11 広義積分

[定義] $f(x)$ を $[a, b)$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ または $b = \infty$) 上の連続関数とする。

$\displaystyle\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$ が収束するとき

・$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$ とかき

広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するという。

・$\displaystyle\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$ が存在しないとき

広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は発散するという。

[補足] $f(x)$ が $(a, b]$ 上の連続な関数でも

$\displaystyle\lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)\,dx$ を使って広義積分を定義する

[例1]・広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ は収束する.

$\int_1^\beta \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\beta = 1-\frac{1}{\beta}$ より

$\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x^2}dx = 1$ で収束するから.

・広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ は発散する.

$\int_1^\beta \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int_1^\beta x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^\beta$
$= 2\beta^{\frac{1}{2}}-2$.

$\lim_{\beta\to\infty} 2\beta^{\frac{1}{2}}-2 = +\infty$ より発散する.

・広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ は発散する

$\int_1^\beta \frac{1}{x}dx = \log\beta$ より $\lim_{\beta\to\infty}\log\beta = +\infty$ から.

命題

① 広義積分 $\int_1^\infty x^p dx$ は
$p<-1$ のとき収束し $p\geqq -1$ のとき発散する

② 広義積分 $\int_0^1 x^p dx$ は
$p\leqq -1$ のとき発散し $p>-1$ のとき収束する

[証] ① $p \neq -1$ のとき

$$\int_1^\beta x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^\beta = \frac{\beta^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}.$$

$p+1>0$ ならば $\lim_{\beta\to\infty} \beta^{p+1} = +\infty$

$p+1<0$ ならば $\lim_{\beta\to\infty} \beta^{p+1} = 0.$ である。

$p=-1$ のとき

$$\int_1^\beta x^{-1} dx = [\log x]_1^\beta = \log\beta$$ より

$\lim_{\beta\to\infty} \log\beta = +\infty$ である

証明終

② も同じ

広義積分は計算できなくても
収束か発散の判定はできる。

[定理1]

$(b \in \mathbb{R}$ or $b = +\infty)$

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b)$ 上連続とする。

$[a, b)$ 上の連続関数 $g(x)$ で

$[a, b)$ 上 $|f(x)| \leqq g(x)$ かつ $\int_a^b g(x)\,dx$ が収束するならば

広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する

[定理2]

$f(x)$ は区間 $[a, b)$ 上連続とする。

$[a, b)$ 上の連続関数で

$[a, b)$ 上 $0 \leqq g(x) \leqq f(x)$ かつ $\int_a^b g(x)\,dx$ が発散するならば

広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は発散する

$\boxed{\text{例1}}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ は収束する。

[証] $\displaystyle\left|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ より

$\displaystyle g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ とおくとき

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ は収束す(命題をみより)から いえた。

$\boxed{\text{例2}}$ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}\,dx$ は発散する

[証] $2 \leqq x$ ならば $x-1 \leqq x$ より

$$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{x-1}.$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{x x}\right)^{\frac{1}{3}} \leqq \left(\frac{1}{x(x-1)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$g(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ とおくと $\displaystyle\int_2^\infty g(x)\,dx$ は発散するため いえた。

$\boxed{例13}$ ガンマ関数

$s>0$ のとき $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}$ は収束する。

[証] $f(x)=e^{-x}x^{s-1}$ とおく　$s+1>0$

$\boxed{1}$ $\lim_{x\to\infty}(e^{-x}x^{s-1}\cdot x^2)=\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^{s+1}=0$ より

($x^{s+1}=o(e^{x})$ $(x\to\infty)$)

あるc>1 があって

$[c,\infty)$ 上

$e^{-x}x^{s-1}\leqq x^{-2}$.

よって　$g(x)=x^{-2}$ とおくと

$\int_c^\infty g(x)dx=\int_c^\infty x^{-2}dx$ は収束するので

$\int_c^\infty f(x)dx$ は収束する。

$\boxed{2}$ $(0,c]$ 上では $e^{-x}<1$ より　($x>0 \Rightarrow e^{-x}<1$)

$e^{-x}x^{s-1}\leqq x^{s-1}$.

よって。 $g(x)=x^{s-1}$ とおくと　ただし $s-1>-1$

$\int_0^c g(x)dx=\int_0^c x^{s-1}dx$ は収束するので

$\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$ も収束する

[1], [2] よりいえた。

[証明] 定理2. かていより

$$0 \leqq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx \leqq \int_a^\beta f(x)\,dx$$ となる

よって $\lim_{n\to\infty}\int_a^\beta g(x)\,dx = +\infty$ よりいえた

[証明] 定理1 (概略; きちんとするなら(ε-N) ε-δ論法がいる)

$M = \int_a^b g(x)\,dx$ とし

$A_n = \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,dx$ とすると

$$|A_n| \leqq \int_a^{b-\frac{1}{n}} |f(x)|\,dx$$
$$\leqq \int_a^{b-\frac{1}{n}} g(x)\,dx \leqq M$$ である。

今 $\int_a^b g(x)\,dx$ が収束するので

$\lim_{h\to 0}\int_{b-h}^{b} g(x)\,dx = 0$ である。

よって $|A_n - A_m| \leqq \int_{b-\frac{1}{m}}^{b-\frac{1}{n}} |f(x)|\,dx$

$$\leq \int_{b-\frac{1}{m}}^{b-\frac{1}{n}} g(x)\,dx$$ から

n, m が十分に大きいと、$|A_n - A_m|$ は十分小さい。

$\leadsto$ $\{A_n\}$ はコーシー列 (実数の完備性)

$\leadsto$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ となる。

今、$h>0$ に対して、

$$F_h = \int_a^{b-h} f(x)\,dx$$ とすると、

$$|F_h - \alpha| \leq \left|F_h - A_{[\frac{1}{h}]+1}\right| + \left|A_{[\frac{1}{h}]+1} - \alpha\right|$$

$[\frac{1}{h}]+1 \geq \frac{1}{h}$,

$$\xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} F_h = \lim_{\beta\to b-0}\int_a^{\beta} f(x)\,dx = \alpha$$ //

[演習] pを実数とし $f(x)=x^p \log x$とする

① $p<-1$ならば

広義積分$\int_1^\infty f(x)dx$は収束することを示せ

② $p \geqq -1$ならば

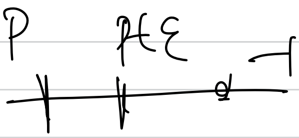
広義積分$\int_1^\infty f(x)dx$は発散することを示せ.

[こたえ]

計算でもできるが
もうちょいらくをする.

①

$\varepsilon>0$について $\dfrac{\log x}{x^\varepsilon} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ であったので



$p+\varepsilon<-1$となる $\varepsilon>0$をとると、

$$\frac{x^p \log x}{x^{p+\varepsilon}} = \frac{\log x}{x^\varepsilon} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

∴ ある十分大きな $c>0$があって、

$c<x \Rightarrow x^p \log x \leqq x^{p+\varepsilon}$.

$p+\varepsilon<-1$ より $g(x)=x^{p+\varepsilon}$ とおくと

$\int_c^\infty g(x)\,dx$ は収束、

$\therefore$ $\int_c^\infty f(x)\,dx$ は収束するので

$\int_1^\infty f(x)\,dx$ も収束する ($f(x)$ は $[1,c]$ 上 有界で)

$\boxed{2}$ $3\leq x$ 上 $\log x\geqq 1$ より

$x^p\log x\geqq x^p$.

$\int_3^\infty x^p\,dx$ は発散するので

$\int_3^\infty x^p\log x$ も発散する.

よって $\int_1^\infty x^p\log x$ も 発散する

($f(x)$ は $[1,3]$ 上 有界で)