1 実数の定義と性質

記法 (Notations)

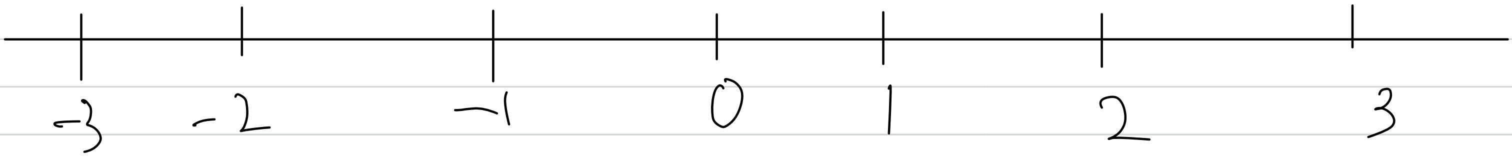
$\mathbb{N}=\{\text{自然数全体}\}=\{1,2,3,4,5,\cdots\}$ ← ペアノの公理

$\mathbb{Z}=\{\text{整数全体}\}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ ← グロタンディークの構成法

$\mathbb{Q}=\{\text{有理数全体}\}=\left\{\frac{m}{n}\ \middle|\ m,n\in\mathbb{Z},\ n\neq0\right\}$ ← 環の局所化

$\mathbb{R}=\{\text{実数全体}\}$ ← $\boxed{\text{あとで定義します}}$ ← 距離空間$\mathbb{Q}$の完備化

感覚的には、$\mathbb{R}$ = 数直線の点



$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{\underbrace{x\in\mathbb{R}}\mid\underbrace{x\notin\mathbb{Q}}\}=\{\text{無理数全体}\}$

(xはRの元(要素)である) (xはQの元ではない)

区間

「$a\in\mathbb{R}$ または $a=-\infty$」

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$ 「$b\in\mathbb{R}$ または $b=+\infty$」

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqq x<b\}$ $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ または $b=+\infty$

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leqq b\}$ $a\in\mathbb{R}$ または $a=-\infty$ $b\in\mathbb{R}$

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqq x\leqq b\}$ $a,b\in\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

(±∞: 実数ではないが 十分大きなもの (小さな)

(一種の記法です))

(便宜上 ざっくりね。

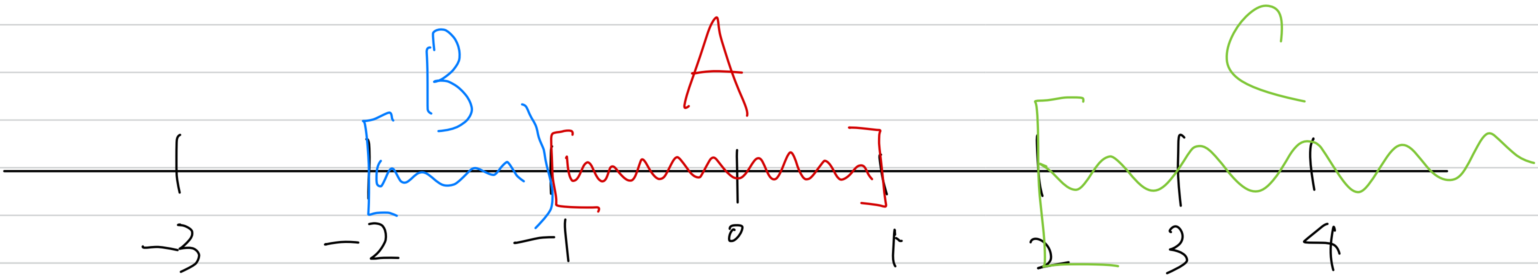
$\frac{1}{\pm\infty}=0$ とする

$(-1)\pm\infty=\mp\infty$

($\frac{\infty}{\infty}$ はていぎしない…))

(a,b) 開区間, $[a,b]$ 閉区間 という。

例. $A=[-1,1]$, $B=[-2,-1)$, $C=[2,+\infty)$



$A\cap B=\phi$ (−1はAの元だが Bの元でない!)

閉区間はAのみ, すべて開区間でない!

[有界集合]

部分集合 $A\subset\mathbb{R}$ が上に有界とは.

ある実数 a があって, 任意の, $x\in A$ について $x\leq a$ なること

($A\subset[-\infty,a]$ と同じ)

(すべての$x\in A$)

Aが下に有界とは. ある実数 a があって.

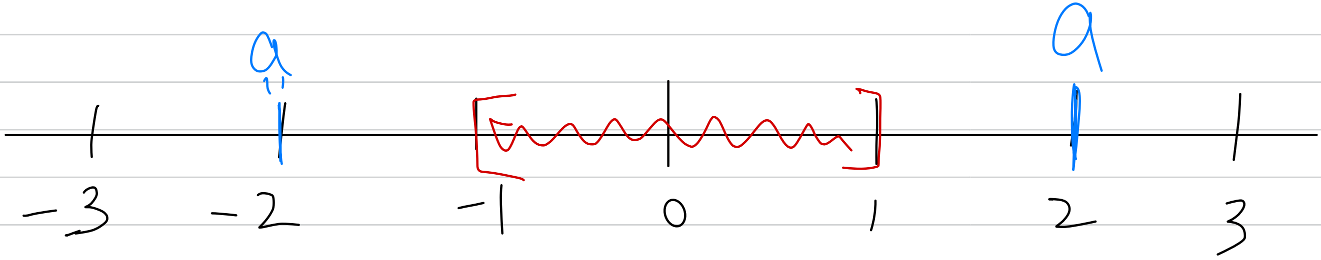
任意の $x\in A$ について $a\leq x$ となること

($A\subset[a,-\infty)$)

Aが有界とは 上にも 下にも有界 となること

(ある $\underset{\substack{\vee\\0}}{a}\in\mathbb{R}$ があって $A\subset[-a,a]$

例1　$A = [-1, 1]$

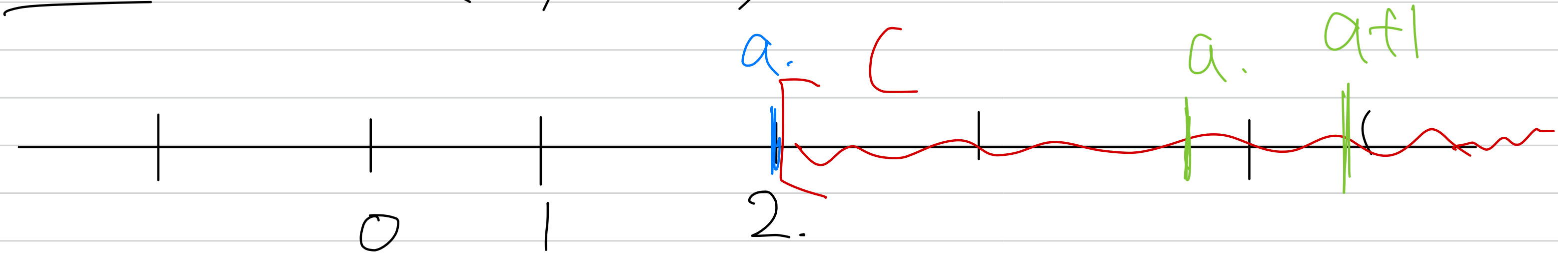


上に有界，$a=2$ ととると すべての $x \in A$ について $x \leqq 2$.

下に有界　$a=-2$ ととると　〃　$-2 \leqq x$.

A は有界.　（ $A \subset [-2,2]$ でもあるから ）

例2　$C = [2, +\infty)$



・下に有界　$a=2$ ととると、すべての $x \in C$ について $2 \leqq x$.

・上に有界ではない！　　なくてもいいかも

（証）もし上に有界なら．$a \in \mathbb{R}$ があって．すべての $x \in C$ について．
$x \leqq a$ となる．

$a+1 \in C$ より　$a+1 \leqq a$ となるが
$1 \leqq 0$ となり 矛盾 となる．

・有界ではない．

[数列]

各自然数nに実数 a_n を対応させたものを
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とかき 数列という.（$\{a_n\}$ とも書く）

- 常に $a_n \in \mathbb{Q}$ のとき 有理数列 という
- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界であるとき 有界数列という
- $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots\cdots$ となるとき 単調増加数列という
- $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots$ となるとき 単調減少数列という

例 $a_n = \frac{1}{n}$ 　有理数列, 有界,
$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots)$ 　単調減少

$a_n = n$ $(1, 2, 3)$ 　有理, 単調増加.

$a_n = (-1)^n\sqrt{2}$. 　有界
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \cdots)$

[数列の極限]

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が極限 $\alpha \in \mathbb{R}$ をもつとは
nを大きくしていくと, a_n が限りなく α に近づくこと.

このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ または $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ とかき
a_n は α に収束するという
a_n が収束しないとき a_n は発散するという

nを大きくしていって a_n が限りなく大きくなるとき $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
〃 　小さくなるとき $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とかく.

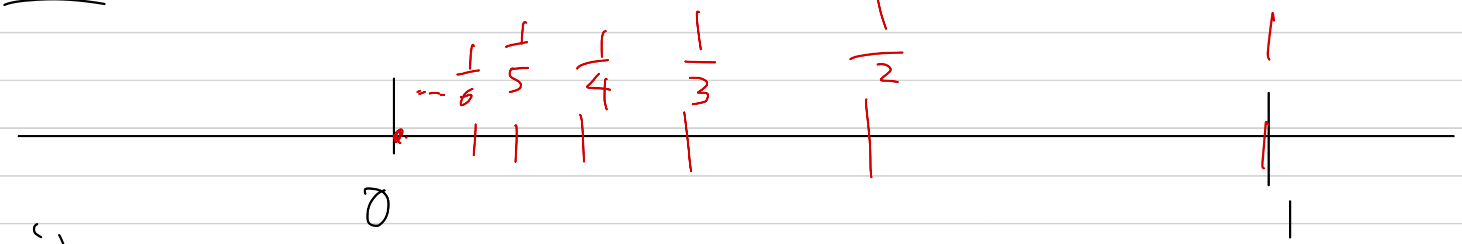
もっと厳格な定義……ε-N論法 (むずかしいのでとばしていいです)

定義 $\{a_n\}$ が実数 α に収束する

$\Longleftrightarrow$ 任意の正の実数 ε について、
(すべての)
ある $N \in \mathbb{N}$ があって、

$N < n$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となること。

例 $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0$



"$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ の証明"

カット

(証) 任意の $\varepsilon > 0$ について、$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ とすると、
($\frac{1}{\varepsilon}$ の切りすて、ガウス記号)

$N < n$ ならば

$$|a_n - \alpha| = \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{N} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ より a_n は 0 に収束する。

なぜこれが必要?? ⇒ 実数 $\mathbb{R}$ を定義できる.

定理 (実数の存在)

$\mathbb{Q}$ を有理数の集合とする. このとき $\mathbb{Q}$ を含む集合 X があって.

① 任意の $x \in X$ について. ある有理数列 $\{a_n\}$ があって.
$a_n \longrightarrow x$.

② X 上のコーシー列は収束する

ここで X 上の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列とは.
任意の $\varepsilon > 0$ についてある $N \in \mathbb{N}$ があって.
$N < n, m$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon$ となること.

この X を $\mathbb{R}$ とかき 実数とよぶ.

-公理- (実数の連続性)

$\mathbb{R}$ 上の上に有界な単調増加数列は収束する

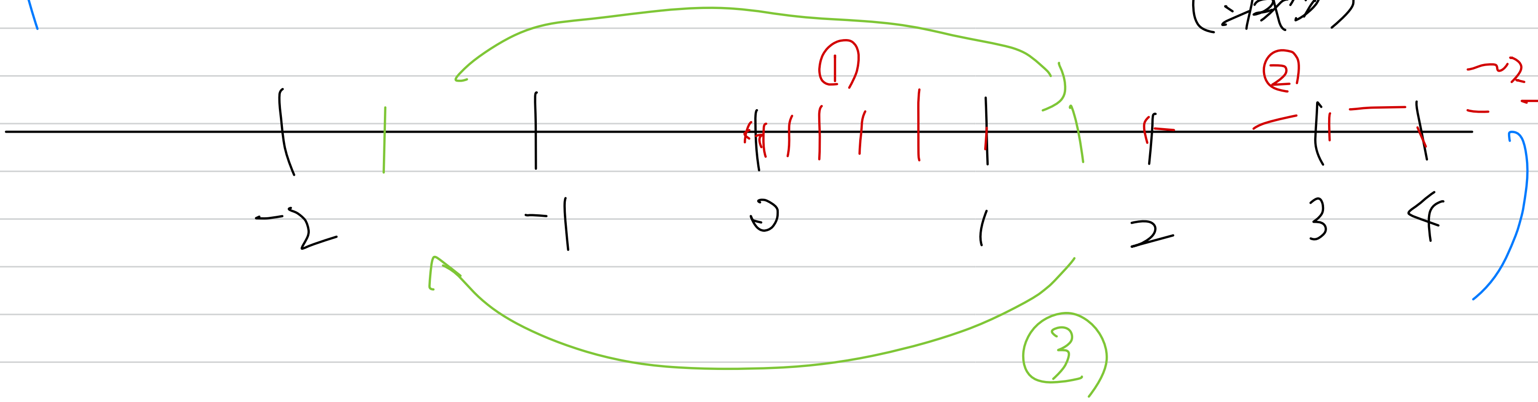
(補足, 定理からこの公理を示すことができます)

(例) ① $a_n = \frac{1}{n}$. 単調減少, 有界 → 収束.
$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

かくにん

② $a_n = n$ 収束しない. 有界でないから.

② $a_n = (-1)^n \sqrt{2}$. 収束しない、単調増加でないから
（減少）



極限の性質

$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \to \pm\infty} b_n = \beta$ とする $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

① $\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

② $\lim_{n \to \infty} (c a_n) = c\alpha$ （$c \in \mathbb{R}$ 定数）

③ $\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = \alpha\beta$

④ $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ （$\beta \neq 0$ のとき）

注意 $\alpha, \beta = \pm\infty$ のときは ようわからん [illegible]

すね

上の性質を使えるときと使えないときがある

使えるとき α 実数, $\beta = \pm\infty$ なら $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ となりok.

使えないとき $\alpha = +\infty$, $\beta = +\infty$ $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ はわからん

(例) $a_n = n$, $b_n = n^2$ なら $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$,

$a_n = n^2$, $b_n = n$ 〃 〃 $= +\infty$

最大最小

・$A \subset \mathbb{R}$ について、$m \in A$ が A の最大とは任意の $a \in A$ に対して $a \leq m$ となること。$m = \max(A)$ とか

・$A \subset \mathbb{R}$ について $m \in A$ が A の最小とは任意の $a \in A$ について $m \leqq a$ となるとき $m = \min(A)$ とかく。

例 $A = (0, 1]$.

$\max(A) = 1$. $\min(A)$ は存在しない

(0は A の元ではない!)

上限, 下限 ← "ほぼ max, min"

$A \subset \mathbb{R}$ について、A が上に有界であるとき

$\sup A = \min\{x \in \mathbb{R} \mid 任意の\ a \in A\ について、a \leqq x\ となる\}$

と定義する。A が上に有界でないとき $\sup A = +\infty$ とする。

A が下に有界のとき

$\inf A = \max\{x \in \mathbb{R} \mid 任意の\ a \in A\ について、x \leqq a\ となる\}$

と定義し、A が下に有界でないとき $\inf A = -\infty$ とする。

補足 sup inf はつねに存在する！

(だから max, min より数学的につかいやすい。

感覚的には $\max \fallingdotseq \sup$, $\min \fallingdotseq \inf$

例) $A = (0, 1]$ のとき

$\sup A = 1 = \max A$, $\inf A = 0$

$\min A$ は存在しない

[演習] ① $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする。

A の最大, 最小, 上限, 下限をしらべよ。

また A は有界であることを示せ。

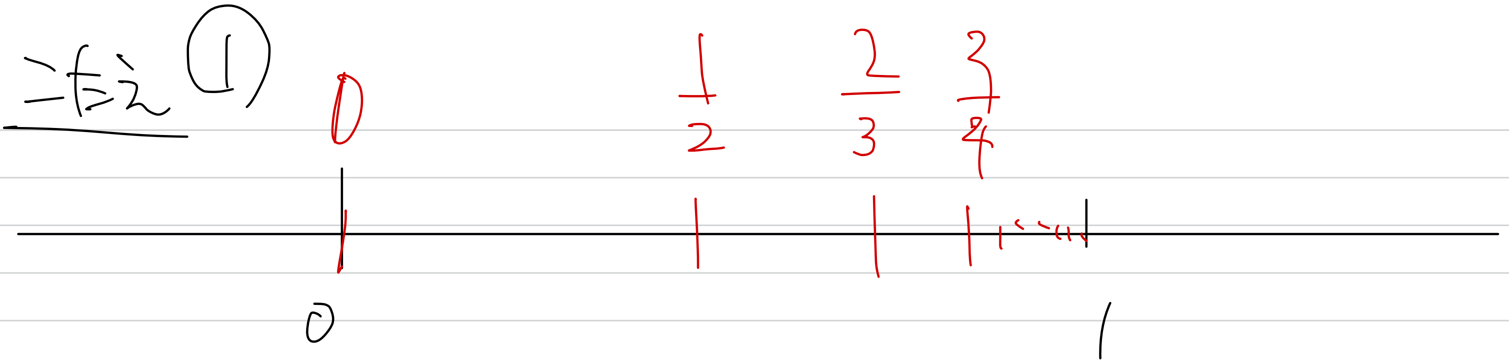
② $a_1 = 10$,

$a_{n+1} = 10\sqrt{a_n}$ とする。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界、単調増加であることを示せ。

a_n の収束値をもとめよ。

こたえ ①



max(A) なし (1 はAにはふくまれない)

sup(A) = 1

min(A) = 0

inf(A) = 0

$a=1$ とおくと. $A \subset [-1,1]$ より 有界

② $a_1 = 10$, $a_2 = 10\sqrt{10} = 10^1 \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{1+\frac{1}{2}}$

$a_3 = 10\sqrt{a_2} = 10^1 \cdot 10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ より

$$a_n = 10^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}$$ となる.

(厳密にするなら数学的帰納法)

よって. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 10^{\frac{1}{2^n}} \geqq 1$ より

$a_{n+1} \geqq a_n \geqq a_{n-1} \geqq \cdots \geqq a_1$ となり

単調増加である.

また $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \leqq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}} = 2$ より

$a_n \leqq 10^2 = 100$ より有界である.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 10^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 10^{2-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(10^{\frac{-1}{2^{n-1}}}\right)\cdot 100$$

$$= 100$$

$$S = 1+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$-)\ \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n}}$$

$$\frac{1}{2}S = 1-\frac{1}{2^{n}}$$

$$S = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$$