4 平均値の定理と関数の極限値計算

[定義] 極値

区間 I 上の関数 $f(x)$ が $c \in I$ で極大（極小）とは、

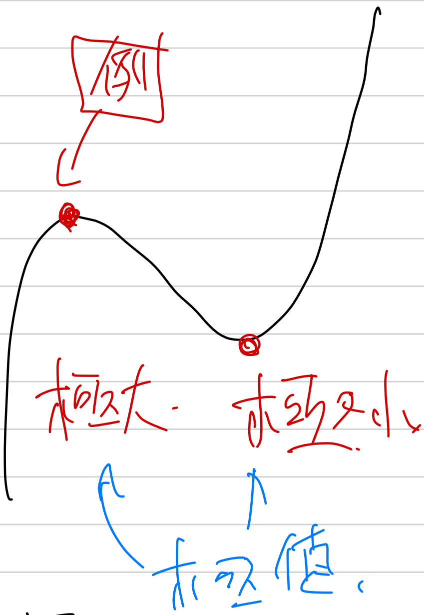
c を含む開区間 J があって、

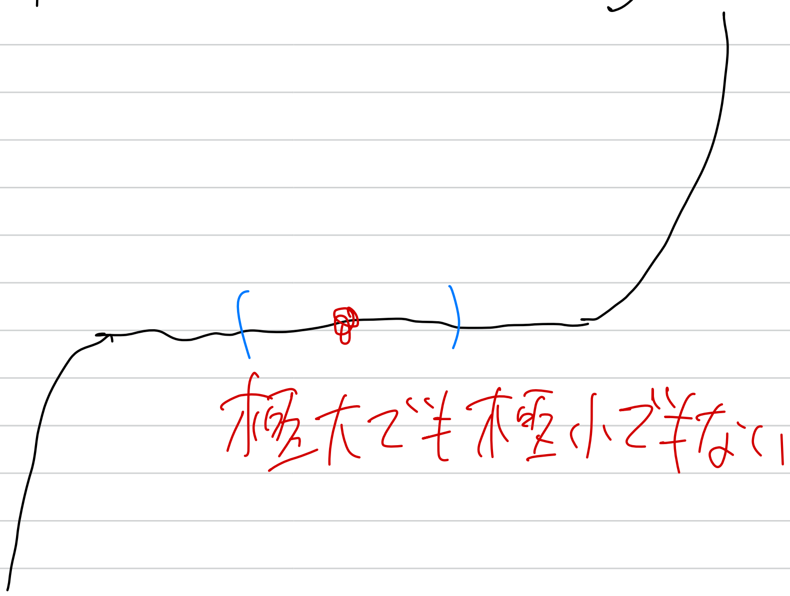
$x \neq c$ かつ $x \in J$ ならば $f(x) < f(c)$ （$f(x) > f(c)$） となること

このとき $f(x)$ は c で極大（極小）といい

$f(c)$ を $f(x)$ の極大値（極小値）という。

極大値、極小値をあわせて、極値という



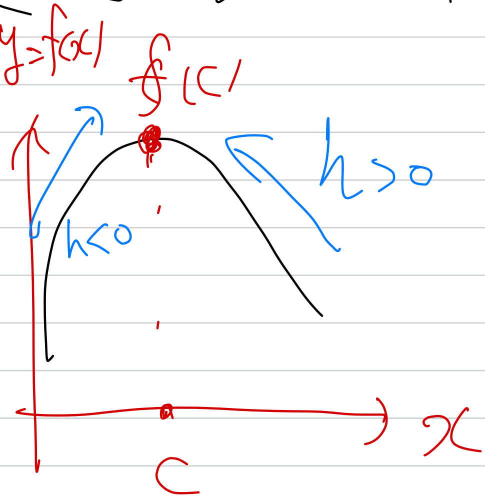


・最大ならば極大，極大であっても最大ではない

極大 ＝ "局所的な最大"

[定理] $f(x)$を$[a,b]$上連続, (a,b)上微分可能と
$f(x)$が $c\in(a,b)$ で極値をもてば, $f'(c)=0$。

[証] $h>0$ とすると, h が十分小さければ



$$f(c+h)-f(c)<0 \quad \text{である.}$$

(極値の定義)

よって $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$ より

$$\lim_{h\to 0+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqq 0.$$

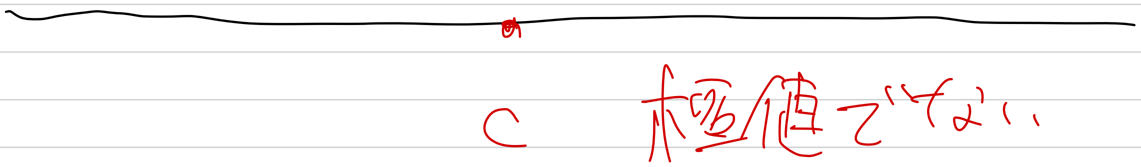
同様にして $h<0$ について同じことをすると

$$\lim_{h\to 0-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqq 0.$$

よって $f'(c)$は存在し $f'(c)=0$.

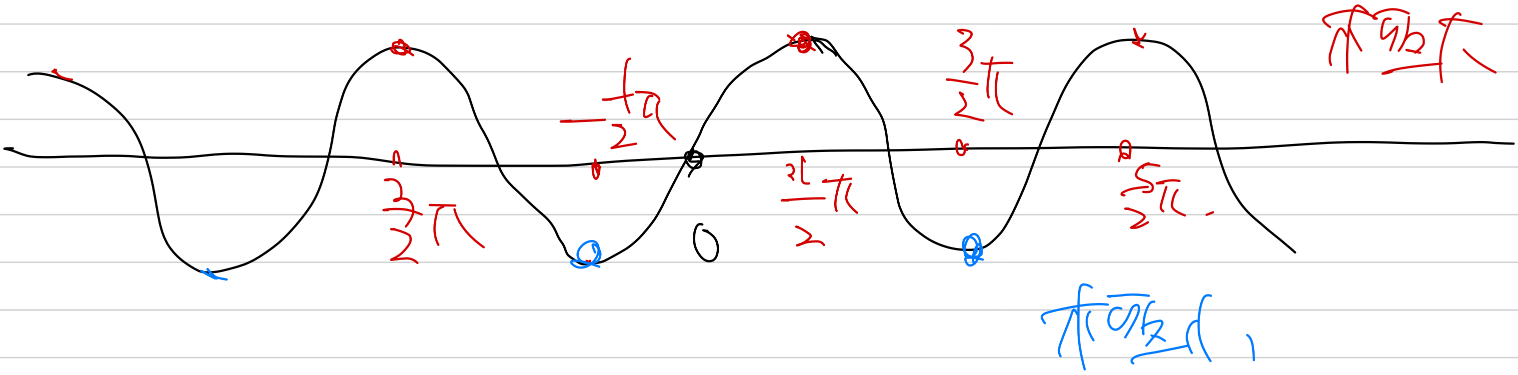
[注意] $f'(c)=0$ でも極値とはかぎらない

[例] $f(x)=1$. ($f'(x)=0$)



おおむね. $f'(x)=0$ の点は
極値の候補となる!

[例] $f(x)=\sin x$,
$f'(x)=0$ の点は. $f'(x)=\cos x$ より
$x=n\pi+\frac{1}{2}\pi.\quad (n\in\mathbb{Z})$



[定理] $f(x), g(x)$ を $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能な関数とする.

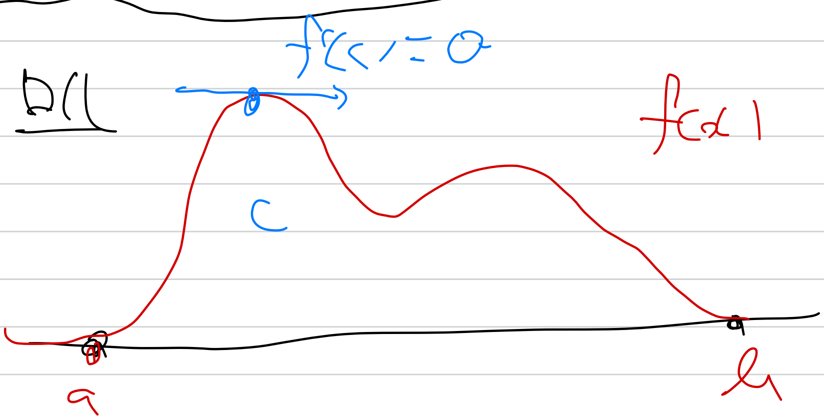
① [ロルの定理]
$f(a)=f(b)$ ならば $f'(c)=0$ なる $c \in (a,b)$ がある.

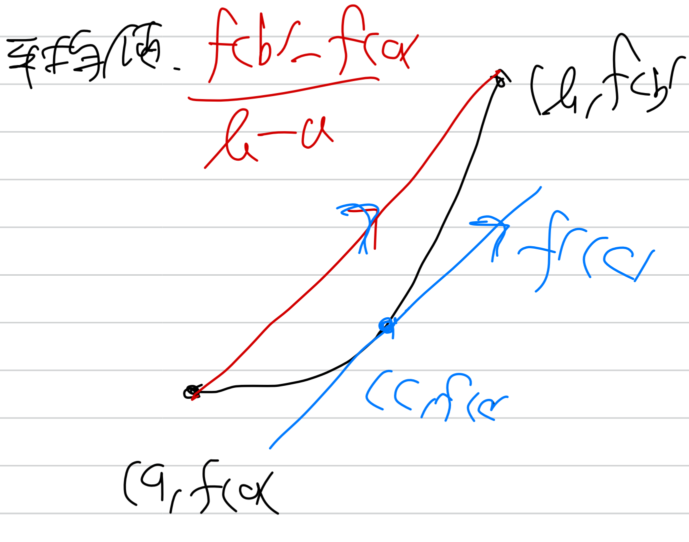
② [平均値の定理]
$c \in (a,b)$ があって, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ となる

③ [コーシーの平均値の定理]
$g(a) \neq g(b)$ かつ 任意の $x \in (a,b)$ について,
$g'(x) \neq 0$ ならば

あるc $\in (a,b)$ があって.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ となる.





[証] ① fは$[a,b]$で連続より最大値と最小値をもつ.

$\max(f)=\min(f)$ なら fは定数関数より $c=\frac{a+b}{2}$ とすればよい

$\max(f)\neq\min(f)$ とする. $\max(f)\neq f(a)$ なら
なる $c\in(a,b)$ があって, $\max(f)=f(c)$ となる.
($c\neq b$である, $f(a)=f(b)$より)

よって $f'(c)=0$ より いえた. $\min(f)\neq f(a)$でも同じ
(c 最大 $\Rightarrow$ 極大 $\Rightarrow f'(c)=0$)

② $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ とおくと

$F(a)=f(a)$

$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a)$

よってロルの定理より $F'(c)=0$ なる $c\in(a,b)$がある.

$F'(c)=0$より $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

③ $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

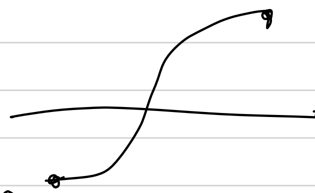
として②と同じ議論をする.

【応用】関数の増減が微分でわかる

【定理】fが$[a,b]$上連続，(a,b)上微分可能とする．

① 任意の$x\in(a,b)$について，$f'(x)=0$ならばfは定数関数．

② 任意の$x\in(a,b)$について，$f'(x)>0$ならば
fは単調増加．



【例】$f(x)=\sin x$
$f'(x)=\cos x$より$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上$f'(x)>0$より
$f(x)=\sin x$は$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上で単調増加

【証】$x,y\in[a,b]$かつ$x<y$となるものをとる．
平均値の定理よりある$z\in(x,y)$があって
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$$となる

① $f'(z)=0$より　$f(y)=f(x)$　∴ fは定数関数

② $f'(z)>0$より　$f(y)>f(x)$　∴ fは単調増加

[応用2] ロピタルの定理

定理 $f(x), g(x)$ が点 a の近くで定義された微分可能な関数とする。

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ かつ

$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば

$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が存在し、$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

[例1] $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos x}{x}$ を求めよ。

[答] $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{2x}-\cos x = 1-1=0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-\cos x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-\sin x}{1} = 2$$ より

ロピタルの定理から

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-\sin x}{1} = 2.$$

[注意] 仮定をみたしていないものにはつかえない

① $\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{x}$ には使えない ($\lim_{x \to 1} x \neq 0$ より)

② $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ にもつかえない

$$\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1+\cos x}{1} \xrightarrow[x \to \infty]{} \text{存在しない} \right)$$

[証] $I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ 十分小さいとする)

$f(a) = g(a) = 0$ とすると

f, g は $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ 上連続, I 上微分可能.

$x \neq a$ かつ $x \in I$ とおくと, コーシーの平均値の定理より

a と x の間の実数 c があって,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ となる}$$

よって. $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad //$$

[実習] $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ を求めよ。

解2

$x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$x-\sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ よりロピタルの定理から

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}$$???

$3x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$1-\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ よりロピタルの定理から

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

よって、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$ より

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6} \quad //$$