第 6 回. 漸近展開とべき級数展開 (三宅先生の本, 2.4 の内容)

岩井雅崇 2021/05/25

1　漸近展開とべき級数展開

定理 1 (有限テイラー展開)**.** $f(x)$ が開区間 I 上の C^n 級関数とする. $a \in I$ を固定する. 任意の $x \in I$ について, ある $\theta \in (0,1)$ があって

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

となる. 右辺を $x = a$ における<u>有限テーラー展開</u>と呼び, $R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を<u>剰余項</u>と呼ぶ. 特に $a = 0$ のとき, <u>有限マクローリン展開</u>と呼ぶ.

定義 2 (ランダウの記号)**.** a を実数または $\pm\infty$ とし, $f(x)$ と $g(x)$ を a の周りで定義された関数とする. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ であるとき

$$f(x) = o(g(x)) \ \ (x \to a) \text{ と書く.}$$

例 3.

- $x^5 = o(x^3) \ \ (x \to 0)$
- $\sin x = x + o(x^2) \ \ (x \to 0)$
- 任意の正の実数 α について, $\log x = o(x^\alpha) \ \ (x \to +\infty)$ であり, $x = o(e^{\alpha x}) \ \ (x \to +\infty)$ である.

命題 4 (ランダウの記号の性質)**.** $m, n \in \mathbb{N}$ とする.

- $x^m o(x^n) = o(x^{m+n}) \ \ (x \to 0)$
- $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n}) \ \ (x \to 0)$
- $m \leqq n$ ならば $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m) \ \ (x \to 0)$

定理 5 (漸近展開)**.** $f(x)$ を a を含む開区間上の C^n 級関数ならば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \ \ (x \to a)$$

となる. 特に $a=0$ の場合は下のようになる.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)\ \ (x\to 0)$$

例 6.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ \ (x\to 0)$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})\ \ (x\to 0)$$

定理 7 (べき級数展開)**.** $f(x)$ を a を含む開区間上の C^∞ 級関数とする. テイラーの定理

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

において, 剰余項 $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ とする. $b\in I$ において $\lim_{n\to\infty}|R_n(b)|=0$ となるならば,

$$f(b)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \quad \text{となる.}$$

例 8. $f(x)=e^x$ とし, $a=0$ かつ $b\in\mathbb{R}$ とする. このとき剰余項は

$$R_n(b)=\frac{e^{b\theta}b^n}{n!}$$

である. $\lim_{n\to\infty}|R_n(b)|=0$ であるので, べき級数展開ができ,

$$e^b=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}b^k=1+b+\frac{b^2}{2!}+\frac{b^3}{3!}+\frac{b^4}{4!}+\cdots$$

例 9. $f(x)=\sin x$ とし, $a=0$ かつ $b\in\mathbb{R}$ とする. このとき剰余項は

$$R_{2n}(b)=\frac{(-1)^n b^{2n}\sin(b\theta)}{(2n)!}$$

である. $\lim_{n\to\infty}|R_n(b)|=0$ であるので, べき級数展開ができ,

$$\sin b=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}b^k=b-\frac{b^3}{3!}+\frac{b^5}{5!}-\frac{b^7}{7!}+\cdots$$

2 初等関数の漸近展開

初等関数の $a = 0$ の周りでの漸近展開の具体例を紹介する.[1]

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ \ (x \to 0) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \ \ (x \to 0) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \ \ (x \to 0) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n!} + o(x^n) \ \ (x \to 0) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \ \ (x \to 0)
\end{aligned}
$$

3 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1.
$$
\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \ \ (x \to 0)
$$
となることを示せ.

[1] なんでもかんでも綺麗に漸近展開できるとは限らない. 例えば $\tan x$ などの漸近展開の一般項は非常に難しい.