第 1 回. 実数の定義と性質 (三宅先生の本, 1.1 と 1.4 の内容)

岩井雅崇 2021/04/13

1 記法に関して

以下この授業を通してよく使う記号や用語をまとめる. (興味がなければ飛ばして良い)

1.1 よく使う記号

- $\mathbb{N} = \{$ 自然数全体 $\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$
- $\mathbb{Z} = \{$ 整数全体 $\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$
- $\mathbb{Q} = \{$ 有理数全体 $\} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$
- $\mathbb{R} = \{$ 実数全体 $\}$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\} = \{$ 無理数全体 $\}$

1.2 区間

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}$ (a, b 共に実数)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\}$ (a は実数, b は実数または $+\infty$)[1]
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\}$ (a は実数または $-\infty$, b は実数)
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (a は実数または $-\infty$, b は実数または $+\infty$)

特に(a, b) を開区間といい, $[a, b]$ を閉区間という. この記法により, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ である.

例 **1.** $A = [-1, 1], B = [-2, -1), C = [2, +\infty)$ とする. $A \cap B$ は空集合である. A のみ閉区間であり, 開区間はこの中にはない.

1.3 有界集合

定義 **2.** A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする.

- A が上に有界であるとは, ある実数 a があって, 任意の (すべての) $x \in A$ について $x \leqq a$ となること. ($A \subset (-\infty, a]$ に同じ.)
- A が下に有界であるとは, ある実数 a があって, 任意の $x \in A$ について $a \leqq x$ となること. ($A \subset [a, +\infty)$ に同じ.)
- A が有界であるとは, 上にも下にも有界であること. (ある正の実数 a があって, $A \subset [-a, a]$ となることと同じ.)

[1] $+\infty$ は実数ではないが限りなく大きなものとして扱います. 一種の記法です. $-\infty$ も同様に限りなく小さいものとして扱います.

例 **3.** $A=[-1,1], B=[-2,-1), C=[2,+\infty)$ とする. A, B は有界集合である. C は下に有界であるが, 上に有界ではない.

1.4 数列と数列の極限

定義 4. 各自然数 n について, 実数 a_n を対応させたものを $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書き, 数列と呼ぶ.

- 常に $a_n \in \mathbb{Q}$ であるとき, 有理数列という.
- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界であるとき, 有界数列という.
- $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots$ であるとき, 単調増加数列という.
- $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots$ であるとき, 単調減少数列という.

例 **5.**
- $a_n = \frac{1}{n}$ からなる数列は有理数列, 有界数列, 単調減少数列である.
- $a_n = n$ からなる数列は有理数列, 単調増加数列である.
- $a_n = (-1)^n\sqrt{2}$ からなる数列は有界数列である.

定義 6 (数列の極限の感覚的な定義)**.** 数列が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が極限 $\alpha \in \mathbb{R}$ を持つとは, n を大きくしていくと a_n が α に限りなく近づくこと. このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ または } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

とかき, a_n は α に収束するという. a_n が収束しないとき, a_n は発散するという.

n を大きくしていくと, a_n が限りなく大きくなるとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と書く. 限りなく小さくなるとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と書く.

これでも良いのだが, 万が一のため数列の極限の厳密な定義も書いておく. [2]

定義 7 (ϵ-N 論法を用いた厳密な極限の定義)**.** 数列が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が極限 $\alpha \in \mathbb{R}$ を持つとは, 任意の正の実数 ϵ について, ある $N \in \mathbb{N}$ があって, $N < n$ ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となること.

定理 8 (実数の存在)**.** $\mathbb{Q}$ を有理数の集合とする. このとき $\mathbb{Q}$ を含む集合 X があって, 次を満たす.

1. 任意の $x \in X$ に関して, ある有理数列 $\{a_n\}$ があり, $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ となる.
2. X 上の数列 $\{a_n\}$ がコーシー列ならば, ある $\alpha \in X$ があり, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる. (コーシー列は収束する.)

[2] この授業では ϵ-N 論法を用いた厳密な証明はしないつもりだが, 念のため定義をします. 詳しいことは追加資料で書きます. 後期の担当の先生によっては ϵ-N 論法や ϵ-δ 論法を使うかもしれないので, 後期で分からなくなった場合, 適宜利用してください.

このXを$\mathbb{R}$と書き, 実数の集合と呼ぶ.

ここで数列$\{a_n\}$がコーシー列とは任意の正の実数ϵについて, ある$N \in \mathbb{N}$があって, $N < m, n$ならば$|a_n - a_m| < \epsilon$となる数列のこととする.

定理 9 (実数の連続性)**.** $\mathbb{R}$上の上に有界な単調増加数列は収束する.

同様に$\mathbb{R}$上の下に有界な単調減少数列は収束する.

例 10. $a_n = \frac{1}{n}$は下に有界な単調減少数列である. よって定理9から数列$\{a_n\}$は収束する. 実際$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$である.

命題 11 (極限の性質)**.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, $c \in \mathbb{R}$とするとき, 以下が成り立つ.

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$
- $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\alpha$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$のとき.)

1.5 最大・最小・上限・下限

定義 12. Aを$\mathbb{R}$の部分集合とする.

- $m \in A$がAの最大とは, 任意の$a \in A$について$a \leqq m$となること. このとき$m = \max(A)$と書く.
- $m \in A$がAの最小とは, 任意の$a \in A$について$m \leqq a$となること. このとき$m = \min(A)$と書く.
- Aが上に有界であるとき,

$$\sup A = \min\{x \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } a \in A \text{ について } a \leqq x \text{ となる}\}$$

をAの上限とする. Aが上に有界でないとき, $\sup A = +\infty$とする.

- Aが下に有界であるとき,

$$\inf A = \max\{x \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } a \in A \text{ について } x \leqq a \text{ となる}\}$$

をAの下限とする. Aが下に有界でないとき, $\inf A = -\infty$とする.

注意点として, 最大・最小はいつも存在するとは限らないが, 上限・下限はいつも存在する.($\pm\infty$ を含めてですが.)

例 **13.** $A = (0, 1]$ のとき, $\max(A) = \sup(A) = 1$, $\inf(A) = 0$, $\min(A)$ は存在しない.

2 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする. A の最大・最小・上限・下限を求めよ. また A が有界であることを示せ.

2. $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 10\sqrt{a_n}$ として, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な単調増加数列であることを示せ. またこの数列の収束値を求めよ.

第1回追加資料. 極限に関する厳密な定義 (三宅先生の本, 1.4の内容)

岩井雅崇 2021/04/13

3 はじめに

この追加資料は第2回の内容を含みます. またかなり難しい部分もあるので理解できなくても構いません. (この内容を飛ばしてもらっても構いません.) 私はこの授業において追加資料の内容 (ϵ-δ 論法等) はほぼ使いません. 後期の先生によってはこの回の内容を使う可能性もあるので, その場合にはこの資料を見ていただければ幸いです.

3.1 数列の極限と ϵ-N 論法

定義 14 (ϵ-N 論法を用いた厳密な極限の定義)**.** 数列が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が極限 $\alpha \in \mathbb{R}$ を持つとは, 任意の正の実数 ϵ について, ある $N \in \mathbb{N}$ があって, $N < n$ ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となること. このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{と書く.}$$

例 15. $a_n = \frac{1}{n}$ とする. 数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する.
(証.) 任意の $\epsilon > 0$ について $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ をおくと $\frac{1}{N} = \frac{1}{[\frac{1}{\epsilon}]+1} \leqq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$ であるため,

$$N < n \quad \text{ならば}\ |a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{N} \leqq \epsilon \quad \text{となる.}$$

以上より, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある N(具体的には $[\frac{1}{\epsilon}]+1$) があって, $N < n$ ならば $|a_n - 0| < \epsilon$ となるので, 数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する.

命題 16. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ となる.

(証.) 任意の $\epsilon > 0$ についてある N_1, N_2 があって

$$N_1 < n \quad \text{ならば}\ |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$N_2 < n \quad \text{ならば}\ |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$$

となる. 以上より $N = \max(N_1, N_2)$ とおくと $N < n$ ならば

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

である. 以上より, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある N (具体的には $\max(N_1, N_2)$) があって, $N < n$ ならば $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$ となるので, 数列 $\{a_n + b_n\}$ は $\alpha + \beta$ に収束する.

授業で紹介した収束の極限の性質の証明は上のようにやれば良い.

命題 17 (極限の一意性)**.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ ならば $\alpha = \beta$ である.

(証.) $\alpha \neq \beta$ として矛盾を示す. $\epsilon = \frac{|\alpha-\beta|}{3}$ とおくと, ある N_1, N_2 があって

$$N_1 < n \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{3} \text{ かつ } N_2 < n \text{ ならば } |a_n - \beta| < \frac{\epsilon}{3} \text{ となる.}$$

以上より $m = \max(N_1, N_2) + 1$ とおくと $N_1 < m$ かつ $N_2 < m$ より

$$|\alpha - \beta| \leqq |a_m - \alpha| + |a_m - \beta| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2}{3}|\alpha - \beta|$$

である. しかし $|\alpha - \beta| > 0$ より矛盾である.

定理 18 (はさみうちの原理.)**.** $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ となる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ に関して $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ である.

(証.) 任意の $\epsilon > 0$ についてある N_1, N_2 があって

$$N_1 < n \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \epsilon \text{ かつ } N_2 < n \text{ ならば } |c_n - \alpha| < \epsilon \text{ となる.}$$

以上より $N = \max(N_1, N_2)$ とおくと $N < n$ ならば $a_n - \alpha \leqq b_n - \alpha \leqq c_n - \alpha$ であるので

$$|b_n - \alpha| \leqq \max(|a_n - \alpha|, |c_n - \alpha|) < \epsilon$$

である. 以上より, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある N (具体的には $\max(N_1, N_2)$) があって, $N < n$ ならば $|b_n - \alpha| < \epsilon$ となるので, 数列 $\{b_n\}$ は α に収束する.

授業でちょっとだけ触れたコーシー列や実数の構成に関しても触れておきます.

定義 19 (コーシー列)**.** 数列$\{a_n\}$ がコーシー列とは, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある $N \in \mathbb{N}$ があって, $N < m, n$ ならば $|a_n - a_m| < \epsilon$ となること.

命題 20 (収束するならばコーシー列)**.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\{a_n\}$ はコーシー列.

(証.) 任意の $\epsilon > 0$ についてある N があって

$$N < n \quad \text{ならば } |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

となる. 以上より $N < n, m$ ならば

$$|a_n - a_m| \leqq |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha| < \epsilon$$

となるので, 数列 $\{a_n\}$ はコーシー列である.

例 21. 逆に「コーシー列は収束するのか?」と思うがこれはどの世界で数列を考えているかによる. 有理数列 a_n がコーシー列であっても, 数列 $\{a_n\}$ が有理数には収束しないこともあります.

例として数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sqrt{2} \text{ の小数第 } n \text{ 位まで}$$

とおく. 具体的には

$$a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, a_4 = 1.4142, \cdots$$

である. このとき a_n は有理数列でありコーシー列だが a_n は $\sqrt{2}$ に収束するため, a_n は有理数には収束しない. (もちろん実数には収束してます)

よって有理数の世界だけ考えても解析をするには少々不便である.(極限操作をするから.) したがってどんなコーシー列でも収束し, 有理数を含む最小の世界があれば良いと思われる. その思いからできたのが実数である.

定理 22 (実数の存在)**.** $\mathbb{Q}$ を有理数の集合とする. このとき $\mathbb{Q}$ を含む集合 X があって, 次を満たす.

1. 任意の $x \in X$ に関して, ある有理数列 $\{a_n\}$ があり, $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ となる.
2. X 上の数列 $\{a_n\}$ がコーシー列ならば, ある $\alpha \in X$ があり, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる. (コーシー列は収束する.)

この X を $\mathbb{R}$ と書き, 実数の集合と呼ぶ.

[3]

定理 23 (実数の連続性)**.** 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は収束する.

(証.) a_n がコーシー列であることを示す. $\{a_n\}$ は上に有界なので, $a_n < 0$ として良い. もしコーシー列でないとすると, ある $\epsilon > 0$ があり, 任意の N について $N < n < m$ となる n, m があって $|a_n - a_m| \geqq \epsilon$ となる.

そこで新たに数列 $\{b_l\}$ を次のように定義する. まず $1 < n_1 < m_1$ となる n_1, m_1 があって $|a_{n_1} - a_{m_1}| \geqq \epsilon$ である. よって, $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{m_1}$ とおく. 次に $k_2 = m_1 + 1$ とおくと, $k_2 < n_2 < m_2$ となる n_2, m_2 があって $|a_{n_2} - a_{m_2}| \geqq \epsilon$ である. よって, $b_3 = a_{n_2}, b_4 = a_{m_2}$ とおく. これを繰り返し行うことで帰納的に数列 $\{b_l\}$ を定める.

構成方法から $\{b_l\}$ は単調増加で, $b_l < 0$ である**.** さらに任意の自然数 l について, $b_{2l} - b_{2l-1} \geqq \epsilon$ かつ $b_{2l+1} - b_{2l} \geqq 0$ である. 以上より任意の自然数 l について

$$b_{2l} = (b_{2l} - b_{2l-1}) + (b_{2l-1} - b_{2l-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1 \geqq b_1 + l\epsilon$$

である. $b_{2l} < 0$ のため, 任意の自然数 l について $b_1 + l\epsilon < 0$ である. しかし, $\epsilon > 0$ であったため, これは矛盾である.

[3] この証明は集合と位相という数学科の 2 年くらいで学ぶ内容です. 証明は難しいです.

4　関数の極限

定義 24 (ϵ-δ 論法を用いた厳密な極限の定義)**.** $f(x)$ を $x=a$ の周りで定義された関数とする．$f(x)$ が $x=a$ で $\alpha\in\mathbb{R}$ に収束するとは任意の正の実数 ϵ について, ある正の実数 δ があって, $|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-\alpha|<\epsilon$ となること．このとき

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{と書く.}$$

例 25. $f(x)=x^2$ は $x=0$ で 0 に収束する.
(証.) 任意の $\epsilon>0$ について $\delta=\sqrt{\epsilon}$ をおくと $|x-0|<\delta$ ならば

$$|f(x)-0|=|x^2|<\delta^2=\epsilon \quad \text{となる.}$$

以上より, 任意の $\epsilon>0$ について, ある δ(具体的には $\sqrt{\epsilon}$) があって, $|x-0|<\delta$ ならば $|f(x)-0|<\epsilon$ となるので, 関数 $f(x)=x^2$ は $x=0$ で 0 に収束する.

命題 26. $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ とするとき $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\alpha+\beta$ となる.

(証.) 任意の $\epsilon>0$ についてある $\delta_1,\delta_2>0$ があって

$$|x-a|<\delta_1 \text{ならば } |f(x)-\alpha|<\frac{\epsilon}{2} \text{ かつ } |x-a|<\delta_2 \text{ならば } |g(x)-\beta|<\frac{\epsilon}{2} \text{ となる.}$$

以上より $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ とおくと, $|x-a|<\delta$ ならば

$$|(f(x)+g(x))-(\alpha+\beta)|\leqq|f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

である．以上より, 任意の $\epsilon>0$ について, ある δ (具体的には $\min(\delta_1,\delta_2)$) があって, $|x-a|<\delta$ ならば $|(f(x)+g(x))-(\alpha+\beta)|<\epsilon$ となるので, $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\alpha+\beta$ となる.

授業で紹介した収束の極限の性質の証明は上のようにやれば良い.

5　最後に

少々書きすぎてしまったが, この内容は理解する必要はないです．この内容が必要になることはあまりないと思います.[4]

[4] まあ一種の無駄知識と思っていただければ幸いです．私はこの内容が一番面白いですが...

第 2 回. 連続関数 (三宅先生の本, 1.2 の内容)

岩井雅崇 2021/04/20

6 関数の定義と性質

定義 27. A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. 任意の $x \in A$ について, 実数 $f(x)$ がただ一つ定まるとき, $f(x)$ を A 上の関数といい

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$ と書く.

以下 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ とする. 数列のときと同様に, 関数に関しても有界などが定義できる.

- f が有界関数であるとは, $f(A)$ が有開集合であること. つまりある $M > 0$ があって, 任意の $x \in A$ について $|f(x)| \leqq M$ であること.
- $\max_{x\in A}(f(x)) = \max(f(A))$ を $f(x)$ の A での最大値という.
- $\min_{x\in A}(f(x)) = \min(f(A))$ を $f(x)$ の A での最小値という.
- $\sup_{x\in A}(f(x)) = \sup(f(A))$ を $f(x)$ の A での上限という.
- $\inf_{x\in A}(f(x)) = \inf(f(A))$ を $f(x)$ の A での下限という.

例 28.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \pm x^2 \end{array}$$

は $\mathbb{R}$ 上の関数ではない. $f(2)$ がただ一つに定まらないからである.

例 29.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

は $\mathbb{R}$ 上の関数. $\max_{x\in\mathbb{R}}(f(x))$ は存在しない. $\sup_{x\in\mathbb{R}}(f(x)) = +\infty$, $\min_{x\in\mathbb{R}}(f(x)) = \inf_{x\in\mathbb{R}}(f(x)) = 0$ である. 有界関数ではない.

例 30.

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

は $[-1,1]$ 上の関数. $\max_{x\in[-1,1]}(f(x)) = \sup_{x\in[-1,1]}(f(x)) = 1$, $\min_{x\in[-1,1]}(f(x)) = \inf_{x\in[-1,1]}(f(x)) = 0$ である. 有界関数である.

7　関数の極限と連続性

定義 31 (関数の極限)**.** $a \in \mathbb{R}$ とし $f(x)$ を a の周りで定義された関数とする．$x \to a$ のとき，$f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは $x \neq \alpha$ を満たしながら x を a に近づけるとき，$f(x)$ が限りなく α に近づくこと．このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \text{ または } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \alpha \text{ と書く．}$$

数列のときと同様にして，$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ や $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ も定める．[5]

定義 32 (関数の極限)**.** $a \in \mathbb{R}$ とし $f(x)$ を a の周りで定義された関数とする．
$\alpha \in \mathbb{R}$ が $f(x)$ の点 a のおける右極限とは，x を a の右側から a に近づけるとき，$f(x)$ が限りなく α に近づくこと．このとき

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha \text{ と書く．}$$

同様に a の左側から近づけた極限を左極限といい，

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \text{ と書く．}$$

例 33.

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

について，$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

例 34.

$$\begin{array}{rccc} f: & (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

について，$\lim_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$ であり $\lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$ である．[6]

命題 35 (極限の性質)**.** $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$, $c \in \mathbb{R}$ とするとき，以下が成り立つ．

- $\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$
- $\lim_{x \to a}(cf(x)) = c\alpha$
- $\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = \alpha\beta$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$ のとき.)

[5] 関数の極限に関しても ϵ-δ 論法を用いて厳密に定義できる．追加資料で詳しく説明した．
[6] $\lim_{x \to 0-0} f(x)$ を $\lim_{x \to -0} f(x)$ とも書きます．+のときも同じです．

定義 36 (連続の定義)**.** $a \in \mathbb{R}$ とし $f(x)$ を a の周りで定義された関数とする.
$f(x)$ が $x = a$ で連続とは,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ となること.}$$

$f(x)$ を区間 I 上の関数とする. $f(x)$ が I 上で連続とは, 任意の $a \in I$ に関して $f(x)$ が a で連続となること.

例 37. みんながよく知っている関数は (だいたい) 連続関数. つまり $x^2, \sin x, \cos x, e^x$ などは連続関数である.

例 38. $[-1,1]$ 上の関数 $f(x)$ を以下で定める.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき, $f(x)$ は $x = 0$ で連続ではない.

命題 39. $f(x), g(x)$ 共に $x = a$ で連続ならば, $f(x) \pm g(x)$, $cf(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$(ただし $g(a) \neq 0$) などは $x = a$ で連続.

定理 40. $y = f(x)$ が $x = a$ で連続であり, $z = g(y)$ が $y = f(a)$ で連続ならば, $z = g(f(x))$ は $x = a$ で連続.

8 連続関数に関する定理

定理 41 (最大最小の存在定理)**.** $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で連続ならば, $f(x)$ は $[a,b]$ 上で最大値, 最小値を持つ.

例 42.

$$\begin{array}{cccc} f: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

は $[-1,1]$ 上の連続関数. 最大値は 1, 最小値は 0.

例 43.

$$\begin{array}{cccc} f: & (-1,1) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

は $(-1,1)$ 上の連続関数. しかし, 最大値は存在しない.

例 **44.** $[-1,1]$ 上の関数 $f(x)$ を以下で定める.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

このとき, $f(x)$ は $x=0$ で連続ではない. 最大値は存在しない.

定理 **45** (中間値の定理)**.** $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とする. $f(a)<f(b)$ ならば, 任意の $\alpha\in[f(a),f(b)]$ について, ある $c\in[a,b]$ があって $f(c)=\alpha$ となる.

9 逆関数

定義 **46** (単調増加・単調減少)**.** $f(x)$ を区間 I 上の関数とする. $x<y$ ならば $f(x)<f(y)$ であるとき, f は I 上で単調増加という. (単調減少に関しても同様に定める.)

命題 **47** (単調増加の判定法)**.** $f(x)$ を $[a,b]$ 上で連続, (a,b) 上で微分可能な関数とする. (a,b) 上 $f'(x)>0$ ならば $f(x)$ は $[a,b]$ 上で単調増加である. (単調減少に関しても同様.)

[7]

定義 **48** (逆関数)**.** $f(x)$ を区間 I 上の関数とし, $g(x)$ を区間 J 上の関数とする. $f(I)=J, g(J)=I$ であり, $y=f(x)$ であることが $x=g(y)$ であることと同値であるとき, g を f の逆関数といい, $g=f^{-1}$ と書く. このとき

$$f^{-1}(f(x))=x \text{ かつ, } f(f^{-1}(y))=y \text{ である.}$$

例 **49.**

$$\begin{array}{rcccc} f: & [0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} g: & [0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

とすると $f^{-1}=g$ である.

定理 **50** (逆関数定理)**.** $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続な単調増加関数とする. このとき $[f(a),f(b)]$ 上連続な f の逆関数が存在する.

10 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

[7]微分可能に関しては第 3 回授業で, この命題の証明は第 4 回の授業で行います.

1. $[-1,1]$ 上の関数 $f(x)$ を以下で定める.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

   $f(x)$ は $[-1,1]$ 上で連続であることを示せ.

2. 厚さが均一なお好み焼きは, 包丁を真っ直ぐに一回入れることで二等分にできることを示せ.
   (ただし具材等に関して細かいことは考えないでよく, ある種の連続性を仮定して良い.)

第3回. 微分法と初等関数の性質 (三宅先生の本, 1.3 と 2.1 の内容)

岩井雅崇 2021/04/27

11 微分法

定義 51. $f(x)$ を点 a を含む開区間上の関数とする. $\underline{f(x)\text{ が }x = a\text{ で微分可能}}$とは

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ が存在すること.}$$

この値を $f'(a)$ と書く. $f'(a)$ は $\frac{df}{dx}|_{x=a}$ や $\frac{df(a)}{dx}$ とも書く.

$\underline{f(x)\text{ が }I\text{ 上で微分可能}}$とは, 任意の $a \in I$ に関して $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であること. このとき

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

を$\underline{f(x)\text{ の導関数}}$という. $f'(x)$ は $\frac{df}{dx}$ とも書く.

例 52. みんながよく知っている関数は (だいたい) 微分可能関数. つまり $x^2, \sin x, \cos x, e^x$ などは微分可能な関数である.

例 53. 微分可能な関数 $f(x)$ について, 点 $(a, f(a))$ での接線の方程式は $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ である.

定理 54. $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば $x = a$ で連続である.

命題 55 (微分の性質)**.** f, g を区間 I 上の微分可能な関数とするとき, 以下が成り立つ. (c は定数.)

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(cf)' = cf'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ($g'(x) \neq 0$ なる点において.)

定理 56 (合成関数の微分法)**.** $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であり, $z = g(y)$ が $y = f(a)$ で微分可能であるとき, $z = g(f(x))$ は $x = a$ で微分可能であり,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \text{ である.}$$

より詳しく書くと,
$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=a}=\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=f(a)}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}\text{ である.}$$

例 **57.** $z=\cos(x^2)$ を普通に微分すると, $\frac{dz}{dx}=-2x\sin(x^2)$. 一方 $y=x^2, z=\cos y$ とすると $\frac{dy}{dx}=2x, \frac{dz}{dy}=-\sin(y)$ より,
$$\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=(-\sin(x^2))2x=-2x\sin(x^2)\text{ である.}$$

定理 **58** (合成関数の微分法)**.** 関数 $f(x)$ は区間 I で微分可能かつ単調増加であるとする. 任意の $x\in I$ で $f'(x)\neq 0$ であると仮定する. このとき逆関数 $f^{-1}(y)$ は $f^{-1}(I)$ 上で微分可能であり
$$\frac{dx}{dy}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}\text{ である.}$$
同じことだが,
$$\frac{df^{-1}}{dy}=\left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)}\text{ である.}$$

12 初等関数の性質

12.1 三角関数

命題 **59** (三角関数の微分)**.**

- $(\sin x)'=\cos x$
- $(\cos x)'=-\sin x$
- $(\tan x)'=\frac{1}{(\cos x)^2}$

12.2 逆三角関数

$\sin x$ は $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上で単調増加, $\cos x$ は $[0,\pi]$ 上で単調増加, $\tan x$ は $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上で単調増加であるのでそれぞれ微分可能な逆関数が存在する.

定義 **60** (逆三角関数)**.**

- $$\begin{array}{cccc}\mathrm{Sin}^{-1}: & [-1,1] & \to & \mathbb{R}\\ & y & \longmapsto & \mathrm{Sin}^{-1}y\end{array}$$

を $\sin$ の逆関数とする．これをアークサインと呼ぶ．$\mathrm{Sin}^{-1}([-1,1]) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ である．

- $$\begin{array}{rccc} \mathrm{Cos}^{-1}: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{Cos}^{-1} y \end{array}$$

 を $\cos$ の逆関数とする．これをアークコサインと呼ぶ．$\mathrm{Cos}^{-1}([-1,1]) = [0, \pi]$ である．

- $$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tan}^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{Tan}^{-1} y \end{array}$$

 を $\tan$ の逆関数とする．これをアークタンジェントと呼ぶ．$\mathrm{Tan}^{-1}(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である．

例 **61.** $\mathrm{Sin}^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}, \mathrm{Cos}^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}, \mathrm{Tan}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ である．

命題 62 (逆三角関数の微分)**.**

- $(\mathrm{Sin}^{-1} y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $(\mathrm{Cos}^{-1} y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $(\mathrm{Tan}^{-1} y)' = \frac{1}{1+y^2}$

12.3 指数関数

定理 63 (ネピアの定数)**.** $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は収束する．この値を e と書きネピアの定数という．

定義 64 (指数関数・対数関数)**.**

- $a > 0$ かつ $a \neq 1$ なる実数 a について，関数

 $$\begin{array}{rccc} a^x: & \mathbb{R} & \to & (0, +\infty) \\ & x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

 を指数関数と呼ぶ．$a = e$ のとき，e^x を $\exp x$ ともかく．

- $a > 0$ かつ $a \neq 1$ なる実数 a について，指数関数 a^x の逆関数

 $$\begin{array}{rccc} \log_a y: & (0, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \log_a y \end{array}$$

 を対数関数と呼ぶ．$a = e$ のとき，$\log y$ と書く．

命題 65 (指数関数・対数関数の微分)**.**

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.
- $(a^x)' = (\log a)a^x$. 特に $(e^x)' = e^x$.
- $(\log_a y)' = \frac{1}{(\log a)y}$. 特に $(\log y)' = \frac{1}{y}$.

12.4 双曲線関数

定義 66 (双曲線関数)**.**

- $$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
  とし, これをハイパボリックサインと呼ぶ.
- $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
  とし, これをハイパボリックコサインと呼ぶ.
- $$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
  とし, これをハイパボリックタンジェントと呼ぶ.

命題 67 (双曲線関数の微分)**.**

- $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = \frac{1}{(\cosh x)^2}$

13 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. $\mathrm{Sin}^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}), \mathrm{Cos}^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}), \mathrm{Tan}^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ の値を求めよ.
2. $f(x) = \log(\log(x))$ とする. $f'(x)$ を求めよ.

第 4 回. 平均値の定理と関数の極限値計算 (三宅先生の本, 2.2 の内容)

岩井雅崇 2021/05/11

14 関数の極値

定義 68 (極値)**.** $f(x)$ を区間 I 上の関数とする.

- $f(x)$ が $c \in I$ で極大であるとは, c を含む開区間 J があって, $x \in J$ かつ $x \neq c$ ならば $f(x) < f(c)$ となること. このとき, $f(x)$ は c で極大であるといい, $f(c)$ の値を極大値という.
- $f(x)$ が $c \in I$ で極小であるとは, c を含む開区間 J があって, $x \in J$ かつ $x \neq c$ ならば $f(x) > f(c)$ となること. このとき, $f(x)$ は c で極小であるといい, $f(c)$ の値を極小値という.
- 極大値, 極小値の二つ合わせて極値という.

定理 69. $f(x)$ を $[a,b]$ 上で連続, (a,b) 上で微分可能な関数とする. $f(x)$ が $c \in (a,b)$ で極値を持てば, $f'(c) = 0$ である.

15 平均値の定理とその応用

定理 70. $f(x), g(x)$ を $[a,b]$ 上で連続, (a,b) 上で微分可能な関数とする.

- (ロルの定理) $f(a) = f(b)$ ならば, $f'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ がある.
- (平均値の定理)
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
となる $c \in (a,b)$ が存在する.
- (コーシーの平均値の定理) $g(a) \neq g(b)$ かつ任意の $x \in (a,b)$ について $g'(x) \neq 0$ ならば
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$
となる $c \in (a,b)$ が存在する.

定理 71. $f(x)$ を $[a,b]$ 上で連続, (a,b) 上で微分可能な関数とする.

- 任意の $x \in (a,b)$ について $f'(x) = 0$ ならば f は $[a,b]$ 上で定数関数.
- 任意の $x \in (a,b)$ について $f'(x) > 0$ ならば f は $[a,b]$ 上で単調増加関数.

例 **72.** $(\sin x)' = \cos x$ より, $\sin x$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上単調増加.

定理 73 (ロピタルの定理)**.** $f(x), g(x)$ を点 a の近くで定義された微分可能な関数とする. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ かつ $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 **74.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x} \text{ を求めよ.}$$

(答.) $\lim_{x\to 0} e^{2x} - \cos x = 1 - 1 = 0$ かつ $\lim_{x\to 0} x = 0$ であり

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x} - \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} - \sin x}{1} = 2$$

であるため, ロピタルの定理から

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x} - \cos x)'}{(x)'} = 2$$

16 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \text{ を求めよ.}$$

第 5 回. 高次導関数とテイラーの定理 (三宅先生の本, 2.3 と 2.4 の内容)

岩井雅崇 2021/05/18

17　高次導関数

定義 75 (高次導関数の定義)**.** $f(x)$ を区間 I 上の微分可能な関数とする. $f'(x)$ が I 上で微分可能であるとき, f は 2 回微分可能であるといい,

$$f''(x) = (f'(x))'$$

としてこれを2 次の導関数と呼ぶ. $f''(x)$ は $f^{(2)}(x)$ とも書く.

同様に $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能であるとき, f は n 回微分可能であるといい, n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を $(f^{(n-1)}(x))'$ として定める. $f^{(n)}(x)$ は $\frac{d^n f}{dx^n}$ とも書く.

例 **76.**

- $f(x) = e^x$ とすると, $f^{(n)}(x) = e^x$ である.
- $f(x) = \sin x$ とすると,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & (n = 2m) \\ (-1)^m \cos x & (n = 2m+1) \end{cases} \quad \text{である.}$$

定義 77 (C^n 級関数)**.** $f(x)$ を区間 I 上の関数とする.

- $f(x)$ が n 回微分可能であり, $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき, f は C^n 級関数であるという.
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について f が C^n 級であるとき, f を C^∞ 級関数であるという.

例 **78.** みんながよく知っている関数は (だいたい)C^∞ 級関数. つまり $x^2, \sin x, \cos x, e^x$ などは C^∞ 級関数である.

18　テイラーの定理とその応用

定理 79 (テイラーの定理 1)**.** $f(x)$ が開区間 I 上の C^2 級関数とする. $a < b$ なる $a, b \in I$ について

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する.

例 **80.** $f(x)=e^x$ とし $a=0$ かつ b を正の実数とする．このときある $c\in(0,b)$ があって

$$e^b=f(0)+f'(0)b+\frac{f''(c)}{2}b^2=1+b+\frac{e^c}{2}b^2$$

となる．$e^c\geqq 1$ であるため，

$$e^b\geqq 1+b+\frac{1}{2}b^2 \text{ となる．}$$

定理 81 (極値判定法)**.** $f(x)$ が点 a の周りで定義された C^2 級関数とする．

- $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ なら $f(x)$ は $x=a$ で極小.
- $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ なら $f(x)$ は $x=a$ で極大.

定理 82 (テイラーの定理 2)**.** $f(x)$ が開区間 I 上の C^n 級関数とする．$a<b$ なる $a,b\in I$ について

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる $c\in(a,b)$ が存在する.

例 **83.** $f(x)=e^x$ とし $a=0$ かつ b を正の実数とする．このときある $c\in(0,b)$ があって

$$\begin{aligned}e^b&=f(0)+f'(0)b+\frac{f''(0)}{2!}b^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}b^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}b^n\\&=1+b+\frac{1}{2!}b^2+\frac{1}{3!}b^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}b^{n-1}+\frac{e^c}{n!}b^n\end{aligned}$$

となる．$e^c\geqq 1$ であるため，

$$e^b\geqq 1+b+\frac{1}{2!}b^2+\frac{1}{3!}b^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}b^{n-1}+\frac{1}{n!}b^n \text{ となる．}$$

定理 84 (有限テイラー展開)**.** $f(x)$ が開区間 I 上の C^n 級関数とする．$a\in I$ を固定する．任意の $x\in I$ について，ある $\theta\in(0,1)$ があって

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\\&\quad\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

となる．右辺を $x=a$ における<u>有限テーラー展開</u>と呼び，$R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を

剰余項と呼ぶ. 特に $a=0$ のとき, 有限マクローリン展開と呼ぶ.

19　演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. 任意の $x \in \mathbb{R}$ についてある $\theta \in (0,1)$ があって

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n}\sin(\theta x)}{2n!}$$

となることを示せ.

第 6 回. 漸近展開とべき級数展開 (三宅先生の本, 2.4 の内容)

岩井雅崇 2021/05/25

20　漸近展開とべき級数展開

定理 85 (有限テイラー展開). $f(x)$ が開区間 I 上の C^n 級関数とする. $a \in I$ を固定する. 任意の $x \in I$ について, ある $\theta \in (0,1)$ があって

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

となる. 右辺を $x = a$ における<u>有限テーラー展開</u>と呼び, $R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を<u>剰余項</u>と呼ぶ. 特に $a = 0$ のとき, <u>有限マクローリン展開</u>と呼ぶ.

定義 86 (ランダウの記号). a を実数または $\pm\infty$ とし, $f(x)$ と $g(x)$ を a の周りで定義された関数とする. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ であるとき

$$f(x) = o(g(x)) \ \ (x \to a) \text{ と書く.}$$

例 87.

- $x^5 = o(x^3) \ \ (x \to 0)$
- $\sin x = x + o(x^2) \ \ (x \to 0)$
- 任意の正の実数 α について, $\log x = o(x^\alpha) \ \ (x \to +\infty)$ であり, $x = o(e^{\alpha x}) \ \ (x \to +\infty)$ である.

命題 88 (ランダウの記号の性質). $m, n \in \mathbb{N}$ とする.

- $x^m o(x^n) = o(x^{m+n}) \ \ (x \to 0)$
- $o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n}) \ \ (x \to 0)$
- $m \leqq n$ ならば $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m) \ \ (x \to 0)$

定理 89 (漸近展開). $f(x)$ を a を含む開区間上の C^n 級関数ならば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \ \ (x \to a)$$

となる. 特に $a=0$ の場合は下のようになる.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)\ \ (x\to 0)$$

例 **90.**

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ \ (x\to 0)$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})\ \ (x\to 0)$$

定理 91 (べき級数展開)**.** $f(x)$ を a を含む開区間上の C^∞ 級関数とする. テイラーの定理

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

において, 剰余項 $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ とする. $b\in I$ において $\lim_{n\to\infty}|R_n(b)|=0$ となるならば,

$$f(b)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \quad \text{となる.}$$

例 **92.** $f(x)=e^x$ とし, $a=0$ かつ $b\in\mathbb{R}$ とする. このとき剰余項は

$$R_n(b)=\frac{e^{b\theta}b^n}{n!}$$

である. $\lim_{n\to\infty}|R_n(b)|=0$ であるので, べき級数展開ができ,

$$e^b=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}b^k=1+b+\frac{b^2}{2!}+\frac{b^3}{3!}+\frac{b^4}{4!}+\cdots$$

例 **93.** $f(x)=\sin x$ とし, $a=0$ かつ $b\in\mathbb{R}$ とする. このとき剰余項は

$$R_{2n}(b)=\frac{(-1)^n b^{2n}\sin(b\theta)}{(2n)!}$$

である. $\lim_{n\to\infty}|R_n(b)|=0$ であるので, べき級数展開ができ,

$$\sin b=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}b^k=b-\frac{b^3}{3!}+\frac{b^5}{5!}-\frac{b^7}{7!}+\cdots$$

21　初等関数の漸近展開

初等関数の $a=0$ の周りでの漸近展開の具体例を紹介する.[8]

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ \ (x \to 0) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \ \ (x \to 0) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \ \ (x \to 0) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n!} + o(x^n) \ \ (x \to 0) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \ \ (x \to 0)
\end{aligned}
$$

22　演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1.
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \ \ (x \to 0)$$
となることを示せ.

[8] なんでもかんでも綺麗に漸近展開できるとは限らない. 例えば $\tan x$ などの漸近展開の一般項は非常に難しい.