12 曲線の長さ

[定義] $C: [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto (x(t), y(t))$

が滑らかな曲線とは

(1) $x(t), y(t)$ ともに $[a,b]$ 上 C^1 級関数.

(2) 任意の $t \in (a,b)$ について

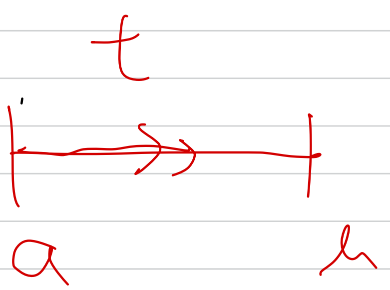
$(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$

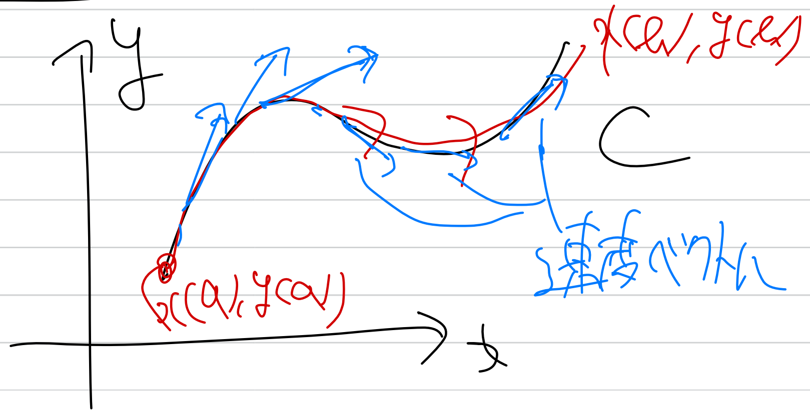
($(x'(t), y'(t))$ を速度ベクトルという)

[定義] 曲線の長さ

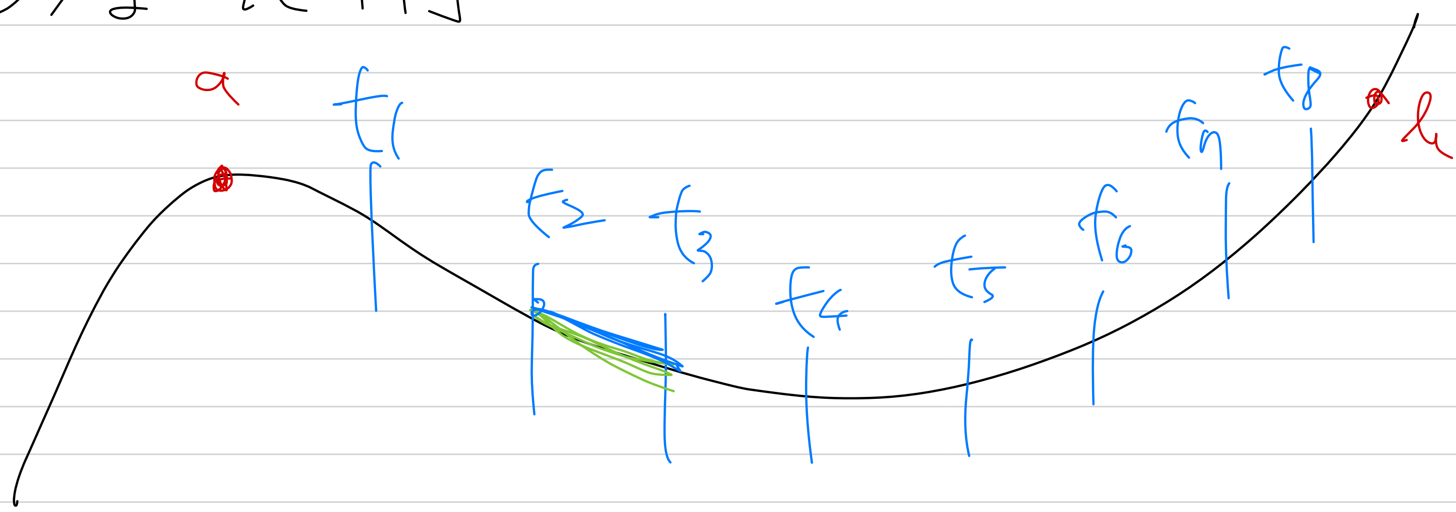
曲線 C の長さを

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$ である





[ラフな説明]



の長さ $\fallingdotseq \sqrt{(x(t_3)-x(t_2))^2+(y(t_3)-y(t_2))^2}$

$\fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{dx(t_2)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t_2)}{dt}\right)^2}$.

[あわせる]

[定理] $f(x)$を$[a,b]$上のC¹級関数とする

$y=f(x)$のグラフ $\{(t,f(t)) \mid a \leq t \leq b\}$

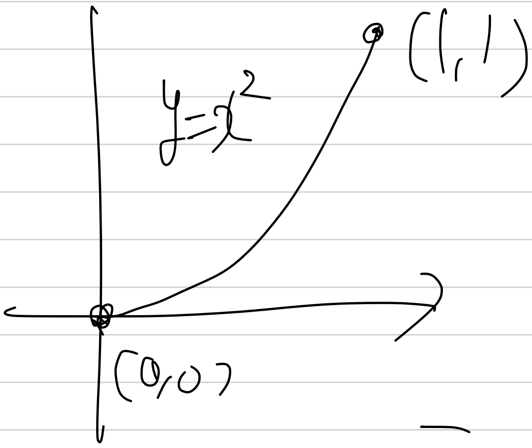
の長さは

$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ である

$\boxed{証}$ $x(t)=t$, $y(t)=f(t)$ とすればよい.

$\boxed{例}$ 放物線の長さ、

$y=x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ のグラフの長さを求めよ



$\boxed{解}$ $(x^2)' = 2x$ より、

$$\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$2x=t$

$$= \int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,\frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[t\sqrt{t^2+1} + \log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \log\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$$ //

[定理] $[\alpha,\beta]$ 上の C^1 級関数 $f(\theta)$ を用いて

$$C : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\theta \longmapsto (f(\theta)\cos\theta,\ f(\theta)\sin\theta)$$

とあらわされているとき

C の長さは $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\,d\theta$ と同じ

$\boxed{\text{証}}$ $x(\theta) = f(\theta)\cos\theta,\ y(\theta) = f(\theta)\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta \quad \text{より}$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$= (f'\cos\theta)^2 - 2f'f\cos\theta\sin\theta + (f\sin\theta)^2$$
$$+ (f'\sin\theta)^2 + 2f'f\sin\theta\cos\theta + (f\cos\theta)^2$$
$$= (f')^2 + (f)^2.$$

より

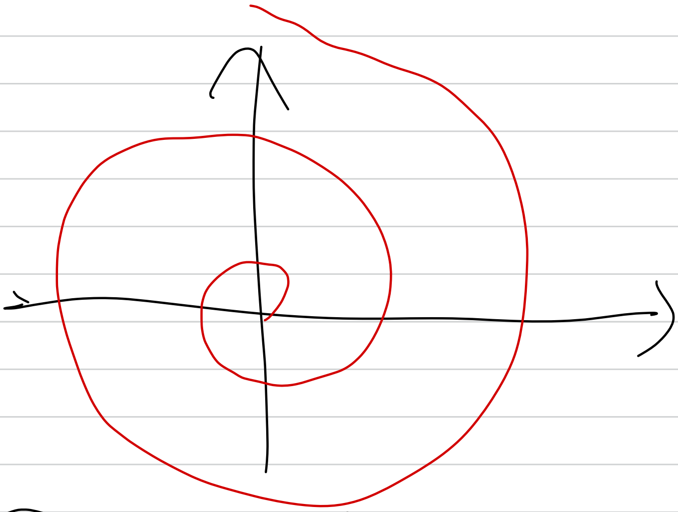
あとは定義からいえた

例 アルキメデスのらせん.

$a, \alpha > 0$ として. $C : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2$

$\theta \mapsto (a\theta\cos\theta,\ a\theta\sin\theta)$

Cの長さを求めよ.



(長さ $r = a\theta$)

解答 $f(\theta) = a\theta$ とおくと $f'(\theta) = a$ //

Cの長さは

$$\int_0^\alpha \sqrt{(a\theta)^2 + a^2}\, d\theta$$

$$= a \int_0^\alpha \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta$$

$$= \frac{a}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2+1} + \log\left|\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right|\right)$$

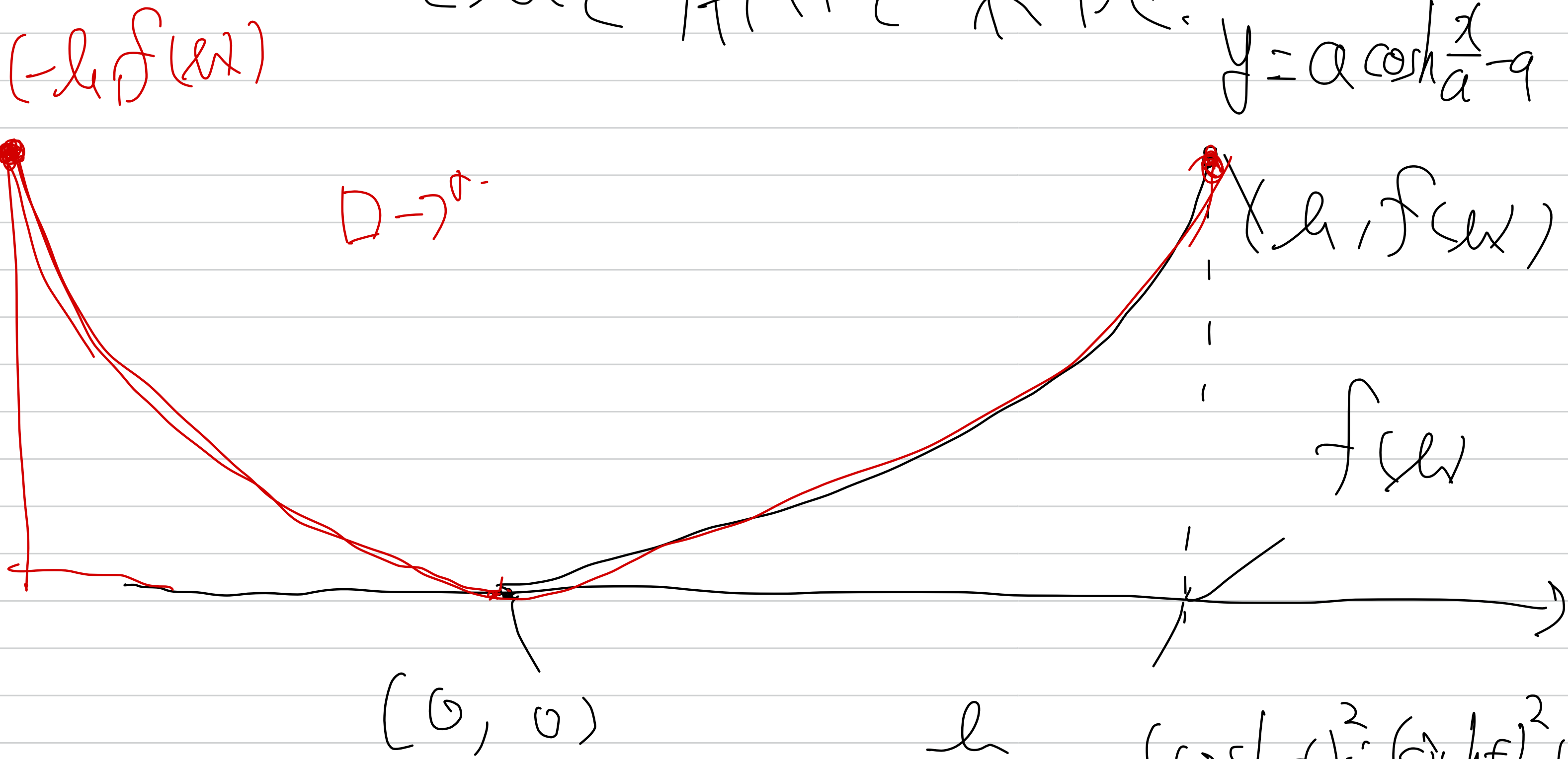
//

演習 $a, l > 0$ とする。

たるんだロープをあらわすかんすう

$$\boxed{f(x) = a\cosh\frac{x}{a} - a}$$ とする

グラフ $\{(x, f(x)) \mid 0 \leq x \leq l\}$ の長さを a と l を用いて表わせ。



$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$$

解答 $f'(x) = \sinh\frac{x}{a}$ より

$$\int_0^l \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^l \sqrt{1+\left(\sinh\frac{x}{a}\right)^2}\,dx.$$

$$= \int_0^l \left(\cosh\frac{x}{a}\right)dx$$

$$= \left[a \sinh \frac{x}{a} \right]_0^{\ell}$$

$$= a \sinh \frac{\ell}{a} \quad //$$

$\boxed{\text{13 14 しつもんなど}}$