第 10 回. 不定積分の計算方法 (三宅先生の本, 3.2 の内容)

岩井雅崇 2021/06/22

1　不定積分の計算方法・テクニック

1.1　有理式の場合

定義 1 (有理式)**.** $f(x)$ と $g(x)$ を実数係数多項式とするとき, $\underline{\frac{f(x)}{g(x)} \text{ を有理式という}}$.

以下 $f(x)$ と $g(x)$ を同時に割り切る多項式はないものと仮定する.(つまり $f(x)$ と $g(x)$ は互いに素とする.)

定理 2 (有理式)**.** 有理式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は次の 3 つの式の和に分解できる.

1. 多項式
2. $\frac{a}{(x+b)^m}$ $(a, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N})$
3. $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^m}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N})$

特に $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{R}$ と $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ を用いて $g(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_l)^{m_l}$ と書けるとき, 有理式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は多項式と $\frac{\beta_i}{(x-\alpha_i)^m}$ $(\beta_i \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N},\ 1 \leqq m \leqq m_i)$ の和で表せられる.

例 3. $\frac{5x-4}{2x^2+x-6}$ に関して上の定理より,

$$\frac{5x-4}{2x^2+x-6} = \frac{a}{2x-3} + \frac{b}{x+2}$$

となる実数 $a, b \in \mathbb{R}$ が存在する. 通分して計算すると $a = 1, b = 2$ をえる.

例 4.

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

定理 5. 有理式の不定積分は計算できる.

例 6.

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}dx = \int \frac{1}{2x-3}dx + \int \frac{2}{x+2}dx = \frac{1}{2}\log|2x-3| + 2\log|x+2|$$

$$\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x^2+1| - \mathrm{Tan}^{-1}x$$

1.2　無理関数がある場合

テクニックだけまとめておく.

- $\sqrt[n]{ax+b}$ に関して, $t=\sqrt[n]{ax+b}$ とおくと

$$x=\frac{t^n-b}{a}, dx=\frac{nt^{n-1}dt}{a}$$

より有理式に帰着できる.

- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ に関して, $a>0$ ならば $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ とおく.
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ に関して, $ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$ となる実数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ があるとき, $t=\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{(x-\alpha)}}$ とおく.

例 7. 不定積分 $\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$ を求めよ.
(答.) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと, $x=t^2+1, dx=2tdt$ より

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}&=\int\frac{2t}{t^2+1+2t}dt=\int\frac{2t+2-2}{(t+1)^2}dt\\&=\int\frac{2}{t+1}dt-\int\frac{2}{(t+1)^2}dt\\&=2\log|t+1|+\frac{2}{t+1}\\&=2\log\left(1+\sqrt{x-1}\right)+\frac{2}{1+\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

1.3　三角関数の有理式の積分

定理 8. 三角関数に関する有理式の不定積分は計算できる. 具体的には $t=\tan\frac{x}{2}$ とおけば, $\sin x$ などは次のように表される.

- $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$
- $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

例 9. 不定積分 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$ を求めよ.
(答.) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx&=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2+2t+1}{1+t^2}dt=\int 1+\frac{2t}{1+t^2}dt\\&=t+\log\left(1+t^2\right)=\tan\frac{x}{2}+\log\left|1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right|\end{aligned}$$

2　演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. 不定積分 $\int \frac{x^2}{x^2-x-6} dx$ を求めよ.