9: 積分の性質

[復習] (定理) $f(x)$を $[a,b]$ 上の連続関数とし、
$F(x)$を $[a,b]$ 上の微分可能な関数で
$F'(x)=f(x)$ となるものとする

これは $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$ となる

($F(x)$ を $\int f(x)dx$ とかくこともある)

[定理] f, g ともに $[a,b]$ 上の連続関数とする。
$F(x)=\int f(x)dx$　$G(x)=\int g(x)dx$ とする。

(1) $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(3) $x(t): [\alpha,\beta] \to [a,b]$ C^1級関数。
$t \mapsto x(t)$
$x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$ とすると
$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}(t)dt$.

(4) $\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$

(f を C^1級とすると)

[証明] (1.) $\frac{d}{dx}(F(x) \pm G(x)) = f \pm g$ より

$$F(x) \pm G(x) = \int (f \pm g)\, dx.$$

以上より $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = [F(x) \pm G(x)]_a^b$

ずらく(い)

$$= [F(x)]_a^b \pm [G(x)]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(2). $\frac{d}{dx}(kF(x)) = kf$ より (1)と同じ。

(3). $$\frac{dF(x(t))}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

$$= f(x(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \text{ より}$$

$$F(x(t)) = \int \left(f(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} \right) dt.$$

よって

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = [F(x(t))]_\alpha^\beta$$

ずらく(い) $= \int_\alpha^\beta f(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} dt.$

(4) $\frac{d}{dx}(fG) = f'(x)G(x) + f(x)g(x)$ より

$$\int_a^b f'(x)G(x)dx + \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$= [f(x)G(x)]_a^b$$

//

不定積分の例

$\left(\int f(x)dx = F(x) \iff F'(x) = f. \right.$

以下は覚えなくてよい

理由1 高校でみなやったから

理由2. このご時世、ネットで調べれば出るから.

・ $$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1$$

$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a$ より

・ $$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|.$$

$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ より.

・ $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{|a|} \quad (a \neq 0)$$

$(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から

$\left(\sin^{-1}\frac{x}{|a|}\right)' = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{|a|^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

・ $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\frac{x}{a}.$$

$(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2+x^2}$

- $$\int e^x \, dx = e^x$$
  $(e^x)' = e^x$ より
- $$\int a^x \, dx = \frac{1}{\log a} a^x$$
  $(a^x)' = (\log a) a^x$ より
- $$\int \log x \, dx = x \log x - x.$$
  $(x \log x - x)' = \log x + 1 - 1 = \log x$
- $$\int \sin x \, dx = -\cos x$$
- $$\int \cos x \, dx = \sin x$$
  $$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x. \quad - -$$
  etc - - -

[補足] 何でもかんでも積分がかんたんにかけるとは限らない。

例1 $$\int \frac{dx}{\log x}$$ ← ムリ。

［漸化式による定積分の求め方］

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ を求める。

($n \geqq 2$ のとき)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-1} (\sin x)' \, dx$$

$$= \underbrace{\left[(\cos x)^{n-1} \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos x)^{n-1}\right)' \sin x \, dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\cos x)^{n-2} (-\sin x) \sin x \, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-2} (\sin^2 x) \, dx \quad (1-\cos^2 x = \sin^2 x)$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-2} - (\cos^n x) \, dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$n = 2m$ のとき

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2}$$

$$= \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \cdot \frac{1}{2} I_0$$

$$= \left(\frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

$n=2m+1$ のとき

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1}.$$

$$= \frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3} I_1$$

$$= \frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}.$$

今 $n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdots 2 & n\text{ぐうすう} \\ n\cdot(n-2)\cdots 1 & n\text{きすう} \\ 1 & n=0 \text{ or } -1. \end{cases}$

$\begin{pmatrix} n\geq -1 \\ n\in\mathbb{Z} \end{pmatrix}$

とすると

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}. \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \end{cases}$$

〃

$x=\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$

$$\left(I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n x\ -dt \right.$$

$$\left. = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dt \right)$$

定理 ウォリスの公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \frac{(2m-2)^2}{(2m-1)(2m-3)} \cdots$$

$$= \frac{2\ 2\ 4\ 4\ 6\ 6\ 8\ 8 \cdots}{1\ 3\ 3\ 5\ 5\ 7\ 7\ 9 \cdots}$$

[証明] $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で

$$(\cos x)^{2m+2} \leqq (\cos x)^{2m+1} \leqq (\cos x)^{2m}$$ より

$$I_{2m+2} \leqq I_{2m+1} \leqq I_{2m}$$

以上より

$$\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{2m!!}{(2m+1)!!} \leqq \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}$ をかけると.

$$\frac{(2m+1)}{(2m+2)}\frac{\pi}{2} \leqq \boxed{\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}} \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{(2m)(2m)(2m-2)(2m-2)\cdots}{(2m+1)(2m-1)(2m-1)(2m-3)(2m-3)\cdots}$$

よって $\lim_{m\to\infty}$ をすればよい.

補足 πのおはなし

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

(ラフな証明)

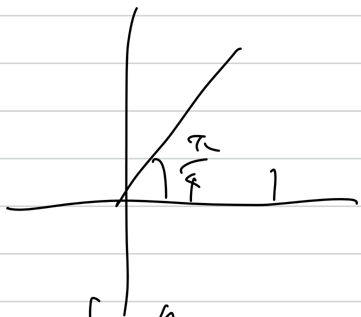
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \cdots$$

$|x|<1$ より

$|x|<1$ で $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$

(きちんとやるなら収束べき級数のぎろんがいる)

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \mathrm{Tan}^{-1}x$$



$$\mathrm{Tan}^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \cdots$$

$|x|<1$

$x=1$ をいれて. (←ここにアーベルの定理がはいってる!)

$$\mathrm{Tan}^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

マーダヴァ-ライプニッツ級数.

バーゼル問題

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots$$

(マチンの公式)

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}$$

$$\mathrm{Tan}^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \cdots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \cdots\right)$$

Question π をプログラミングで求めるにはどれがよい??

(ウォリス, マーダヴァ−ライプニッツ, バーゼル, マチン)

演習 $\int x\log x\,dx$ を求めよ.

解答

$$\int x\log x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2.$$

$$\left(\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\right)' \\ &= x\log x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x\log x \end{aligned} \right)$$