

MECCANICA COMPUTAZIONALE DEI TESSUTI E BIOMATERIALI

Omogeneizzazione numerica di materiali microstrutturati

Mastrofini Alessandro

alessandro.mastrofini@alumni.uniroma2.eu

Abstract

Nel seguente report vengono introdotte diverse campagne di simulazione volte all'omogeneizzazione del tessuto osseo trabecolare.

COMPLETE

COMPLETA

COMPLETAA

Background, the context and purpose of the study;

Results, the main findings;

Conclusions, brief summary and potential implications.

Please minimize the use of abbreviations and do not cite references in the abstract.

Key words: trabecular bone; homogenization; composite material

1 Introduzione

Lo scopo della seguente analisi è quello di indagare l'influenza delle proprietà microstrutturali sul comportamento macroscopico di un materiale composito.

Il flusso logico delle campagne di simulazioni è riportato in fig. 2.

Si parte dall'analizzare la struttura dell'osso trabecolare arrivando ad un volume rappresentativo idealizzato con una geometria tale da rispettare il rapporto tra i pori e la massa ossea trabecolare. Viene quindi discretizzato il RVE e il passaggio successivo prevede di ottimizzare la mesh in modo tale da avere un risultato sufficientemente accurato riducendo le richieste di sforzo computazionale.

Si ottiene quindi una prima matrice di omogenizzazione che rispecchia le proprietà strutturali del RVE e dell'osso trabecolare così idealizzato.

Vengono poi analizzate diverse proprietà geometriche e materiali seguendo le risposte dell'osso al carico, fenomeno noto come adattamento e rimodellamento osseo.

2 Tessuto osseo

Il tessuto osseo è una forma specializzata di tessuto connettivo caratterizzata dalla mineralizzazione della matrice extracellulare. Questo conferisce al tessuto una notevole durezza e resistenza. È un tessuto in continua evoluzione, continuamente rinnovato e rimodellato per tutta la durata della vita. Costituisce l'impalcatura dello scheletro, da inserzione a muscoli e tendi e al suo interno contiene midollo osseo.

Il tessuto osseo è costituito da cellule e da una matrice extracellulare, organica ed inorganica. La parte organica contiene fibre collagene e sostanza amorfa formata da glicoproteine e proteoglicani.

Si possono distinguere due tipologie di osso: osso compatto e osso spugnoso [1]. L'osso compatto appare, all'esame macroscopico, come una singola massa solida. L'osso spugnoso invece ha un aspetto alveolare ed è costituito da sottili trabecole, che si anastomizzano in una rete tridimensionale. All'interno delle maglie che si formano con le spine trabecolari vi è accolto il midollo osseo.

ESCRIVI OSSO TRABECOLARE DA COWIN e LIBRO ISTOLOGIA
DESCRIVI BREVEMENTE PROPRIETÀ MECCANICHE NOTE DALLA LETTERATURA

TIPO:

Inoltre, è noto in letteratura che il parametro fondamentale e più influente nel legare la microstruttura alla risposta di rigidezza è la frazione volumetrica di pori. INSERISCI CITAZIONI

Ci sono però anche altri aspetti. Bisogna tenere conto che l'osso è un tessuto biologico e quindi soggetto al rimodellamento. In particolare è noto che l'osso risponde molto bene a stimoli di compressione andando ad aumentare la sua sezione trasversa ed inspessendo lo strato di osso compatto. Anche nell'osso spugnoso si vedono alcuni cambiamenti tra cui l'allineamento delle trabecole lungo le linee di forza. [2]

3 Struttura multiscala

In questa analisi viene presa come riferimento una vertebra lombare, L3. Le considerazioni sono comunque estensibili a qualunque

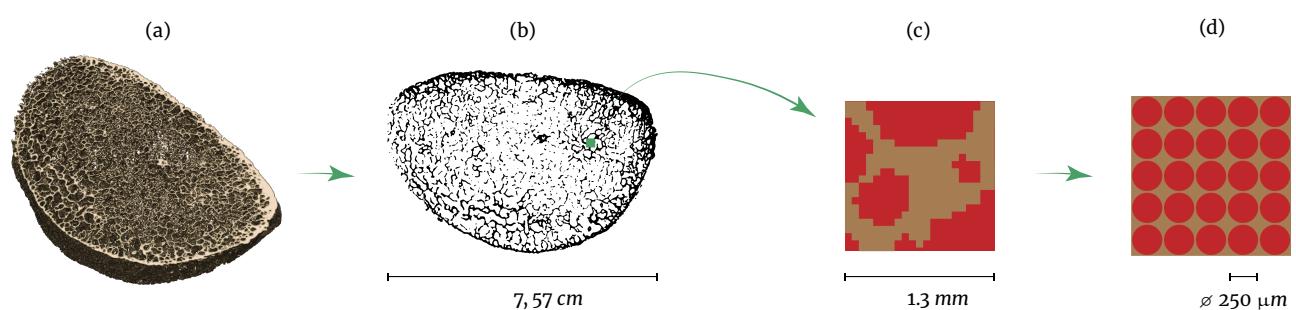


Figure 1. Idealizzazione del RVE. (a) Ricostruzione tridimensionale; (b) Slice di riferimento no. 650; (c) ingrandimento del volume di interesse; (d) idealizzazione geometrica

altro osso trabecolare ma i parametri materiali fanno riferimento a dati selezionati per vertebre lombari. Le vertebre lombari sono solo alcune delle 33-34 vertebre che formano la colonna vertebrale umana. Il corpo vertebrale è formato principalmente da osso trabecolare con le singole trabecole allineate lungo le linee di forza. Questa disposizione fornisce un contributo importante per la distribuzione dei carichi e il sostegno del busto. Circa tre quarti dell'intero carico strutturale ricadono sulla colonna anteriore, ovvero sul corpo vertebrale, dischi intervertebrali e sulle placche terminali delle vertebre. La struttura ossea trabecolare può subire diversi cambiamenti con l'invecchiamento o a causa di alcune patologie [2] come la perdita di densità minerale, cambiamenti morfologici come un aumento della frazione volumetrica di pori, ispessimento o assottigliamento delle trabecole e perdita di connettività. Questi cambiamenti influenzano notevolmente la risposta meccanica del tessuto.

L'osso è composto da diverse fasi. Contiene una fase organica, una inorganica e acqua. La fase organica è composta da collagene

e proteine mentre la fase inorganica da fosfato di calcio, simile all'idrossiapatite [3]. Alla nanoscala si trovano le molecole di collagene e i cristalli di idrossiapatite. Si passa poi ad una scala leggermente maggiore dove delle fibrille mineralizzate si uniscono a formare una singola lamella di spessore alcuni μm . Le singole lamelle si impacchettano a formare delle trabecole con uno spessore medio di $50 \mu\text{m}$ e una lunghezza di circa 1mm. Siamo alla microscala. Si passa poi ad una scala intermedia dove possiamo considerare il volume di interesse di questa analisi dove troviamo sia trabecole che i pori riempiti di midollo fino ad arrivare alla macroscale dove si guarda all'osso nel suo insieme.

L'obiettivo della seguente analisi è quello di portare in conto le differenze alla microscala, considerando un volume rappresentativo, e omogenizzare le proprietà meccaniche ottenendo un'unica matrice di rigidezza omogenizzata.

4 Omogenizzazione

L'obiettivo è quindi quello di ottenere delle proprietà materiali alla macroscale a partire dalle proprietà alla microscala come le rigidezze dei due materiali, matrice ossea e pori.

Ad una scala sufficientemente grande rispetto le singole trabecole è possibile considerare la matrice di midollo e le trabecole ossee come due materiali diversi ma entrambi eterogenei e dal comportamento isotropo. L'isotropia è una prima approssimazione che però ci permette di procedere in modo più efficiente nell'omogenizzazione andando a vedere come la struttura e la disposizione dei pori influenzino il comportamento macroscopico.

Con la procedura di omogenizzazione andremo a considerare una media delle proprietà meccaniche di osso e matrice ma questa media viene intesa in senso più ampio e il significato può variare a seconda dell'approccio.

4.1 Volume di interesse

Il primo passo, per poter procedere ad un'omogenizzazione, è quello di definire un volume rappresentativo (RVE) tale da essere rappresentativo dal punto di vista statistico della distribuzione geometrica dei costituenti, quindi della microscala. Per farlo il codice calcola automaticamente il lato nel range di qualche mm a partire da alcune considerazioni. Viene rispettato il diametro medio dei pori [4] e la frazione volumetrica [5].

Sulla base di queste considerazioni vengono inseriti 25 pori equidistanti e tali che la loro distanza dal bordo sia la metà della distanza tra ogni poro. Questo consente di avere un RVE simmetrico e rappresentativo di una selezione delle trabecole.

Maggiori informazioni sulla procedura di automazione del calcolo del RVE sono nella sezione 9.2.

Inoltre, per fare le opportune considerazioni nel considerare le tensioni medie, i pori vengono considerati pieni di un materiale a bassa rigidezza rappresentativo del midollo osseo. Questo serve sia a considerare un fenomeno più rappresentativo della realtà sia a permettere una corretta applicazione del teorema della media delle tensioni.

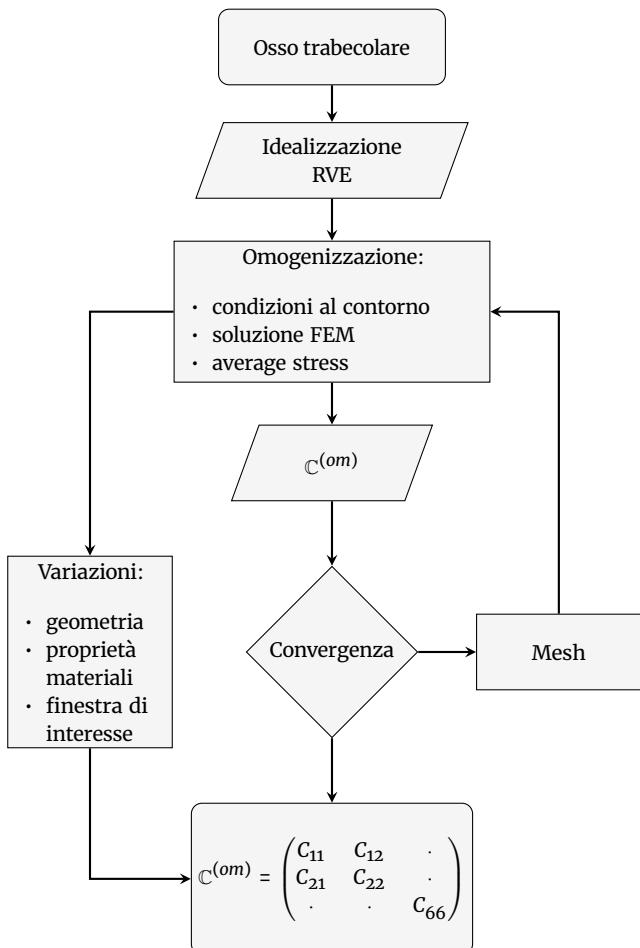


Figure 2. Flusso logico della campagna di simulazione

4.2 Stime analitiche

Per confrontare i dati dell'omogenizzazione vengono considerate le stime analitiche di Voigt e Reuss.

L'approssimazione di Voigt considera la matrice di rigidezza come una media pesata per le volume fraction delle rigidezze dei costituenti.

$$\mathbb{C}_{\text{Voigt}} = (1 - \nu_f) \mathbb{C}_b + \nu_f \mathbb{C}_m \quad (1)$$

Le stime di Reuss sono analoghe ma in cedevolezza:

$$\mathbb{S}_{\text{Voigt}} = (1 - \nu_f) \mathbb{S}_b + \nu_f \mathbb{S}_m \quad (2)$$

Vengono considerate queste due stime per via del teorema di Hill che garantisce, sotto le opportune ipotesi, che la matrice di rigidezza sia compresa tra queste [6]. Reuss costituisce il limite inferiore e Voigt il limite superiore dell'omogenizzazione.

I due materiali vengono considerati singolarmente isotropi, quindi tali da avere un comportamento materiale descritto dalla matrice di cedevolezza (3).

$$[\mathbb{S}]_{\text{iso}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{1}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Queste matrici vengono calcolate e per ogni iterazione del processo di omogenizzazione viene verificato che il risultato sia compreso in tali stime tramite la funzione `VoigtReussTest[]`. In particolare, passando la variabile `verbOutput==True` è possibile estrarne i valori:

$$\mathbb{C}_{\text{Voigt}} = \begin{pmatrix} 2019.340 & 865.404 & 0 \\ 865.404 & 2019.340 & 0 \\ 0 & 0 & 576.969 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbb{C}_{\text{Reuss}} = \mathbb{S}_{\text{Reuss}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.226262 & 0.0399292 & 0 \\ 0.0399292 & 0.226262 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0931663 \end{pmatrix} \quad (5)$$

4.3 Omogenizzazione numerica

Viene quindi strutturata una campagna di simulazioni tale da analizzare il RVE ed estrarre una matrice di rigidezza omogenizzata. Ulteriori considerazioni vengono fatte sul parametro $\mathbb{C}_{11}^{(om)}$.

L'approccio all'omogenizzazione segue condizioni al bordo omogenee di tipo spostamento. In particolare, applicheremo un campo di spostamento alla macroscala supponendo che sia rappresentativo di quello alla microscala. Quindi otterremo un certo campo di tensione alla microscala, funzione del punto. Possiamo quindi considerare il campo di tensione alla macroscala come la media di quello alla microscala. In particolare, queste condizioni sono garantite dall'Average Strain Theorem. Quindi le tensioni medie misurate nel RVE sono definite come:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{\|\tilde{\Omega}\|} \int_{\tilde{\Omega}} \epsilon d\tilde{\Omega} \quad (6)$$

dove $\tilde{\Omega}$ è l'area del RVE.

Applicando un campo di deformazione alla macroscala otterrei le deformazioni alla microscala e potrei estrarre le tensioni sem-

Table 1. Parametri materiali

Nome	Valore	Reference
E_b	3.8 GPa	Cowin [5]
ν_b	0.3	Dalstra et al. [7], Wirtz et al. [8]
E_m	15 KPa	Jansen et al. [9]
ν_m	0.1	
$C_{11}^{(b)}$	6730.77 MPa	\$4.3 *
$C_{11}^{(m)}$	0.15 MPa	\$4.3 *
$C_{11}^{(om)}$	756.78 MPa	\$4.3 *
L	1.324 mm	\$4.1 *

*Parametri calcolati

plicemente risolvendo il problema dell'equilibrio elastico:

$$\sigma = \langle \tilde{\sigma} \rangle = \mathbb{C} \langle \tilde{\epsilon} \rangle = \mathbb{C} \epsilon \quad (7)$$

In particolare, applicando condizioni di deformazione unitaria su ϵ_1, ϵ_2 e γ_{12} otterrei rispettivamente prima, seconda e terza colonna di \mathbb{C} . È possibile farlo in tre processi carico separati e considerare il contributo complessivo in quanto siamo in elasticità lineare sotto l'ipotesi di piccole deformazioni per cui vale la sovrapposizione degli effetti.

DESCRIVI IL METODO FEM

Questo viene implementato tramite una campagna di simulazioni in `Mathematica` sfruttando il tool `AcxFEM`.

Viene sfruttata la procedura `TEST[]` che permette di applicare in sequenza le tre condizioni di spostamento e ottenere così la matrice di rigidezza:

$$\mathbb{C}^{(om)} = \begin{pmatrix} 756.78 & 80.90 & 0.00 \\ 80.90 & 756.78 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 40.87 \end{pmatrix} \quad (8)$$

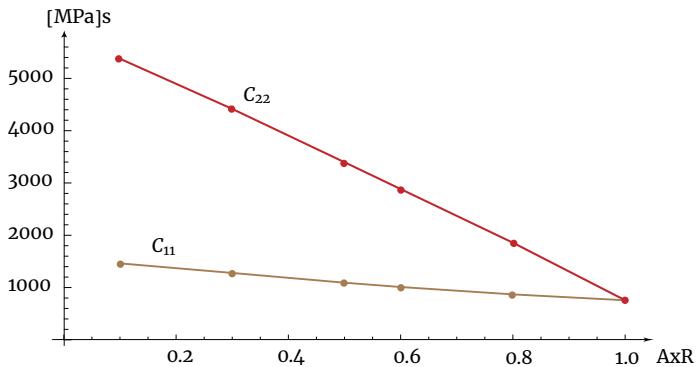
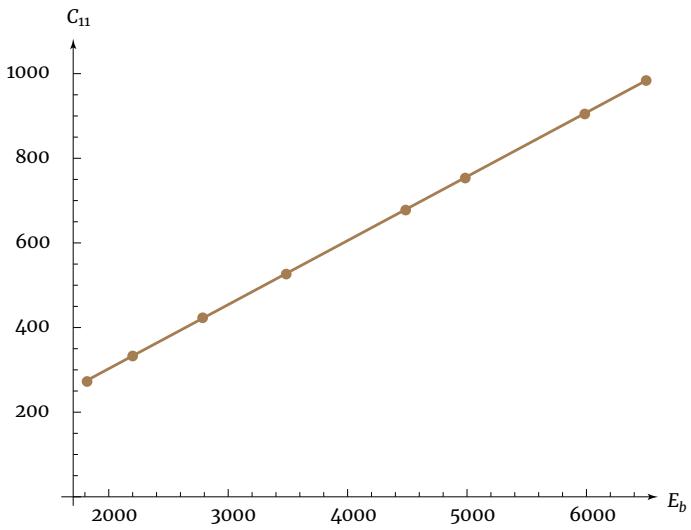
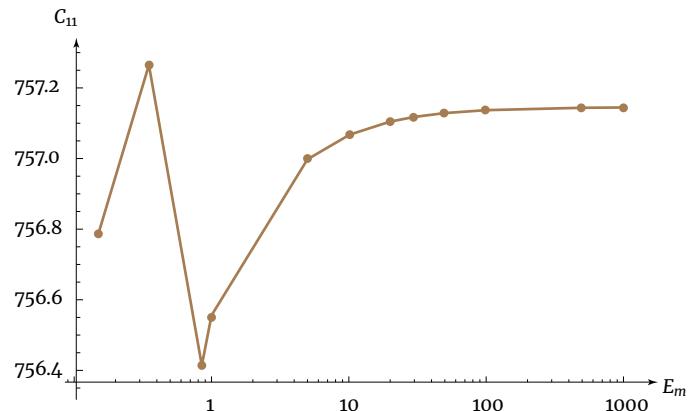
Da questa matrice è possibile innanzitutto verificare che sono soddisfatti i limiti inferiore e superiore (Reuss e Voigt). Si vede inoltre un comportamento isotropo e come l'elevata pore fraction e quindi la grande presenza di materiale a bassa rigidezza va ad abbassare la rigidezza della matrice ossea.

Ulteriori informazioni sull'automazione e sulla convergenza di questo risultato sono presenti nella sezione dell'analisi a convergenza \$9.4.

5 Variazione della microstruttura

Il carico della colonna vertebrale ricade per la maggior parte sul corpo vertebrale e sui dischi intervertebrali. Il corpo vetebrale è fornito da osso trabecolare ad alta porosità con un guscio esterno altamente denso. Tuttavia, il guscio esterno è molto sottile ed è formato da un addensamento di osso trabecolare molto compatto, istologicamente differente dall'osso corticale. Diverse analisi agli elementi finiti hanno stimato che il guscio esterno contribuisce per meno del 15% alla capacità di carico globale della vertebra [2, 10].

Inoltre, diversi campioni di osso trabecolare hanno mostrato diverse proprietà meccaniche a seconda della regione dove vengono prelevati. [11, 12]. Questo è segno della risposta dell'osso che, essendo un tessuto vivo, è in continuo rimodellamento. L'aumento delle proprietà di resistenza a compressione nella parte centrale dell'osso è di fatto un risposta al maggior quota parte di stress verticali trasmessi dalla parte polposa del disco vertebrale rispetto all'adiacente regione periferica di anelli fibrosi.

Figure 3. Relazione tra C_{11} , C_{22} e AxRFigure 4. Variazione di C_{11} al variare di E_b Figure 5. Variazione di C_{11} al variare di E_m

5.1 Variazione della simmetria

Le trabecole quindi rispondono al carico verticale posizionandosi prevalentemente lungo le linee di forza del carico e aumentano la loro densità e il loro spessore. Per indagare l'aumento delle proprietà materiali è stato considerato un RVE con pori variabili. Un modo semplice, ma accurato, di analizzare questo comportamento è quello di considerare pori ellittici. Introducendo pori ellittici la risposta dell'osso al carico verticale può essere interpretata come una riduzione del rapporto assiale e quindi un restringimento dell'ellisse lungo la direzione x.

Le campagne di simulazione condotte mostrano diversi cambiamenti nella matrice di rigidezza e quindi nelle proprietà meccaniche. Partendo da un rapporto assiale molto basso, quindi un'ellisse molto schiacciata, si osserva un grande aumento nel parametro C_{11} e un

lieve aumento anche del parametro C_{22} rispetto al caso di riferimento (§4.3). Viene completamente meno la simmetria materiale e l'isotropia della matrice di rigidezza, segno che la risposta di rigidezza lungo la direzione del semidiametro maggiore è più grande di quella nella direzione del semidiametro maggiore. Questo rispecchia quanto produce l'osso con la sua risposta di rimodellamento.

Con un rapporto assiale di $AxR = 0.1$ il coefficiente C_{22} arriva a 1.462 GPa contro un $C_{11} = 0.653$ GPa. Questa differenza del 44% si riduce diminuendo il rapporto assiale. I due coefficienti convergono nel caso in cui il rapporto assiale tende a 1 ovvero nel caso in cui $C_{11} = C_{22} = C_{11}^{(om)}$. I limiti di Reuss e Voigt sono verificati in tutti i casi. I dati sono presenti in fig. 6 efig. 3. Nel diminuire il rapporto assiale il calo dei coefficienti di rigidezza segue un andamento lineare. Il coefficiente C_{22} risente notevolmente di questo effetto mostrando una tasso di diminuzione del coefficiente C_{11} con un andamento quasi costante.

Rimane evidente come al diminuire del rapporto assiale, e quindi anche della volume fraction, sia i limiti di Reuss e Voigt sia l'omogenizzazione numerica mostrino il coefficiente maggiore tendere al coefficiente $C_{22}^{(b)}$ della sola matrice ossea pur rimanendo inferiore al 20%.

Lo stesso ragionamento può essere fatto nel caso contrario in cui malattie, come l'osteoporosi, portano ad una riduzione della massa ossea. Questo, rivisto come un aumento del rapporto assiale, mostra come l'osso trabecolare tende a ridurre le sue proprietà strutturali anche in zone dove precedentemente il rimodellamento osseo potrebbe aver apportato un precedentemente miglioramento strutturale (meno pori e maggior resistenza). Cambiamenti morfologici tra cui l'assottigliamento delle trabecole, aumento dello spazio inter-trabecolare e la perdita di connettività possono portare ad un calo drastico della resistenza fino al rischio di frattura vertebrale [2].

5.2 Estensione dell'area di indagine

5.3 Analisi caso specifica

6 Parametri materiali

Per il primo studio di omogenizzazione sono stati considerati dei parametri materiali medi tra quanto noto in letteratura. Tuttavia è noto anche che il modulo elastico delle strutture ossee può variare in relazione all'età o a particolari patologie. Diversi risultati mostrano che persone giovani hanno moduli di rigidezza più elevati delle persone anziane [5]

7 Conclusioni

8 ???

9 Metodi

9.1 Elaborazione dell'immagine

L'immagine presentata in figura 1(a) è una ricostruzione 3D ottenuta con un algoritmo scritto ad hoc [13] a partire dalle singole slices (500–650) [14]. A seguire è stata selezionata la slice no. 650 che risulta essere quella a contrasto maggiore e soddisfa la frazione di pori [15]. In particolare si può utilizzare il tool `Image Region Analyzer` in Matlab per averne conferma. Queste considerazioni, e soprattutto il volume 3D, hanno permesso di arrivare all'idealizzazione del volume di interesse presentata in §4.1

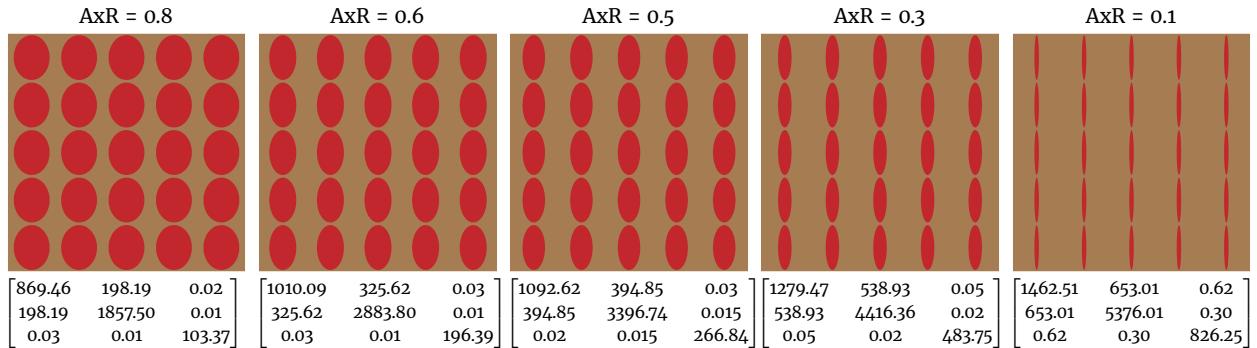


Figure 6. Variazione della matrice di rigidezza al variare del rapporto assiale dei pori

9.2 Rappresentazione del volume di riferimento

Per la creazione dei fori viene considerata una griglia quadrata con \sqrt{N} fori per lato e viene generato un rettangolo esterno tale da garantire la volume fraction desiderata. Quindi viene generato anche un vettore contenente tutte le posizioni dei centri calcolate. Il calcolo viene effettuato con le funzioni `GeometryInitailization[]` e `GeometrySet[]`.

Vengono quindi creati e fori e assegnati i marker come identificato nello snippet 1. Un esempio di questo RVE in Figura 7.

Un calcolo più raffinato può essere fatto considerando la distribuzione del diametro dei pori [4] e quindi creare i fori di diametro diverso rispettando la distribuzione. Chiaramente questo richiede un RVE con più inclusioni in modo da essere più rappresentativo.

Per quanto riguarda la discretizzazione viene preso il valore ottimo tale da garantire un risultato sufficientemente accurato in tempi ridotti. Vedi §9.4.

Per la discretizzazione sono stati usati elementi T1LE, triangolari a 3 nodi con funzioni di forma lineari e una mappa isoparametrica.

```

1  $\Omega_{ext} = \text{Rectangle}[\{0, 0\}, \{Lx, Ly\}]$ ;
2  $\Omega = \Omega_{ext}$ ;
3 Do [ $\Omega = \text{RegionDifference}[\Omega$ ,
4    $\Omega, \text{Disk}[\{\text{centerx}[i], \text{centery}[j]\}, \{Rc, Rc\}]]$ ,
5    $\{i, 1, \text{Ninclx}\}, \{j, 1, \text{Nincly}\}$ ];
6 marker = {{Lx/100, Ly/100}, 1};
7 Do [marker = Join[
8   marker, {{centerx[i], centery[j]}, 2}],
9    $\{i, 1, \text{Ninclx}\}, \{j, 1, \text{Nincly}\}$ ];
10 mesh = ToElementMesh[ $\Omega$ ,
11  $\Omega, \text{"RegionHoles" -> None, "RegionMarker" -> marker}$ ];

```

Listing 1. Generazione RVE

9.3 Codice

9.3.1 Condizioni al bordo

Per impostare correttamente le condizioni al bordo in modo automatizzato è stato realizzato uno snippet ripetitivo con delle variabili di comando che permette di automatizzare la procedura. In particolare, volendo applicare una deformazione costante rispettivamente su x , y o di scorrimento è necessaria una mappa sulle condizioni di spostamento che permette di mappare ogni punto nel valore desiderato. Si usano quindi la funzione `Function[n, X, Y, a*X + b*Y]`, dove a seconda che sia nullo a o b lo spostamento sarà lineare rispettivamente in Y o in X .

Questo permette di impostare le condizioni sui quadrati bordi del quadrato mediante tre parametri $\{a, b, c\}$. Questi parametri vengono passati alla funzione `TEST[]` che provvede a mapparli come indicato nello snippet 2 andando ad impostare condizioni al contorno di tipo essenziale.

Il test di omogenizzazione viene effettuato dalla funzione `Checkconvergence[]`. Questa funzione viene richiamata all'interno di un ciclo `Do` e nelle diverse iterazioni posso essere variati alcuni

parametri come l'accuratezza della mesh, i parametri materiali o geometrici.

9.3.2 Verifica dei limiti superiore ed inferiore

I limiti di Reuss e Voigt vengono calcolati tramite la funzione `VoigtReussTest[]` alla quale vengono passate le proprietà materiale dei singoli componenti insieme alla volume fraction. Quindi viene calcolata la matrice di rigidezza e di cedevolezza per un materiale isotropo e le approssimazioni di Reuss e Voigt.

Vengono quindi verificati i due limiti verificando che $C_{inf} = C^{(om)} - C_{Reuss}$ e $C_{sup} = C_{Voigt} - C^{(om)}$ siano definite positive. In caso contrario il codice procede ma verrà comunicato che i limiti non sono verificati.

9.3.3 Variazioni proprietà

Nel variare le proprietà materiali (§6) o della simmetria (§5.1) è stato sfruttata la funzione base di omogenizzazione (`Checkconvergence[]`) passandogli un vettore con i diversi parametri di interesse. Sono stati svolti test separati nel variare il modulo elastico della matrice ossea o dei pori.

Per variare le proprietà di simmetria è stato introdotto il rapporto assiale definito come il rapporto tra i due raggi: $AxR = \frac{r_x}{r_y}$. Quindi tale parametro viene passato alla funzione `GeometrySet[]` per generare il RVE.

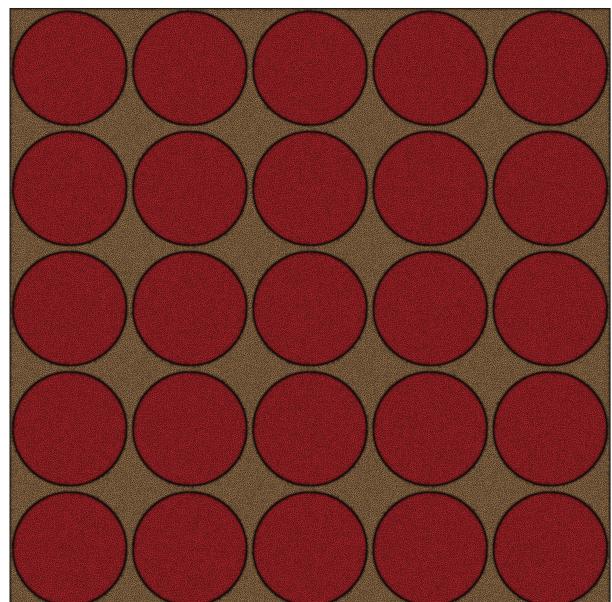


Figure 7. Mesh del volume rappresentativo con 756.787 DoF. I bordi appaiono neri e più spessi, questo è dovuto al refinement della mesh molto più fitta nei punti di bordo.

Table 2. Analisi di convergenza

#	$C_{11}^{(om)}$	$\ C_{11}^{(om)}\ $	DoF	Time (s)
1	845.289	1450730	3368	5.0625
2	846.427	145680	3384	4.6719
3	772.214	1208530	16874	8.9375
4	763.611	1181190	39022	14.875
5	759.333	1168040	253262	64.0313
6	759.333	1168040	253316	60.5156
7	758.829	1166450	263104	60.5781
8	756.787	1160210	453436	94.8281
9	755.942	1157590	2800338	507.0310
10	755.903	1157470	3024312	550.5780

9.4 Analisi di convergenza

Per effettuare l'analisi a convergenza è stata implementata una routine che ripete diverse volte l'omogenizzazione citata in §4.3 andando ad infittire la mesh.

Vengono analizzati il modulo di C_{11} e la norma della matrice $\|C_{11}^{(om)}\| = C^T C$ e i loro valori normalizzati rispetto il valore vero. Viene assunto come valore vero quello dell'iterazione ultima, tale da considerare il risultato essere arrivato a convergenza. I risultati sui moduli estratti sono presenti nella Tabella 2 e nei due grafici dell'errore in fig. 8 e in fig. 9.

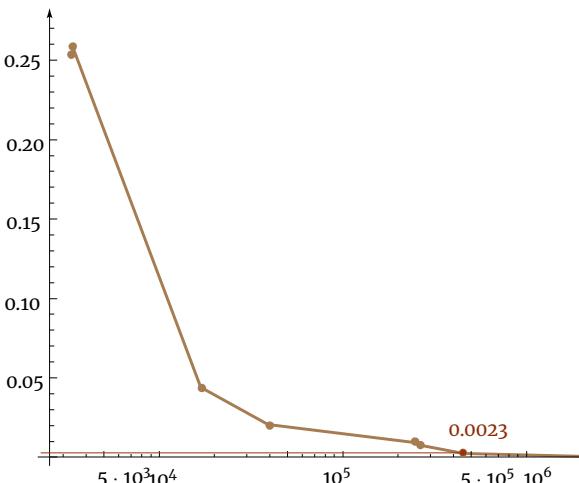
Analizzando i risultati è stato preso come valore ottimo quello ottenuto nell'iterazione 8 che presenta un errore rispetto il risultato ideale dello 0.11% sul C_{11} e dello 0.23% su $\|C_{11}^{(om)}\|$ a fronte di differenza di impegno computazionale del 83%.

COMPLETA DA TEORIAAAAAAAA

```

1 SMTAddEssentialBoundary[Line[{{0, 0}, {0, Ly}}], 
2   1 -> Function[{n, X, Y}, b Y], 
3   2 -> Function[{n, X, Y}, c Y], "Set" -> True];
4 SMTAddEssentialBoundary[Line[{{0, Ly}, {Lx, Ly}}], 
5   1 -> Function[{n, X, Y}, b*Ly + a*X], 
6   2 -> Function[{n, X, Y}, c*Ly + b*X], "Set" ->
    True];
7 SMTAddEssentialBoundary[Line[{{Lx, Ly}, {Lx, 0}}], 
8   1 -> Function[{n, X, Y}, a*Lx + b*Y], 
9   2 -> Function[{n, X, Y}, b*Lx + c*Y], "Set" -> True];
10 SMTAddEssentialBoundary[Line[{{0, 0}, {Lx, 0}}], 
11   1 -> Function[{n, X, Y}, a*X], 
12   2 -> Function[{n, X, Y}, b*X], "Set" -> True];

```

Listing 2. Generazione RVE**Figure 8.** Analisi dell'errore sul parametro C_{11}

10 Disponibilità del codice e materiale aggiuntivo

Tutto il codice, le immagini, file di processamento e risultati ottenuti sono disponibili alla repository online al link: <https://github.com/mastroalex/bone-homogenization>.

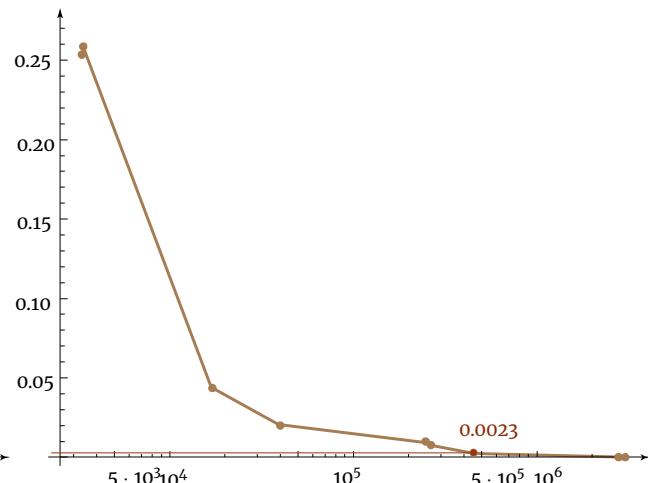
Il codice per l'analisi di convergenza (§9.4) è presente nel file: FEM->homogen->test_analisi_conv.nb.

Il codice per la variazione delle proprietà di simmetria e la geometria del RVE (§5.1) è presente nel file: FEM->variazioni_geometrie->test_geometrie.nb.

I codici per le variazioni delle proprietà materiali (§6) sono presenti nel file: FEM->variazioni_materiali->test_materiali.nb.

10.1 Lista delle abbreviazioni

- RVE, rappresentative volume element
- $C_{11}^{(om)}$, matrice di rigidezza ottenuta dall'omogenizzazione
- \square_b , parametri che fanno riferimento all'osso
- \square_m , parametri che fanno riferimento al midollo
- DoF, degrees of freedom
- AxR, rapporto assiale nelle inclusioni ellisoidali

**Figure 9.** Analisi dell'errore su $\|C\|$

References

1. Monesi V. Istologia. Piccin; 2012.
2. Ferguson SJ, Steffen T. Biomechanics of the aging spine. European spine journal 2003;12:S97–S103.
3. Hamed E, Jasiuk I, Yoo A. Multi-scale modelling of elastic moduli of trabecular bone. Soc Interface 2012;9.
4. Doktor T, Valach J, Kytyr D, Jiroušek O. Pore Size Distribution of Human Trabecular Bone – Comparison of Intrusion Measurements with Image Analysis; 2011. p. 115–118.
5. Cowin S. Bone Mechanics Handbook. CRC Press; 2001.
6. Aboudi J, Arnold SM, Bednarczyk BA. Chapter 3 - Fundamentals of the Mechanics of Multiphase Materials. In: Aboudi J, Arnold SM, Bednarczyk BA, editors. Micromechanics of Composite Materials Oxford: Butterworth-Heinemann; 2013.p. 87–145. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123970350000033>.
7. Dalstra M, Huiskes R, Odgaard A, Van Erning L. Mechanical and textural properties of pelvic trabecular bone. Journal of biomechanics 1993;26:523–35. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(93\)90014-6](https://doi.org/10.1016/0021-9290(93)90014-6).
8. Wirtz DC, Schiffers N, Pandorf T, Radermacher K, Weichert D, Forst R. Critical evaluation of known bone material properties to realize anisotropic FE-simulation of the proximal femur. Journal of biomechanics 2000;33:1325–30. [https://doi.org/10.1016/s0021-9290\(00\)00069-5](https://doi.org/10.1016/s0021-9290(00)00069-5).
9. Jansen LE, Birch NP, Schiffman JD, Crosby AJ, Peyton SR. Mechanics of intact bone marrow. Journal of the mechanical behavior of biomedical materials 2015;50:299–307. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2015.06.023>.
10. Silva MJ, Keaveny TM, Hayes WC. Load sharing between the shell and centrum in the lumbar vertebral body. Spine 1997;22,2:140–50.
11. Keller TS, Hansson TH, Abram AC, Spengler DM, Panjabi M. Regional variations in the compressive properties of lumbar vertebral trabeculae. Effects of disc degeneration. Spine 1989;14:1012–1019.
12. Keller TS, Ziv ME I, Spengler D. Interdependence of lumbar disc and subdiscal bone properties: a report of the normal and degenerated spine. Journal of spinal disorders 1993;6:106–113.
13. Mastrofini A. Image processing volumetrico su osso trabecolare. website 2021;<https://alessandromastrofini.it/image-volumetric-bone/>.
14. Beller G, Burkhardt M, Felsenberg D, Gowin W, Hege HC, Koller B, et al. Vertebral Body Data Set ESA29-99-L3 2005;<http://bone3d.zib.de/data/2005/ESA29-99-L3/>.
15. Cowin S. Integrated Bone Tissue Physiology. Bone Mechanics Handbook 2001;1:4–5.