6 漸近展開とべき級数展開 ふくしゅう

[定理] 有限テーラー展開

$f(x)$ を開区間 I 上の C^n 級関数とする。

$a \in I$ を固定する。

任意の $x \in I$ についてある $\theta \in (0,1)$ があって、

$$f(x) = f(a) + f'(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n.$$

右辺を $x=a$ における有限テーラー展開とよび、

$\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を剰余項とよぶ

(R_n とかく)

とくに、

$a=0$ のとき 有限マクローリン展開とよぶ。

今日やること:関数を多項式で近似する

定義（ランダウの記号）

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$ のとき $f(x)=o(g(x))$ とかく。$(x\to a)$

$f(x)=o(1)\ (x\to a)$ は $\lim_{x\to a}f(x)=0$ と同値。

[例1] $x^5=o(x^3)\quad(x\to 0)$

[証] $\frac{x^5}{x^3}=x^2\xrightarrow[x\to 0]{}0$ より

[例2] $\sin x=x+o(x^2)$ $(x\to 0)$

[証] $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0$
ロピタル　ロピタル　より

[例] $\log x=o(x^\alpha)\quad x\to\infty$ （$\alpha>0$ なる実数）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t\alpha}}=0$$ より。

（$t=o(e^{\alpha t})$ です。

$f(t)=e^{\alpha t}-t,\quad f'(t)=\alpha e^{\alpha t}-1.$
$t>>0,\ \alpha>0,\ e^\alpha>1$ より $f'(t)>0$.
$f(t)$ 単調増加 より ok）

とくに $x\log x=o(x^{1+\alpha})\ (x\to\infty)$
$x=o(e^{\alpha x})\ (x\to\infty)$

[性質] $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})\ (x \to 0)$

$m, n \in \mathbb{N}$ として、$o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})\ (x \to 0)$

$m \leq n$ なら $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$

証) ① $\dfrac{x^m o(x^n)}{x^{m+n}} = \dfrac{o(x^n)}{x^n} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$

② $\dfrac{o(x^m)o(x^n)}{x^{m+n}} = \left(\dfrac{o(x^m)}{x^m}\right)\left(\dfrac{o(x^n)}{x^n}\right)$ より

③ $\dfrac{o(x^m)+o(x^n)}{x^m} = \dfrac{o(x^m)}{x^m} + x^{n-m}\dfrac{o(x^n)}{x^n}$ $\boxed{n-m \geq 0}$

$\xrightarrow[x \to 0]{} 0 + 0 = 0$

[定理] 漸近展開

$f(x)$ が a を含む開区間において C^n 級なら

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

$(x \to a)$

とくに $a = 0$ のとき

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$(x \to 0)$

[例] $f(x)=e^x$ のとき

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$f(x)=\sin x$ のとき

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$$

[証] 有限テーラー展開の定理から 十分な正の数 $\varepsilon>0$ について

任意の $x\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ について、ある $0<\theta<1$ があって

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n$$

$$=\underbrace{\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n}_{R_n}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ であった}$$

よって右辺を $g(x)$ として $\dfrac{g(x)}{(x-a)^n}\xrightarrow[x\to a]{}0$ を示す

$$\frac{g(x)}{(x-a)^n}=f^{(n)}(a+\theta(x-a))-f^{(n)}(a)$$

$$\xrightarrow[x\to a]{} f^{n}(a)-f^{n}(a)=0.$$

C^n級

//

[補足] べき級数展開

$f(x)$ を 区間 I 上の C^∞ 級関数とし、$a \in I$ とする。任意の $x \in I$ について、ある $0<\theta<1$ があって

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$ であった。

今 $b \in I$ において、$|R_n(b)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ となるならば

$$f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$ となる。

[例] $f(x) = e^x$, $a=0$, b を実数とすると

$$R_n(b) = \frac{e^{b\theta}}{n!} b^n$$ より

$$|R_n(b)| = \frac{|e^{b\theta}|}{n!} b^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\left(\frac{b^n}{n!} \to 0 \right.$$ $n!$ と b^n なら $n!$ が つよい)

$$\therefore \quad e^b = f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} b^n$$

$$= 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \cdots$$

とくに $b=1$ のとき $e = 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \cdots$

$\boxed{例112}$ $f(x) = \sin x$ のとき、$a=0$, b 実数として

$$R_{2n}(b) = \frac{(-1)^n \sin \theta b}{(2n)!} b^{2n}.$$

$$|R_{2n}(b)| = \frac{|\sin \theta b|}{(2n)!} b^{2n} \leqq \frac{b^{2n}}{2n!} \longrightarrow 0.$$

$$\therefore\ |R_{2n}(b)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

よって $\sin b = b - \frac{1}{3!} b^3 + \frac{1}{5!} b^5 - \cdots \cdots$

$\boxed{注意}$ $R_n(b) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ は必要。

なぜならば‥‥

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} + (\theta x)^n$$ だが

（演習 にまわす）

$R_n(b) = (\theta b)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ なる b は $|b|<1$ なるものにかぎられる

実際 $|b|<1$ なら

$$\frac{1}{1-b} = 1 + b + b^2 + b^3 + \cdots + \cdots$$ だが

$b=10$ においても正しくない。

$$\left(\frac{1}{9} \neq 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots \right)$$ まちがい

初等関数の漸近展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \quad (x \to 0)$$

じゅうぶんにきれい

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n}) \quad (x \to 0)$$

$$\left(f(x) = \cos x \text{ として. } f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \cos x & n = 2m \\ (-1)^m \sin x & n = 2m-1 \end{cases} \right)$$

$\tan x$. きれいにかけないらしい. (ベルヌーイ数をもちいる とかなんとか)

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

$\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, やばい.

$\tan^{-1}$ へ レポートにだしました.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \to 0)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$|x| < 1$

[証] $f'(x) = (1+x)^{-1}$

$f''(x) = -(1+x)^{-2}$

$f'''(x) = (-1)^2\, 2\, (1+x)^{-3}$

$f^{(4)}(x) = (-1)^3\, 3!\, (1+x)^{-4}$

$$\cdots \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n} \quad (n \geq 1)$$

とくに $n \geq 1$ $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$f^{(0)}(0) = 0.$$

よって $\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \quad (x \to 0)$$

(補足) $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$

(ただし厳密な証明はできない)

($R_n(x)$ の評価がいる)

$\cosh x$. レポートにだしました

$\sinh x$ について. $f(x) = \sinh x$ とおく

$$f'(x) = \cosh x \quad f''(x) = \sinh x = f(x)$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n = 2m+1 \\ 0 & n = 2m \end{cases}$$

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

ちなみに、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$-)\ e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots - \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$ //

［演習］ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$ $(x \to 0)$ を示せ。

$\boxed{\text{解答}}$ $f(x) = (1-x)^{-1}$ とし

$$f'(x) = -(1-x)^{-2} \cdot -1 = (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 3!(1-x)^{-4}$$ より

$$f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$$ となる

よって $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$ $(x \to 0)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{k!}x^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$ //