

グレブナー基底と線形代数

鈴木正幸, 岩手大学・非常勤講師

2024年10月28日

1 ガウスの消去法による線形方程式の解法

1.1 連立一次方程式と行列表現

連立一次方程式:

$$x + y + z = 3 \quad (1)$$

$$x - y - z = -1 \quad (2)$$

$$x - y + z = 1 \quad (3)$$

$$(4)$$

の行列による表現:

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x + y + z - 3 = 0$
1	-1	-1	1	$x - y - z + 1 = 0$
1	-1	1	-1	$x - y + z - 1 = 0$

1.2 ガウスの消去法

簡約: x を $-y - z + 3$ で置き換える. 順序の高変数を, 順序の低い変数から成る等式で置き換える。

行列操作でいうと, 1行目の横ベクトル定数倍して, 他の行から引いたベクトルで置き換える:

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x + y + z - 3 = 0$
0	-2	-2	4	$-2y - 2z + 4 = 0$
0	-2	0	2	$-2y + 2 = 0$

2行目を -2 で割って, 3行目を -2 で割っても解は変わらないので,

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x + y + z - 3 = 0$
0	1	1	-2	$y + z - 2 = 0$
0	1	0	-1	$y - 1 = 0$

3行目を $y = -z + 2$ で置き換える:

x	y	z	c	意味
1	1	1	-3	$x + y + z - 3 = 0$
0	1	1	2	$y + z - 2 = 0$
0	0	-1	-1	$-z = -1$

3行目を -1 で割って, 3角行列ができる:

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x + y + z = 3$
0	1	1	-2	$y + z = 2$
0	0	1	-1	$z = 1$

後退消去して,

x	y	z	c	
1	0	0	1	$x = 1$
0	1	0	1	$y = 1$
0	0	1	1	$z = 1$

2 グレブナー基底計算と行列表現とガウスの消去法

$$f1 : x^3 - 3x^2 - y + 1 = 0 \quad (5)$$

$$f2 : -x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (6)$$

の解を求めたい。

2.1 多変数方程式の行列表現

$f1$ と $f2$ に含まれる単項式を元とし, 元間の順序を決め (ここでは全順序辞書式), 加法に関して, 数係数を並べたものを, ベクトルと考える。

多変数方程式系は, 下記のような行列で表現できる:

x^3	x^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	-1	1	$x^3 - 3x^2 - y + 1 = 0$
0	-1	0	1	0	-1	$-x^2 + y^2 - 1 = 0$

2.2 簡約

- $f2 : x^2 = y^2 - 1$ の関係を用いて,
- $f1 : x^3 = 3x^2 + y - 1$ の関係を簡約する。

簡約に必要な s-多項式 $f1 - x \times f2$ は, 新たな基底ベクトルとなる。

- $f1 - x \times f2 : (x^3 = 3x^2 + y - 1) - (x^3 = xy^2 - x)$
- $f3 : 0 = 3x^2 - xy^2 + x + y - 1$

この操作により, ベクトル空間の基底に, 新たに xy^2 が加わることになり, ベクトル空間の次元が増えることになる:

x^3	x^2	xy^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	0	-1	1	$f1 : x^3 - 3x^2 - y + 1 = 0$
0	-1	0	0	1	0	-1	$f2 : -x^2 + y^2 - 1 = 0$
0	3	-1	1	0	1	-1	$f3 : 0 = 3x^2 - xy^2 + x + y - 1$

$f3$ の式は, $f2$ でそのまま簡約できる $f4 = f3 + 3f2$

- $f4 : (3x^2 - xy^2 + x + y - 1) - 3(x^2 - y^2 + 1)$
- $f4 : -xy^2 + x + y2$

x^3	x^2	xy^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	0	-1	1	$f1: x^3 - 3x^2 - y + 1 = 0$
0	-1	0	0	1	0	-1	$f2: -x^2 + y^2 - 1 = 0$
0	3	-1	1	0	1	-1	$f3: 0 = 3x^2 - xy^2 + x + y - 1$

この操作を続けていくと、下記の行列表現が得られる。

x^2	xy	x	y^5	y^4	y^3	y^2	y	c	意味
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	$f2: x^2 - y^2 + 1 = 0$
0	1	-1	0	-1	0	11	3	-13	$f7: xy - x - y^4 + 11y^2 + 3y - 13$
0	0	0	1	1	-11	-17	9	17	$f8: y^5 + y^4 - 11y^3 - 17y^2 + 9y + 17$

3 数式処理システム sage による Groebner 基底計算と固有値法による方程式の求解

有理数 (QQ) を係数とする多変数 (x_1, x_2) の多項式環 $QQ[x_1, x_2]$ を生成し、不定元 x_1, x_2 を取り出す:

```
x_1, x_2 = QQ['x_1,x_2'].gens()
```

x_1, x_2, x_3 を使って多項式を定義する:

```
f_1 = 2 * x_1^3 * x_2 + 6*x_1^3 - 2* x_1^2 - x_1* x_2 - 3* x_1 - x_2 + 3
f_2 = x_1^3*x_2 + 3*x_1^3 + x_1^2*x_2 + 2*x_1^2
f_3 = 3*x_1^2*x_2 + 9*x_1^2 + 2*x_1*x_2 + 5*x_1 + x_2 - 3
f_1
f_2
f_3
```

```
2*x_1^3*x_2 + 6*x_1^3 - 2*x_1^2 - x_1*x_2 - 3*x_1 - x_2 + 3
x_1^3*x_2 + 3*x_1^3 + x_1^2*x_2 + 2*x_1^2
3*x_1^2*x_2 + 9*x_1^2 + 2*x_1*x_2 + 5*x_1 + x_2 - 3
```

f_1, f_2, f_3 を基底とするイデアル I を生成する:

```
I = ideal(f_1, f_2, f_3)
I
```

```
Ideal (2*x_1^3*x_2 + 6*x_1^3 - 2*x_1^2 - x_1*x_2 - 3*x_1 - x_2 + 3,
```

```
 x_1^3*x_2 + 3*x_1^3 + x_1^2*x_2 + 2*x_1^2, 3*x_1^2*x_2 + 9*x_1^2 + 2*x_1*x_2 + 5*x_1 + x_2 - 3)
of Multivariate Polynomial Ring in x_1, x_2 over Rational Field
```

I のグレブナー基底を求める:

```
B = I.groebner_basis(); B
```

```
[x_1^2 - 3/2*x_1 + x_2 - 3, x_1*x_2 + x_1 - x_2 + 3, x_2^2 - 4*x_1 - 5/2*x_2 - 3/2]
```

$QQ[x_1, x_2]/I$ は, $1, x_2, x_1$ が基底となることがわかる。

```
type(B)
```

$QQ[x_1, x_2]/I$ における, かけ算表を作成する:

```

bases = [1,x_1,x_2]
x_1p = [I.reduce(x_1*a) for a in bases]; x_1p
x_2p = [I.reduce(x_2*a) for a in bases]; x_2p

[x_1, 3/2*x_1 - x_2 + 3, -x_1 + x_2 - 3]
[x_2, -x_1 + x_2 - 3, 4*x_1 + 5/2*x_2 + 3/2]

P1 = [ f.coefficient(b) for b in [{x_1:0, x_2:0}, {x_1:1, x_2:0}, {x_1:0, x_2:1}] for f in x_1p]; P1
P2 = [ f.coefficient(b) for b in [{x_1:0, x_2:0}, {x_1:1, x_2:0}, {x_1:0, x_2:1}] for f in x_2p]; P2

[0, 3, -3, 1, 3/2, -1, 0, -1, 1]
[0, -3, 3/2, 0, -1, 4, 1, 1, 5/2]

M1 = matrix(QQ,3,3,P1); M1
M2 = matrix(QQ,3,3,P2); M2

[ 0  3 -3]
[ 1 3/2 -1]
[ 0 -1  1]

[ 0 -3 3/2]
[ 0 -1  4]
[ 1  1 5/2]

s1 = M1.eigenvalues(); s1
s2 = M2.eigenvalues(); s2

[0, -0.765564437074638?, 3.265564437074638?]
[3, -2.765564437074638?, 1.265564437074638?]

[[i,j,yf_1.subs({x_1:s1[i], x_2:s2[j]}), f_2.subs({x_1:s1[i], x_2:s2[j]})]
 for i in range(3) for j in range(3)]

[[0, 0, 0, 0],
 [0, 1, 5.765564437074638?, 0],
 [0, 2, 1.734435562925363?, 0],
 [1, 0, -1.963057085015917?, 0.2383115901485682?],
 [1, 1, 4.562484917954546?, -0.5538774415303320?],
 [1, 2, 0.?e-17, 0.?e-17],
 [2, 0, 376.9630570850159?, 262.2616884098514?],
 [2, 1, 0.?e-15, 0.?e-16],
 [2, 2, 263.5625150820455?, 183.3663774415304?]]

```