Matemática Discreta 2 Examen Febrero 2003

(Solución)

N° Examen =

Apellidos Nombre C.I.

1) a) Hallar el menor x entero positivo que verifica : $16x + 5 \equiv 21 \ (99)$
$9x + 7 \equiv 32 \ (70)$

Justificar desarrollando un método para hallar el tal x

2) **Solución: x = 3565.** El sistema es equivalente a $16x \equiv 16 \ (99)$
$9x \equiv 25 \ (70)$

De lo cual $x \equiv 1 \ (99)$ (pues mcd(16,99) =1)
$x \equiv -5 \ (70)$ (pues $39.9 \equiv 1 \ (70)$ y $39.25 \equiv -5 \ (70)$)

Por el teorema Chino de los Restos existe un único x positivo menor que 99.70 = 6930 que verifica dicho sistema y el mismo verifica $x \equiv a70 + b\,99 \ (6930)$ siendo a y b tales que $a\,70 \equiv 1 \ (99)$ y $b\,99 \equiv -5 \ (70)$ de aquí que a = 58 y b = -5 y $x \equiv 58.70-5.99 \ (6930)$, pero $58.70-5.99 = 3565 < 6930$, por lo tanto x = 3565.

b) Hallar a y b enteros positivos tales que :
a + b = 1271
mcm(a,b) = 330 mcd (a,b)
Justificar

Solución: a = 930 y b =341 o al revés. Como a + b = 1271 = 31.41, entonces el mcd(a,b) puede ser o bien 1 o bien 31 o bien 41 o bien 1271. Si mcd(a,b) = 1 entonces mcm(a,b) = 330, pero a, b < mcm por lo que a+b < 2mcm = 660 < 1271. Si mcd(a,b) = 31, entonces existen k y h tales que a = 31k, b = 31h y

$k.h = a.b/31^2 = mcm(a,b) = 330 = 2.3.5.11,$

$k+h = (a+b)/31 = 41.$ (E)

Por lo tanto, tendremos que los factores de h y k son particionan los factores 2, 3, 5 y 11 en dos conjuntos disjuntos. Antes de enumerar las posibilidades observemos que el factor 11 no podrá aparecer junto con el factor 5 pues superaría 41, ni con el 2 y el 3, ni con el 3 y el 5, ni con el 2 y el 5 por la misma razión. Las posibilidades son:

{{11},{2,3,5}}, {{11,2},{3,5}} y {{11,3},{2,5}}, que dan

11 + 30 = 41, 22 + 15 = 37 y 33 + 10 = 43 respectivamente. La primera es la única opción que verifica la ecuacion (E) y es la solución del problema. Los demás casos (mcd(a,b) = 41 o 1271) se estudian en forma similar al anterior.

2) Demostrar que un grupo de menos de 6 elementos es abeliano.

Solución: Si tiene un solo elemento es obvio. Si tiene un número primo de elementos, tiene que ser cíclico y por tanto abeliano, cosa que se cumple para n = 2,3 y 5. Resta ver que sucede para n = 4. En este caso el subgrupo generado por un elemento diferente a la unidad puede tener orden 2 o 4. Si tiene orden 4 entonces el grupo es cíclico y por tanto, conmutativo. Supongamos entonces que todo elemento diferente de la unidad tiene orden 2. Sea x e y dos de dichos elementos diferentes entre si. Es decir x e y tienen orden 2, son diferentes de la unidad y entre si. Por lo tanto tenemos por ahora tres elementos: la unidad u, x e y. Nos falta el cuarto elemento que afirmamos es xy. Efectivamente, xy no puede ser ni x ni y pues si xy = x entonces y = u. De la misma forma si xy=y entonces x = u. Ademas si xy=u entoces xxy=x ➔ y = x. Basta ahora provar que los elemento conmutan. Primero veamos que xy = yx. Efetivamente, yx no puede ser x poque sino y sería u, ni puede ser y porque sino x sería u, ni puede ser u poque sino x=y, por lo tanto el único elemento que puede ser es xy. Por otra parte x(xy) = x(yx)= (xy)x; y(xy) = (yx)y = (xy)y.

3) Se considera S_9 (grupo simétrico)

   a) Exhibir un elemento de este grupo de orden 20. Elevar a la potencia 5 dicho elemento.

   Solución: un posible elemento, expresado como producto de ciclos es **x= (1234)(56789)**. Su potencia quinta es $x^5 = (1234)^5 (56789)^5 = (1234)^{4+1} = (1234)^4 (1234)^1 =$ (1234).

   b) Demostrar que en este grupo no existen elementos de orden 18.

   Solución: Si existiera un tal elemento su descomposición en ciclos disjuntos con longitudes L1, L2, ...Ln, deberían verificar mcm(L1,L2,...) = 18 y L1+L2+...+Ln = 9. De la primera condición deducimos que alguno de los Li debe ser un múltiplo de 9. Pero por la segunda igualdad la única posibilidad es que sea 9 y que n = 1, lo cual impide que se verfique la primer condición.

4) En $Z_7[x]$ se consideran los polinomios :

$P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 4$; $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 4$

Hallar mcd (P,Q) en $Z_7[x]$ (es un polinomio mónico)

Solución: mcd(P,Q) = x+1. Efectivamente

$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x^3 - x^2\ 4x - 1) (x+3) + 2x^2 + 2x$,

y

$x^3 - x^2\ 4x - 1 = (x^2 + x) (x-2) + 6x$

y

$x^2 + x = x (x+1)$.

Podemos verificar que –1 es raíz de ambos polinomios: P(-1)=1-2+3-6+4 = 0 y Q(-1) = -3+4-5+4 = 0.

5) Sea (A, + , . , ¯ ,0 , 1) un álgebra booleana. Demuestre que (A , ⊗) es un grupo conmutativo, donde ⊗ está definida como :

$a \otimes b = a.\overline{b} + \overline{a}.b$

Solución:

Neutro $a \otimes 0 = a.1 + \overline{a}.0 = a + 0 = a$

Inverso $a \otimes a = a.\overline{a} + \overline{a}.a = 0 + 0 = 0$

Conmutativa: $a \otimes b = a.\overline{b} + \overline{a}.b = \overline{a}.b + a.\overline{b} = b.\overline{a} + \overline{b}.a = b \otimes a$.

Asociativa: $a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (b.\bar{c} + \bar{b}.c) = a.\overline{(b.\bar{c}+\bar{b}.c)} + \bar{a}\,(b.\bar{c} + \bar{b}.c)$ $= a\left(\overline{(b.\bar{c})}.\overline{(\bar{b}.c)}\right) + \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c = a.((\bar{b} + c).(b + \bar{c})) + \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c = a.(\bar{b}\,b + \bar{b}\,\bar{c} + c.b + c.\bar{c}) + \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c = a.(0 + \bar{b}\,\bar{c} + c.b + 0) + \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c = a.\bar{b}.\bar{c} + a.c.b + \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c.$

Por otro lado

$(a \otimes b) \otimes c = (a.\bar{b} + \bar{a}.b) \otimes c = (a.\bar{b} + \bar{a}.b).\bar{c} + (\overline{a.\bar{b} + \bar{a}.b}).c = a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} + ((\overline{a.\bar{b}}).(\overline{\bar{a}.b})).c = a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} + ((\bar{a} + \bar{\bar{b}}).(\bar{\bar{a}} + \bar{b})).c = a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} + (\bar{a}.\bar{\bar{a}} + \bar{a}.\bar{b} + \bar{\bar{b}}.\bar{\bar{a}} + \bar{\bar{b}}.\bar{b}).c = a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} + (0 + \bar{a}.\bar{b} + b.a + 0).c = a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c + b.a.c$

Que tiene los mismos términos que la suma anterior salvo reordenamiento.

Puntajes :
1) 26 : a) 14 b) 12
2) 18
3) 20 : a) 10 b) 10
4) 18
5) 18