第 1 回. 実数の定義と性質 (三宅先生の本, 1.1 と 1.4 の内容)

岩井雅崇 2021/04/13

1 記法に関して

以下この授業を通してよく使う記号や用語をまとめる. (興味がなければ飛ばして良い)

1.1 よく使う記号

- $\mathbb{N} = \{$ 自然数全体 $\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$
- $\mathbb{Z} = \{$ 整数全体 $\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$
- $\mathbb{Q} = \{$ 有理数全体 $\} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$
- $\mathbb{R} = \{$ 実数全体 $\}$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\} = \{$ 無理数全体 $\}$

1.2 区間

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}$ (a, b 共に実数)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\}$ (a は実数, b は実数または $+\infty$)[1]
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\}$ (a は実数または $-\infty$, b は実数)
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (a は実数または $-\infty$, b は実数または $+\infty$)

特に(a, b) を開区間といい, $[a, b]$ を閉区間という. この記法により, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ である.

例 **1.** $A = [-1, 1], B = [-2, -1), C = [2, +\infty)$ とする. $A \cap B$ は空集合である. A のみ閉区間であり, 開区間はこの中にはない.

1.3 有界集合

定義 **2.** A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする.

- A が上に有界であるとは, ある実数 a があって, 任意の (すべての) $x \in A$ について $x \leqq a$ となること. ($A \subset (-\infty, a]$ に同じ.)
- A が下に有界であるとは, ある実数 a があって, 任意の $x \in A$ について $a \leqq x$ となること. ($A \subset [a, +\infty)$ に同じ.)
- A が有界であるとは, 上にも下にも有界であること. (ある正の実数 a があって, $A \subset [-a, a]$ となることと同じ.)

[1] $+\infty$ は実数ではないが限りなく大きなものとして扱います. 一種の記法です. $-\infty$ も同様に限りなく小さいものとして扱います.

例 **3.** $A = [-1, 1], B = [-2, -1), C = [2, +\infty)$ とする．A, B は有界集合である．C は下に有界であるが, 上に有界ではない.

1.4　数列と数列の極限

定義 4. 各自然数 n について, 実数 a_n を対応させたものを $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書き, 数列と呼ぶ.

- 常に $a_n \in \mathbb{Q}$ であるとき, 有理数列という.
- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界であるとき, 有界数列という.
- $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots$ であるとき, 単調増加数列という.
- $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots$ であるとき, 単調減少数列という.

例 **5.**

- $a_n = \frac{1}{n}$ からなる数列は有理数列, 有界数列, 単調減少数列である.
- $a_n = n$ からなる数列は有理数列, 単調増加数列である.
- $a_n = (-1)^n\sqrt{2}$ からなる数列は有界数列である.

定義 6 (数列の極限の感覚的な定義)**.** 数列が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が極限 $\alpha \in \mathbb{R}$ を持つとは, n を大きくしていくと a_n が α に限りなく近づくこと．このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ または } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

とかき, a_n は α に収束するという．a_n が収束しないとき, a_n は発散するという.

　n を大きくしていくと, a_n が限りなく大きくなるとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と書く. 限りなく小さくなるとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と書く.

　これでも良いのだが, 万が一のため数列の極限の厳密な定義も書いておく．[2]

定義 7 (ϵ-N 論法を用いた厳密な極限の定義)**.** 数列が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が極限 $\alpha \in \mathbb{R}$ を持つとは, 任意の正の実数 ϵ について, ある $N \in \mathbb{N}$ があって, $N < n$ ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となること.

定理 8 (実数の存在)**.** $\mathbb{Q}$ を有理数の集合とする．このとき $\mathbb{Q}$ を含む集合 X があって, 次を満たす.

1. 任意の $x \in X$ に関して, ある有理数列 $\{a_n\}$ があり, $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ となる.
2. X 上の数列 $\{a_n\}$ がコーシー列ならば, ある $\alpha \in X$ があり, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる. (コーシー列は収束する.)

[2] この授業では ϵ-N 論法を用いた厳密な証明はしないつもりだが, 念のため定義をします．詳しいことは追加資料で書きます．後期の担当の先生によっては ϵ-N 論法や ϵ-δ 論法を使うかもしれないので, 後期で分からなくなった場合, 適宜利用してください.

このXを$\mathbb{R}$と書き, 実数の集合と呼ぶ.

ここで数列$\{a_n\}$がコーシー列とは任意の正の実数ϵについて, ある$N \in \mathbb{N}$があって, $N < m, n$ならば$|a_n - a_m| < \epsilon$となる数列のこととする.

定理 9 (実数の連続性)**.** $\mathbb{R}$上の上に有界な単調増加数列は収束する.

同様に$\mathbb{R}$上の下に有界な単調減少数列は収束する.

例 10. $a_n = \frac{1}{n}$は下に有界な単調減少数列である. よって定理9から数列$\{a_n\}$は収束する. 実際$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$である.

命題 11 (極限の性質)**.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, $c \in \mathbb{R}$とするとき, 以下が成り立つ.

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$
- $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\alpha$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$のとき.)

1.5 最大・最小・上限・下限

定義 12. Aを$\mathbb{R}$の部分集合とする.

- $m \in A$がAの最大とは, 任意の$a \in A$について$a \leqq m$となること. このとき$m = \max(A)$と書く.
- $m \in A$がAの最小とは, 任意の$a \in A$について$m \leqq a$となること. このとき$m = \min(A)$と書く.
- Aが上に有界であるとき,

$$\sup A = \min\{x \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } a \in A \text{ について } a \leqq x \text{ となる}\}$$

  をAの上限とする. Aが上に有界でないとき, $\sup A = +\infty$とする.

- Aが下に有界であるとき,

$$\inf A = \max\{x \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } a \in A \text{ について } x \leqq a \text{ となる}\}$$

  をAの下限とする. Aが下に有界でないとき, $\inf A = -\infty$とする.

注意点として, 最大・最小はいつも存在するとは限らないが, 上限・下限はいつも存在する.($\pm\infty$ を含めてですが.)

例 **13.** $A = (0, 1]$ のとき, $\max(A) = \sup(A) = 1$, $\inf(A) = 0$, $\min(A)$ は存在しない.

2 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする. A の最大・最小・上限・下限を求めよ. また A が有界であることを示せ.
2. $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 10\sqrt{a_n}$ として, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な単調増加数列であることを示せ. またこの数列の収束値を求めよ.