第 2 回. 連続関数 (三宅先生の本, 1.2 の内容)

岩井雅崇 2021/04/20

1 関数の定義と性質

定義 1. A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. 任意の $x \in A$ について, 実数 $f(x)$ がただ一つ定まるとき, $f(x)$ を A 上の関数といい

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \text{ と書く.}$$

以下 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ とする. 数列のときと同様に, 関数に関しても有界などが定義できる.

- f が有界関数であるとは, $f(A)$ が有開集合であること. つまりある $M > 0$ があって, 任意の $x \in A$ について $|f(x)| \leqq M$ であること.
- $\max_{x\in A}(f(x)) = \max(f(A))$ を $f(x)$ の A での最大値という.
- $\min_{x\in A}(f(x)) = \min(f(A))$ を $f(x)$ の A での最小値という.
- $\sup_{x\in A}(f(x)) = \sup(f(A))$ を $f(x)$ の A での上限という.
- $\inf_{x\in A}(f(x)) = \inf(f(A))$ を $f(x)$ の A での下限という.

例 2.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \pm x^2 \end{array}$$

は $\mathbb{R}$ 上の関数ではない. $f(2)$ がただ一つに定まらないからである.

例 3.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

は $\mathbb{R}$ 上の関数. $\max_{x\in\mathbb{R}}(f(x))$ は存在しない. $\sup_{x\in\mathbb{R}}(f(x)) = +\infty$, $\min_{x\in\mathbb{R}}(f(x)) = \inf_{x\in\mathbb{R}}(f(x)) = 0$ である. 有界関数ではない.

例 4.

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

は $[-1,1]$ 上の関数. $\max_{x\in[-1,1]}(f(x)) = \sup_{x\in[-1,1]}(f(x)) = 1$, $\min_{x\in[-1,1]}(f(x)) = \inf_{x\in[-1,1]}(f(x)) = 0$ である. 有界関数である.

2 関数の極限と連続性

定義 5 (関数の極限)**.** $a \in \mathbb{R}$ とし $f(x)$ を a の周りで定義された関数とする. $x \to a$ のとき, $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは $x \neq \alpha$ を満たしながら x を a に近づけるとき, $f(x)$ が限りなく α に近づくこと. このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \text{ または } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \alpha \text{ と書く.}$$

数列のときと同様にして, $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ や $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ も定める. [1]

定義 6 (関数の極限)**.** $a \in \mathbb{R}$ とし $f(x)$ を a の周りで定義された関数とする.
$\alpha \in \mathbb{R}$ が $f(x)$ の点 a のおける右極限とは, x を a の右側から a に近づけるとき, $f(x)$ が限りなく α に近づくこと. このとき

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha \text{ と書く.}$$

同様に a の左側から近づけた極限を左極限といい,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \text{ と書く.}$$

例 7.

$$\begin{array}{cccc} f: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

について, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

例 8.

$$\begin{array}{cccc} f: & (-\infty,0) \cup (0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

について, $\lim_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$ であり $\lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$ である. [2]

命題 9 (極限の性質)**.** $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$, $c \in \mathbb{R}$ とするとき, 以下が成り立つ.

- $\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$
- $\lim_{x \to a}(cf(x)) = c\alpha$
- $\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = \alpha\beta$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$ のとき.)

[1]関数の極限に関しても ϵ-δ 論法を用いて厳密に定義できる. 追加資料で詳しく説明した.
[2]$\lim_{x \to 0-0} f(x)$ を $\lim_{x \to -0} f(x)$ とも書きます. +のときも同じです.

定義 10 (連続の定義)**.** $a \in \mathbb{R}$ とし $f(x)$ を a の周りで定義された関数とする.
$\underline{f(x) \text{ が } x = a \text{ で連続}}$とは,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ となること.}$$

$f(x)$ を区間 I 上の関数とする. $\underline{f(x) \text{ が } I \text{ 上で連続}}$とは, 任意の $a \in I$ に関して $f(x)$ が a で連続となること.

例 11. みんながよく知っている関数は (だいたい) 連続関数. つまり $x^2, \sin x, \cos x, e^x$ などは連続関数である.

例 12. $[-1, 1]$ 上の関数 $f(x)$ を以下で定める.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき, $f(x)$ は $x = 0$ で連続ではない.

命題 13. $f(x), g(x)$ 共に $x = a$ で連続ならば, $f(x) \pm g(x)$, $cf(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$(ただし $g(a) \neq 0$) などは $x = a$ で連続.

定理 14. $y = f(x)$ が $x = a$ で連続であり, $z = g(y)$ が $y = f(a)$ で連続ならば, $z = g(f(x))$ は $x = a$ で連続.

3 連続関数に関する定理

定理 15 (最大最小の存在定理)**.** $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上で連続ならば, $f(x)$ は $[a, b]$ 上で最大値, 最小値を持つ.

例 16.

$$\begin{array}{cccc} f: & [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

は $[-1, 1]$ 上の連続関数. 最大値は 1, 最小値は 0.

例 17.

$$\begin{array}{cccc} f: & (-1, 1) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

は $(-1, 1)$ 上の連続関数. しかし, 最大値は存在しない.

例 **18.** $[-1,1]$ 上の関数 $f(x)$ を以下で定める.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

このとき, $f(x)$ は $x=0$ で連続ではない. 最大値は存在しない.

定理 **19** (中間値の定理)**.** $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とする. $f(a)<f(b)$ ならば, 任意の $\alpha\in[f(a),f(b)]$ について, ある $c\in[a,b]$ があって $f(c)=\alpha$ となる.

4 逆関数

定義 **20** (単調増加・単調減少)**.** $f(x)$ を区間 I 上の関数とする. $x<y$ ならば $f(x)<f(y)$ であるとき, f は I 上で単調増加という. (単調減少に関しても同様に定める.)

命題 **21** (単調増加の判定法)**.** $f(x)$ を $[a,b]$ 上で連続, (a,b) 上で微分可能な関数とする. (a,b) 上 $f'(x)>0$ ならば $f(x)$ は $[a,b]$ 上で単調増加である. (単調減少に関しても同様.)

[3]

定義 **22** (逆関数)**.** $f(x)$ を区間 I 上の関数とし, $g(x)$ を区間 J 上の関数とする. $f(I)=J, g(J)=I$ であり, $y=f(x)$ であることが $x=g(y)$ であることと同値であるとき, g を f の逆関数といい, $g=f^{-1}$ と書く. このとき

$$f^{-1}(f(x))=x \text{ かつ, } f(f^{-1}(y))=y \text{ である.}$$

例 **23.**

$$\begin{array}{cccc} f: & [0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} g: & [0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

とすると $f^{-1}=g$ である.

定理 **24** (逆関数定理)**.** $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続な単調増加関数とする. このとき $[f(a),f(b)]$ 上連続な f の逆関数が存在する.

5 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

[3]微分可能に関しては第 3 回授業で, この命題の証明は第 4 回の授業で行います.

1. $[-1,1]$ 上の関数 $f(x)$ を以下で定める.

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$f(x)$ は $[-1,1]$ 上で連続であることを示せ.

2. 厚さが均一なお好み焼きは, 包丁を真っ直ぐに一回入れることで二等分にできることを示せ.
(ただし具材等に関して細かいことは考えないでよく, ある種の連続性を仮定して良い.)