

グレブナー基底と高次多変数方程式の 解法

鈴木 正幸

岩大・非常勤講師

November 3, 2019

変数が多く，
次数が高い，
方程式の解を，
求めるアルゴリズム

Contents

方程式を解くとは？

数の集合と基底と最大公約数

多変数方程式をどう解くか？

パズルと基底と簡約

グレブナー基底

項の間の順序と簡約

グレブナー基底から方程式の解を求める方法

一次方程式

$$ax = b$$

両辺に , a^{-1} を , 左から掛ける:

$$x = a^{-1}b$$

連立一次方程式 (系)

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots & = & b_1, \\ & \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots & = & b_n \end{array}$$

- ▶ 線形代数, ガウスの消去法
- ▶ 一次方程式, $ax = b$ に帰着させる

一変数方程式

$$a_n x^n + \cdots + a_0 = b$$

- ▶ 解の公式, $x^n = c$ に帰着させる.
- ▶ 帰着できない時, 数値計算 (ニュートン法) で近似的に求める.

多変数 (代数) 方程式 (系)

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \dots, z) &= 0, \\ &\dots, \\ f_n(x, y, \dots, z) &= 0 \end{aligned}$$

- ▶ 変数消去, 因数分解
- ▶ 必ず解ける方法を知っていますか?

天秤秤の問題

天秤秤と, a グラムの重りと b グラムの重りが無数にあるとします. どんな重さが測れるでしょう?

あるいは, c グラムを測る事ができますか?

数の集合と基底

$$P = \{ax + by | x, y \in \mathbb{Z}\}$$

a の倍数と b の倍数を加えてできる整数の集合 P を考えます。
 a と b は, P を生成する基底です。

$c \in P$ ならば問題は解決です。

$\{gz | z \in \mathbb{Z}, g \in P\} = P$ となる, g があるか?

- ▶ a と b の組合わせで作れる最小の数は, 最大公約数 g であり, それの倍数しか a と b の組合わせでは作れません。
- ▶ $ax + by = g$ となるの x と y は, ユークリッドの互除法によって求められます。
- ▶ 最大公約数 g は, a と b の組合わせでできる数の集合のもっとも簡単な基底 となります。

二つの方程式 $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$ の共通解は？

それぞれの方程式の解を求めて、共通な解を求めてもいいですが、
前の議論から、

- ▶ 二つの式 $f_1(x), f_2(x)$ の組み合わせでできる、多項式全ての集合を考える：

$$\{A(x)f_1(x) + B(x)f_2(x) \mid A(x), B(x) \text{ は任意の } x \text{ の多項式}\}$$

- ▶ 最も簡単な (次数の低い) 式 (基底) を求め、
- ▶ その解を求める。

最大公約多項式

- ▶ この基底は, $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の最大公約多項式 ($g(x)$) となり,

$$\begin{aligned} a(x)f_1(x) + b(x)f_2(x) &= g(x), \\ \deg(a(x)) &< \deg(f_2(x)), \\ \deg(b(x)) &< \deg(f_1(x)) \end{aligned}$$

- ▶ $g(x)$, $a(x)$, $b(x)$ はユークリッドの互助法で求められる

多変数で高次の方程式をどう解くか?

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \dots, z) &= 0, \\ &\dots, \\ f_n(x, y, \dots, z) &= 0 \end{aligned}$$

f_1, \dots, f_n を組合わせでできる任意の多項式の集合を考える:

$$\{A_1(x, \dots, z)f_1(x, \dots, z) + \dots + A_n(x, \dots, z)f_n(x, \dots, z)\}$$

この集合を (f_1, \dots, f_n) と表し, f_1 から f_n が作るイデアル \mathcal{I} と呼ぶ.

\mathcal{I} を作ることのできる多項式の組をイデアルの基底と呼びます.

都合の良い基底

方程式を解くのに都合の良い基底を求めることは，

同じ解を持つ，より簡単な方程式系への変換となる．この基底が例えば，

$$(g_1(x, z) = 0, g_2(y, z) = 0, \dots, g_m(z) = 0)$$

という形で求まれば，

多変数方程式の問題は，一変数方程式の問題に帰着される．

- ▶ 「このような変形はできるのか」，
- ▶ 「変形する方針は」，
- ▶ 「必ず求まるのか」

などが問題となる．

グラス置き換えパズル

ウィスキーのグラス W , ビールのグラス B , お酒のグラス S が一列に並んでいる.

グラスは次の置き換え規則で, 置き換えて良いとする.

$$\text{置き換え規則 } G \left\{ \begin{array}{lcl} B & \longleftrightarrow & WB \\ BS & \longleftrightarrow & W \end{array} \right.$$

問題

1. $BSBS$ は $WWWB$ に置き換えできるか?
2. $BSBBS$ は BWW に置き換えできるか?

問題の難しい点

- ▶ できる場合はその置き換えを示せば良いが、
- ▶ できない事を示す事.

パズル解法への道

簡単な方へ置き換える (簡約化) ことにする

$$\text{簡約規則 } R \left\{ \begin{array}{l} WB \rightarrow B \\ BS \rightarrow W \end{array} \right.$$

正規形

- ▶ これ以上簡約できないものを正規形と言う
- ▶ 置き換え規則 G で置き換え可能な列の要素は簡約規則 R で同じ正規系を持つか？
- ▶ この性質が成り立てば, 簡約系で正規形が同じであれば, 置き換え系で, 置き換え可能となる.

簡約規則の追加

置き換え可能なのに、同じ正規形を持たない場合は、そのような簡約規則を追加すればよい。

例えば、 WBS は二つの置き換えが可能:

$$\begin{cases} WBS \rightarrow WW \\ WBS \rightarrow BS \rightarrow W \end{cases}$$

置き換え系では、 WW と W は、 WBS を通して置き換え可能であるから、簡約系で

$$WW \rightarrow W$$

を新しい簡約規則として採用すればいい事になる。
この追加される簡約規則をどうやって見付けるかが問題となる。

新しい規則を見つける

- ▶ 簡約規則の左項中で、重なりが生ずるような二つの規則を探す。
(この二つの簡約規則を危険対と呼ぶ)。
今の場合、 BS と WB は 重なりを持つ項、 WBS を別の正規形に簡約する可能性を持つ。
- ▶ この操作を次々に繰り返し、危険対が全て同じ簡約形を持つようになった時、置き換え可能である物は、全て同じ正規形を持つ事になる。

これを、簡約系の完備化という。

完備な系

- ▶ 正規形は有限ステップで求まる. (停止性)
- ▶ ある項の正規形は, 簡約順序によらず同じになる. (合流性)

パズルの答え

簡約規則 R を完備化すると:

$$\text{簡約規則 } R' \left\{ \begin{array}{ll} WB & \rightarrow B \\ BS & \rightarrow W \\ WW & \rightarrow W \end{array} \right.$$

これでパズルの問題が解ける:

- ▶ $BSBS \rightarrow^* W$, $WWWB \rightarrow^* B$, なので, 置き換え不可
- ▶ $BSBBS \rightarrow^* BW$, $BWWW \rightarrow^* BW$, なので, 置き換え可

これがどう方程式と関係しているのでしょうか？

グレブナー基底

与えられた方程式 f_i の最高順位項を $head(f_i)$ 、残りの項を $rest(f_i)$ とすると,

$$f_i = head(g_i) + rest(g_i) = 0$$

から

$$head(g_i) \rightarrow -rest(g_i)$$

という簡約規則を作る事ができる.

このような簡約系を作るには, 項間の順序, 簡約, 危険対の求め方を, 方程式用に決める必要がある.

項の間の順序と簡約

いくつかの順序が考えられ、順序によって完備な簡約系が異なる。

辞書式順序: $xyz > yz^3 > z^5$

全次数辞書式順序: $x^5 > x^4y > x^3yz$

簡約

簡約

基底の先頭項を残りの項で置き換える簡約規則と見て，項をより低順位項で置き換える操作．

g_1 を g_2 で簡約

▶ $g_1 = x^4yz - xyz^2$ ($head(g_1) = x^4yz$, $rest(g_1) = xyz^2$)

▶ $g_2 = x^3yz - xz^2$ ($head(g_2) = x^3yz$, $rest(g_2) = xz^2$)

$$\begin{aligned} g' &= g_1 - (head(g_1)/head(g_2))g_2 \\ &= g_1 - (x^4yz/x^3yz)g_2 \\ &= x^2z^2 - xyz^2 \end{aligned}$$

S 多項式

新たな簡約規則を得るための計算 .

2つの多項式 f_1, f_2 の S 多項式を $Sp(f_1, f_2)$ と書き、以下の
ように計算する。

$$Sp(f_1, f_2) = \frac{lcm}{head(f_1)} f_1 - \frac{lcm}{head(f_2)} f_2$$

$$\begin{aligned} g_1 &= x^3yz - xz^2, & head(g_1) &= x^3yz, \\ g_2 &= x^2y^2 - z^2, & head(g_2) &= x^2y^2 \end{aligned}$$

$$lcm(head(g_1), head(g_2)) = x^3y^2z$$

$$\begin{aligned} Sp(g_1, g_2) &= (lcm/head(g_1))g_1 - (lcm/head(g_1))g_2 \\ &= (x^3y^2z/x^3yz)g_1 - (x^3y^2z/x^2y^2)g_2 \\ &= -xyz^2 + xz^3 \end{aligned}$$

グレブナー基底の定義

イデアル \mathcal{I} の基底を $G = \{f_1, \dots, f_n\}$ とする。
 F を可能な限り M 簡約した結果を F' とし,

$$F \xrightarrow{G} F'$$

と表す.

グレブナー基底 $G \mid$

\mathcal{I} の任意の要素 f に対し,

$$f \xrightarrow{G} 0$$

G がグレブナー基底の時, $f \xrightarrow{\psi} f'$ を計算し, $f' = 0$ を調べることで、 $f \in \mathcal{I}$ であるかを簡単に決定できる.

f_1, f_2, f_3 のグレブナー基底計算 (全次数辞書式順序)

$$\begin{cases} f_1 = 2x_1^3x_2 + 6x_1^3 - 2x_1^2 - x_1x_2 - 3x_1 - x_2 + 3 \\ f_2 = x_1^3x_2 + 3x_1^3 + x_1^2x_2 + 2x_1^2 \\ f_3 = 3x_1^2x_2 + 9x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_1 + x_2 - 3 \end{cases}$$

S-多項式

$$\begin{aligned} Sp(f_1, f_2) &= (\text{lcm}/\text{head}(f_1))f_1 - (\text{lcm}/\text{head}(f_1))f_2 \\ &= (2x_1^3x_2/2x_1^3x_2)f_1 - (2x_1^3x_2/x_1^3x_2)f_2 \\ &= -2x_1^2x_2 - 6x_1^2 - x_1x_2 - 3x_1 - x_2 + 3 \\ &= f'_4 \end{aligned}$$

グレブナー基底

f_1, f_2, f_3 のグレブナー基底

$$G = \left\{ \begin{array}{l} x_1x_2 + x_1 - x_2 + 3, \\ 2x_1^2 - 3x_1 + 2x_2 - 6, \\ 2x_2^2 - 8x_1 - 5x_2 - 3 \end{array} \right\}$$

グレブナー基底から方程式の解を求める方法

辞書式順序で基底計算を行うと、連立方程式の解が求めやすいが、基底計算に時間がかかる上に計算量が多くなる。
簡単に求まる基底から、解を求める手法として固有値法がある。

固有値法

1. 任意の多項式を、グレブナー基底 G で簡約した多項式の集合 $\mathcal{P}^s/\mathcal{I}$ は、ベクトル空間をなす。
2. グレブナー基底の最高順位項で割り切れない全ての項の集合を Normal set といい、 $\mathcal{P}^s/\mathcal{I}$ ベクトル空間の基底となる。
3. Normal set により $x_i \times$ を行列で表す事ができる。
4. その行列の固有値は、 \mathcal{I} の x_i に関する解となる。

f_1, f_2, f_3 のグレブナー基底

$$G = [x_1x_2 + x_1 - x_2 + 3, 2x_1^2 - 3x_1 + 2x_2 - 6, 2x_2^2 - 8x_1 - 5x_2 - 3]$$

$$Normal\ Set = \{1, x_2, x_1\}$$

書き換え規則

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1x_2 & \rightarrow & -x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 & \rightarrow & \frac{3}{2}x_1 - x_2 + 3 \\ x_2^2 & \rightarrow & 4x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$P = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + c_3$$

$x_1 \times$ の行列 (かけ算表)

$$\begin{array}{l} x_1 \times 1 \\ x_1 \times x_2 \\ x_1 \times x_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$x_1 \times$ の固有値

$$\left[0, \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{65}, \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{65} \right]$$

$x_2 \times$ の行列 (かけ算表)

$$\begin{array}{rcl} & 1 & x_2 & x_1 \\ x_2 \times 1 & \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5/2 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ x_2 \times x_2 & & & \\ x_2 \times x_1 & & & \end{array}$$

$x_2 \times$ の固有値

$$\left[3, -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{65}, -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{65} \right]$$

これらの固有値が f_1, f_2, f_3 の解である。