大阪市立大学 R3 年度 (2021 年度) 前期 全学共通科目 解析 I *TI 電 (都 1 〜 28)

中間レポート解答例

担当教官: 岩井雅崇 (いわいまさたか)

第 1 問. (授業第 6 回の内容.)

次の (1) から (4) までの関数について, $x=0$ の近くでの漸近展開を 3 次まで求めよ.

(1). $\sqrt{x+1}$ (2). $\mathrm{Tan}^{-1}x$ (3). $\cosh x$ (4). $(1+x)\sin x$

<u>ただし答えを導出する過程を記した上で, 答えは次のように書くこと.</u>

(例題 1) e^x
(答え) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (x \to 0)$

(例題 2) $\cos x$
(答え) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \ (x \to 0)$

● 第 1 問解答例.

C^∞ 関数 $f(x)$ に関して

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) \ (x \to 0) \text{ である.}$$

(1). $f(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^{\frac{1}{2}} & \text{より } f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} & \text{より } f'(0) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}} & \text{より } f''(0) &= -\frac{1}{4} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}} & \text{より } f'''(0) &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \ (x \to 0) \text{ である.}$$

(2). $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{Tan}^{-1}x & \text{より } f(0) &= 0 \\ f'(x) &= (x^2+1)^{-1} & \text{より } f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -2x(x^2+1)^{-2} & \text{より } f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 8x^2(x^2+1)^{-3} - 2(x^2+1)^{-2} & \text{より } f'''(0) &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \mathrm{Tan}^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \ (x \to 0) \text{ である.}$$

(3). $f(x) = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sinh x \quad &\text{より}\ f(0) = 1 \\
f'(x) = \cosh x \quad &\text{より}\ f'(0) = 0 \\
f''(x) = \sinh x \quad &\text{より}\ f''(0) = 1 \\
f'''(x) = \cosh x \quad &\text{より}\ f'''(0) = 0
\end{aligned}
$$

$$\text{よって}\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\ \ (x \to 0)\ \text{である.}$$

[別解].

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\ \ (x \to 0) \\
e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\ \ (x \to 0)
\end{aligned}
$$

であるため,

$$
\begin{aligned}
\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + o(x^3)\ \ (x \to 0) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\ \ (x \to 0)\ \text{である.}
\end{aligned}
$$

(4). $f(x) = (1 + x)\sin x$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
f(x) = (1 + x)\sin x \quad &\text{より}\ f(0) = 0 \\
f'(x) = \sin x + (1 + x)\cos x \quad &\text{より}\ f'(0) = 1 \\
f''(x) = 2\cos x - (1 + x)\sin x \quad &\text{より}\ f''(0) = 2 \\
f'''(x) = -3\sin x - (1 + x)\cos x \quad &\text{より}\ f'''(0) = -1
\end{aligned}
$$

$$\text{よって}\ (1 + x)\sin x = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\ \ (x \to 0)\ \text{である.}$$

[別解].

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\ \ (x \to 0)\ \text{より},\ x\sin x = x^2 + o(x^3)\ \ (x \to 0)\ \text{であるので,}$$

$$(1 + x)\sin x = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\ \ (x \to 0)\ \text{である.}$$

第 2 問. (授業第 5 回の内容.)

(1). $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leqq \sin x \leqq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

(2). $\sin 1$ を小数第 3 位まで求めよ.

● 第 2 問解答例.

(1). 有限テイラー展開の定理より, 任意の $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ について, ある $\theta \in (0,1)$ があって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin(\theta x)}{6!}x^6$$

となる. $\theta x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ から, $-\frac{\sin(\theta x)}{6!}x^6 \leqq 0$ であるので,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin(\theta x)}{6!}x^6 \leqq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \text{である.}$$

同様に任意の $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ について, ある $\theta \in (0,1)$ があって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\sin(\theta x)}{8!}x^8$$

となる. $\theta x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ から, $\frac{\sin(\theta x)}{8!}x^8 \geqq 0$ であるので,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\sin(\theta x)}{8!}x^8 \geqq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \text{である.}$$

[補足]. 普通に微分を 5 回 (または 7 回) やって増減表を書いて示すこともできます.

(2). $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ より, (1) の不等式に $x = 1$ を代入して,

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \leqq \sin 1 \leqq 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \text{である.}$$

$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040} = 0.8414\cdots \geqq 0.8414, 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{101}{120} = 0.84166\cdots \leqq 0.84167$ より, $0.8414 \leqq \sin 1 \leqq 0.84167$ であるので, $\sin 1$ の小数第 3 位までの値は 0.841 である.

第 3 問. (授業第 3 回の内容.)

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1). $\tan(2\theta)$ の値を求めよ.

(2). $\tan(4\theta)$ の値を求めよ.

(3). $\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ.

(4). 次の式を示せ.

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

- 第 3 問解答例.

解答の前に加法定理を思い出しておく.

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}\quad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

(1).

$$\tan(2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12}$$

(2).

$$\tan(4\theta)=\frac{2\tan 2\theta}{1-(\tan 2\theta)^2}=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}$$

(3).

$$\tan\Big(4\theta-\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{\tan 4\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+(\tan 4\theta)(\tan\frac{\pi}{4})}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}$$

(4). (3) から

$$\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)=4\theta-\frac{\pi}{4}=4\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}$$

であるので,

$$\frac{\pi}{4}=4\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)\text{ となる.}$$

第 4 問. (授業第 4 回の内容.)

$f(x)=\frac{x^3-1}{2}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1). $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で単調増加であることを示せ.

(2). 方程式 $\sqrt[3]{2x+1}=\frac{x^3-1}{2}$ の実数解を全て求めよ.

- 第 4 問解答例.

(1). $f'(x)=\frac{3}{2}x^2$ である. $(-\infty,0)$ 上で $f'(x)>0$ であるので, $f(x)$ は $(-\infty,0]$ 上で単調増加である. また $(0,+\infty)$ 上で $f'(x)>0$ であるので, $f(x)$ は $[0,+\infty)$ 上で単調増加である. よって $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で単調増加である.

(2). 解答は 2 通りあります.

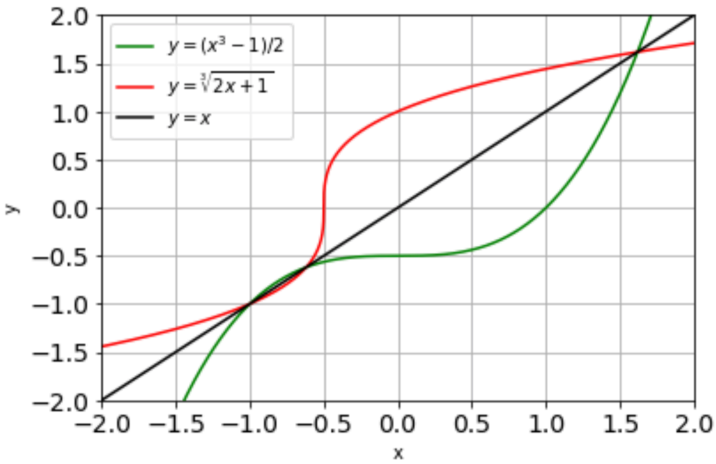
[解答 1]. α を方程式 $\sqrt[3]{2x+1}=\frac{x^3-1}{2}$ の実数解とし, $\beta=f(\alpha)$ とする. $f(\alpha)=\frac{\alpha^3-1}{2}=\sqrt[3]{2\alpha+1}$ であるので

$$f(\beta)=\frac{\beta^3-1}{2}=\frac{2\alpha+1-1}{2}=\alpha$$

である. もし, $\alpha<\beta$ ならば, (1) より $f(x)$ は単調増加であるため, $f(\alpha)<f(\beta)$ となる. これは $\beta<\alpha$ となり矛盾である. 同様の議論により, $\alpha=\beta=\frac{\alpha^3-1}{2}$ を得る. 方程式 $\alpha=\frac{\alpha^3-1}{2}$ を解くと, $\alpha=-1,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ を得る. 簡単な計算からこれらが元の方程式 $\sqrt[3]{2x+1}=\frac{x^3-1}{2}$ の実数解であることがわかるので, 実数解は $-1,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ である.

[解答 2]. α を方程式 $\sqrt[3]{2x+1} = \frac{x^3-1}{2}$ の実数解とする. (1) から $f(x) = \frac{x^3-1}{2}$ の逆関数が存在し, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ である. よって $f(\alpha) = f^{-1}(\alpha)$ となる α を求めれば良い. $y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは $y = x$ を軸にして対称であるので[1] $\alpha = f(\alpha) = \frac{\alpha^3-1}{2}$ となる. これを解いて $\alpha = -1, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ を得る.

[補足]. $y = \frac{x^3-1}{2}$ のグラフ, $y = \sqrt[3]{2x+1}$ のグラフ, $y = x$ のグラフを書くと以下の通りになります.



中間レポートおまけ問題. (授業第 1,2,5 回の内容.)

次の問いに答えよ.

(1). 地球上ではいかなる時間でも, ある赤道上の点 x とその対蹠点 y で, x と y の気温が同じような点の組 (x, y) が存在することを示せ. ただし地球は球体であると仮定して良い. ここで対蹠点とは地球の裏側の点のことである.

(2). $a < b$ なる任意の実数 a, b について, $a < q < b$ となる有理数 q が存在することを示せ.

- ## 中間レポートおまけ問題解答例.

(1). 大きな実数 $R > 0$ を取って, 地球の表面 $S = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2+y^2+z^2} = R\}$ として良い.

$$\begin{array}{rccc} F: & S & \to & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & \text{点 } p \text{ での気温} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \gamma: & [0, 2\pi] & \to & S \\ & \theta & \longmapsto & (R\cos\theta, R\sin\theta, 0) \end{array}$$

とおくと, 点 $\gamma(\theta)$ は地球 S の赤道上の点であり, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ について点 $\gamma(\theta+\pi)$ は点 $\gamma(\theta)$ の対蹠点である. そこで $[0, \pi]$ 上の関数 f を

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & F(\gamma(\theta+\pi)) - F(\gamma(\theta)) \end{array}$$

[1] 理由は次の通りです: $y = x$ を軸にして点 (a, b) と対称な点は (b, a) です. 「(a, b) が $y = f(x)$ のグラフ上の点であること」は, 「(b, a) が $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上の点であること」と同値であるので, この対称性が言えます.

とすると, $f(\theta)$ は連続であり[2],

$$f(\pi) = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(\pi)) = F(\gamma(0)) - F(\gamma(\pi)) = -f(0) \text{ である.}$$

$f(0) = f(\pi)$ のとき, $f(0) = 0$ となる. よって, $x = \gamma(0), y = \gamma(\pi)$ とおけば, y は x の対蹠点であり, $F(x) = F(y)$ から x と y の気温は等しい.

$f(0) \neq f(\pi)$ のとき, $f(\pi) = -f(0)$ であるので, $f(0) < 0 < f(\pi)$ または $f(\pi) < 0 < f(0)$ が成り立つ. よって中間値の定理より, ある $c \in [0, \pi]$ があって $f(c) = 0$ となる. 以上より, $x = \gamma(c), y = \gamma(c + \pi)$ とおけば, y は x の対蹠点であり, $F(x) = F(y)$ から x と y の気温は等しい.

[補足]. その他面白い解答には部分点を与えました.

(2). $c = \frac{a+b}{2}$ とし, $\epsilon = \frac{b-a}{4}$ とおく. ある有理点列 $\{a_n\}$ があって $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$ となる. ϵ-δ 論法から, ある自然数 N があって $N < n$ ならば $|c - a_n| < \epsilon$ となる. よって $q = a_{N+1}$ とおくと q は有理数であり

$$c - \epsilon < q < c + \epsilon$$

である. 簡単な計算から $a < c - \epsilon$ かつ $c + \epsilon < b$ であるので, $a < q < b$ である.

[補足]. アルキメデスの性質を用いた解答で, 証明に穴がない場合には, 正答としました.

中間レポートについて.

第 1 問から第 4 問を通して, 正答率 82%でした. とてもよくできていたと思います. 各問題を通しての感想は以下のとおりです.

第 1 問. 正答率 82%. 意外と計算ミスが多かったです. 特に (1) の計算ミスが非常に多かったです. レポートを提出する前にはきちんと計算チェックをするようにしてください. また計算の過程を書いてない答案も見られました. きちんと計算の過程を書いてください. (減点の対象となる場合があります.)

第 2 問. 正答率 71%. おそらくベキ級数を使った適当な答案が出るだろうと思って出した問題です. しかしそういった答案は少ししかありませんでした. 補足でも述べた通り (1) は微分を 5 回やっても示せます.

第 3 問. 正答率 98%. ほぼ全員できてました. 非常に素晴らしいです. (4) の公式はマチンの公式と呼ばれます. 実は円周率 π の近似値はマチンの公式に似た公式と $\mathrm{Tan}^{-1}x$ のテイラー展開を用いて求められています.

第 4 問. 正答率 70%. 元々の問題は (2) だけでしたが, 流石にそれでは難しすぎると思い, (1) を加えました. 意外にも正答率が予想より高くてびっくりしました. 大変優秀だと思います.

[2]ここにある種の連続性を仮定している.