Matemática Discreta 2

1er Parcial curso 2003

23 / 5 / 2003

Resolución

1) a) Sean $n > m$ enteros positivos. Hallar el resto de dividir 2^n -1 entre 2^m-1.

Res: Si n = qm+r con 0 <= r < m entonces
2^n –1 = 2^(qm+r)-1 = (2^m)^ q 2^r-1= (2^m-1+1)^ q 2^r-1= (por binomio) = (1+k(2^m-1))2^r-1 = k' (2^m-1) + 2^ r –1. Pero 0<= 2^r-1 < 2^m-1, por lo tanto, por la unicidad del resto de la división entera, el resto buscado es

2^r-1.

b) Demostrar que $4^n \equiv 4 \bmod 6$ para todo entero $n \geq 1$.

Res1: $4^n \equiv 16\ 4^{n-2} \equiv 4\ 4^{n-2} \equiv 4^{n-1} \bmod 6$, por lo tanto, por inducción se cumple (el paso base es trivial).

Res2: Por un lado $4^n \equiv 1^n \equiv 1 \bmod 3$. $4^n \equiv 0^n \equiv 0 \bmod 2$. Pero por el teorema chino del resto, $x \equiv 1 \bmod 3$; $x \equiv 0 \bmod 2$, si y solo si $x \equiv 4 \bmod 6$.

2) Hallar todas las parejas de enteros positivos que verifican :

$a.b = 22275$,

$\text{mcd}(a,b) = 15$,

$a \leq b.$

Res: a =a' 15 y b = b'15, de donde a'b' = 22275/15^2 = 99=3.3.11. Por lo tanto, como mcd(a',b') =1, los posibles valores para (a',b') son (1, 99), (9, 11) y los correspondientes valores de (a,b) son

(15, 1485), (135, 165).

3) Hallar los naturales ≤ 1000, que tienen exactamente 3 divisores positivos distintos.

Res: Si n = p1^a1...pk^ak la cantidad de sus divisores será (a1+1)...(ak+1) la única forma que este producto de 3 es para k =1 y a1 = 2. Por lo tanto n debe ser el cuadrado de un primo. Los únicos n=p^2 con p primo y n <= 1000 son

4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841 y 961.

4) Hallar el mínimo entero positivo que verifique el sistema de congruencias:

$$9x + 5 \equiv 14 \bmod 45,$$
$$12x + 6 \equiv 8 \bmod 55,$$

o probar que no existe ninguna solución. Justificar exponiendo un método de resolución.

Res: De la primer ecuación tenemos que $9x \equiv 9 \bmod 45$, de lo cual $x \equiv 1 \bmod 5$;

$0 \equiv 0 \bmod 9$

De la segunda $12x \equiv 2 \bmod 55$, de lo cual

$2x \equiv 2 \bmod 5$ o sea $x \equiv 1 \bmod 5$

$x \equiv 2 \bmod 11$

Por lo tanto solamente quedan dos ecuaciones $x \equiv 1 \bmod 5$; y $x \equiv 2 \bmod 11$. Por el teorema Chino del resto, $x \equiv 46 \bmod 55$ por lo que x = 46 + 55k y el menor de dichos valores positivos es

x = 46.

5) Demostrar que que si dos elementos *a*, *b* de un grupo verifican ($a.b$)^3 = e,

entonces ($b.a$)^3 = e.

Res: Si ($a.b$)^3 = e, entonces $a.b\ a.b\ a.b = e$, de donde $b\ a.b\ a = a^{-1}\ b^{-1}$. Por otro lado ($b.a$)^3 = $b.a\ b.a\ b.a = (b.a\ b.a)\ b.a = a^{-1}\ b^{-1}\ b.a = a^{-1}\ e.a = a^{-1}.a = e$.

6) a) Testear si H = { [1], [4], [16], [19], [31], [34] } es un subconjunto de U_{45}.

b) Testear si H es un subgrupo de (U_{45}, *) (* es el producto módulo 45)

Recordar que: $U_n = \{[x] \in Z_n,\ \text{mcd}(x,n) = 1\}$.

Res: Basta observar que mcd(4,45) =1 por lo que [4] está en U_{45} y que H = *<[4]>,* ya que: [4]^2 = [16], [4]^3 = [19], [4]^4 = [31], [4]^5= [34] y [4]^6= [1].

Puntajes:	1) 9	: a) 5 b) 4
	2) 6	
	3) 6	
	4) 8	
	5) 6	
	6) 5	: a) 1 b) 4