第 12 回. 曲線の長さ (三宅先生の本, 3.4 の内容)

岩井雅崇 2021/07/06

1　曲線の定義と曲線の長さ

定義 1.

$$\begin{array}{cccc} C: & [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

が 滑らかな曲線とは次の 2 条件を満たすこと.

- $x(t), y(t)$ 共に $[a,b]$ 上の C^1 級関数.
- 任意の $t \in (a,b)$ について, 速度ベクトル $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ である.

滑らかな曲線 C に関してその長さを

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \quad \text{とする.}$$

定理 2. $f(x)$ を $[a,b]$ 上の C^1 級関数とする. このとき $y = f(x)$ のグラフ $C = \{(x, f(x)) \mid a \leqq x \leqq b\}$ の長さは

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \quad \text{である.}$$

例 3. 放物線 $y = x^2 (0 \leqq x \leqq 1)$ のグラフの長さを求めよ.
(答.) $f(x) = x^2$ とすると $f'(x) = 2x$ のため, 曲線の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + t^2}dt \\ &= \frac{1}{4}\left[t\sqrt{t^2+1} + \log\left|t + \sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \log\left(2 + \sqrt{5}\right)\right) \end{aligned}$$

定理 4. $[\alpha, \beta]$ 上の C^1 級関数 $f(\theta)$ を用いて, 曲線 C が

$$\begin{array}{cccc} C: & [\alpha,\beta] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \longmapsto & (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta) \end{array}$$

と表されているとき, C の長さは

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta \quad \text{である.}$$

例 **5.** (アルキメデスの螺旋) 正の実数 a, α について

$$\begin{array}{cccc} C: & [0,\alpha] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \longmapsto & (a\theta\cos\theta, a\theta\sin\theta) \end{array}$$

とする. 曲線 C の長さを求めよ.
(答.) $f(\theta) = a\theta$ とすると $f'(\theta) = a$ のため, 曲線の長さは

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{a^2 + (a\theta)^2} d\theta = a\int_0^{\alpha} \sqrt{1 + (\theta)^2} d\theta = \frac{a}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2+1} + \log\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right)\right)$$

2 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. 正の実数 a, b について $f(x) = a\cosh\frac{x}{a} - a$ とする. グラフ $C = \{(x, f(x)) \mid 0 \leqq x \leqq b\}$ の長さを a, b を用いて表せ.