第 5 回. 高次導関数とテイラーの定理 (三宅先生の本, 2.3 と 2.4 の内容)

岩井雅崇 2021/05/18

1　高次導関数

定義 1 (高次導関数の定義)**.** $f(x)$ を区間 I 上の微分可能な関数とする. $f'(x)$ が I 上で微分可能であるとき, f は 2 回微分可能であるといい,

$$f''(x) = (f'(x))'$$

としてこれを 2 次の導関数と呼ぶ. $f''(x)$ は $f^{(2)}(x)$ とも書く.

同様に $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能であるとき, f は n 回微分可能であるといい, n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を $(f^{(n-1)}(x))'$ として定める. $f^{(n)}(x)$ は $\frac{d^n f}{dx^n}$ とも書く.

例 2.
- $f(x) = e^x$ とすると, $f^{(n)}(x) = e^x$ である.
- $f(x) = \sin x$ とすると,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & (n = 2m) \\ (-1)^m \cos x & (n = 2m+1) \end{cases} \quad \text{である.}$$

定義 3 (C^n 級関数)**.** $f(x)$ を区間 I 上の関数とする.

- $f(x)$ が n 回微分可能であり, $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき, f は C^n 級関数であるという.
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について f が C^n 級であるとき, f を C^∞ 級関数であるという.

例 4. みんながよく知っている関数は (だいたい)C^∞ 級関数. つまり $x^2, \sin x, \cos x, e^x$ などは C^∞ 級関数である.

2　テイラーの定理とその応用

定理 5 (テイラーの定理 1)**.** $f(x)$ が開区間 I 上の C^2 級関数とする. $a < b$ なる $a, b \in I$ について

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する.

例 6. $f(x)=e^x$ とし $a=0$ かつ b を正の実数とする．このときある $c\in(0,b)$ があって

$$e^b=f(0)+f'(0)b+\frac{f''(c)}{2}b^2=1+b+\frac{e^c}{2}b^2$$

となる．$e^c\geqq 1$ であるため，

$$e^b\geqq 1+b+\frac{1}{2}b^2 \text{ となる.}$$

定理 7 (極値判定法)**.** $f(x)$ が点 a の周りで定義された C^2 級関数とする．

- $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ なら $f(x)$ は $x=a$ で極小.
- $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ なら $f(x)$ は $x=a$ で極大.

定理 8 (テイラーの定理 2)**.** $f(x)$ が開区間 I 上の C^n 級関数とする．$a<b$ なる $a,b\in I$ について

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる $c\in(a,b)$ が存在する.

例 9. $f(x)=e^x$ とし $a=0$ かつ b を正の実数とする．このときある $c\in(0,b)$ があって

$$\begin{aligned}e^b&=f(0)+f'(0)b+\frac{f''(0)}{2!}b^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}b^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}b^n\\&=1+b+\frac{1}{2!}b^2+\frac{1}{3!}b^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}b^{n-1}+\frac{e^c}{n!}b^n\end{aligned}$$

となる．$e^c\geqq 1$ であるため，

$$e^b\geqq 1+b+\frac{1}{2!}b^2+\frac{1}{3!}b^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}b^{n-1}+\frac{1}{n!}b^n \text{ となる.}$$

定理 10 (有限テイラー展開)**.** $f(x)$ が開区間 I 上の C^n 級関数とする．$a\in I$ を固定する．任意の $x\in I$ について，ある $\theta\in(0,1)$ があって

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\\&\quad\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

となる．右辺を $x=a$ における有限テーラー展開と呼び，$R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を

剰余項と呼ぶ. 特に $a = 0$ のとき, 有限マクローリン展開と呼ぶ.

3 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. 任意の $x \in \mathbb{R}$ についてある $\theta \in (0,1)$ があって

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n}\sin(\theta x)}{2n!}$$

   となることを示せ.