

## MECCANICA COMPUTAZIONALE DEI TESSUTI E BIOMATERIALI

# Omogeneizzazione numerica di materiali microstrutturati

Mastrofini Alessandro

alessandro.mastrofini@alumni.uniroma2.eu

## Abstract

The Abstract (250 words maximum) should be structured to include the following details:

**Background**, the context and purpose of the study;

**Results**, the main findings;

**Conclusions**, brief summary and potential implications.

Please minimize the use of abbreviations and do not cite references in the abstract.

**Key words:** trabecular bone; homogenization; composite material

## 1 Introduzione

Lo scopo della seguente analisi è quello di indagare l'influenza delle proprietà microstrutturali sul comportamento macroscopico di un materiale composito.

## 2 Struttura multiscala

### DESCRIVI OSSO TRABECOLARE DA COWIN e LIBRO ISTOLOGIA

*Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.*

*Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.*

*Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non,*

*voluptat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.*

*Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.*

*Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.*

*Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna.*

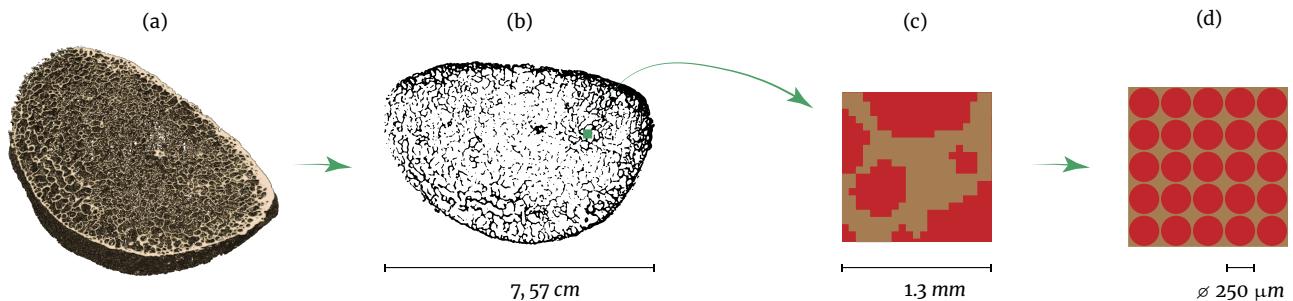


Figure 1. Idealizzazione del RVE. (a) Ricostruzione tridimensionale; (b) Slice di riferimento no. 650; (c) ingrandimento del volume di interesse; (d) idealizzazione geometrica

*Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.*

*Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sern. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pelentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.*

*Pelentesque habitant morbi tristique senectus et netus et male- suada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetur at, consectetur sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pelentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.*

### 3 Omogenizzazione

L'obiettivo è quindi quello di ottenere delle proprietà materiali alla macroscaola a partire dalle proprietà alla microscala come le rigidezze dei due materiali, matrice ossea e pori.

Ad una scala sufficientemente grande rispetto le singole trabecolee è possibile considerare la matrice di midollo e le trabecole ossee come due materiali diversi ma entrambi eterogenei e dal comportamento isotropo. L'isotropia è una prima approssimazione che però ci permette di procedere in modo più efficiente nell'omogenizzazione andando a vedere come la struttura e la disposizione dei pori influenzano il comportamento macroscopico.

Con la procedura di omogenizzazione andremo a considerare una media delle proprietà meccaniche di osso e matrice ma questa media viene intesa in senso più ampio e il significato può variare a seconda dell'approccio.

#### 3.1 Volume di interesse

Il primo passo, per poter procedere ad un'omogenizzazione, è quello di definire un volume rappresentativo (RVE) tale da essere rappresentativo dal punto di vista statistico della distribuzione geometrica dei costituenti, quindi della microscala. Per farlo il codice calcola automaticamente il lato nel range di qualche mm a partire da alcune considerazioni. Viene rispettato il diametro medio dei pori [1] e la frazione volumetrica [2].

Sulla base di queste considerazioni vengono inseriti 25 pori equidistanti e tali che la loro distanza dal bordo sia la metà della

distanza tra ogni poro. Questo consente di avere un RVE simmetrico e rappresentativo di una selezione delle trabecole.

Maggiori informazioni sulla procedura di automazione del calcolo del RVE sono nella sezione 8.2.

Inoltre, per fare le opportune considerazioni nel considerare le tensioni medie, i pori vengono considerati pieni di un materiale a bassa rigidezza rappresentativo del midollo osseo. Questo serve sia a considerare un fenomeno più rappresentativo della realtà sia a permettere una corretta applicazione del teorema della media delle tensioni.

#### 3.2 Stime analitiche

Per confrontare i dati dell'omogenizzazione vengono considerate le stime analitiche di Voigt e Reuss.

L'approssimazione di Voigt considera la matrice di rigidezza come una media pesata per le volume fraction delle rigidezze dei costituenti.

$$\mathbb{C}_{\text{Voigt}} = (1 - v_f)\mathbb{C}_b + v_f\mathbb{C}_m \quad (1)$$

Le stime di Reuss sono analoghe ma in cedevolezza:

$$\mathbb{S}_{\text{Voigt}} = (1 - v_f)\mathbb{S}_b + v_f\mathbb{S}_m \quad (2)$$

Vengono considerate queste due stime per via del teorema di Hill che garantisce, sotto le opportune ipotesi, che la matrice di rigidezza sia compresa tra queste [3]. Reuss costituisce il limite inferiore e Voigt il limite superiore dell'omogenizzazione.

I due materiali vengono considerati singolarmente isotropi, quindi tali da avere un comportamento materiale descritto dalla matrice di cedevolezza (3).

$$[\mathbb{S}]_{\text{iso}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Queste matrici vengono calcolate e per ogni iterazione del processo di omogenizzazione viene verificato che il risultato sia compreso in tali stime tramite la funzione `VoigtReussTest`. In particolare, passando la variabile `verbOutput=True` è possibile estrarne i valori:

$$\mathbb{C}_{\text{Voigt}} = \begin{pmatrix} 2019.340 & 865.404 & 0 \\ 865.404 & 2019.340 & 0 \\ 0 & 0 & 576.969 \end{pmatrix} \quad (4)$$

**Table 1.** Parametri materiali

Nome	Valore	Reference
$E_b$	3.8 GPa	Cowin [2]
$\nu_b$	0.3	Dalstra et al. [4], Wirtz et al. [5]
$E_m$	15 KPa	Jansen et al. [6]
$\nu_m$	0.1	
$C_{11}^{(b)}$	6730.77 MPa	\$3.3 *
$C_{11}^{(m)}$	0.15 Mpa	\$3.3 *
$C_{11}^{(om)}$	756.78 Mpa	\$3.3 *
$L$	1.324 mm	\$3.1 *

\*Parametri calcolati

$$\mathbb{C}_{\text{Reuss}} = \mathbb{S}_{\text{Reuss}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.226262 & 0.0399292 & 0 \\ 0.0399292 & 0.226262 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0931663 \end{pmatrix} \quad (5)$$

### 3.3 Omogenizzazione numerica

Viene quindi strutturata una campagna di simulazioni tale da analizzare il RVE ed estrarre una matrice di rigidezza omogenizzata. Ulteriori considerazioni vengono fatte sul parametro  $C_{11}^{(om)}$ .

L'approccio all'omogenizzazione segue condizioni al bordo omogenee di tipo spostamento. In particolare, applicheremo un campo di spostamento alla macroscale supponendo che sia rappresentativo di quello alla microscala. Quindi otterremo un certo campo di tensione alla microscala, funzione del punto. Possiamo quindi considerare il campo di tensione alla macroscale come la media di quello alla microscala. In particolare, queste condizioni sono garantite dall'Average Strain Theorem. Quindi applicando un campo di deformazione alla macroscale otterrei le deformazioni alla microscala e potrei estrarre le tensioni semplicemente risolvendo il problema dell'equilibrio elastico:

$$\underline{\sigma} = \langle \tilde{\sigma} \rangle = \mathbb{C} \langle \tilde{\epsilon} \rangle = \mathbb{C} \underline{\epsilon} \quad (6)$$

In particolare, applicando condizioni di deformazione unitaria su  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  e  $\gamma_{12}$  otterrei rispettivamente prima, seconda e terza colonna di  $\mathbb{C}$ . È possibile farlo in tre processi carico separati e considerare il contributo complessivo in quanto siamo in elasticità lineare sotto l'ipotesi di piccole deformazioni per cui vale la sovrapposizione degli effetti,

Questo viene implementato tramite una campagna di simulazioni in Mathematica sfruttando il tool AceFEM.

Viene sfruttata la procedura TEST[] che permette di applicare in sequenza le tre condizioni di spostamento e ottenere così la matrice di rigidezza:

$$\mathbb{C}^{(om)} = \begin{pmatrix} 756.78 & 80.90 & 0.00 \\ 80.90 & 756.78 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 40.87 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Da questa matrice è possibile innanzitutto verificare che sono soddisfatti i limiti inferiore e superiore (Reuss e Voigt). Si vede inoltre un comportamento isotropo e come l'elevata pore fraction e quindi la grande presenza di materiale a bassa rigidezza va ad abbassare la rigidezza della matrice ossea.

Ulteriori informazioni sull'automazione e sulla convergenza di questo risultato sono presenti nella sezione dell'analisi a convergenza §8.4.

## 4 Variazione della microstruttura

### 5 Effetto del carico sulla struttura macroscopica

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pel-

lentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetur at, consectetur sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipisci quis, ultrices a, dui.

## 6 Conclusioni

## 7 ???

## 8 Metodi

### 8.1 Elaborazione dell'immagine

L'immagine presentata in figura 1(a) è una ricostruzione 3D ottenuta con un algoritmo scritto ad hoc [7] a partire dalle singole slices (500-650) [8]. A seguire è stata selezionata la slice no. 650 che risulta essere quella a contrasto maggiore e soddisfa la frazione di pori [9]. In particolare si può utilizzare il tool `Image Region Analyzer` in Matlab per averne conferma. Queste considerazioni, e soprattutto il volume 3D, hanno permesso di arrivare all'idealizzazione del volume di interesse presentata in §3.1

### 8.2 Rappresentazione del volume di riferimento

Per la creazione dei fori viene considerata una griglia quadrata con  $\sqrt{N}$  fori per lato e viene generato un rettangolo esterno tale da garantire la volume fraction desiderata. Quindi viene generato anche un vettore contenente tutte le posizioni dei centri calcolate. Il calcolo viene effettuato con le funzioni `GeometryInitialization[]` e `GeometrySet[]`.

Vengono quindi creati e fori e assegnati i marker come identificato nello snippet 1. Un esempio di questo RVE in Figura 2.

Un calcolo più raffinato può essere fatto considerando la distribuzione del diametro dei pori [1] e quindi creare i fori di diametro diverso rispettando la distribuzione. Chiaramente questo richiede un RVE con più inclusioni in modo da essere più rappresentativo.

Per quanto riguarda la discretizzazione viene preso il valore ottimo tale da garantire un risultato sufficientemente accurato in tempi ridotti. Vedi §8.4.

Per la discretizzazione sono stati usati elementi T1LE, triangolari a 3 nodi con funzioni di forma lineari e una mappa isoparametrica.

```

1  $\Omega_{ext} = \text{Rectangle}[\{0, 0\}, \{Lx, Ly\}]$ ;
2  $\Omega = \Omega_{ext}$ ;
3 Do[ $\Omega = \text{RegionDifference}[\Omega, \text{Disk}[\{\text{centerx}[i], \text{centery}[j]\}, \{Rc, Rc\}]]$ ,
4   {i, 1, Ninclx}, {j, 1, Nincly}]
5 marker = {{Lx/100, Ly/100}, 1};
6 Do[marker = Join[
7   marker, {{\text{centerx}[i], \text{centery}[j]}, 2}],
8   {i, 1, Ninclx}, {j, 1, Nincly}]
9 mesh = ToElementMesh[
10  $\Omega$ , "RegionHoles" -> None, "RegionMarker" -> marker];
11 
```

Listing 1. Generazione RVE

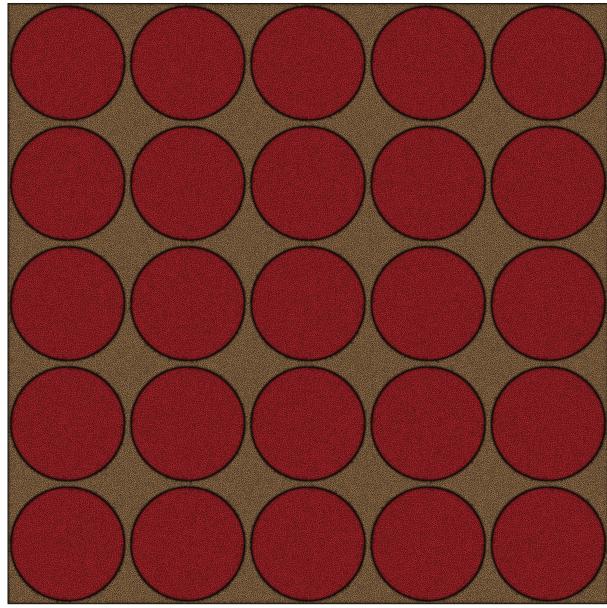


Figure 2. Mesh del volume rappresentativo con 756.787 DoF. I bordi appaiono neri e più spessi, questo è dovuto al refinement della mesh molto più fitta nei punti di bordo.

### 8.3 Codice

#### 8.3.1 Condizioni al bordo

Per impostare correttamente le condizioni al bordo in modo automatizzato è stato realizzato uno snippet ripetitivo con delle variabili di comando che permette di automatizzare la procedura. In particolare, volendo applicare una deformazione costante rispettivamente su  $x$ ,  $y$  o di scorrimento è necessaria una mappa sulle condizioni di spostamento che permette di mappare ogni punto nel valore desiderato. Si usano quindi la funzione `Function[n, X, Y, a*X + b*Y]`, dove a seconda che sia nullo  $a$  o  $b$  lo spostamento sarà lineare rispettivamente in  $Y$  o in  $X$ .

Questo permette di impostare le condizioni sui quadrati bordi del quadrato mediante tre parametri  $\{a, b, c\}$ . Questi parametri vengono passati alla funzione `TEST[]` che provvede a mapparli come indicato nello snippet 2 andando ad impostare condizioni al contorno di tipo essenziale.

#### 8.3.2 Verifica dei limiti superiore ed inferiore

I limiti di Reuss e Voigt vengono calcolati tramite la funzione `VoigtReussTest[]` alla quale vengono passate le proprietà materie dei singoli componenti insieme alla volume fraction. Quindi viene calcolata la matrice di rigidezza e di cedevolezza per un materiale isotropo e le approssimazioni di Reuss e Voigt.

Vengono quindi verificati i due limiti verificando che  $C_{inf} = C^{(om)} - C_{Reuss}$  e  $C_{sup} = C_{Voigt} - C^{(om)}$  siano definite positive. In caso contrario il codice procede ma verrà comunicato che i limiti non sono verificati.

### 8.4 Analisi di convergenza

Per effettuare l'analisi a convergenza è stata implementata una routine che ripete diverse volte l'omogenizzazione citata in §3.3 andando ad infittire la mesh.

Vengono analizzati il modulo di  $C_{11}$  e la norma della matrice  $\|C^{(om)}\| = C^T C$  e i loro valori normalizzati rispetto il valore vero. Viene assunto come valore vero quello dell'iterazione ultima, tale da considerare il risultato essere arrivato a convergenza. I risultati sui moduli estratti sono presenti nella Tabella 2 e nei due grafici dell'errore in fig. 3 e in fig. 4.

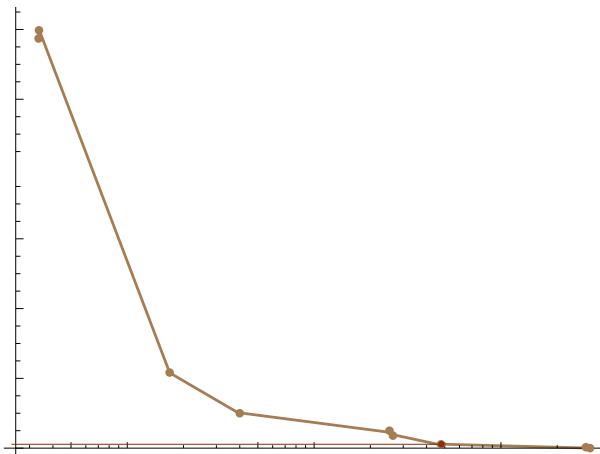
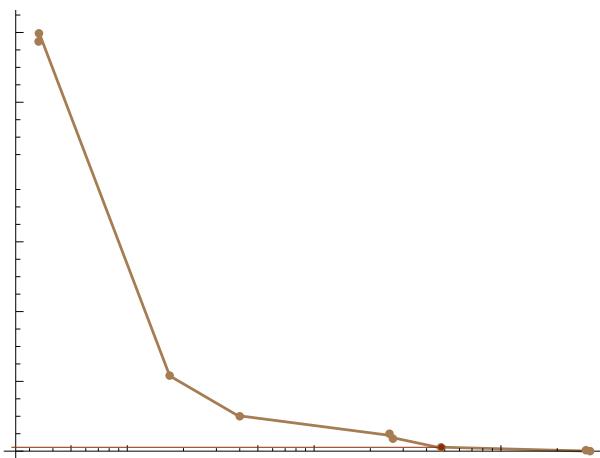
Figure 3. Analisi dell'errore sul parametro  $C_{11}$ Figure 4. Analisi dell'errore su  $\|\mathbf{C}\|$ 

Table 2. Analisi di convergenza

#	$C_{11}^{(om)}$	$\ \mathbf{C}^{(om)}\ $	DoF	Time (s)
1	845.289	1450730	3368	5.0625
2	846.427	145680	3384	4.6719
3	772.214	1208530	16874	8.9375
4	763.611	1181190	39022	14.875
5	759.333	1168040	253262	64.0313
6	759.333	1168040	253316	60.5156
7	758.829	1166450	263104	60.5781
8	756.787	1160210	453436	94.8281
9	755.942	1157590	2800338	507.0310
10	755.903	1157470	3024312	550.5780

Analizzando i risultati è stato preso come valore ottimo quello ottenuto nell'iterazione 8 che presenta un errore rispetto il risultato ideale dello 0.11% sul  $C_{11}$  e dello 0.23% su  $\|\mathbf{C}^{(om)}\|$  a fronte di differenza di impegno computazionale del 83%.

```

10      ];
11      SMTAddEssentialBoundary[Line[{{0, 0}, {0, Ly}}],
12      1 -> Function[{n, X, Y}, b*Y],
13      2 -> Function[{n, X, Y}, c*Y], "Set" -> True];
SMTAddEssentialBoundary[Line[{{0, Ly}, {Lx, Ly}}],
14      1 -> Function[{n, X, Y}, b*Ly + a*X],
15      2 -> Function[{n, X, Y}, c*Ly + b*X], "Set" ->
16      True];
SMTAddEssentialBoundary[Line[{{Lx, Ly}, {Lx, 0}}],
17      1 -> Function[{n, X, Y}, a*Lx + b*Y],
18      2 -> Function[{n, X, Y}, b*Lx + c*Y], "Set" -> True];

```

Listing 2. Generazione RVE

## 9 Disponibilità del codice e materiale aggiuntivo

Tutto il codice, le immagini, file di processamento e risultati ottenuti sono disponibili alla repository online al link: <https://github.com/mastroalex/bone-homogenization>.

Il codice per l'analisi di convergenza (§8.4) è presente nel file FEM->homogen->test\_analisi\_conv.nb.

### 9.1 Lista delle abbreviazioni

- RVE, rappresentative volume element
- $\mathbf{C}^{(om)}$ , matrice di rigidezza ottenuta dall'omogenizzazione
- $\square_b$ , parametri che fanno riferimento all'osso
- $\square_m$ , parametri che fanno riferimento al midollo
- DoF, degrees of freedom

## References

- Doktor T, Valach J, Kytyr D, Jiroušek O. Pore Size Distribution of Human Trabecular Bone – Comparison of Intrusion Measurements with Image Analysis. Engineering Mechanics 2011;Mat.
- Cowin S. Bone Mechanics Handbook. CRC Press; 2001.
- Aboudi J, Arnold SM, Bednarczyk BA. Chapter 3 – Fundamentals of the Mechanics of Multiphase Materials. In: Aboudi J, Arnold SM, Bednarczyk BA, editors. Micromechanics of Composite Materials Oxford: Butterworth-Heinemann; 2013.p. 87–145. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123970350000033>.
- Dalstra M, Huiskes R, Odgaard A, Van Erning L. Mechanical and textural properties of pelvic trabecular bone. Journal of biomechanics 1993;26:523–35. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(93\)90014-6](https://doi.org/10.1016/0021-9290(93)90014-6).
- Wirtz DC, Schifflers N, Pandorf T, Radermacher K, Weichert D, Forst R. Critical evaluation of known bone material properties to realize anisotropic FE-simulation of the proximal femur. Journal of biomechanics 2000;33:1325–30. [https://doi.org/10.1016/s0021-9290\(00\)00069-5](https://doi.org/10.1016/s0021-9290(00)00069-5).
- Jansen LE, Birch NP, Schiffman JD, Crosby AJ, Peyton SR. Mechanics of intact bone marrow. Journal of the mechanical behavior of biomedical materials 2015;50:299–307. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2015.06.023>.
- Mastrofini A. Image processing volumetrico su osso trabecolare. website 2021;<https://alessandromastrofini.it/image-volumetric-bone/>.
- Beller G, Burkhardt M, Felsenberg D, Gowin W, Hege HC, Koller B, et al. Vertebral Body Data Set ESA29-99-L3 2005;<http://bone3d.zib.de/data/2005/ESA29-99-L3/>.
- Cowin S. Integrated Bone Tissue Physiology. Bone Mechanics Handbook 2001;1:4–5.

```

1 SMTAddEssentialBoundary[Line[{{0, 0}, {0, Ly}}],
2 1 -> Function[{n, X, Y}, b*Y],
3 2 -> Function[{n, X, Y}, c*Y], "Set" -> True];
SMTAddEssentialBoundary[Line[{{0, Ly}, {Lx, Ly}}],
4 1 -> Function[{n, X, Y}, b*Ly + a*X],
5 2 -> Function[{n, X, Y}, c*Ly + b*X], "Set" ->
6 True];
SMTAddEssentialBoundary[Line[{{Lx, Ly}, {Lx, 0}}],
7 1 -> Function[{n, X, Y}, a*Lx + b*Y],
8 2 -> Function[{n, X, Y}, b*Lx + c*Y], "Set" -> True];

```