Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 2, semipresencial

Primer parcial - 30 de setiembre de 2015. Duración: 3 horas

N° de parcial	Cédula	Apellido y nombre

Ejercicio 1.

a. Enunciar el Teorema de Euler.

b. Calcular las siguientes potencias.

i) $3^{100} \pmod{104}$.
ii) $10^{97} \pmod{101}$.
iii) $6^{66} \pmod{99}$.

Aclaración: cuando pedimos calcular $a^m \pmod{n}$, *nos referimos a hallar* $x \in \mathbb{N}$, *con* $0 \leq x < n$ *tal que* $a^m \equiv x \pmod{n}$

Ejercicio 2.

a. Sean a, b y c enteros no nulos tales que $\operatorname{mcd}(a, b) \mid c$. Consideramos la ecuación diofántica

$$ax + by = c$$

y (x_0, y_0) una solución particular de la misma.

i) Probar que para todo $k \in \mathbb{Z}$ el par

$$\left(x_0 + k\frac{b}{\operatorname{mcd}(a,b)}, y_0 - k\frac{a}{\operatorname{mcd}(a,b)}\right)$$

también es solución de la ecuación.

ii) Probar que todas las soluciones de la ecuación son de la forma

$$\left(x_0 + k\frac{b}{\operatorname{mcd}(a,b)}, y_0 - k\frac{a}{\operatorname{mcd}(a,b)}\right).$$

Es decir, probar que si (x_1, y_1) es solución de la ecuación, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(x_1, y_1) = \left(x_0 + k\frac{b}{\operatorname{mcd}(a,b)}, y_0 - k\frac{a}{\operatorname{mcd}(a,b)}\right).$$

b. i) Hallar todas las soluciones módulo 41 de la ecuación $4x \equiv 7 \pmod{41}$.
ii) Hallar todas las soluciones módulo 80 de la ecuación $25x \equiv 10 \pmod{80}$.

Ejercicio 3. Para cada uno de los siguientes sistemas, investigar si tiene solución, y en caso que tenga solución, hallar todas todas sus soluciones.

a. $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{11} \\ x \equiv 13 \pmod{20} \\ x \equiv 14 \pmod{21} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{22} \\ x \equiv 21 \pmod{28} \\ x \equiv 23 \pmod{30} \end{cases}$.