3 微分法と初等関数の性質

[定義] ・$f(x)$を点aを含む開区間上の関数とする。

$f(x)$が$x=a$で微分可能とは、

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在すること。

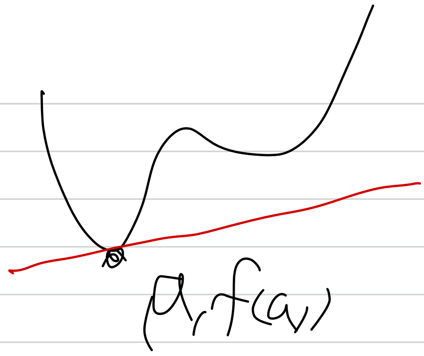
このとき $\displaystyle f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

・$f(x)$が区間I上で微分可能とは、
任意の$a\in I$について、$f(x)$が$x=a$で
微分可能であること。

・$f'(a)$は $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=a}$, $\dfrac{df}{dx}(a)$ ともかく。
$f'(x)$は $\dfrac{df}{dx}$ ともかく。

(例) $f(x)=x^n$ のとき $f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\sin x$ のとき $f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$ のとき $f'(x)=-\sin x$
すべて$\mathbb{R}$上微分可能

[例12] 接線の方程式



$f(x)$ の点 $(a, f(a))$ での接線は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

と表せられる。

[定理] $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $x=a$ で連続。

[証] $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ $(x \neq a)$ で $\displaystyle\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ となる

$$\lim_{x \to a}(f(x)-f(a))$$

$$= \lim_{x \to a} f'(a)\underbrace{(x-a)}_{0} + \underbrace{\varepsilon(x)}_{0}\underbrace{(x-a)}_{0} = 0$$

より連続

[微分の性質]

f, g を区間 I 上の微分可能な関数とする.

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(cf)' = cf'$ ($c \in \mathbb{R}$ 定数)
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ ($g(x) = 0$ なる点xを除く)

[合成関数の微分法]

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能で
関数 $z = g(y)$ が $y = f(a)$ で 〃 であるとき

$z = g(f(x))$ は $x = a$ で微分可能で

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \quad \text{である}$$

$$\left(\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=f(a)} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}. \right.$$

例(1) $z = \cos(x^2)$ というふうにすると

$$\frac{dz}{dx} = -2x\sin x^2.$$

一方 $y = x^2$, $z = \cos y$ とすると

$\frac{dy}{dx} = 2x$, $\frac{dz}{dy} = -\sin y$ より

$$\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = (-\sin x^2)\,2x = -2x\sin x^2$$

[証] $b = f(a)$ として

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & y \neq b \\ g'(b) & y = b \end{cases}$$ とおくと

$\lim_{y\to b} h(y) = h(b)$ $y = b$ で連続で。

$g(y) - g(b) = h(y)(y-b)$ より

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} h(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= h(b)\,f'(a)$$

$$= g'(f(a))\cdot f'(a).$$

[定理] 逆関数の微分

$f(x)$ が区間 I 上で微分可能かつ
単調増加 とする

($x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$)

さらに 任意の $x \in I$ において $f'(x) \neq 0$ とする.

このとき 逆関数 $f^{-1}(y)$ は
$f(I)$ 上微分可能で

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \quad \left(\frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)}\right)$$

[証] $b = f(a)$, $y = f(x)$ とおく

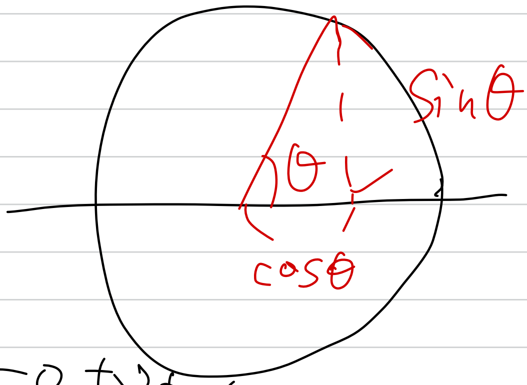
$$\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=b} = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

$$= \frac{1}{\left.\left(\frac{df}{dx}\right)\right|_{x=a}}$$

初等関数の性質

$\sin x, \cos x$ ℝ上微分可能



$$(\sin x)' = \cos x$$

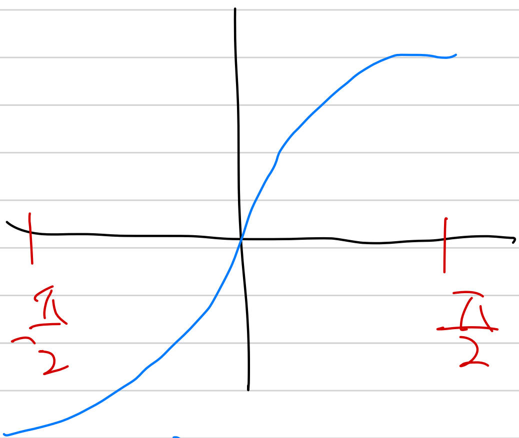
$$(\cos x)' = -\sin x$$

(cos x = 0 なる点を除いて)

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $x = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \dots$ を除いて、微分可能

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2}$$



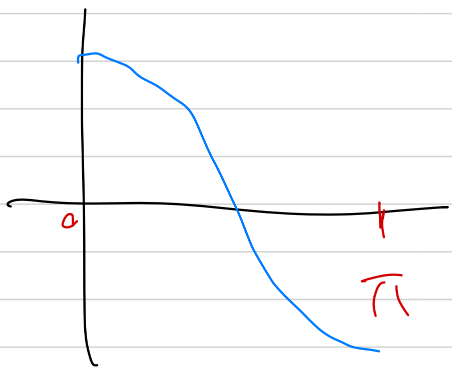
$\sin x$

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$(\sin x)' > 0$

$\|$

$\cos x$



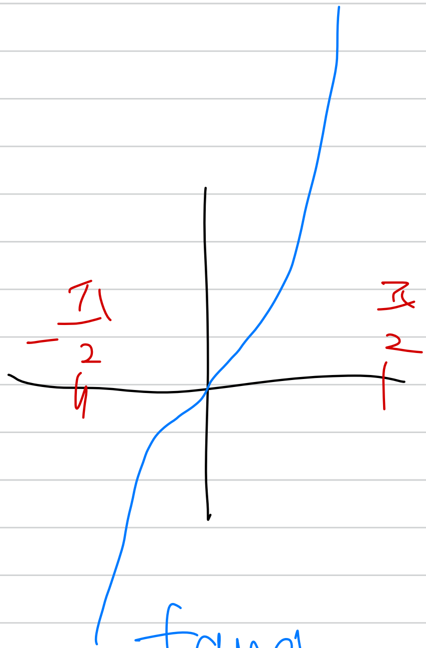
$\cos x$

$(0, \pi)$ 上

$(\cos x)' > 0$

$\|$

$\sin x$



$\tan x$

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上

$(\tan x)' > 0$

$\|$

$\dfrac{1}{(\cos x)^2}$

$\boxed{\text{単調増加}}$

微分可能な逆関数が存在する

$f([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$	$f([0,\pi])$	$f((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$
$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$
$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$
上で微分可能な逆関数がある	(〃)	(〃)

[定義] 逆三角関数

・$\mathrm{Sin}^{-1}y : [-1,1] \to \mathbb{R}$ を sin の逆関数とし、アークサインとよぶ（arcsin y ともかく）

$$\left(\mathrm{Sin}^{-1}([-1,1]) = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)$$

・$\mathrm{Cos}^{-1}y : [-1,1] \to \mathbb{R}$ を cos の逆関数とし、アークコサインとよぶ（arccos y ともかく）

$$\left(\mathrm{Cos}^{-1}([-1,1]) = [0,\pi]\right)$$

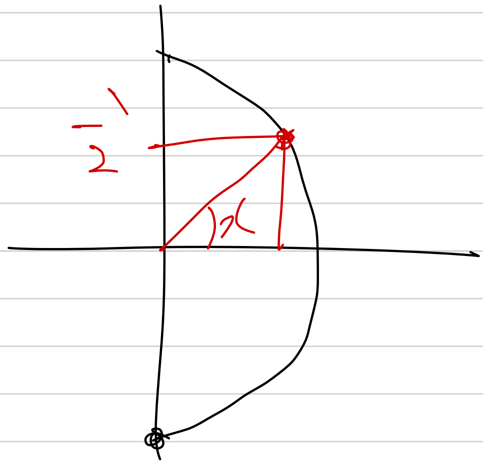
・$\mathrm{Tan}^{-1}y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を tan の逆関数とし、アークタンジェントとよぶ（arctan y ともかく）

$$\left(\mathrm{Tan}^{-1}(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\right)$$

例1 $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ を求めよ。

$\boxed{答}$: $\sin^{-1}([-1,1]) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に注意する

$x = \sin^{-1}\frac{1}{2}$ とおくと



$\sin x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$.

($x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ より唯1つに定まる)

・ $\cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

[性質] ① $\frac{d}{dy}(\sin^{-1}y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $(-1<y<1)$

② $\frac{d}{dy}(\cos^{-1}y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ $(-1<y<1)$

③ $\frac{d}{dy}(\tan^{-1}y) = \frac{1}{1+y^2}$

[証] $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ であった。

① $y = \sin x$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2} \text{ より}$$

$$\frac{d}{dy}(\sin^{-1}y) = \frac{dx}{dy} = \left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

② $y = \cos x$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x = -\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{d}{dy}(\cos^{-1}y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}.$$

③ $y = \tan x$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+y^2.$$

$$\frac{d}{dy}(\mathrm{Tan}^{-1}y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{1+y^2}$$

指数関数

定理（ネピアの定数）

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ は収束する. この値を } e \text{ とかく.}}$$

証明　$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおく.

$\{a_n\}$ が有界単調増加数列であることより

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \qquad \left({}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right)$$

$$= \underset{k=0}{1} + \underset{k=1}{1} + \underset{k=2}{\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}} + \underset{k=3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}} + \cdots + \underset{k=n}{\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}}$$

$$= \underset{k=0}{1} + \underset{k=1}{1} + \underset{k=2}{\frac{1}{2!}\,1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)} + \underset{k=3}{\frac{1}{3!}\,1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)}$$

$$+ \cdots + \underset{k=n}{\frac{1}{n!}\,1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}$$

$$\leqq \underset{k=0}{1} + \underset{k=1}{1} + \underset{k=2}{\frac{1}{2!}\,1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} + \frac{1}{3!}\,1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\,1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} 1 \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

おまけ

$$= a_{n+1}$$

よって $a_n \leq a_{n+1}$ より単調増加

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\leq 1 + \underbrace{\boxed{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}}}_{=2} = 3$$

$n! \geq 2^{n-1}$ を示せば $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

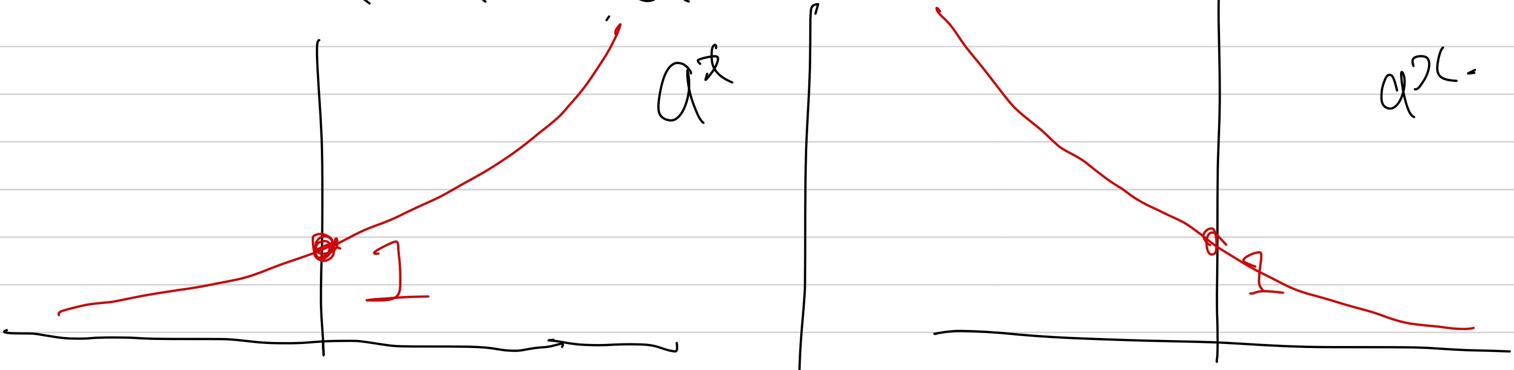
$n=5$ $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5!$

$1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 2^4$

$a_n \leq 3$ より有界

[定義] 指数関数、対数関数

◎ $a>0$, $a\neq 1$ のとき、
指数関数 a^x とする

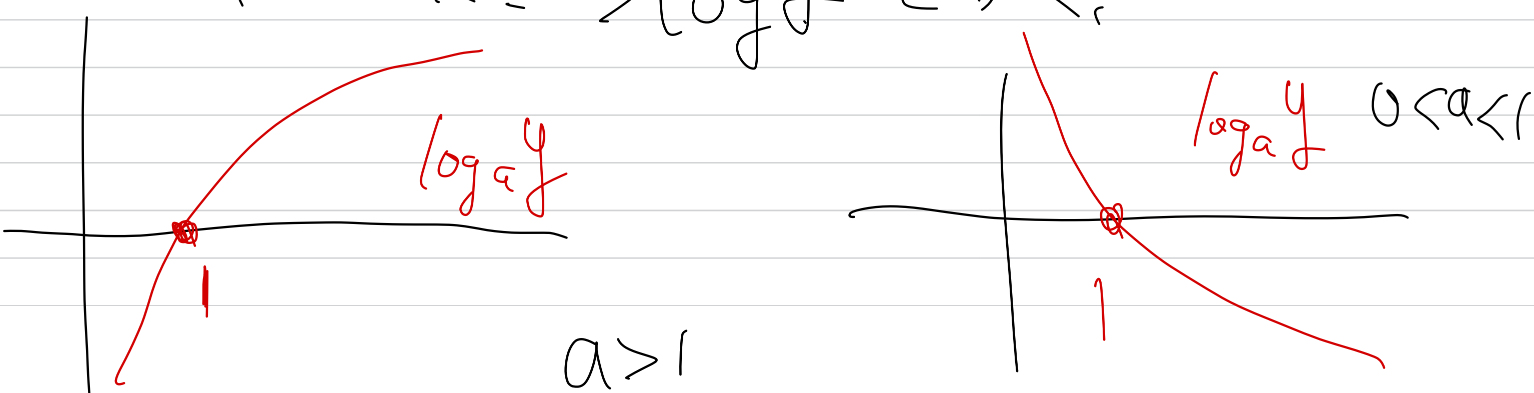


$a>1$ $\mathbb{R}$上単調増加

$0<a<1$ $\mathbb{R}$上単調減少

$f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$
逆関数が定められる

◎ $\log_a y : (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ を
a^x の逆関数という、対数関数という
$a=e$ のとき $\log y$ とかく、



[性質] $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

・ $\frac{d}{dx}a^x=(\log a)a^x$

とくに $\frac{d}{dx}e^x=e^x$.

・ $\frac{d}{dy}(\log_a y)=\frac{1}{y(\log a)}$ とくに $\frac{d}{dy}(\log y)=\frac{1}{y}$.

[証] ・ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(t+1)}=1$$

$(e^x-1=t)$

・ $$\frac{d}{dx}e^x=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}}_{=1}=e^x$$

$$a^x=e^{\log a^x}=e^{x\log a}$$

(合成微分)

$$\frac{d}{dx}(a^x)=\log a\cdot e^{x\log a}=(\log a)a^x$$

$y = a^x$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = (\log a) a^x = (\log a) y \text{ より}$$

$$\frac{d}{dy}(\log_a y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \quad \text{(逆関数の微分)}$$

$$= \frac{1}{(\log a)\, y}$$

【双曲線関数】

【定義】

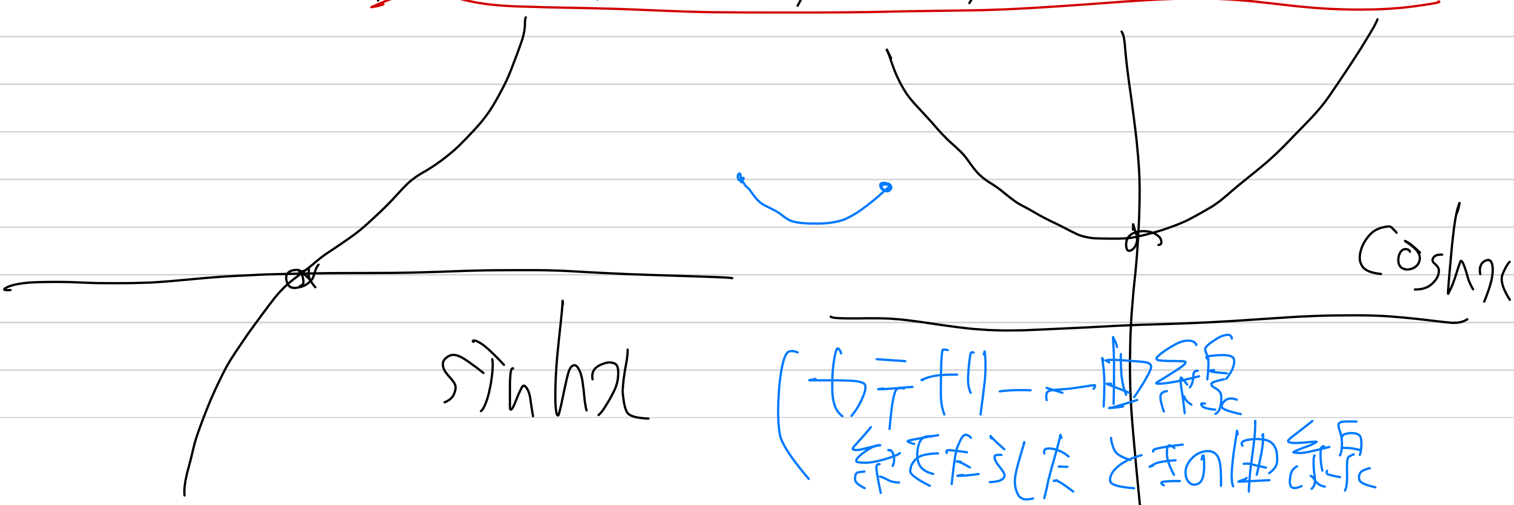
R上微分可能.

・ $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ハイパボリックサイン.

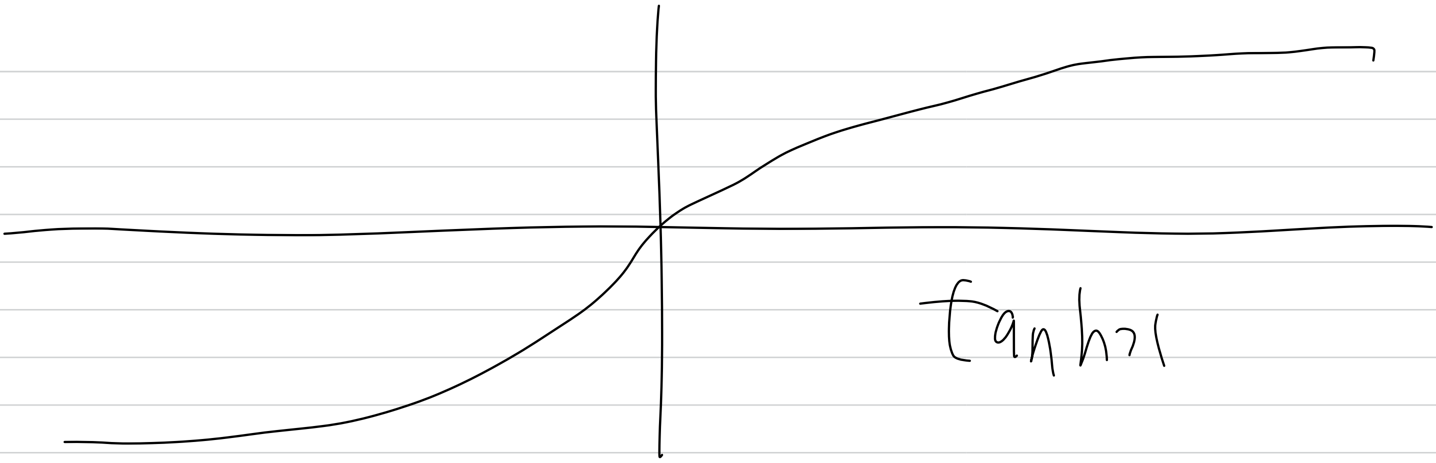
・ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ハイパボリックコサイン

・ $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

ハイパボリックタンジェント.



(カテナリー曲線
糸をたらしたときの曲線



[性質] ・ $(\cosh x)^2-(\sinh x)^2=1$

・ $\frac{d}{dx}(\sinh x)=\cosh x$

・ $\frac{d}{dx}(\cosh x)=\sinh x$

・ $\frac{d}{dx}(\tanh x)=\frac{1}{(\cosh x)^2}$

[証明] ・ $(\cosh x)^2-(\sinh x)^2$

$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=\frac{4}{4}=1$$

・ $\frac{d}{dx}(\sinh x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cosh x$

・ $\frac{d}{dx}(\cosh x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\sinh x$

・ $\frac{d}{dx}(\tanh x)=\frac{(\cosh x)^2-(\sinh x)^2}{(\cosh x)^2}=\frac{1}{(\cosh x)^2}$

演習 ① $\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を求めよ

$\mathrm{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

② $f(x)=\log(\log x)$ とする。

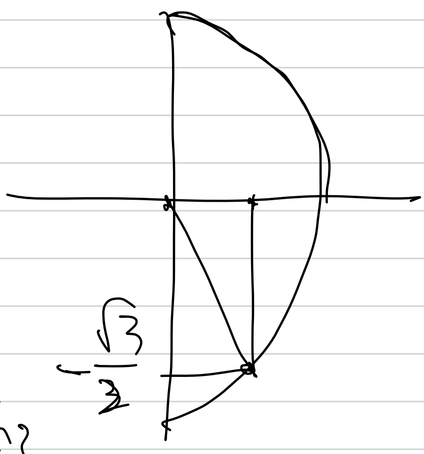
$f'(x)$を求めよ。

$\boxed{解答}$ ①

・$x=\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすると

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ である

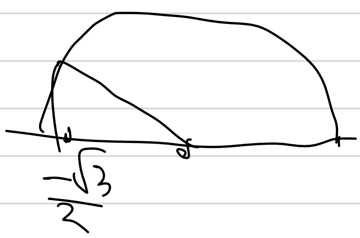
$x=-\frac{\pi}{3}$ となる



・$x=\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすると

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ かつ $0\leqq x\leqq\pi$ となる。

$x=\frac{5}{6}\pi$



・$x=\mathrm{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ とすると

$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ となり

$x=-\frac{\pi}{6}$.

② $z = g(y) = \log y$: $y = f(x) = \log x$ とする.

$z = g(f(x))$ より

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \left.\frac{1}{y}\right|_{y=f(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x(\log x)}$$