第 9 回. 積分の性質 (三宅先生の本, 3.1 と 3.2 の内容)

岩井雅崇 2021/06/15

1 積分の性質

定理 1. $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とし, $F(x)$ を $F'(x) = f(x)$ となる $[a,b]$ 上の関数とする. このとき

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \text{ となる.}$$

命題 2 (積分の性質)**.** $f(x), g(x)$ 共に $[a,b]$ 上の連続関数とし, $G(x) = \int g(x)dx$ とする.

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
2. k を定数とするとき, $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
3. (置換積分法)
$$\begin{array}{rccc} x(t): & [\alpha,\beta] & \to & [a,b] \\ & t & \longmapsto & x(t) \end{array}$$
を C^1 級関数とし, $a = x(\alpha), b = x(\beta)$ とするとき
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx(t)}{dt}dt \text{ となる.}$$
4. (部分積分法) $f(x)$ が C^1 級であるとき,
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \Big[f(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx \text{ となる.}$$

2 不定積分の例

簡単な積分に関してまとめておく．積分定数に関しては省略する．また a を実数とする．

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1 \text{ のとき})$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{|a|} \quad (a \neq 0 \text{ のとき})$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a} \quad (a \neq 0 \text{ のとき})$$
$$\int e^x\,dx = e^x$$
$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x \quad (a > 0 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ のとき})$$
$$\int \log x\,dx = x\log x - x$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x$$
$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x$$

3 ウォリスの公式

定理 3. n を自然数として，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt \text{ とする．}$$

n が偶数のとき，

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ であり．}$$

n が奇数のとき，

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 \text{ である．}$$

[1]

[1] $n!!$ は二重階乗と呼ばれる．n を正の自然数として，$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$, $(2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2$ である．便宜上 $0!! = 1$ とする.($0! = 1$ であるので.)

定理 4 (ウォリスの公式)**.**

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \lim_{m\to\infty} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \cdot \frac{(2(m-1))^2}{(2m-1)(2m-3)} \cdots \frac{2^2}{3\cdot 1} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{4m^2})} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{4(m-1)^2})} \cdots \frac{1}{(1-\frac{1}{4})} \text{ となる.}\end{aligned}$$

つまり

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \cdot \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \cdots \quad \text{である.}$$

[2]

4　演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. 不定積分 $\int x \log x \, dx$ を求めよ.

[2] 積の記号を使って書けば,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{4m^2})} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{4(m-1)^2})} \cdots \frac{1}{(1-\frac{1}{4})} = \Pi_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{4i^2})} \quad \text{である.}$$