4 平均値の定理と関数の極限値計算

[定義] 極値

区間 I 上の関数 $f(x)$ が c で極大(極小)とは

c をふくむ開区間 J があって、

$x \neq c$ かつ $x \in J$ ならば $f(x) < f(c)$ となること

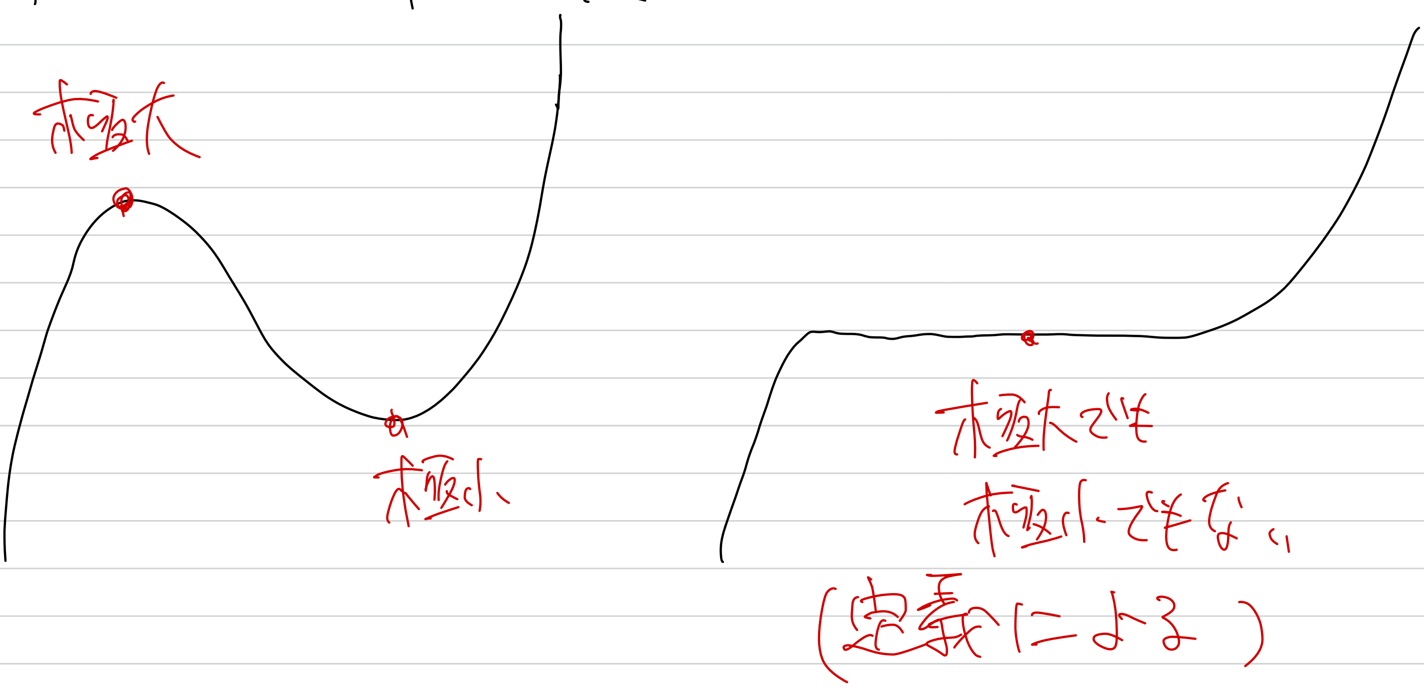
($f(x) > f(c)$)

このとき $f(x)$ は c で極大(極小)といい

極大では関係[illegible] とかに[illegible]

$f(c)$ を $f(x)$ の極大値(極小値)とよぶ

極大値・極小値をあわせて極値という。



最大なら極大だが極大でも最大ではない

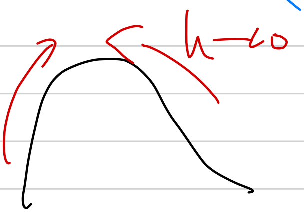
極大 = 局所的な最大

[定理] $f(x)$ を $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能とする

$f(x)$ が $c\in(a,b)$ で極値をもてば $f'(c)=0$.

[証] (c で極大とする)

$$f'(c)=\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$ である



$h>0$ のとき $f(c+h)-f(c)<0$ より

$$\therefore\ \frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0.$$

よって $$f'(c)=\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqq 0.$$

$h<0$ として同じことして $f'(c)\geqq 0$ $\therefore f'(c)=0$ //

[注意] $f'(c)=0$ でも c は極値とは限らない

(例) $f(x)=1$ ($f'(x)=0$)

それでも $f'(x)=0$ の点をもとめれば

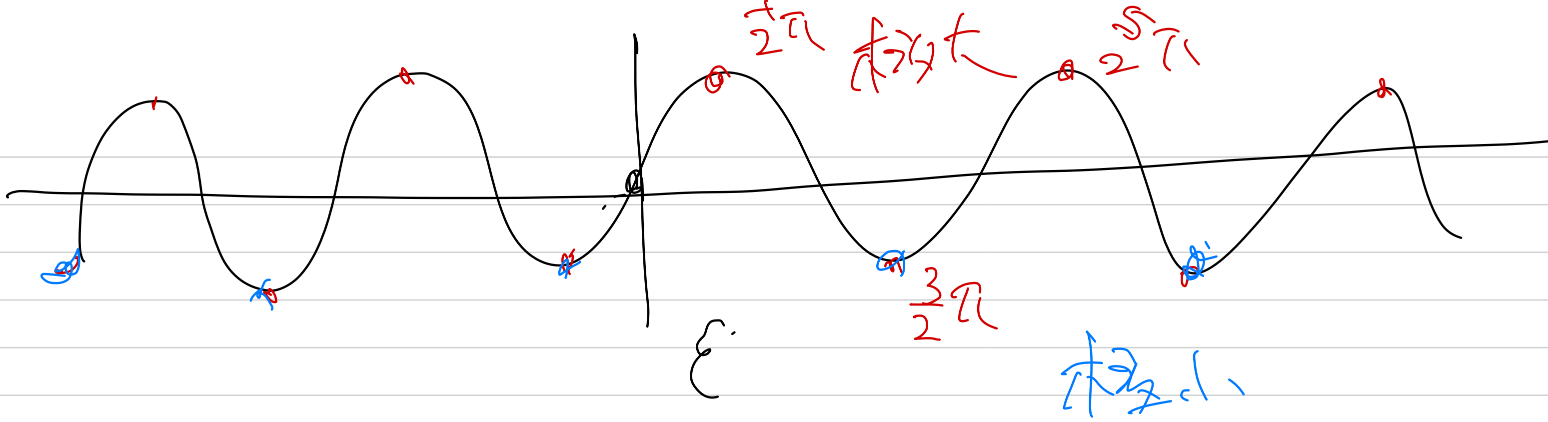
極値のこう補はわかる

(例)

$f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$.

$f'(x)=0$ なる点は $x=2n\pi+\frac{1}{2}\pi$

これらは極値



[まぁ みんな よかった かもな!

[定理] $f(x)$ は $[a,b]$ 上連続 (a,b) 上微分可能とする

① [ロルの定理]

$f(a)=f(b)$ ならば $f'(c)=0$ なる $c\in(a,b)$ がある

② [平均値の定理]

$c\in(a,b)$ があって、$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ となる

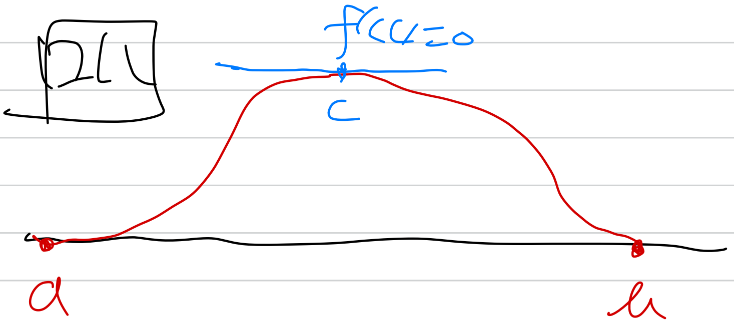
③ [コーシーの平均値の定理]

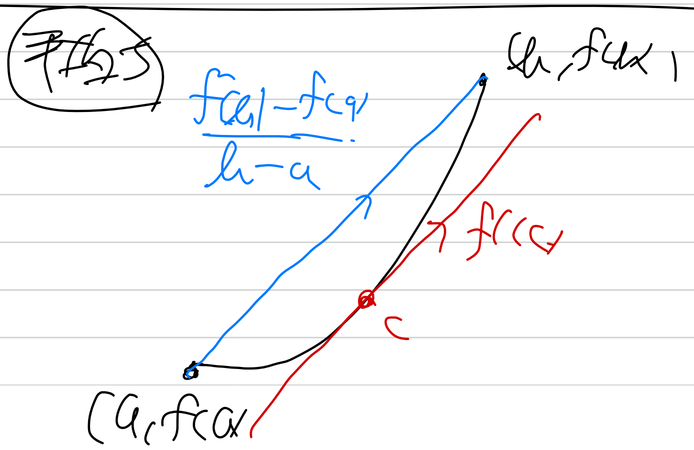
$g(a)\neq g(b)$ かつ $g'(x)\neq 0$ (すべての $x\in(a,b)$) ならば

ある $c\in(a,b)$ で

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となるものがある





[証明] ① fが定数関数のときにはいかなる$c\in(a,b)$について$f'(c)=0$.
そうでないとき
fは$[a,b]$上連続より、$\max(f)$, $\min(f)$がある

$\max(f)=\min(f)=f(a)$ ならfは定数より矛盾

よって $\max(f)\neq f(a)$ または $\min(f)\neq f(a)$

つまり ある$c\in(a,b)$があって$f(c)$は最大値 or 最小値.

つまり 極値 より $f'(c)=0$ //

② $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$ とおく.

$F(a)=f(a)$.

$F(b)=f(b)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a)$.

よってロルの定理より $F'(c)=0$なる$c\in(a,b)$がある

$f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ よりいえた

③ $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

とおいて②と同じことをする。

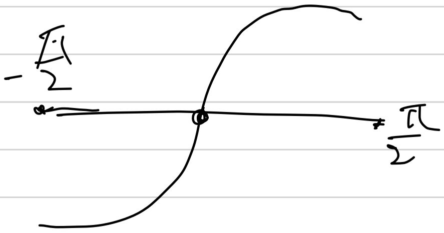
[応用] 関数の増減が微分でわかる!
(増減表)

[定理] f が $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能とする

① すべての $x\in(a,b)$ について $f'(x)=0$ ならば f は定数関数

② すべての $x\in(a,b)$ について $f'(x)>0$ ならば ($f'(x)<0$.)
f は単調増加. (単調減少)

[例] $(\sin x)' = \cos x$ より
$\sin x$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上単調増加.



[証] $x, y\in(a,b)$, $x<y$ とすると, 平均値の定理より
ある $z\in(a,b)$ があって $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z)$ となる

① $f'(z)=0$ より, $f(y)-f(x)=0$ ∴ f は定数関数

② $f'(z)>0$ より, $f(y)-f(x)>0$
よって $x<y$ なら $f(x)<f(y)$ より単調増加.

応用2 ロピタルの定理

定理 $f(x), g(x)$ が点 a の近くで定義されて微分可能とする

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ かつ

$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在し $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(例1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x}$ について.

$\lim_{x \to 0} (e^{2x} - \cos x) = 1 - 1 = 0$.

$\lim_{x \to 0} x = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} - \sin x}{1} = 2$. よりロピタルから

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x} = 2$.

[注意] 仮定をみたしてないものにはつかえない.

(例1) ① $\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{x}$ にはつかえない ($\lim_{x \to 1} g(x) \neq 0$ より)

② $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ にもつかえない

($\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1+\cos x \xrightarrow[x\to\infty]{} ??$ 収束しない)

[証明] $I=(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ($\varepsilon>0$ 十分小さな実数) とおく

$f(a)=g(a)=0$ とすると

f, g [$a-\varepsilon, a+\varepsilon$] 上連続, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 上微分可能

よって コーシーの平均値の定理より

すべての $x\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ について. ある a と x の間の実数 c があって

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ となる.

よって

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\boxed{c\to a}}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$ //

[演習] $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ をもとめよ.

[こたえ]

$x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$x-\sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$$\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \frac{1-\cos x}{3x^2} \xrightarrow[x\to 0]{}$$ ~~わからん (手づまり)~~ $\frac{1}{6}$

と思いきや…

$$3x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$1 - \cos x \longrightarrow 0$$

$$\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \frac{\sin x}{6x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{6}$$

ロピタルにより、

よって、 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

//