# グレブナー基底と線形代数

鈴木正幸，岩手大学・非常勤講師

2025 年 10 月 28 日

## 1　ガウスの消去法による線形方程式の解法

### 1.1　連立一次方程式と行列表現

連立一次方程式:

$$
\begin{aligned}
x+y+z &= 3 && (1)\\
x-y-z &= -1 && (2)\\
x-y+z &= 1 && (3)\\
& && (4)
\end{aligned}
$$

の行列による表現:

| $x$ | $y$ | $z$ | $c$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $-3$ | $x+y+z-3=0$ |
| 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | $x-y-z+1=0$ |
| 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | $x-y+z-1=0$ |

### 1.2　ガウスの消去法

簡約: $x$ を $-y-z+3$ で置き換える．順序の高変数を，順序の低い変数か成る等式で置き換える。
行列操作でいうと，1 行目の横ベクトル定数倍して，他の行から引いたベクトルで置き換える:

| $x$ | $y$ | $z$ | $c$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $-3$ | $x+y+z-3=0$ |
| 0 | $-2$ | $-2$ | 4 | $-2y-2z+4=0$ |
| 0 | $-2$ | 0 | 2 | $-2y+2=0$ |

2 行目を -2 で割って，3 行目を-2 で割っても解は変らないので,

| $x$ | $y$ | $z$ | $c$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $-3$ | $x+y+z-3=0$ |
| 0 | 1 | 1 | $-2$ | $y+z-2=0$ |
| 0 | 1 | 0 | $-1$ | $y-1=0$ |

3 行目を $y=-z+2$ で置き換える:

| $x$ | $y$ | $z$ | $c$ | 意味 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $-3$ | $x+y+z-3=0$ |
| 0 | 1 | 1 | 2 | $y+z-2=0$ |
| 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | $-z=-1$ |

3 行目を-1 で割って，3 角行列ができる:

| $x$ | $y$ | $z$ | $c$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $-3$ | $x+y+z=3$ |
| 0 | 1 | 1 | $-2$ | $y+z=2$ |
| 0 | 0 | 1 | $-1$ | $z=1$ |

後退消去して，

| $x$ | $y$ | $z$ | $c$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | $x=1$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $y=1$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $z=1$ |

# 2　グレブナー基底計算と行列表現とガウスの消去法

$$f1 : x^3 - 3x^2 - y + 1 = 0 \tag{5}$$
$$f2 : -x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{6}$$

の解を求めたい。

## 2.1　多変数方程式の行列表現

$f1$ と $f2$ に含まれる単項式を元とし，元間の順序を決め (ここでは全順序辞書式)，加法に関して，数係数を並べたものを，ベクトルと考える。

多変数方程式系は，下記のような行列で表現できる：

| $x^3$ | $x^2$ | $x$ | $y^2$ | $y$ | $c$ | 意味 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-3$ | 0 | 0 | $-1$ | 1 | $x^3-3x^2-y+1=0$ |
| 0 | $-1$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | $-x^2+y^2-1=0$ |

## 2.2　簡約

- $f2 : x^2 = y^2 - 1$ の関係を用いて，
- $f1 : x^3 = 3x^2 + y - 1$ の関係を簡約する。

簡約に必要な s-多項式 $f1 - x \times f2$ は，新たな基底ベクトルとなる。

- $f1 - x \times f2 : (x^3 = 3x^2 + y - 1) - (x^3 = xy^2 - x)$
- $f3 : 0 = 3x^2 - xy^2 + x + y - 1$

この操作により，ベクトル空間の基底に，新たに $xy^2$ が加わることになり，ベクトル空間の次元が増えることになる:

| $x^3$ | $x^2$ | $xy^2$ | $x$ | $y^2$ | $y$ | $c$ | 意味 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-3$ | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 1 | $f1 : x^3-3x^2-y+1=0$ |
| 0 | $-1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $-1$ | $f2 : -x^2+y^2-1=0$ |
| 0 | 3 | $-1$ | 1 | 0 | 1 | $-1$ | $f3 : 0=3x^2-xy^2+x+y-1$ |

f3 の式は，f2 でそのまま簡約できる $f4 = f3 + 3f2$

- $f4 : (3x^2 - xy^2 + x + y - 1) - 3(x^2 - y^2 + 1)$
- $f4 : -xy2 + x + y2$

| $x^3$ | $x^2$ | $xy^2$ | $x$ | $y^2$ | $y$ | $c$ | 意味 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-3$ | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 1 | $f1: x^3 - 3x^2 - y + 1 = 0$ |
| 0 | $-1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $-1$ | $f2: -x^2 + y^2 - 1 = 0$ |
| 0 | 3 | $-1$ | 1 | 0 | 1 | $-1$ | $f3: 0 = 3x^2 - xy^2 + x + y - 1$ |

この操作を続けていくと，下記の行列表現が得られる。

| $x^2$ | $xy$ | $x$ | $y^5$ | $y^4$ | $y^3$ | $y^2$ | $y$ | $c$ | 意味 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | $f2: x^2 - y^2 + 1 = 0$ |
| 0 | 1 | $-1$ | 0 | $-1$ | 0 | 11 | 3 | $-13$ | $f7: xy - x - y^4 + 11y^2 + 3y - 13$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | $-11$ | $-17$ | 9 | 17 | $f8: y^5 + y^4 - 11y^3 - 17y^2 + 9y + 17$ |

# 3 数式処理システム sage による Groebner 基底計算と固有値法による方程式の求解

有理数 (QQ) を係数とする多変数 $(x_1, x_2)$ の多項式環 $QQ[x_1, x_2]$ を生成し，不定元 $x_1$, $x_2$ を取り出す:

```
x_1, x_2 = QQ['x_1,x_2'].gens()
```

$x_1$, $x_2$, $x_3$ を使って多項式を定義する:

```
f_1 = 2 * x_1^3 * x_2 +6*x_1^3 - 2* x_1^2 - x_1* x_2 - 3* x_1 - x_2 +3
f_2 = x_1^3*x_2 + 3*x_1^3 + x_1^2*x_2 + 2*x_1^2
f_3 = 3*x_1^2*x_2 + 9*x_1^2 + 2*x_1*x_2 + 5*x_1 + x_2 -3
f_1
f_2
f_3
```

```
2*x_1^3*x_2 + 6*x_1^3 - 2*x_1^2 - x_1*x_2 - 3*x_1 - x_2 + 3
x_1^3*x_2 + 3*x_1^3 + x_1^2*x_2 + 2*x_1^2
3*x_1^2*x_2 + 9*x_1^2 + 2*x_1*x_2 + 5*x_1 + x_2 - 3
```

$f_1$, $f_2$, $f_3$ を基底とするイデアル $I$ を生成する:

```
I = ideal(f_1, f_2, f_3)
I
```

```
Ideal (2*x_1^3*x_2 + 6*x_1^3 - 2*x_1^2 - x_1*x_2 - 3*x_1 - x_2 + 3,
```

x_1^3*x_2 + 3*x_1^3 + x_1^2*x_2 + 2*x_1^2, 3*x_1^2*x_2 + 9*x_1^2 + 2*x_1*x_2 + 5*x_1 + x_2 - 3) of Multivariate Polynomial Ring in x_1, x_2 over Rational Field

$I$ のグレブナー基底を求める:

```
B = I.groebner_basis(); B
```

```
[x_1^2 - 3/2*x_1 + x_2 - 3, x_1*x_2 + x_1 - x_2 + 3, x_2^2 - 4*x_1 - 5/2*x_2 - 3/2]
```

$QQ[x_1, x_2]/I$ は，$1, x_2, x_1$ が基底となることがわかる。

```
type(B)
```

$QQ[x_1, x_2]/I$における，かけ算表を作成する:

```
bases = [1,x_1,x_2]
x_1p = [I.reduce(x_1*a) for a in bases]; x_1p
x_2p = [I.reduce(x_2*a) for a in bases]; x_2p
```

```
[x_1, 3/2*x_1 - x_2 + 3, -x_1 + x_2 - 3]
[x_2, -x_1 + x_2 - 3, 4*x_1 + 5/2*x_2 + 3/2]
```

```
P1 = [ f.coefficient(b) for b in [{x_1:0, x_2:0}, {x_1:1, x_2:0}, {x_1:0, x_2:1}] for f in x_1p]; P1
P2 = [ f.coefficient(b) for b in [{x_1:0, x_2:0}, {x_1:1, x_2:0}, {x_1:0, x_2:1}] for f in x_2p]; P2
```

```
[0, 3, -3, 1, 3/2, -1, 0, -1, 1]
[0, -3, 3/2, 0, -1, 4, 1, 1, 5/2]
```

```
M1 = matrix(QQ,3,3,P1); M1
M2 = matrix(QQ,3,3,P2); M2
```

```
[  0   3  -3]
[  1 3/2  -1]
[  0  -1   1]

[  0  -3 3/2]
[  0  -1   4]
[  1   1 5/2]
```

```
s1 = M1.eigenvalues(); s1
s2 = M2.eigenvalues(); s2
```

```
[0, -0.765564437074638?, 3.265564437074638?]
[3, -2.765564437074638?, 1.265564437074638?]
```

```
[[i,j,yf_1.subs({x_1:s1[i], x_2:s2[j]}), f_2.subs({x_1:s1[i], x_2:s2[j]})]
  for i in range(3) for j in range(3)]
```

```
[[0, 0, 0, 0],
 [0, 1, 5.765564437074638?, 0],
 [0, 2, 1.734435562925363?, 0],
 [1, 0, -1.963057085015917?, 0.2383115901485682?],
 [1, 1, 4.562484917954546?, -0.5538774415303320?],
 [1, 2, 0.?e-17, 0.?e-17],
 [2, 0, 376.9630570850159?, 262.2616884098514?],
 [2, 1, 0.?e-15, 0.?e-16],
 [2, 2, 263.5625150820455?, 183.3663774415304?]]
```