コンピュータと数式処理 簡約と行列

鈴木正幸，岩手大学・非常勤講師 suzuki@iwate-u.ac.jp 鈴木正幸，岩手大学・非常勤講師

2024 年 10 月 28 日

目 次

1 ガウス消去

1.1 連立一次方程式

$$
\begin{aligned}
x+y+z &= 3 && (1)\\
x-y-z &= -1 && (2)\\
x-y+z &= 1 && (3)\\
& && (4)
\end{aligned}
$$

1.2 行列による表現

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x+y+z-3=0$
1	-1	-1	1	$x-y-z+1=0$
1	-1	1	-1	$x-y+z-1=0$

x を $-y-z+3$ で置き換える．順序の高変数を，順序の低い変数か成る等式で置き換える。
行列操作でいうと，1 行目の横ベクトル定数倍して，他の行から引いたベクトルで置き換える:

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x+y+z-3=0$
0	-2	-2	4	$-2y-2z+4=0$
0	-2	0	2	$-2y+2=0$

2 行目を -2 で割って，3 行目を-2 で割っても解は変らないので，

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x+y+z-3=0$
0	1	1	-2	$y+z-2=0$
0	1	0	-1	$y-1=0$

3 行目を $y=-z+2$ で置き換える

x	y	z	c	意味
1	1	1	-3	$x+y+z-3=0$
0	1	1	2	$y+z-2=0$
0	0	-1	-1	$-z=-1$

3 行目を-1 で割って，3 角行列ができる。

x	y	z	c	
1	1	1	-3	$x+y+z=3$
0	1	1	-2	$y+z=2$
0	0	1	-1	$z=1$

後退消去して，

x	y	z	c	
1	0	0	1	$x=1$
0	1	0	1	$y=1$
0	0	1	1	$z=1$

2　グレブナー基底計算と行列

$$f1 : x^3 - 3x^2 - y + 1 = 0 \tag{5}$$
$$f2 : -x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{6}$$

の解を求めたい。

x^3	x^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	-1	1	$x^3-3x^2-y+1=0$
0	-1	0	1	0	-1	$-x^2+y^2-1=0$

x^3	x^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	-1	1	$f1 : x^3-3x^2-y+1=0$
0	-1	0	1	0	-1	$f2 : -x^2+y^2-1=0$

$f2 : x^2 = y^2 - 1$ の関係を用いて，$f1 : x^3 = 3x^2 + y - 1$ の関係を簡約する。

$f1 - f2 : (x^3 = 3x^2 + y - 1) - (x^3 = xy^2 - x)$

$f3 : 0 = 3x^2 - xy^2 + x + y - 1$

\[

x^3	x^2	xy^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	0	-1	1	$f1 : x^3-3x^2-y+1=0$
0	-1	0	0	1	0	-1	$f2 : -x^2+y^2-1=0$
0	3	-1	1	0	1	-1	$f3 : 0=3x^2-xy^2+x+y-1$

\]

f3 の式は，f2 でそのまま簡約できる $f4 = f3 + 3f2$

$f4 : (3x^2 - xy^2 + x + y - 1) - 3(x^2 - y^2 + 1)$ \(f4: -xy2+x+y2

\[

x^3	x^2	xy^2	x	y^2	y	c	意味
1	-3	0	0	0	-1	1	$f1 : x^3-3x^2-y+1=0$
0	-1	0	0	1	0	-1	$f2 : -x^2+y^2-1=0$
0	3	-1	1	0	1	-1	$f3 : 0=3x^2-xy^2+x+y-1$

\]

\[

x^2	xy	x	y^5	y^4	y^3	y^2	y	c	意味
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	$f2 : x^2-y^2+1=0$
0	1	-1	0	-1	0	11	3	-13	$f7 : xy-x-y^4+11y^2+3y-13$
0	0	0	1	1	-11	-17	9	17	$f8 : y^5+y^4-11y^3-17y^2+9y+17$

\]

```
x, y = QQ['x,y'].gens()
```

x_1, x_2, x_3を使って多項式を定義する:

```
f_1 = x^3 -3*x^2 - y + 1; f_1
f_2 = x^2 -y^2 +1; f_2
f_3 = f_1 - x*f_2; f_3
f_4 = -f_3-3*f_2; f_4
f_5 = f_3+f_4; f_5
```

```
f_6 = f_2*y^2 -x*f_3; f_6
f_7 = f_6 - 3*f_1 -10*f_2; f_7
f_8 = f_7*x-y*f_2; f_8
```

```
x^3 - 3*x^2 - y + 1
x^2 - y^2 + 1
x*y^2 - 3*x^2 - x - y + 1
-x*y^2 + 3*y^2 + x + y - 4
-3*x^2 + 3*y^2 - 3
-y^4 + 3*x^3 + x^2 + x*y + y^2 - x
-y^4 + x*y + 11*y^2 - x + 3*y - 13
-x*y^4 + 11*x*y^2 + y^3 - x^2 + 3*x*y - 13*x - y
```

f_1, f_2, f_3 を基底とするイデアル I を生成する:

```
I = ideal(f_1, f_2, f_3)
I
```

```
Ideal (x^3 - 3*x^2 - y + 1, x^2 - y^2 + 1, x*y^2 - 3*x^2 - x - y + 1) of Multivariate Polynomial Ring in x
```