10 不定積分の計算方法

① 有理式の積分

[定義] $f(x), g(x)$ を実数係数の多項式とする

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を有理式という

以下、

f と g を同時に割りきる多項式がないと仮定する
(既約分)

[定理] 有理式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は次の3つの式の和に分解される.

(1) 多項式

(2). $\dfrac{a}{(x+b)^m}$ $a, b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$. $m \geq 1$.

(3) $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^m}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$.

特に. $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{R}$ と $m_1, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}$ を用いて

、 $g(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots\cdots (x-\alpha_\ell)^{m_\ell}$ と表せるとき

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は 多項式 と $\dfrac{b_i}{(x-\alpha_i)^m}$ $(1 \leq m \leq m_i)$

の形でかける

例 $h(x)=\dfrac{5x-4}{2x^2+x-6}$ について。

$2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$ より であるので

$$\frac{5x-4}{2x^2+x-6}=\frac{a}{2x-3}+\frac{b}{x+2}$$ とおける

$$\frac{a}{2x-3}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b(2x-3)}{(2x-3)(x+2)}$$

$$=\frac{(a+2b)x+2a-3b}{(2x-3)(x+2)}$$

$\therefore\ a+2b=5,\ 2a-3b=1$

$a=1,\ b=2$ 未定係数法

$$\therefore\ \frac{5x-4}{2x^2+x-6}=\frac{1}{2x-3}+\frac{2}{x+2}$$

でもいいし。

$$h(x)=\frac{a}{2x-3}+\frac{b}{x+2}\ \text{より}$$

$$a=h(x)(2x-3)-\frac{(2x-3)}{x+2}b\ \text{より}$$

$$=\frac{5x-4}{x+2}-\frac{2x-3}{x+2}b.$$

$x=\frac{3}{2}$ をいれて。 $a=\dfrac{\frac{15}{2}-4}{\frac{3}{2}+2}=\dfrac{15-8}{3+4}=1$

$$b = h(x)(x+2) - \frac{x+2}{2x-3}a$$
$$= \frac{5x-4}{2x-3} - \frac{x+2}{2x-3}a$$

$x=-2$ 代入に。

$$b = \frac{-10-4}{-4-3} = 2. \ //$$

テーラー展開法

$\boxed{例2}$ $\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}$

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} \text{ とおく}$$

(右辺) $\frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2+(c-b)x+a-c}{(x-1)(x^2+1)}$

$$a+b = c-b = 0, \ a-c=2.$$

$$\therefore a=1 \quad b=-1 \quad c=-1$$

$$\therefore \frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} \ //$$

未定係数法

もしくは $\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}$ は $\frac{1}{(x-1)^m}$ と $\frac{1}{(x^2+1)}$ のパーツでわかれるはずだ

$$\parallel$$

$$\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x-1)}$$
$$= \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{(x^2+1)}$$

念力。

多項式や $\frac{a}{(x+b)^m}$, $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^m}$ は
不定積分がわかるので、
有理式の不定積分は計算できる!!

例11.1

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}\,dx = \int \frac{1}{2x-3} + \frac{2}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|2x-3| + 2\log|x+2|$$

例11.2 $\int \frac{2\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$

$$= \int \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x^2+1| - \mathrm{Tan}^{-1}x.$$

② 無理関数がある場合

$\boxed{2\text{-}1}$ 1次分数 $\sqrt[n]{ax+b}$ があるとき、$t=\sqrt[n]{ax+b}$ とおくと

$x=\frac{t^n-b}{a}$, $dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt$ より有理式に帰着

$\boxed{2\text{-}2}$ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ があるとき $a>0$ なら

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ とおけば

いいことがあるかもしれん。

$\boxed{2\text{-}3}$ $ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\alpha\neq\beta$ のとき

$t=\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ とおけばいいことがあるかもしれん

[例1] $\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$ $t=\sqrt{x-1}$ とおく

$x=t^2+1$

$dx=2t\,dt$ より

$$\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}=\int\frac{2t\,dt}{t^2+1+2t}$$

$$=\int\frac{2t\,dt}{(t+1)^2}$$

$$=\int\frac{2(t+1)-2}{(t+1)^2}dt$$

$$= \int \frac{2}{t+1}dt - \int \frac{2}{(t+1)^2}dt$$

$$= 2\ln|t+1| + \frac{2}{t+1}$$

$$= 2\ln(1+\sqrt{x-1}) + \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} \quad //$$

① 三角関数の有理式の積分

$\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$ とか

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと、 $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2}$$

$$\therefore \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2t}{1-t^2}$$

このへんかんで計算できる!

(例1) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$ 　　 $t = \tan\frac{x}{2}$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{(1+t^2)+2t}{((1+t^2)+(1-t^2))} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{(t^2+2t+1)}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int 1 + \frac{2t}{1+t^2}\, dt$$

$$= t + \log(1+t^2)$$

$$= \tan\frac{x}{2} + \log\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) \quad //$$

[演習] $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-x-6}\,dx$ を求めよ.

$$\frac{x^2}{x^2-x-6} = \frac{x^2}{(x+2)(x-3)}$$ を部分分数分解する

① $$\frac{x^2}{(x+2)(x-3)} = g(x) + \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$$

gは多項式.

$\times(x+2)$ して, $x=-2$ を代入.

$$-\frac{4}{5} = \left.\frac{x^2}{x-3}\right|_{x=-2} = a. \qquad a = -\frac{4}{5}$$

$\times(x-3)$ して. $x=3$ 代入

$$\frac{9}{5} = \left.\frac{x^2}{x+2}\right|_{x=3} = b \qquad b = \frac{9}{5}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2-x-6} - \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-3}$$

$$= \frac{x^2}{(x+2)(x-3)} + \frac{4}{5}\frac{1}{x+2} - \frac{9}{5}\frac{1}{(x-3)}$$

$$= \frac{5x^2 + 4(x-3) - 9(x+2)}{5(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{5x^2 + 4x - 12 - 9x - 18}{5(x+2)(x-3)} = \frac{5x^2 - 5x - 30}{5(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 - x - 6}{(x+2)(x-3)} = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{(x+2)(x-3)} = 1 - \frac{4}{5(x+2} + \frac{9}{5(x-3)}$$

$$\therefore \int \frac{x^2}{(x+2)(x-3)} = \int\left(1 - \frac{4}{5(x+2)} + \frac{9}{5(x-3)}\right)dx$$

$$= x - \frac{4}{5}\log(x+2 + \frac{9}{5}\log|x-3| \;//$$

$\boxed{\text{[illegible]}}$

$x^2 - x - \cancel{6}$

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-3)} = 1 + \frac{x+6}{(x+2)(x-3)}$$

$$= 1 + \frac{a(x+2) + b(x-3)}{(x+2)(x-3)}$$

$5a = 9 \quad a = \frac{9}{5}$

$a + b = 1 \quad b = -\frac{4}{5}$

$2a - 3b = 6$

$$= 1 + \frac{\frac{9}{5}(x+2) - \frac{4}{5}(x-3)}{(x+2)(x-3)}$$

$$= 1 - \frac{4}{5(x+2)} + \frac{9}{5(x-3)}$$

トーハニル
パリー