Soluciones Matemática Discreta 2

Tercer examen curso 2003 Febrero 2004

1) a) Probar que n(2n + 1)(7n +1) es divisible por 6 para todo n natural

Sol.: n puede ser de la forma 6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5
Si n = 6k el primer factor del producto es divisible por 6.
Si n = 6k+1 entonces 2n+1= 12k+3 es múltiplo de 3 y 7n+1= 42k+8 es par, por lo que el producto es múltiplo de 6
Si n= 6k+2 entonces es par y 7n+1 = 42k + 15 es múltiplo de 3
Si n = 6k+3 entonces es múltiplo de 3 y 7n+1 es par.
Si n= 6k+4 entonces n es par y 2n+1= 12k + 9 es múltiplo de 3
Si n= 6k+5 entonces 7n+1=42k+36 es múltiplo de 6

b) Por $ 5 se compraron 100 unidades de diferentes frutas. Sus precios son los siguientes: Sandía = 50 centésimos; Manzana = 10 cent. ; Ciruela = 1 cent. ¿ Cuánta fruta de cada clase fue comprada?

Sol.: Llamamos x, y, z a las cantidades de sandías, manzanas y ciruelas compradas.
Entonces: x+y+z=100 , 50x+10y+z = 500
50x+10y+100-x-y=500. 49x + 9y = 400
Mcd(49,9) = 1 , así que hay soluciones enteras.
49= 5*9+4
9= 4*2+1
Entonces: 1 = 9 – 4*2 = 9 – (49-5*9)*2 = 11*9 – 2*49
-800*49 + 4400*9 = 400
x = -800 + 9k , y = 4400 – 49k . Además z = -3500 + 40k
x >= 0 , -800 + 9k >= 0, k >= 88.88
y >= 0 , 4400 – 49k >= 0 , k =< 89.79. Quedaría k = 89.
x= 1 , y = 39 , z = 60

c) Hallar el resto de dividir $8381^{529} * 237^{421}$ entre 11

Sol.: Trabajamos módulo 11: 8381 ≡ 10 ≡ -1 (11) . 237 ≡ 6 (11)
$8381^{529} * 237^{421} \equiv (-1)^{529} * 6^{421} \equiv -6^{421}$
Por Fermat : $6^{10} \equiv 1(11)$ y por lo tanto $6^{421} \equiv 6(11)$
-6 ≡ 5 (11). Por tanto el resto pedido vale 5

Nota: Para b) se pide desarrollar un método de resolución. No se dará puntaje a resoluciones del tipo probar todos los casos posibles.

2) Sea G un grupo tal que: $\forall x, y \in G$ vale $(xy)^k = x^k y^k$ para 3 enteros k consecutivos. Probar que G es abeliano

Sol.: Supongamos que se cumple para k+1, k, k-1 :
$(xy)^{k+1} = xy(xy)^k = xyx^k y^k = x^{k+1} y^{k+1} \Rightarrow yx^k = x^k y$ (usando k+1 y k)
Usando k y k-1 llegamos a $yx^{k-1} = x^{k-1} y$
Entonces: $yx^k = x^k y = xx^{k-1} y = xyx^{k-1} \Rightarrow yx = xy$ y G es abeliano.

3) a) Probar que N = { e , (1 2) (3 4) , (1 3) (2 4) , (1 4) (2 3) } es subgrupo de A_4 (permutaciones pares de S_4)

Sol. ((1 2)(3 4))^2 = e, ((1 2)(3 4))((1 3)(2 4))=(1 4)(3 2),
((1 2)(3 4))((1 4)(2 3))=(1 3)(4 2)
((1 3)(2 4))((1 2)(3 4))=(1 4)(3 2)
((1 3)(2 4))((1 4)(2 3))=(1 2)(3 4)
((1 4)(2 3))((1 2)(3 4))=(1 3)(2 4)
((1 4)(2 3))((1 3)(2 4))=(1 2)(3 4)

Como el producto es cerrado en N y N es finito entonces N es subgrupo. Como los elementos de N son permutaciones pares entonces N es subgrupo de A_4

b) Hallar las clases laterales derechas e izquierdas de N en A_4

Sol.: (1 2 3)N = { (1 2 3), (1 2 3)(1 2)(3 4), (1 2 3)(1 3)(2 4), (1 2 3)(1 4)(2 3)} = { (1 2 3), (1 3 4), (2 4 3), (1 4 2) }

(1 3 2)N = { (1 3 2), (1 3 2)(1 2)(3 4), (1 3 2)(1 3)(2 4), (1 3 2)(1 4)(2 3)} = { (1 3 2), (2 3 4), (1 2 4), (1 4 3) }

Estas dos con N nos dan todas las clases laterales izquierdas de N en A_4

ya que | A_4 | = 12

N(1 2 3) = { (1 2 3), (1 2)(3 4)(1 2 3), (1 3)(2 4)(1 2 3), (1 4)(2 3)(1 2 3)} = { (1 2 3), (2 4 3), (1 4 2), (1 3 4) }

N(1 3 2) = { (1 3 2), (1 2)(3 4)(1 3 2), (1 3)(2 4)(1 3 2), (1 4)(2 3)(1 3 2)} = { (1 3 2), (1 4 3), (2 3 4), (1 2 4) }

c) Probar que N es normal en A_4

Sol.: Cada clase lateral izquierda de un elemento a coincide con la clase lateral derecha de a, o sea : aN = Na y entonces $N = a^{-1}Na$ y por lo tanto N es normal en A_4

d) Hallar la tabla del producto en A_4 / N

Sol.:

.	N	N(1 2 3)	N(1 3 2)
N	N	N(1 2 3)	N(1 3 2)
N(1 2 3)	N(1 2 3)	N(1 3 2)	N
N(1 3 2)	N(1 3 2)	N	N(1 2 3)

4) Sea A un anillo.

a) Probar que M = { x $\in$ A / x +x = z } es un ideal de A

Sol.: Si x, y están en M , entonces: (x+y)+(x+y)= (x+x)+(y+y)=z+z=z
Por lo tanto x+y está en M.
Si x está en M, entonces (-x)+(-x) = -(x+x) = -z = z. Entonces -x está en M.
Si a está en A y m está en M entonces:
am+am = a(m+m)= az = z , con lo que am está en M.
ma +ma = (m + m)a = za = z, con lo que ma está en M.
Por lo anterior M es ideal de A.

b) Hallar M para el anillo $Z_4 \times Z_8$

Sol.: Si (a,b)+(a,b)= (0,0) entonces (2a,2b)=(0,0) y por tanto a puede ser 0 o 2 y b puede ser 0 o 4 .
M = { (0,0), (0,4), (2,0), (2,4) }

c) Listar el anillo cociente $Z_4 \times Z_8$ / M . ¿ Cuántos elementos tiene ?

[(1,0)]={ (1,0), (1,4), (3,0), (3,4) }
[(0,1)]={ (0,1), (0,5), (2,1), (2,5) }
[(0,2)]= { (0,2), (0,6), (2,2), (2,6) }
[(0,3)]= { (0,3), (0,7), (2,3), (2,7) }
[(1,1)] = { (1,1), (1,5), (3,1), (3,5) }
[(1,2)] = { (1,2), (1,6), (3,2), (3,6) }
[(1,3)] = { (1,3), (1,7), (3,3), (3,7) }
$Z_4 \times Z_8$ / M = { [(0,0)],[(1,0)],[(0,1)],[(0,2)],[(0,3)],[(1,1)],[(1,2)],[(1,3)] }
| $Z_4 \times Z_8$ / M | = 8

d) Hallar las tablas de la suma y del producto en $Z_4 \times Z_8$ / M

Sol.:

+	[(0,0]	[(1,0)]	[(0,1)]	[(0,2)]	[(0,3)]	[(1,1)]	[(1,2)]	[(1,3)]
[(0,0)]	[(0,0]	[(1,0)]	[(0,1)]	[(0,2)]	[(0,3)]	[(1,1)]	[(1,2)]	[(1,3)]
[(1,0)]		[(0,0)]	[(1,1)]	[(1,2)]	[(1,3)]	[(0,1)]	[(0,2)]	[(0,3)]
[(0,1)]			[(0,2)]	[(0,3)]	[(0,0)]	[(1,2)]	[(1,3)]	[(1,0)]
[(0,2)]				[(0,0)]	[(0,1)]	[(1,3)]	[(1,0)]	[(1,1)]
[(0,3)]					[(0,2)]	[(1,0)]	[(1,1)]	[(1,2)]
[(1,1)]		simetrica				[(0,2)]	[(0,3)]	[(0,0)]
[(1,2)]							[(0,0)]	[(0,1)]
[(1,3)]								[(0,2)]

.	[(0,0]	[(1,0)]	[(0,1)]	[(0,2)]	[(0,3)]	[(1,1)]	[(1,2)]	[(1,3)]
[(0,0)]	[(0,0]	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]
[(1,0)]		[(1,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	[(1,0)]	[(1,0)]	[(1,0)]
[(0,1)]			[(0,1)]	[(0,2)]	[(0,3)]	[(0,1)]	[(0,2)]	[(0,3)]
[(0,2)]				[(0,0)]	[(0,2)]	[(0,2)]	[(0,0)]	[(0,2)]
[(0,3)]					[(0,1)]	[(0,3)]	[(0,2)]	[(0,1)]
[(1,1)]		simetrica				[(1,1)]	[(1,2)]	[(1,3)]
[(1,2)]							[(1,0)]	[(1,2)]
[(1,3)]								[(1,1)]

5) Sea la función booleana de 3 variables f definida como :
f(x,y,z) = 1 si $x = \overline{y}$ o $y = \overline{z}$; f(x,y,z) = 0 en otro caso.
Hallar la f.n.d y la f.n.c de f

Sol:

x, y, z	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

f.n.d de f : $f = \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,\overline{z}$

f.n.c de f : $f = (x + y + z)(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})$

Puntajes : 1) 31 : a) 10 b) 11 c) 10
2) 14
3) 19 : a) 4 b) 6 c) 5 d) 4
4) 24 : a) 6 b) 6 c) 6 d) 6
5) 12