

第6回. 漸近展開とべき級数展開 (三宅先生の本, 2.4 の内容)

岩井雅崇 2021/05/25

1 漸近展開とべき級数展開

定理 1 (有限テイラー展開). $f(x)$ が開区間 I 上の C^n 級関数とする. $a \in I$ を固定する. 任意の $x \in I$ について, ある $\theta \in (0, 1)$ があって

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

となる. 右辺を $x = a$ における有限テイラー展開と呼び, $R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を剰余項と呼ぶ. 特に $a = 0$ のとき, 有限マクローリン展開と呼ぶ.

定義 2 (ランダウの記号). a を実数または $\pm\infty$ とし, $f(x)$ と $g(x)$ を a の周りで定義された関数とする. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ であるとき

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a) \text{ と書く.}$$

例 3. • $x^5 = o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$

• $\sin x = x + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$

• 任意の正の実数 α について, $\log x = o(x^\alpha) \quad (x \rightarrow +\infty)$ であり, $x = o(e^{\alpha x}) \quad (x \rightarrow +\infty)$ である.

命題 4 (ランダウの記号の性質). $m, n \in \mathbb{N}$ とする.

- $x^m o(x^n) = o(x^{m+n}) \quad (x \rightarrow 0)$
- $o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n}) \quad (x \rightarrow 0)$
- $m \leq n$ ならば $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m) \quad (x \rightarrow 0)$

定理 5 (漸近展開). $f(x)$ を a を含む開区間上の C^n 級関数ならば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a)$$

となる. 特に $a = 0$ の場合は下のようになる.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

例 6.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

定理 7 (べき級数展開). $f(x)$ を a を含む開区間上の C^∞ 級関数とする. テイラーの定理

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

において, 剰余項 $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ とする. $b \in I$ において $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(b)| = 0$ となるならば,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \quad \text{となる.}$$

例 8. $f(x) = e^x$ とし, $a = 0$ かつ $b \in \mathbb{R}$ とする. このとき剰余項は

$$R_n(b) = \frac{e^{b\theta}b^n}{n!}$$

である. $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(b)| = 0$ であるので, べき級数展開ができ,

$$e^b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}b^k = 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \cdots$$

例 9. $f(x) = \sin x$ とし, $a = 0$ かつ $b \in \mathbb{R}$ とする. このとき剰余項は

$$R_{2n}(b) = \frac{(-1)^n b^{2n} \sin(b\theta)}{(2n)!}$$

である. $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(b)| = 0$ であるので, べき級数展開ができ,

$$\sin b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}b^k = b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \cdots$$

2 初等関数の漸近展開

初等関数の $a = 0$ の周りでの漸近展開の具体例を紹介する.¹

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \quad (x \rightarrow 0) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0) \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \quad (x \rightarrow 0)\end{aligned}$$

3 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

となることを示せ.

¹なんでもかんでも綺麗に漸近展開できるとは限らない. 例えば $\tan x$ などの漸近展開の一般項は非常に難しい.