8 リーマン積分の定義と微分積分学の基本定理

$\boxed{\text{この回の議論は難しいので理解しなくてよい}}$

とばしてもいい

$I=[a,b]$ とし、f を I 上の有界関数とする

（ある $M>0$ があって、$|f(x)|\leqq M$ となる
（$x\in I$ なら））

・Δ が I の分割とは、ある自然数 $m>0$ があって、

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$$

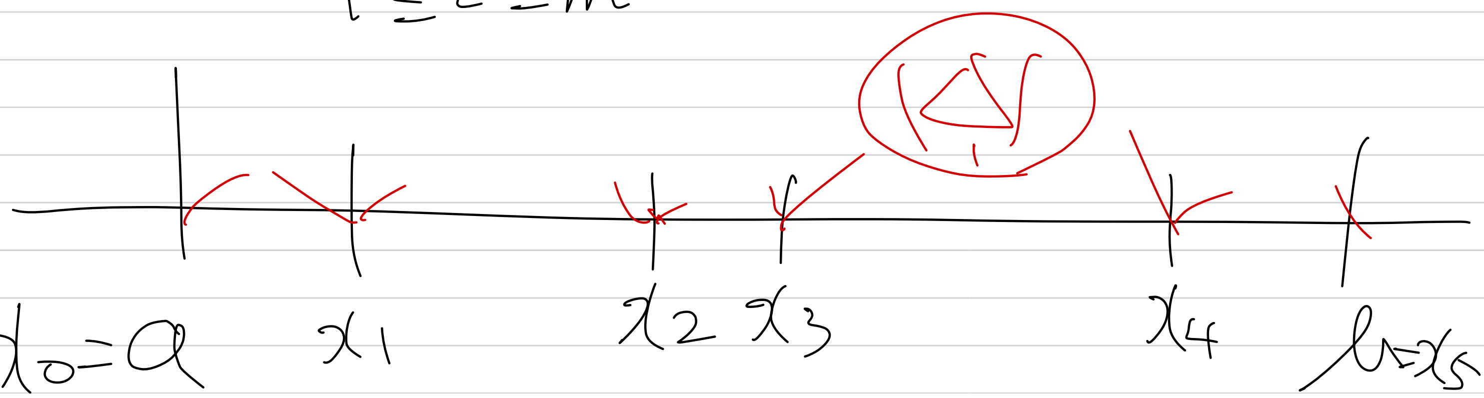
となる実数の組 $(a,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},b)$ のこと。

$$\Delta=(a,x_1,\ldots,x_{m-1},b) \text{ とかく}$$

（この議論だけの記号）

I の分割 Δ について、Δ の長さを

$$|\Delta| = \max_{1\leqq i\leqq m}\{|x_i-x_{i-1}|\} \text{ とする}$$



Iの分割Δと$1 \leq i \leq m$について、

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$ とおく

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$T_\Delta = \sum_{i=1}^{m} m_i (x_i - x_{i-1})$$ とおく。

（$T_\Delta \leq S_\Delta$ となる。）

定理（ダルブーの定理）

ある実数S, Tがあって、

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta = S, \quad \lim_{|\Delta| \to 0} T_\Delta = T$$ となる

（Δの長さが0になるようにΔの分割を細かくするとS_ΔはSに近づく）

（証明は省略）

[定義] $I=[a,b]$, f を I 上の有界関数とする。

f が I 上 (リーマン) 積分可能 (リーマン可積分) とは

$S=T$ となること $\left(\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} T_\Delta\right)$.

このとき $S=\int_a^b f(x)\,dx$ とあらわす。

$\int_a^b f(x)dx$ を $f(x)$ の $[a,b]$ における定積分という

また $\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ とする

[例] ① f が $[a,b]$ 上連続なら、

f は $[a,b]$ 上積分可能

($M_i - m_i$ を十分に小さくできるため)

$$\boxed{\text{みんながよく知っている関数は積分できる}}$$

[例12] $I=[0,1]$ とし、

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\text{が有理数} \\ 0 & x\text{が無理数} \end{cases}$$ とする

$f(x)$ はリーマン積分可能ではない

[証] $\Delta=(0,x_1,\dots,x_{n-1},1)$ を Δ の分割とする

$$M_i=\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\leqq x\leqq x_i\}=1$$

$$m_i=\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\leqq x\leqq x_i\}=0.$$

$$\therefore\ S_\Delta=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=1$$

$$s_\Delta=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=0$$

$$\therefore\ \lim_{|\Delta|\to 0}S_\Delta=1\neq 0=\lim_{|\Delta|\to 0}s_\Delta.$$

リーマン積分可能でない

【定理】 区分求積法

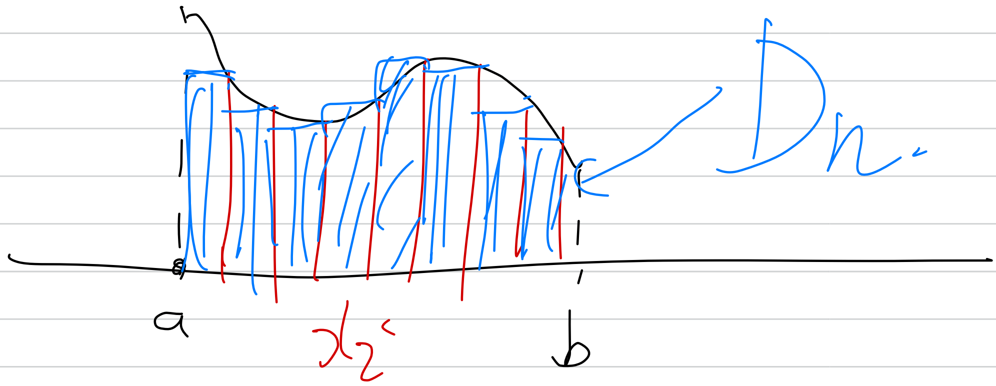
$I = [a, b]$ とし f を $[a, b]$ 上積分可能関数とする。

$n \in \mathbb{N}$ について、

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{n} i \text{ とし } (0 \leq i \leq n)$$

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n} \text{ とするとき}$$

$$\lim_{n \to \infty} D_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$



$\boxed{例1}$ $f(x) = x^2$ $I = [0, 1]$

f は I 上連続 $\Rightarrow$ f は積分可能。

$n \in \mathbb{N}$ について、

$$x_i = 0 + \frac{(1-0)i}{n} = \frac{i}{n} \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}.$$

よって、区分求積法より

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3} \quad //$$

$\boxed{証}$ $\Delta_n = (a, x_1, \cdots, x_{n-1}, b)$ とすると、

$$S_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$
$$\geqq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = D_n$$
$$\geqq \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = T_{\Delta_n}$$

$$\therefore S_{\Delta_n} \geqq D_n \geqq T_{\Delta_n}$$

$|\Delta_n| \to 0$ とすると ($n\to\infty$ することに同じ)

$\left(|\Delta_n| = \frac{1}{n}\right)$ (はさみうち)

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{|\Delta_n|\to 0} S_{\Delta_n}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \quad //$$

リーマン積分の定義

$\boxed{困ったこと}$

この定義だと、リーマン積分の計算ができない(ムズい)

定義 $f(x)$を閉区間I上の連続関数とする。

$a \in I$を1つ固定する。

$$F(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$
を$f(x)$の不定積分という。

$F(x)$を$\int f(x)\,dx$ともかく。

定義から、不定積分は定数をのぞいて唯一定まる

$$\left(\int_{a'}^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \underbrace{\int_{a'}^a f(t)\,dt}_{\text{定数}} \right)$$

[定理] 微分積分学の基本定理

$f(x)$を閉区間 I上の連続関数とすると

不定積分 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ は

微分可能で、$F'(x) = f(x)$となる

とくに $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

(積分の微分はもとにもどる)

[証] $h>0$とし、

$M_h = \sup\{f(t) \mid x \leqq t \leqq x+h\}$

$m_h = \inf\{f(t) \mid x \leqq t \leqq x+h\}$ とおく。

$[x, x+h]$上 $m_h \leqq f(t) \leqq M_h$ より

$$\int_x^{x+h} m_h dt \leqq \int_x^{x+h} f(t)dt = F(x+h) - F(x) \leqq \int_x^{x+h} M_h dt$$

$$(m_h)h \leqq F(x+h) - F(x) \leqq (M_h)h$$

$$\therefore m_h \leqq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqq M_h$$

$$M_h \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$ ($f(x)$のそれぞれ(小値)

$$m_h \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$

よって $\displaystyle\lim_{h\to 0+0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

同様に $\displaystyle\lim_{h\to 0-0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ より

$$F'(x) = f(x)$$ //

[命題] G を I 上の関数とする.

$G'(x) = f(x)$ ならば.

ある定数 C があって, $G(x) = \int f(x)dx + C$.

(不定積分は求めやすい)

(例1) $f(x) = x^2$, $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ より

$$\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

[証] $F(x) = \int f(x)dx$ とする.

$F'(x) = f(x)$ (微分積分学の基本定理より)

F, G ともに C^1 級で $F' = G' = f$ である.

よって $(F-G)' = 0$ より $F-G$ は I 上定数関数より (第4回でやった)

ある定数 C があって $F - G = C$ //

[定理] f を $[a,b]$ 上連続な関数とし, $G(x)$ を $G'(x) = f(x)$ なる関数とする.

このとき $\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$ となる

[例] $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

(区分求積法より) かんたん

[証] 命題より $G(x) = \int_a^x f(x)dx + C$ のため

$G(a) = C$ である. b代入

よって $\int_a^b f(x)dx = G(b) - C = G(b) - G(a)$ //

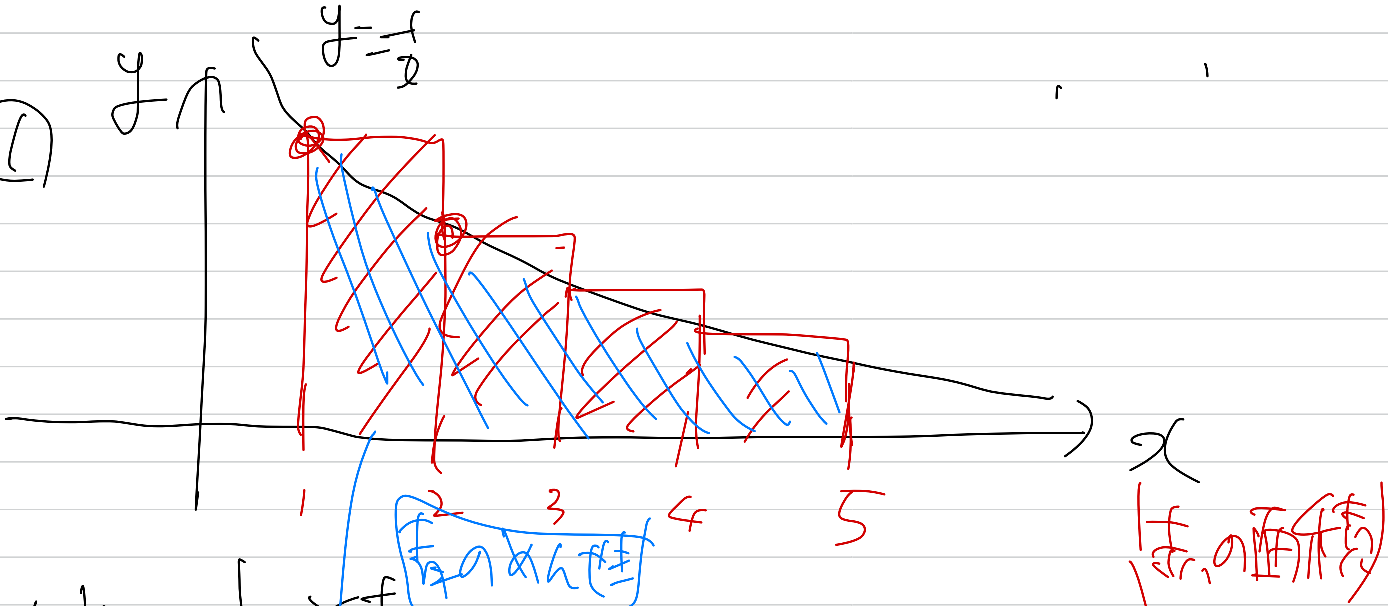
演習：$n, x \in \mathbb{N}$ について

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$$ とおく。

① $\lim_{n\to\infty} S_n(1)$ は発散することを示せ

② $\lim_{n\to\infty} S_n(2)$ は収束することを示せ。

解①



$f(x) = \frac{1}{x}$ とおく。

$[1, n]$ の分割 $\Delta_n = (1, 2, 3, \ldots, n)$ とおく。

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = S_n(1)$$

$$\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^n = \log n$$

$\left((\log x)' = \frac{1}{x} \text{ より} \right)$

$$\lim_{n\to\infty} \log n \leq \lim_{n\to\infty} S_n(1)$$

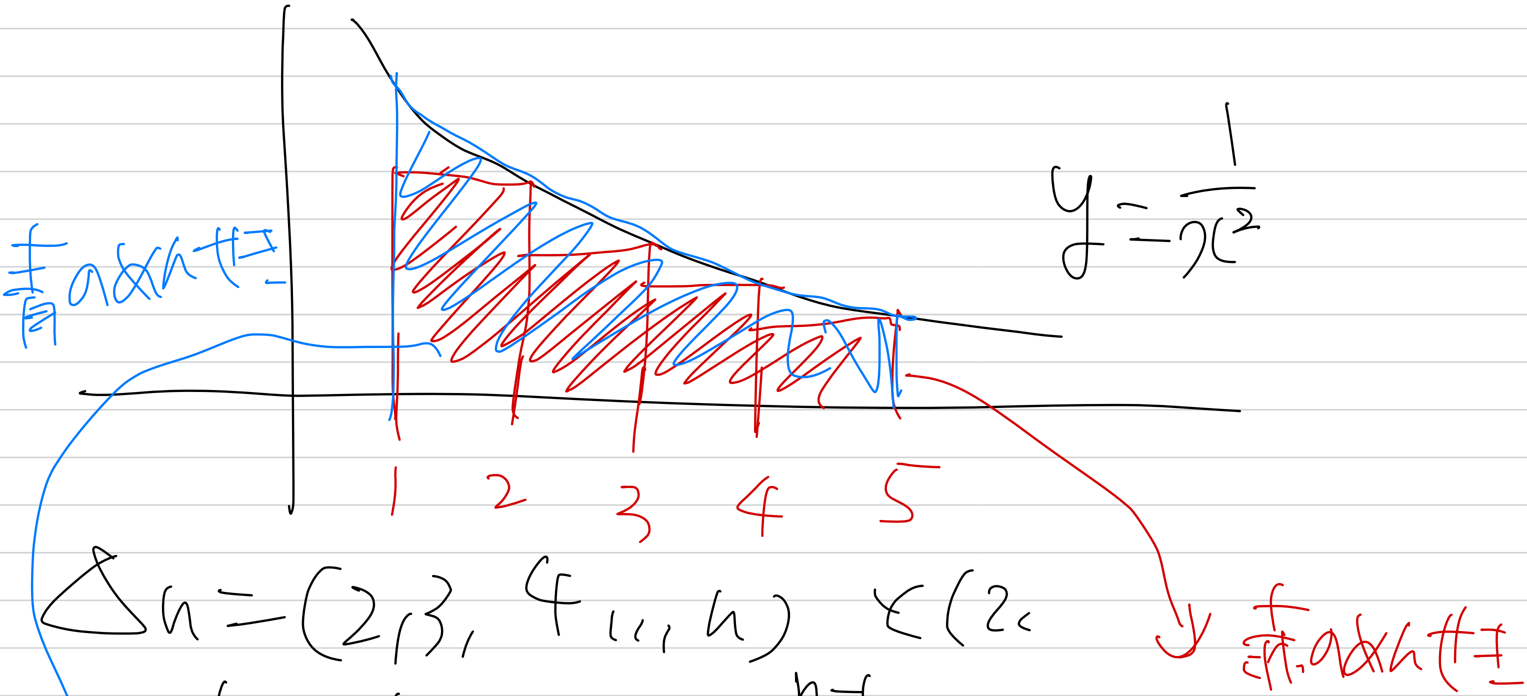
$$\parallel$$

$$+\infty$$

より 発散する

② $S_n(2) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ とする.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ とし



$\Delta n = (2, 3, 4, \ldots, n)$ とし

$$\int_2^n \frac{1}{x^2}\,dx \geq \sum_{i=1}^{n-1} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = S_n(2) - 1$$

$$\int_2^n \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2}$$ より

$$S_n(2) \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{n} < \frac{3}{2}$$ より,

$\{S_n(2)\}$ は有界、単調増加

$\Rightarrow$ 収束する。

$\boxed{\text{補足}}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$= \frac{\pi^2}{6}.$$

バーゼル問題 (1644)

Euler が (1735) にといた。

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots}$$