12 曲線の長さ

[定義] $C : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (x(t), y(t))$

が滑らかな曲線とは

(1) $x(t), y(t)$ ともに $[a, b]$ 上 C^1 級関数

(2). 任意の $t \in (a, b)$ について

$(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$

($(x'(t), y'(t))$ を速度ベクトルとよぶ)

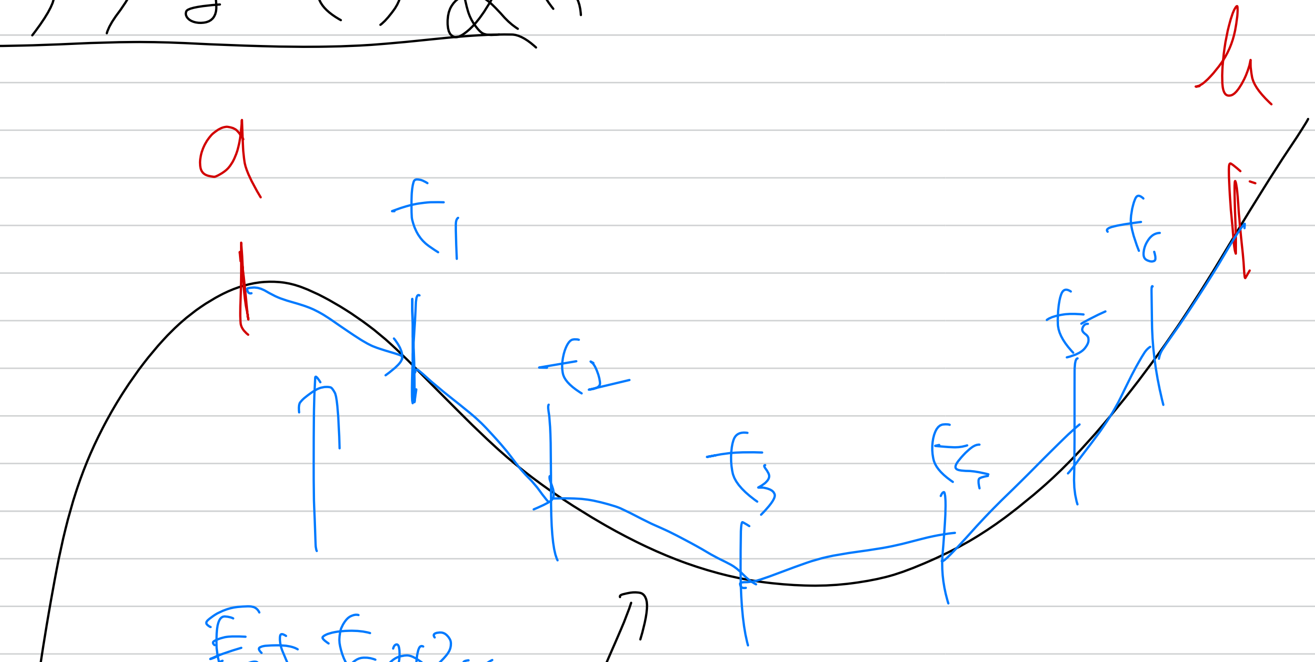
[定義] 曲線の長さ

曲線 C の長さを

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

と定める.

ラフなせつめい



長さをみると.

$$\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}$$

$$\simeq \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x(t_i)\right)^2+\left(\frac{d}{dt}y(t_i)\right)^2}$$

平均値の定理より

sumする.

【定理】 $f(x)$ を $[a,b]$ 上の C^1 級関数とする

このとき $y=f(x)$ のグラフ $\{(t,f(t)) \mid a \leqq t \leqq b\}$

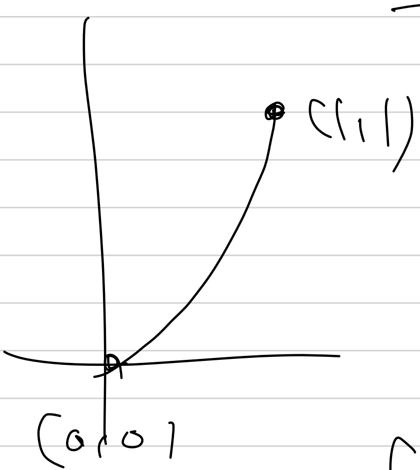
の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad \text{である}$$

【証明】 $x(t)=t,\ y=f(t)$ とすればよい

例 放物線の長さ、

$y=x^2$ $(0\leq x\leq 1)$ のグラフの長さをもとめよ



$(x^2)'=2x$ より

$$\int_0^1\sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$2x=t$

$dx=\frac{1}{2}dt$

$$=\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,\frac{dt}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\left[t\sqrt{t^2+1}+\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5})\right).$$

//

[定理] $[\alpha, \beta]$ 上の C^1 級関数 $f(\theta)$ を用いて、
$C: (x(\theta), y(\theta)) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$
とあらわされているとき
C の長さは $\int_\alpha^\beta \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}\, d\theta$ となる

[証] $\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$
$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$ より

$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$
$= (f'\cos\theta)^2 - 2ff'\cos\theta\sin\theta + (f\sin\theta)^2$
$+ (f'\sin\theta)^2 + 2ff'\cos\theta\sin\theta + (f\cos\theta)^2$
$= (f')^2 + (f)^2$ よりいえる.

例112 アルキメデスのらせん

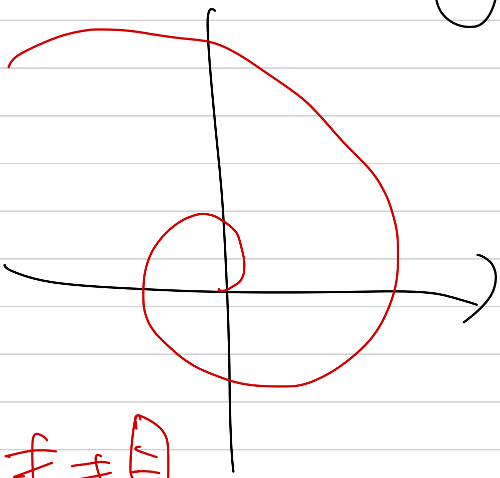
$a>0$ として

$$C : [0,\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\theta \longmapsto (a\theta\cos\theta,\ a\theta\sin\theta)$$

(長さ $= a\theta$)

($r = a\theta$)

の長さを求めよ。



まき貝

こたえ

$f(\theta) = a\theta$ として

$f'(\theta) = a$ より

$$\int_0^\alpha \sqrt{(a\theta)^2 + a^2}\, d\theta$$

$$= a\int_0^\alpha \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta.$$

$$= \frac{a}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2+1} + \log\left|\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right|\right)$$

<u>演習</u> $a, l > 0$ とする．

$f(x) = a\cosh\frac{x}{a} - a$ とする．

グラフ $\{(x, f(x)) \mid 0 \leq x \leq l\}$ の長さを a と l をもちいてあらわせ

$\boxed{こたえ}$ $f'(x) = \frac{a}{a}\sinh\frac{x}{a} = \sinh\frac{x}{a}$ より

$$\int_0^l \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \qquad (\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$$

$$= \int_0^l \sqrt{1+(\sinh\frac{x}{a})^2}\,dx$$

$$= \int_0^l \cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx.$$

$$= \left[a \sinh \frac{x}{a} \right]_0^{l_1}$$

$$= a \sinh \frac{l_1}{a} \,,$$