コンピュータと数式処理 簡約と行列

鈴木正幸，岩手大学・非常勤講師 suzuki@iwate-u.ac.jp 鈴木正幸，岩手大学・非常勤講師

2023 年 10 月 31 日

目 次

1 ガウス消去

1.1 連立一次方程式

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 3 \quad (1)\\
x - y - z &= -1 \quad (2)\\
x - y + z &= 1 \quad (3)\\
& \quad (4)
\end{aligned}
$$

1.2 行列による表現

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x + y + z - 3 = 0$
1	-1	-1	1	$x - y - z + 1 = 0$
1	-1	1	-1	$x - y + z - 1 = 0$

x を $-y - z + 3$ で置き換える．順序の高変数を，順序の低い変数か成る等式で置き換える。
行列操作でいうと，1 行目の横ベクトル定数倍して，他の行から引いたベクトルで置き換える:

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x + y + z - 3 = 0$
0	-2	-2	4	$-2y - 2z + 4 = 0$
0	-2	0	2	$-2y + 2 = 0$

2 行目を -2 で割って，3 行目を-2 で割っても解は変らないので，

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x + y + z - 3 = 0$
0	1	1	-2	$y + z - 2 = 0$
0	1	0	-1	$y - 1 = 0$

3 行目を $y=-z+2$ で置き換える

x	y	z	c	意味
1	1	1	-3	$x+y+z-3=0$
0	1	1	2	$y+z-2=0$
0	0	-1	-1	$-z=-1$

3 行目を-1 で割って，3 角行列ができる。

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x+y+z=3$
0	1	1	-2	$y+z=2$
0	0	1	-1	$z=1$

後退消去して，

x	y	z	c	
1	0	0	1	$x=1$
0	1	0	1	$y=1$
0	0	1	1	$z=1$

2　グレブナー基底計算と行列

$$f1: x^3-3x^2-y+1=0 \tag{5}$$
$$f2: -x^2+y^2-1=0 \tag{6}$$

の解を求めたい。

x^3	x^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	-1	1	$x^3-3x^2-y+1=0$
0	-1	0	1	0	-1	$-x^2+y^2-1=0$

x^3	x^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	-1	1	$f1: x^3-3x^2-y+1=0$
0	-1	0	1	0	-1	$f2: -x^2+y^2-1=0$

$f2: x^2=y^2-1$ の関係を用いて，$f1: x^3=3x^2+y-1$ の関係を簡約する。
$f1-f2: (x^3=3x^2+y-1)-(x^3=xy^2-x)$
$f3: -3x^2-xy^2+x+y-1$

x^3	x^2	xy^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	0	-1	1	$f1: x^3-3x^2-y+1=0$
0	-1	0	0	1	0	-1	$f2: -x^2+y^2-1=0$
0	3	-1	1	0	1	-1	$f3: 3x^2-xy^2+x+y-1=0$

f3 の式は，f2 でそのまま簡約できる $f4=f3+3f2$
$f4: (3x^2-xy^2+x+y-1)-3(x^2-y^2+1)=-xy^2+x+y+2$

x^3	x^2	xy^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	0	-1	1	$f1: x^3-3x^2-y+1=0$
0	-1	0	0	1	0	-1	$f2: -x^2+y^2-1=0$
0	0	-1	1	1	2	-1	$f4: -xy^2+x+y+2=0$

このように，s-多項式の生成は新らしい項を生成し，ベクトル空間の次元を変化させる。新しい頭項を持った s-多項式が生れなくなるまで，この生成と簡約が続けられる。