第 11 回. 広義積分 (三宅先生の本, 3.3 の内容)

岩井雅崇 2021/06/29

1 広義積分

定義 1 (広義積分)**.** a を実数とし, b は実数または $b = +\infty$ とする. $f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする. 左極限 $\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)dx$ が存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束するといい

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)dx \text{ とする.}$$

この積分を広義積分という. 極限が存在しないときは, 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は発散するという.

例 2.

- $\int_1^\infty x^p dx$ は $p < -1$ のとき収束し, $p \geqq -1$ のとき発散する.
- $\int_0^1 x^p dx$ は $p > -1$ のとき収束し, $p \leqq -1$ のとき発散する.

定理 3. $f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする. $[a, b)$ 上の連続関数 $g(x)$ があって, $[a, b)$ 上で $|f(x)| \leqq g(x)$ かつ広義積分 $\int_a^b g(x)dx$ が収束すると仮定する. このとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ もまた収束する.

定理 4. $f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする. $[a, b)$ 上の連続関数 $g(x)$ があって, $[a, b)$ 上で $0 \leqq g(x) \leqq f(x)$ かつ広義積分 $\int_a^b g(x)dx$ が発散すると仮定する. このとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ もまた発散する.

例 5. 広義積分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$ は収束する. これは $[0, 1)$ 上で $|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}| \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ かつ広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ が収束するからである.

例 6. 広義積分 $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}dx$ は発散する. これは $[2, \infty)$ 上で $0 \leqq x^{-\frac{2}{3}} \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$ かつ広義積分 $\int_2^\infty x^{-\frac{2}{3}}dx$ が発散するからである.

例 7. 実数 $s > 0$ について, 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.
(証.) $\lim_{x\to\infty}(e^{-x}x^{s-1})x^2 = \lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{s+1} = 0$ より, ある $c > 0$ があって, $[c + \infty)$ 上で $e^{-x}x^{s-1} \leqq x^{-2}$ である. 広義積分 $\int_c^\infty x^{-2}dx$ は収束するため, 広義積分 $\int_c^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ も収束する.

一方 $(0, c]$ 上で $e^{-x}x^{s-1} \leqq x^{s-1}$ であり, $s - 1 > -1$ から広義積分 $\int_0^c x^{s-1}dx$ は収束するため広義積分 $\int_0^c e^{-x}x^{s-1}dx$ も収束する.

以上より広義積分 $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx = \int_0^c e^{-x}x^{s-1}dx + \int_c^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.

2　演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

p を実数とし $f(x) = x^p \log x$ とする.

1. $p < -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ は収束することを示せ.
2. $p \geqq -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ は発散することを示せ.