}b^n$$ となる

$e^c \geqq 1$ より

$$e^b = f(b) \geqq 1 + b + \frac{1}{2}b^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}b^{n-1} + \frac{b^n}{n!}$$

[証明] ステップ4

$$A = \frac{1}{(b-a)^n}\left\{f(b) - \left[f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}\right]\right\}$$

とおく

$$F(x) = f(b) - \left\{f(x) + f'(x)(b-x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + A(b-x)^n\right\}$$

とおく。

$F(b) = F(a) = 0$ より

ロルの定理より $F'(c) = 0$ なる

$c \in (a, b)$ がある。

よって、少し計算より $A = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ となる。

ここで $a < c < b$ より ある $0 < \theta < 1$ なる

θ があって、

$c = a + \theta(b-a)$ となる。

ここで b を x とすることで 次をえる。

[定理] 有限テーラー展開

$f(x)$を開区間I上でn級関数とする

$a \in I$を固定する

任意の$x \in I$について、ある$\theta \in (0,1)$があって

$$f(x) = f(a) + f'(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

右辺を$x=a$における有限テーラー展開といい

$\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$を剰余項という

とくに

$a=0$のとき 有限マクローリン展開

とよぶ

【演習】

任意の $x \in \mathbb{R}$ について、ある $0 < \theta < 1$ があって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{(2n)!} x^{2n}$$

となることを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$ $f(x) = \sin x$ とする。

$a=0$ として有限テーラー展開を用いる

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & k = 2m \\ (-1)^m \cos x & k = 2m+1 \end{cases}$$

よって $$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k = 2m \\ (-1)^m & k = 2m+1 \end{cases}$$

よって、$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(2n)}(\theta x)}{2n!} x^{2n}$$

ある $0<\theta<1$ があって

となる

よって、

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\boxed{n-1}} \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} x^{2m+1} + \frac{f^{(2n)}(\theta x)}{2n!} x^{2n}$$

$k = 2m+1$ とにこ入れ

$k = 2m+1$ とする

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{2n!} x^{2n}$$

$$\therefore \sin x = \boxed{\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}} + \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{2n!} x^{2n}.$$

$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	
x	$-\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{x^5}{5!}$	$-\frac{x^7}{7!}$	$\cdots$