2. 連続関数

$A \subset \mathbb{R}$ とする.

任意の $x \in A$ について、実数 $f(x)$ が唯1つ定まるとき.

$f(x)$ を A 上の関数という.

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$
とかく.

- $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ とする.

$f(x)$ が有界関数とは $f(A)$ が有界となること.

(つまり ある $M > 0$ があって、任意の $x \in A$ について、$|f(x)| \leq M$ となる)

- $\max_{x \in A} f(x) = \max f(A)$　$f(x)$ の A での最大値

$\min_{x \in A} f(x) = \min f(A)$　〃 最小値

$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$　〃 上限

$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$　〃 下限

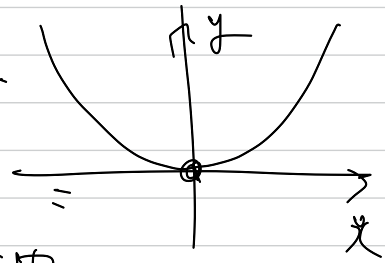
とする.

(例)

・$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \pm x^2$. $\mathbb{R}$上の関数ではない。

$f(2) = \pm 4$ 1つに定まらない

・$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. $\mathbb{R}$上の関数.



$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ 存在しない, $\min f(x) = 0$

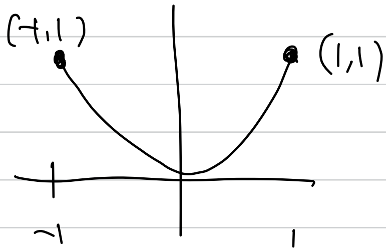
$\sup f(x) = +\infty$　　$\inf f(x) = 0$. 有界ではない

$(f(\mathbb{R}) = [0, +\infty))$

・$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $[-1,1]$上の関数.

$x \mapsto x^2$.

・$f(x) = \sqrt{1-x^2}$. $[-1,1]$上の関数.
(今回の授業では基本的に実数を扱います).
$\max_{x \in [-1,1]} f(x) = 1 = \sup f(x)$ 有界関数
$\min f(x) = 0 = \inf f(x)$.



$\max_{x \in [-1,1]} f(x) = 1 = \sup_{x \in [-1,1]} f(x)$

$\min f(x) = 0 = \inf f(x)$　　$(f([-1,1]) = [0, 1])$

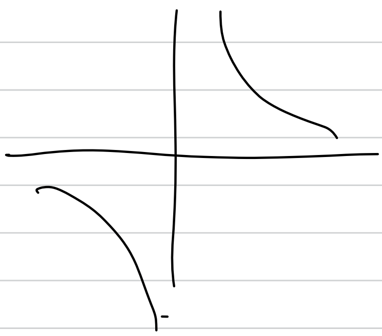
有界 関数.

かいけい

・$f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$　　$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$上の関数

$x \mapsto \frac{1}{x}$　　$f((-\infty,0) \cup (0,+\infty)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

($+\infty$は実数ではない)



$\max f(x)$, $\min f(x)$ なし

$\sup f(x) = +\infty$, $\inf f(x) = -\infty$

有界 でない.

関数の極限

$a\in\mathbb{R}$ とする。 $f(x)$を aのまわりで定義された関数とする。

$x\to a$ のとき $f(x)$が α に収束するとは

$x\neq a$ をみたしながら xをaに近づけるとき $f(x)$がαに限りなく近づくこと。

このとき $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ または $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\alpha$ とかく。

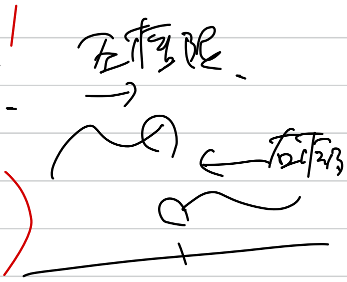
($\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ も同様)。

(左側)

・上において、xを aの右側から aに近づけたときの極限を点 a における右極限(左極限)といい

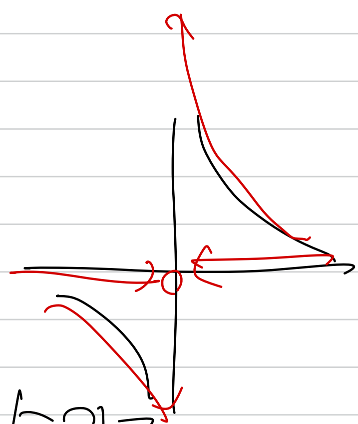
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha \text{ とかく。}$$

(or 左極限も同様に定義) ($\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha$ とかく)



例 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ について
$x\longmapsto x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$



・ $f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ について
$x\longmapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 0-0} f(x)=-\infty$$

//

[性質] $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ となる
$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

- $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \alpha+\beta.$
- $\lim_{x\to a} cf(x) = c\alpha$
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$
- $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$ の時)

詳しくは ε-δ論法で定義する

(近似により)

[定義]

- aのまわりで定義された関数$f(x)$が$x=a$で連続とは
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ となること.}$$

- $f(x)$を区間I上の関数とする
$f(x)$がI上連続とは任意の$a \in I$で$f(x)$が連続となること.

例 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$上連続
$x \mapsto x^2$
($x^2, \sin x, \cos x, e^x$ は$\mathbb{R}$上連続)

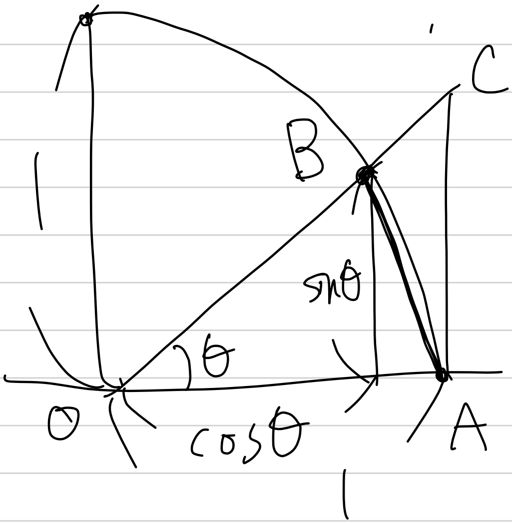
(証) $a \in \mathbb{R}$ とおく.

かい入

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a}(x-a)(x+a) = 0 \text{ より,}$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ となる.}$$

例12 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ は $\mathbb{R}$ 上連続.

[補題] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ について $\sin\theta \leqq \theta$ である. かいん



△OABの面積 $\leqq$ 扇形OABの面積

$$\frac{1}{2}\sin\theta \leqq \pi \cdot \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\therefore \sin\theta \leqq \theta.$$

$a \in \mathbb{R}$ とする. すると $0 < |x-a| < \frac{\pi}{2}$ なる x について,

$$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a|$$
$$= 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \quad (|\cos\theta| \leqq 1)$$
$$\leqq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqq |x-a|.$$ より

$$\lim_{x\to a}|f(x) - f(a)| \leqq \lim_{x\to a}|x-a| = 0.$$

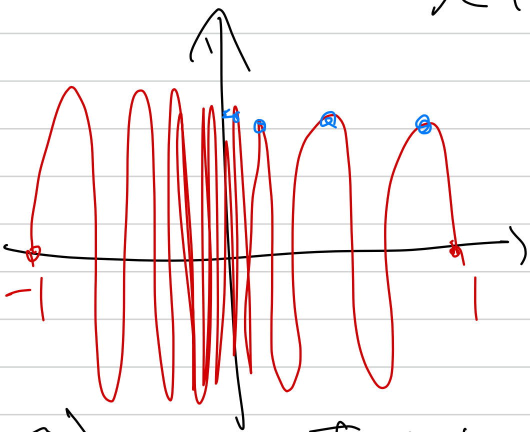
$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$ より連続

同様に $\cos x$ も $\mathbb{R}$ 上連続. かいん

(補足) みんながよく使う関数は連続関数 (あとの定理/性質から) 3章頃

例13 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \quad \text{とする}$$



fは0で連続ではない.

[証] 連続であると仮定すると $\underline{\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0}$ となる (※)

しかし. $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{1}{2}\pi}$ とすると $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ だが,

$$f(x_n)=\sin\left(2n\pi+\tfrac{1}{2}\pi\right)=\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)=1 \text{ より}$$

$\lim_{x_n\to 0} f(x_n)\neq 0$ となり (※)に矛盾する.

[性質] $f(x)$, $g(x)$ が点aで連続なら

$f(x)\pm g(x)$, $cf(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x)\neq 0$のとき)

もまた点aで連続である.

定理

$y=f(x)$ が点 a で連続で
$z=g(y)$ が点 $f(a)$ で連続ならば
$z=g(f(x))$ は点 a で連続である

[証] $b=f(a)$ とすると. fの連続性より $f(x)\to b$ より

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) \underset{g\text{の連続性}}{=} g(b) = g(f(a)) \quad //$$

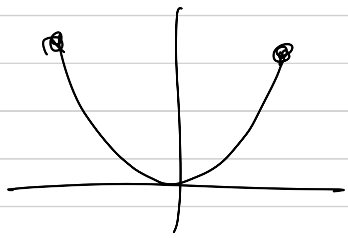
[連続だと嬉しい点]

定理1(最大最小の存在)

$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で連続ならば
f は $[a,b]$ 上で最大値, 最小値をもつ

例

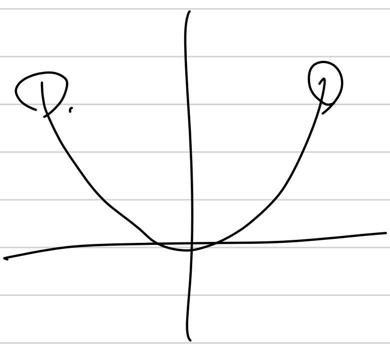
$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2.$$



$$\max_{x\in[-1,1]} f(x) = 1,\ \min f(x) = 0.$$

閉区間でない

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$$

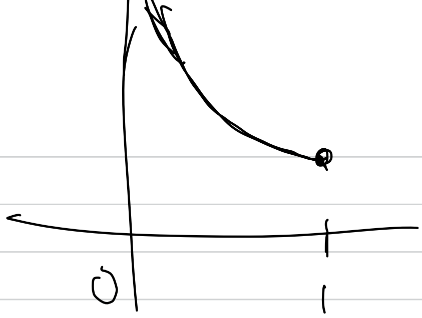


$\max_{x\in(-1,1)} f(x)$ は存在しない

($f((-1,1)) = [0,1)$ より)

$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



連続でない

$\max f(x)$ は存在しない

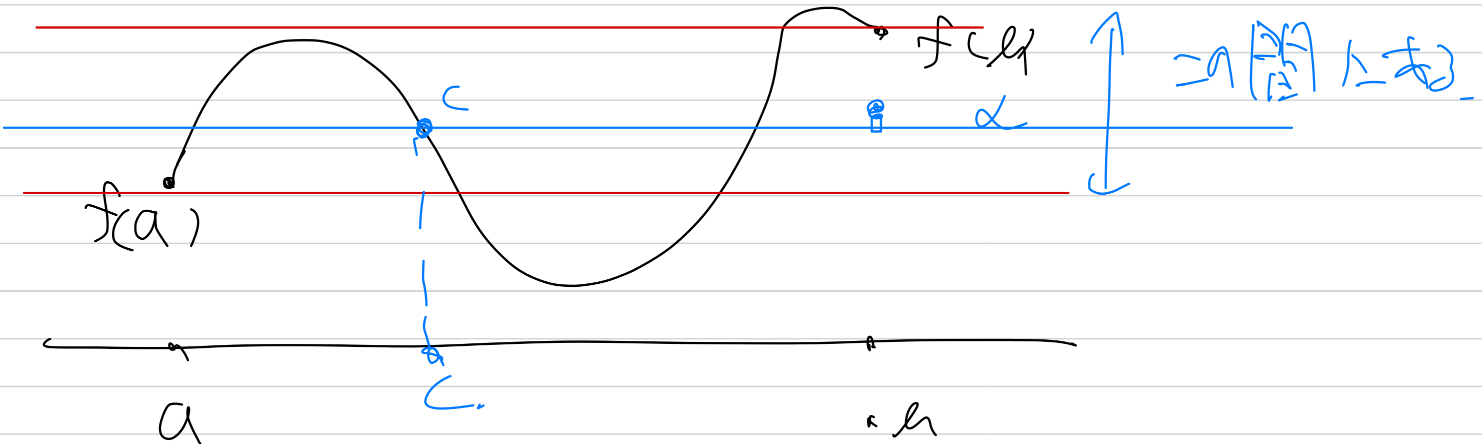
定理2（中間値の定理）

$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で連続とする。

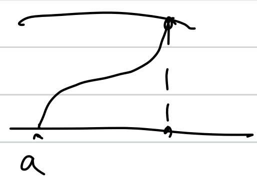
$f(a) < f(b)$ ならば

任意の $\alpha \in [f(a), f(b)]$ について、

ある $c \in [a,b]$ があって $f(c) = \alpha$ となる。



[証明]



$a_1 = a, \quad b_1 = b$ とする。

$f(a_1) = \alpha$ ならば $c = a_1$ とし、そこで終了する。

（b_1 も同様）

以下 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次のように帰納的に定める

・ a_n, b_n が定まっているとき

$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = \alpha$ ならば $c=\frac{a_n+b_n}{2}$ として終了する

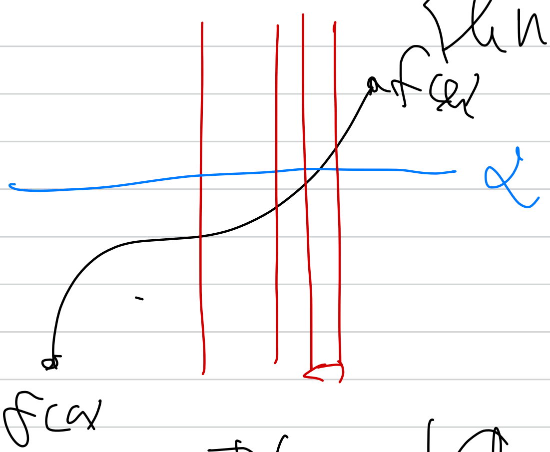
$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \alpha$ ならば $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=b_n$ とする

$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > \alpha$ ならば $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ とする

性質として、 $a_n \leq b_n$ となる

特に、 $\{a_n\}$ は有界単調増加数列。

$\{b_n\}$ 〃 減少 〃



よって、ある $d_1, d_2 \in [a,b]$ があって、

$\lim_{n\to\infty} a_n = d_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = d_2$ となる。

また $|a_{n+1}-b_{n+1}| = \frac{|a_n-b_n|}{2} \leq \frac{b-a}{2^n}$.

よって $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$.

∴ $d_1 = d_2$. $c = d_1$ とすると

れんぞく

$f(c) = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq \alpha$.

$f(c) = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq \alpha$.

∴ $f(c) = \alpha$. //

補足 二分探索(にぶたん)の一種の例である

(補足 二分探索の一種の例である
(にぶたん))

演習 (1) $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$ とする

$f(x)$ は $[-1,1]$ 上連続を示せ。

(2) 厚さが均一のお好み焼きは包丁をまっすぐに1回いれることで二等分にできることを示せ。

(ただし具材等に関して細かいことは考えなくてよく、ある種の連続性は仮定してよい)

こたえ (1) $a \in [-1,1]$ とする。

$a \neq 0$ なら x, $\sin\frac{1}{x}$ は連続で $a \neq 0$ より
$x\sin\frac{1}{x}$ も連続である。

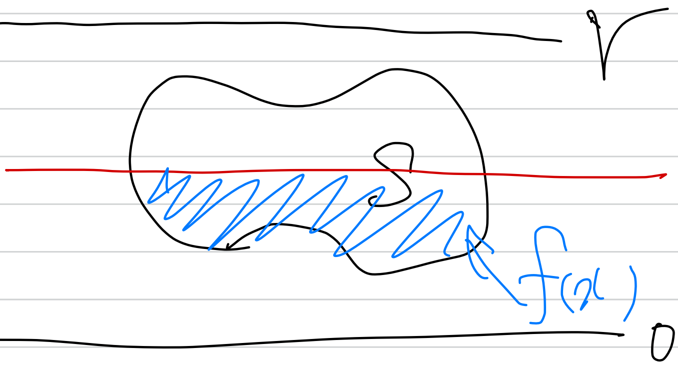
$a=0$ のとき
$|f(x)-f(0)| = |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$ より

$\lim_{x\to 0} |f(x)-f(0)| = 0.$ 　　$\lim_{x\to 0}|x| \to 0$

よって $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$ より連続

(2) (Sをよい姿みやすくし ある $r \in \mathbb{R}$ があって、)

$S \subset \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geq t \geq 0\}$ としてよい
(平行移動により)



$f: [0,r] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto S \cap \{(s,t) \mid x \geq t \geq 0\}$ の面積.

fは連続で Sの面積をArea(S)とすると とする.

$f(0) = 0$, $f(r) = \mathrm{Area}(S) > 0.$

よって中間値の定理より, $0 \leq c \leq r$ なる c で
$f(c) = \frac{1}{2}\mathrm{Area}(S)$ なるものがある. $t=c$ で割ればいい

[逆関数]

・UX

[定義]

$f(x)$ を区間 I 上の関数とする

$x<y$ ならば $f(x)<f(y)$ のとき　($>$)

$f(x)$ は I 上単調増加という　(減少)

← 判定法

[定義]

$f(x)$ を区間 I 上の関数とし

$g(y)$ を　$:J$　$=$　　とする

$f(I)=J$, $g(J)=I$, かつ

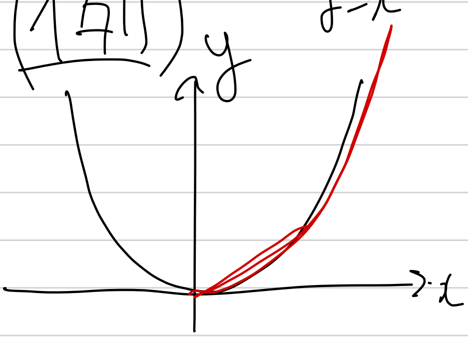
$y=f(x)$ であることが $x=g(y)$ であることと同値であるとき

g は f の逆関数といい

$g=f^{-1}$ とかく.

$f^{-1}(f(x))=x$, $f(f^{-1}(y))=y$ である

(例)

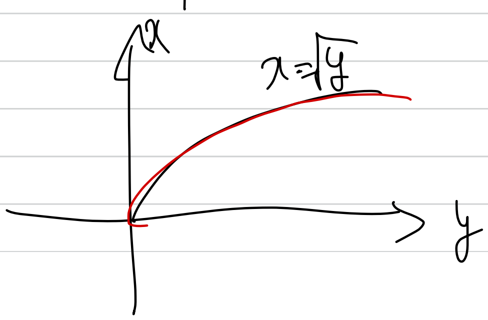


$f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow x^2$　　$y \longrightarrow \sqrt{y}$ とおく

f, g ともに $[0,+\infty)$ 上の関数で

$f^{-1}=g$ である.



判定法（証明は第4回で）!　（次に(まず)）　上から

> $f(x)$ が (a,b) 上の微分可能な関数とする
>
> (a,b) 上 $f'(x)>0$ ならば
>
> f は単調増加である

[定理] (逆関数の存在)

f を $[a,b]$ 上の連続な単調増加関数とおく。
$[f(a), f(b)]$ 上連続な f の逆関数が存在する。

(証)

$f(a) \leq y \leq f(b)$ なる y について、中間値の定理より、
$y = f(x_y)$ なる $x_y \in [a,b]$ が存在する

今 $f(x) = f(x') = y$ ならば $x = x'$ である。
(単調増加 より)

ここで $g : [f(a), f(b)] \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longmapsto x_y$ とすると

g は $[f(a), f(b)]$ 上の関数である。

$g(f(a)) = a$, $g(f(b)) = b$, $g([f(a), f(b)]) = [a, b]$ である。
$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ である。
$g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$ である。 ⟶ 逆関数

連続性について、(ε-δ 論法による。)

ちょうどなくてもいいかも

$\forall c \in [f(a), f(b)]$ について $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$, $|y - c| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(c)| < \varepsilon$ を示す

$f([g(c) - \varepsilon, g(c) + \varepsilon]) = [f(g(c) - \varepsilon), f(g(c) + \varepsilon)]$

ある $\delta > 0$, $(c - \delta, c + \delta) \subset [f(g(c) - \varepsilon), f(g(c) + \varepsilon)]$

にんいの $c \in [f(a), f(b)]$, にんいの $\varepsilon > 0$

$y \in (c - \delta, c + \delta) \Rightarrow |g(y) - g(c)| \leq \varepsilon$,

について、ある $\delta > 0$ があって、$|y - c| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(c)| < \varepsilon$
を示す。

今 $f([g(c) - \varepsilon, g(c) + \varepsilon]) \ni c$ より、
ある $\delta > 0$ があって、$f([g(c) - \varepsilon, g(c) + \varepsilon]) \supset (c - \delta, c + \delta)$ である
よって $\forall y \in (c - \delta, c + \delta)$ について、$|g(y) - g(c)| < \varepsilon$ となる //