Universidad de la República **Matemática Discreta 2**
Facultad de Ingeniería **Curso 2018**
Instituto de Matemática y Estadística

PRÁCTICO 2: Algoritmo de Euclides - Ecuaciones diofánticas

Ejercicio 1. En cada caso usar el Algoritmo de Euclides para calcular $d = \text{mcd}(a, b)$ y determinar una expresión de d como combinación lineal de a y de b.

a. $a = 63$, $b = 15$.
b. $a = 1872$, $b = 360$.
c. $a = 1386$, $b = 180$.
d. $a = 455$, $b = 1235$.
e. $a = 2366$, $b = 273$.

Ejercicio 2. Sea a un número natural mayor o igual que 2.

a. Probar que si $m|n$ entonces $a^m - 1|a^n - 1$. [Sug. $a^k - 1 = (a - 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + 1)$]

b. Probar que si el resto de dividir n entre m es r, entonces el resto de dividir $a^n - 1$ entre $a^m - 1$ es $a^r - 1$.

c. Probar que $\text{mcd}(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\text{mcd}(n,m)} - 1$. [Sug. utilizar el algoritmo de Euclides]

d. Calcular el máximo común divisor de $\underbrace{111\ldots1}_{2010 \text{ unos}}$ y $\underbrace{111\ldots1}_{100 \text{ unos}}$.

Ejercicio 3.

a. Se desean comprar 430 dólares en cheques de viajero. Los cheques solamente vienen de 20 y de 50 dólares. ¿Cuántos cheques de cada cantidad deberán adquirirse?

b. Una ejecutiva compra juguetes para los niños de sus empleados por un monto de \$24300. Para cada niña, compra una muñeca al precio de \$330 y para cada niño un oso de peluche a \$290. ¿Cuántos juguetes de cada tipo compró?

c. La edad actual de Juan cuadruplica la edad de Juan más la de Pedro hace diez años. ¿Qué edades, en años, tienen actualmente Juan y Pedro?

Ejercicio 4. Una persona compra un artículo que cuesta \$480. Ella tiene un billete de \$1000 y tres billetes de \$10, mientras que el cajero tiene 6 billetes de \$100 y 7 de \$50. ¿De cuántas maneras le puede dar el cajero el cambio?

Ejercicio 5. Un hombre va a una ferretería a comprar un trozo de burlete de goma de x metros con y centímetros. Pero el ferretero confunde los metros con centímetros y viceversa, cortando una cantidad distinta de la que el cliente había pedido. Sin percatarse de ello, el cliente toma su paquete y se marcha. Cuando llega a su casa, corta 68 centímetros de burlete y, para su sorpresa, descubre que le queda el doble de lo que él pensaba que había comprado.

¿Cuál es la menor cantidad de burlete (en metros y centímetros) que pudo haber pedido dicho cliente?

Ejercicio 6. Una companía compró cierto número de reliquias falsas a \$17 cada una y vendió algunas de ellas a \$49 cada una. Si la cantidad comprada originalmente es mayor que 50 pero menor que 100 y la companía obtuvo una ganancia de \$245, ¿cuántas reliquias faltan por vender?

Ejercicio 7. En el cambio de turno de una fábrica de cerámicas, Alex, obrero que finalizaba su trabajo, dejó preparado un embarque de baldosas para un hospital en construcción. Armó una caja de 42 baldosas y dejó escrito: *"Pérez: va esta caja de* 42 *unidades y el resto son cajas de* 50 *unidades"*. El Sr. Pérez, luego de subir al camión la de 42, comenzó a colocar las de 50 unidades, cuando se preguntó: ¿cuántas de 50 hay que llevar? Subió a Administración, donde el Sr. Fernández le ayudó a buscar la información y le avisó que el sabía que eran entre 20 y 40 cajas. Lo único que encontraron era un papel que decía: *"Baldosas de cerámica para el Hospital siquiátrico Cristóbal Colón. Salas de* 32 *baldosas + una sala chica de* 20 *baldosas"*.

¿Cuántas baldosas precisa el hospital?

Ejercicio 8. Una mujer tiene un cesto de manzanas. Haciendo grupos de 3 sobran 2 y haciendo grupos de 4 sobran 3. Hallar el número de manzanas que contiene el cesto sabiendo que están entre 100 y 110.

Ejercicio 9.

- **a**. Determinar los enteros w, x e y que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} w + x + y = 50 \\ w + 13x + 31y = 116 \end{cases} \qquad (1)$$

- **b**. ¿Existe una solución de (1) tal que $w > 0,\ x > 0$ e $y > 0$?
- **c**. ¿Existe una solución de (1) tal que $w > 10,\ x > 18$ e $y > -15$?

Ejercicio 10. ¿Existen dos cuadrados perfectos cuya diferencia sea 311? ¿Y dos cubos cuya suma sea 311? Sugerencia: cuidado, los cubos pueden ser negativos.

Ejercicio 11. Si $a, b \in \mathbb{N}$, ¿cuántos puntos en el plano cartesiano de coordenadas enteras hay en el segmento que tiene por extremos a los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$?

Ejercicio 12. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, con $a, b > 1$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$. Consideremos la ecuación diofántica $ax + by = ab - a - b$.

- **a**. Hallar una solución (entera) a la ecuación (en función de a y b).
- **b**. Hallar todas las soluciones de la ecuación (en función de a y b).
- **c**. Probar que no existen $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $ax + by = ab - a - b$.
- **d**. Si tenemos tickets de alimentación de 125 pesos y de 120 pesos, ¿es posible pagar (utilizando únicamente tickets) una cuenta de 2775 pesos? ¿y de 2780?

Ejercicio 13. Sean $a, b, n \in \mathbb{Z}$, con $a, b > 1$. Consideramos la ecuación $ax + by = n$.

- **a**. Probar que si $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ son solución de la ecuación y q y r son el cociente y el resto de dividir y_0 entre a; entonces los enteros $x_1 = x_0 + bq,\ y_1 = r$ también son solución.
- **b**. Probar que si $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$ y $n > ab - a - b$ entonces existen $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $ax + by = n$.
- **c**. Concluir que si tenemos tickets de alimentación de 200 pesos y de 70 pesos, y en una tienda venden todos los productos a 10 pesos, entonces, mientras superemos los 113 productos, no tendremos inconveniente para pagar.