# 8 リーマン積分の定義と微分積分学の基本定理

この回は難しいので理解しなくてよい。

$I=[a,b]$ とし, $f$ を $I$ 上の有界関数とする
（ある $M>0$ が有って $|f(x)|\leq M$ ）

・$\Delta$ が $I$ の分割とは、ある自然数 $m>0$ があって
$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ となる
正の数の組 $(a, x_1, \ldots, x_{m-1}, b)$ のこと。

$\Delta=(a, x_1, \ldots, x_{m-1}, b)$ とかく
（この要素の記号）

・$I$ の分割 $\Delta$ について、$\Delta$ の長さを

$$|\Delta| = \max_{1\leq i\leq m}\{|x_i - x_{i-1}|\} とする$$

$I$ の分割 $\Delta$, と $1 \leq i \leq m$ なる自然数 $i$ に対し、

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$
$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

とする

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m} M_i (x_i - x_{i-1})$$
$$T_\Delta = \sum_{i=1}^{m} m_i (x_i - x_{i-1})$$

とおく.

$T_\Delta \leq S_\Delta$ である

<u>定理</u> (ダルブーの定理)

ある実数 $S, T$ があって.

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta = S, \quad \lim_{|\Delta| \to 0} T_\Delta = T,$$

($\Delta$ 長さが 0 になるように $\Delta$ の分割を細かくしていくと, $S_\Delta$ は $S$ に近づく.)

(証明は省略)

[定義] $I=[a,b]$, $f$ を $I$ 上の有界関数として

(リーマン)可積分
$f$ が $I$ 上(リーマン)積分可能とは $S=T$ となること

$$\left(\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} T_\Delta\right)$$

このとき

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$ と表わす。

$\int_a^b f(x)dx$ を $f(x)$ の $[a,b]$ における定積分という

また $$\int_a^a f(x)dx=0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)dx$$ とする。

[例] ① $f$ が $[a,b]$ 上 連続なら 積分可能。

(有界である)

[ステップ4 $M_i-m_i$ を十分に小さくできるか)

みんながよく知っている関数は積分できる

[例1.2] $I=[0,1]$ とし

$$f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ 有理数} \\ 0 & x \text{ 無理数}\end{cases}$$ とする

$f(x)$ は $I$ 上 リーマン積分可能でない

[証] $\Delta=(0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ を $I$ の分割とする。

$$M_i=\sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i\}=1$$

( $(x_{i-1}, x_i)$ の中に有理数があるから)

$$m_i=\inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i\}=0$$

$$\therefore S_\Delta=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=1$$

$$T_\Delta=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=0$$

よって $\displaystyle\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta=1 \neq 0=\lim_{|\Delta| \to 0} T_\Delta$

リーマン積分不可能

【定理】 区分求積法

$I = [a, b]$ とし $f$ を $[a,b]$ 上で積分関数とする

今 $n \in \mathbb{N}$ について、

$$x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$$ と定め、($0 \leq i \leq n$ なるすべて)

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n}$$ とするとき

$$\lim_{n \to \infty} D_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

【例1】 $f(x) = x^2$, $I = [0, 1]$ で積分.

$n \in \mathbb{N}$ について、

$$x_i = 0 + \frac{(1-0)i}{n} = \frac{i}{n} \quad (0 \leq i \leq n)$$ より、

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}$$

よって、

$$\lim_{n \to \infty} D_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

$\left( \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ より} \right)$

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ よりあっている

---

[証] $\Delta_n = (a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b)$ とすると.

$$S_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = D_n$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = T_{\Delta_n}$$

$\therefore \quad S_{\Delta_n} \geqq D_n \geqq T_{\Delta_n}$ となる

よって $|\Delta_n| \to 0$ とすると.
$(n \to \infty)$

$$\lim_{n \to \infty} D_n = \lim_{|\Delta_n| \to 0} S_{\Delta_n} = \int_a^b f(x) dx.$$

リーマン積分可能

困ったこと

(ムズカシイ)

このままでは積分の計算ができない

例　$f(x) = x^2$　$I = [0,1]$ でも大変!

$f(x) = x^5$ だと もうムリ.

$\rightsquigarrow$ "微分積分学の基本定理"

定義

$f(x)$ を閉区間 $I$ 上の連続関数とする.

$a \in I$ を1つ固定する.

$$F(x) : I \to \mathbb{R} \quad を$$
$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

$f(x)$ の不定積分とよぶ.

$F(x)$ を $\int f(x)\,dx$ と表わす.

定義から不定積分は定数をのぞいて唯1つに定まる.

$$\left( \int_b^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{定数} \right)$$

[定理] 微分積分学の基本定理

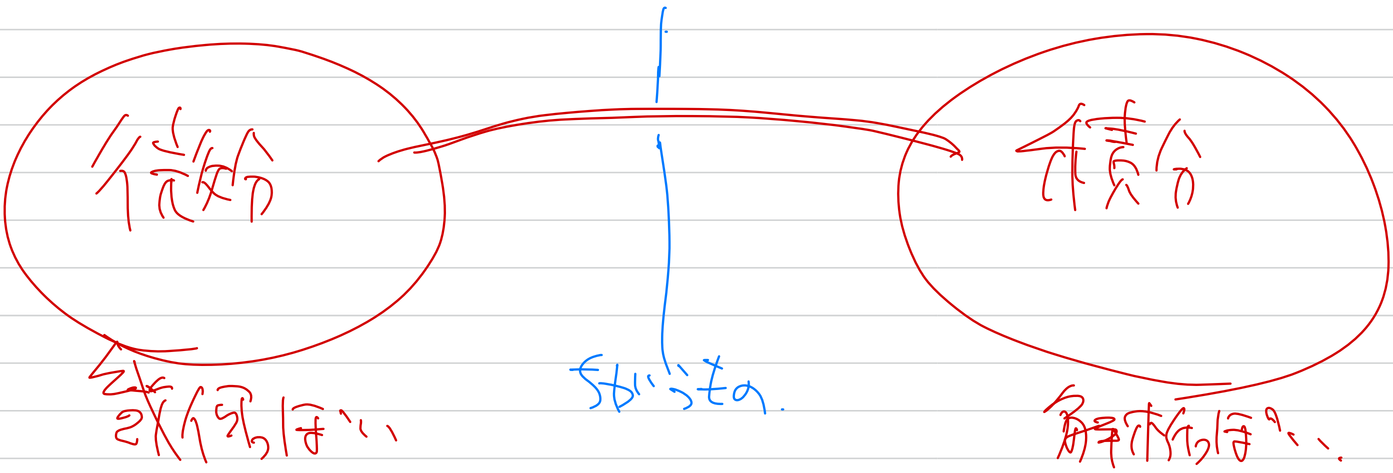
$f(x)$ を区間 $I$ 上の連続関数とする

不定積分 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ は微分可能で

$$F'(x)=f(x)$$ となる

とくに $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

積分の微分はもとにもどる.




[証] $h>0$ とし

$M_h = \sup\{f(t) \mid x \leqq t \leqq x+h\}$

$m_h = \inf\{f(t) \mid x \leqq t \leqq x+h\}$ とする

$[x, x+h]$ 上 $m_h \leqq f(t) \leqq M_h$ より

$$\int_x^{x+h} m_h\,dt \leqq F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqq \int_x^{x+h} M_h\,dt$$

$$\therefore\ (m_h)h \leqq F(x+h)-F(x) \leqq (M_h)h$$

$$m_h \leqq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqq M_h$$

$M_h, m_h \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$ より (fの連続性)

よって

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

同様に $\displaystyle\lim_{h \to 0-0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ より $F'(x) = f(x)$.

[命題] $G$ を $I$ 上の関数とする

$G'(x) = f(x)$ ならば ある定数 $C$ があって.

$$G(x) = \int f(x)dx + C.$$

(不定積分は求めやすい)

[例] $f(x) = x^2$ のとき. $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ より

$$\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

[証] $F(x) = \int f(x)dx$ とするとき

$F, G$ ともに $C^1$ 級. かつ $F' = G' = f$.

よって $(F-G)' = 0$ より

$F-G$ は $I$ 上 定数関数である (第4回講義 平均値の定理).

[定理] $f$を$[a,b]$上連続な関数とし、
$G(x)$を$G'(x)=f(x)$なる関数とする。

このとき定積分$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b$
$= G(b)-G(a)$である

[例] $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$
$= \frac{1}{3}$ かんたん!!

[証明] 命題より $G(x)=\int_a^x f(x)dx + C$
(C定数)とおく
$G(a)=C$であるので

よって $\int_a^b f(x)dx = G(b)-C = G(b)-G(a)$ //

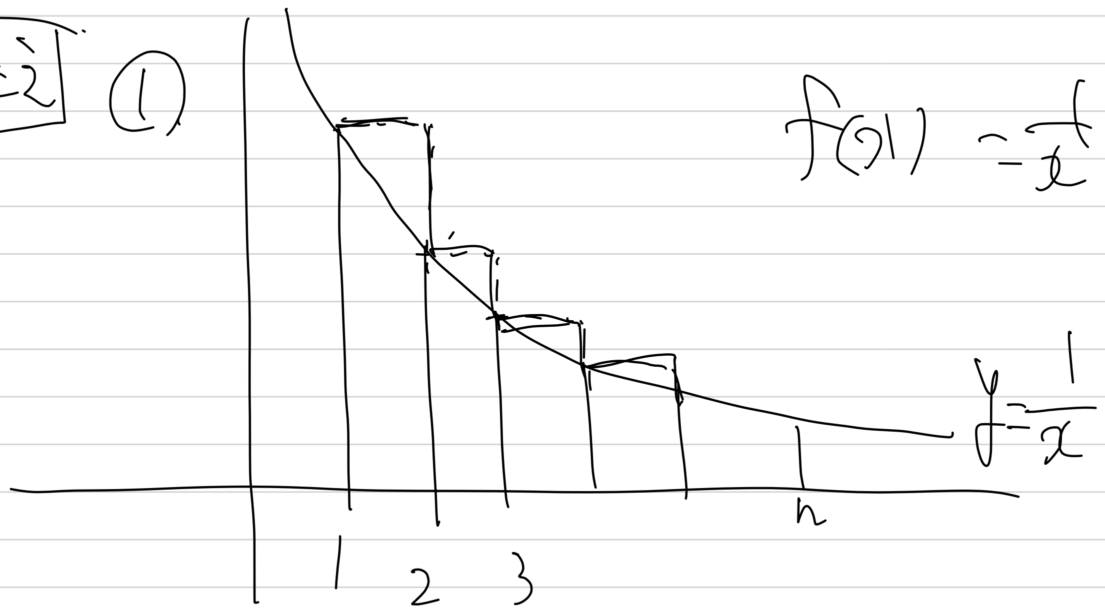
おさらい この授業でやったことは
むずかしいことをやって
結局いつもと同じだった

[演習] $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$ にかんして $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$ と定める

① $\lim_{n\to\infty} S_n(1)$ は発散することを示せ

② $\lim_{n\to\infty} S_n(2)$ は収束することを示せ.

$\boxed{\text{こたえ}}$ ①




$[1, n]$ の分割 $\Delta_n = (1, 2, \cdots, n)$ とすると

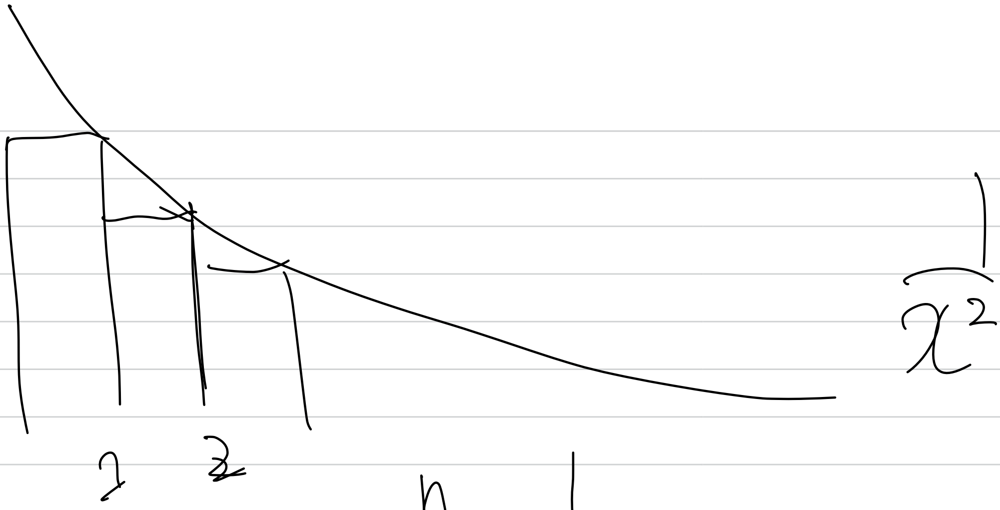
$$\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = S_n(1)$$

$\int_1^n f(x)dx = \log n$ より

$(\log x)' = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \underset{+\infty}{\underset{\shortparallel}{\log n}} \leq \lim_{n\to\infty} S_n(1)$

∴ 発散する

②




$S_n(2) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ とおく

$\Delta_n = (2, 3, 4, \ldots, n)$ として

$$\int_2^n \frac{1}{x^2}\,dx \geq \sum_{i=1}^{n-2} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = S_n(2) - 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x^2}\,dx + 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + 1$$

$$= \frac{3}{2}$$

$S_n(2)$ は有界単調増加数列

⇒ 収束する

バーゼル問題

- Proposed in 1644
- Solved by Euler (1735)

$$\lim_{n\to\infty} S_n(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$