Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Matemática Discreta 2, semipresencial

Solución primer prueba
9 de setiembre de 2016

Ejercicio 1.

a. Resolver la ecuación diofántica:
$$738x + 621y = 45$$

b. ¿Existen enteros positivos x, y tales que $738x + 621y = 49563$? Justifique la respuesta.

Solución:

a. La ecuación diofántica $738x + 621y = 45$ es equivalente, dividiendo todos los coeficientes por 9, a la ecuación $82x+69y = 5$. Como el $\text{mcd}(82, 69) = 1$ entonces esta ecuación tiene solución en los enteros. Buscaremos primeros los valores $x_0,\ y_0 \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$(*) \quad 82x_0 + 69y_0 = 1 \text{ (Lema de Bézout).}$$

Tenemos:

- $82 = 69 \times 1 + 13$;
- $69 = 13 \times 5 + 4$;
- $13 = 4 \times 3 + 1$.

Entonces $1 = 13-4\times 3 = 13-(69-13\times 5)\times 3 = 13\times 16-69\times 3 = (82-69)\times 16-69\times 3 = 82 \times 16 - 69 \times 19$. O sea $1 = 82 \times 16 - 69 \times 19 = 82 \times 16 + 69 \times (-19)$. Por lo tanto $x_0 = 16$ e $y_0 = -19$, son una solución de la ecuación (*).

Luego, tomando $x_1 = 5 \times 16 = 80$ e $y_1 = 5 \times (-19) = -95$ obtenemos una solución de la ecuación $82x + 69y = 5$ pues $82 \times 80 - 69 \times 95 = 5$. Ahora, multiplicando por 9 volvemos a la ecuación original: $738x + 621y = 45$ y tenemos: $738 \times 80 - 621 \times 95 = 45$.

Entonces todas las soluciones de la ecuación $738x + 621y = 45$ están dadas por:

$$\{(x_t, y_t) \ / \ x_t = 80 + 69t,\ y_t = -95 - 82t,\ \text{con } t \in \mathbb{Z}\},$$

pues $69 = \frac{621}{9}$ y $82 = \frac{738}{9}$, siendo $\text{mcd}(738, 621) = 9$.

b. La respuesta es NO. La sección 1.6 *"Problema de los Sellos"* es la clave.

La Proposición 1.6.1 dice: *Sean $a > 1, b > 1$ enteros, primos entre sí. Entonces no hay enteros x, y, no negativos tal que $ax + by = a \times b - a - b$.*

A la vez, la Proposición 1.6.2 dice: Sean a y b enteros positivos primos entre sí. Si $n \geq a \times b - a - b + 1$, entonces existen enteros no negativos x, y tales que: $ax + by = n$.

Como $\text{mcd}(738, 621) = 9$ divide a 49563 entonces la ecuación $738x + 621y = 49563$ es equivalente a $82x + 69y = 5507$. Pero es clave, según las proposiciones citadas, calcular $82 \times 69 - 82 - 69 = 5507$.

Entonces la Proposición 1.6.1 nos asegura que la ecuación NO tiene solución con coeficientes enteros positivos.

Ejercicio 2. Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ con p_i primos distintos y $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$.
Demostrar que n es un cuadrado perfecto si y solo si el número de divisores positivos de n es impar.

Solución:
Directo:
Si n es cuadrado perfecto entonces $n = m^2$, con $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, por lo tanto $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = m^2 = (p_1^{\beta_1})^2 (p_2^{\beta_2})^2 \cdots (p_k^{\beta_k})^2 = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \cdots p_k^{2\beta_k}$. Entonces $\alpha_i = 2\beta_i$, para todo $i = 1, 2, ..., k$. Luego

el $\text{Div}_+(n) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_k + 1) = (2\beta_1 + 1) \times (2\beta_2 + 1) \times \ldots \times (2\beta_k + 1)$. O sea que $\text{Div}_+(n)$ es impar.

Recíproco:
Si $\text{Div}_+(n)$ es impar, como $\text{Div}_+(n) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_k + 1)$, entonces $\alpha_i + 1$ es impar para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. O sea que α_i es par para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Por lo tanto $\alpha_i = 2 \times \beta_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. O sea que: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = (p_1^{\beta_1})^2 (p_2^{\beta_2})^2 \cdots (p_k^{\beta_k})^2$. Luego, tomando $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, se tiene que $n = m^2$, es un cuadrado perfecto.