第 3 回. 微分法と初等関数の性質 (三宅先生の本, 1.3 と 2.1 の内容)

岩井雅崇 2021/04/27

1　微分法

定義 1. $f(x)$ を点 a を含む開区間上の関数とする. $f(x)$ が $x=a$ で微分可能とは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ が存在すること.}$$

この値を $f'(a)$ と書く. $f'(a)$ は $\frac{df}{dx}|_{x=a}$ や $\frac{df(a)}{dx}$ とも書く.

$f(x)$ が I 上で微分可能とは, 任意の $a\in I$ に関して $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であること. このとき

$$\begin{array}{cccc} f': & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

を $f(x)$ の導関数という. $f'(x)$ は $\frac{df}{dx}$ とも書く.

例 2. みんながよく知っている関数は (だいたい) 微分可能関数. つまり $x^2, \sin x, \cos x, e^x$ などは微分可能な関数である.

例 3. 微分可能な関数 $f(x)$ について, 点 $(a, f(a))$ での接線の方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ である.

定理 4. $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $x=a$ で連続である.

命題 5 (微分の性質)**.** f, g を区間 I 上の微分可能な関数とするとき, 以下が成り立つ. (c は定数.)

- $(f\pm g)'=f'\pm g'$
- $(cf)'=cf'$
- $(fg)'=f'g+fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ ($g'(x)\neq 0$ なる点において.)

定理 6 (合成関数の微分法)**.** $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であり, $z=g(y)$ が $y=f(a)$ で微分可能であるとき, $z=g(f(x))$ は $x=a$ で微分可能であり,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \text{ である.}$$

より詳しく書くと,

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=f(a)} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \text{ である.}$$

例 **7.** $z = \cos(x^2)$ を普通に微分すると, $\frac{dz}{dx} = -2x\sin(x^2)$. 一方 $y = x^2, z = \cos y$ とすると $\frac{dy}{dx} = 2x, \frac{dz}{dy} = -\sin(y)$ より,

$$\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (-\sin(x^2))2x = -2x\sin(x^2) \text{ である.}$$

定理 **8** (合成関数の微分法)**.** 関数 $f(x)$ は区間 I で微分可能かつ単調増加であるとする. 任意の $x \in I$ で $f'(x) \neq 0$ であると仮定する. このとき逆関数 $f^{-1}(y)$ は $f^{-1}(I)$ 上で微分可能であり

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \text{ である.}$$

同じことだが,

$$\frac{df^{-1}}{dy} = \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)} \text{ である.}$$

2 初等関数の性質

2.1 三角関数

命題 **9** (三角関数の微分)**.**

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$

2.2 逆三角関数

$\sin x$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上で単調増加, $\cos x$ は $[0, \pi]$ 上で単調増加, $\tan x$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上で単調増加であるのでそれぞれ微分可能な逆関数が存在する.

定義 **10** (逆三角関数)**.**

- $$\begin{array}{cccc} \mathrm{Sin}^{-1}: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{Sin}^{-1} y \end{array}$$

を $\sin$ の逆関数とする．これをアークサインと呼ぶ．$\mathrm{Sin}^{-1}([-1,1]) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ である．

- $$\begin{array}{rccc} \mathrm{Cos}^{-1}: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{Cos}^{-1} y \end{array}$$

  を $\cos$ の逆関数とする．これをアークコサインと呼ぶ．$\mathrm{Cos}^{-1}([-1,1]) = [0, \pi]$ である．

- $$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tan}^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{Tan}^{-1} y \end{array}$$

  を $\tan$ の逆関数とする．これをアークタンジェントと呼ぶ．$\mathrm{Tan}^{-1}(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である．

例 11. $\mathrm{Sin}^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}, \mathrm{Cos}^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}, \mathrm{Tan}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ である．

命題 12 (逆三角関数の微分)**.**

- $(\mathrm{Sin}^{-1} y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $(\mathrm{Cos}^{-1} y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $(\mathrm{Tan}^{-1} y)' = \frac{1}{1+y^2}$

2.3 指数関数

定理 13 (ネピアの定数)**.** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は収束する．この値を e と書きネピアの定数という．

定義 14 (指数関数・対数関数)**.**

- $a > 0$ かつ $a \neq 1$ なる実数 a について，関数

  $$\begin{array}{rccc} a^x: & \mathbb{R} & \to & (0, +\infty) \\ & x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

  を指数関数と呼ぶ．$a = e$ のとき，e^x を $\exp x$ ともかく．

- $a > 0$ かつ $a \neq 1$ なる実数 a について，指数関数 a^x の逆関数

  $$\begin{array}{rccc} \log_a y: & (0, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \log_a y \end{array}$$

  を対数関数と呼ぶ．$a = e$ のとき，$\log y$ と書く．

命題 15 (指数関数・対数関数の微分)**.**

- $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.
- $(a^x)'=(\log a)a^x$. 特に $(e^x)'=e^x$.
- $(\log_a y)'=\frac{1}{(\log a)y}$. 特に $(\log y)'=\frac{1}{y}$.

2.4 双曲線関数

定義 16 (双曲線関数)**.**

- $$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
  とし, これをハイパボリックサインと呼ぶ.
- $$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
  とし, これをハイパボリックコサインと呼ぶ.
- $$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$
  とし, これをハイパボリックタンジェントと呼ぶ.

命題 17 (双曲線関数の微分)**.**

- $(\cosh x)^2-(\sinh x)^2=1$
- $(\sinh x)'=\cosh x$
- $(\cosh x)'=\sinh x$
- $(\tanh x)'=\frac{1}{(\cosh x)^2}$

3 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. $\mathrm{Sin}^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}), \mathrm{Cos}^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}), \mathrm{Tan}^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ の値を求めよ.
2. $f(x)=\log(\log(x))$ とする. $f'(x)$ を求めよ.