# Solución Matemática Discreta 2

**Primer examen curso 2003** **2 / 8 / 2003**

**1)** a) Probar que si n es primo con 6 entonces $n^2 \equiv 1 \ (24)$

**Solución:** Si n es primo con 6 entonces n = 6k+1 o n = 6k+5 = 6h – 1

$(6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12k(3k \pm 1) + 1$. Si k es par 12k es múltiplo de 24.

Si k es impar 3k ± 1 es par y 12(3k ± 1) es múltiplo de 24.

b) Hallar a y b sabiendo que : mcd(a,b)=18, a tiene 21 divisores y b tiene 10

**Solución:** $18 = 2.3^2$ $a = 2^h.3^k$...... $b = 2^r.3^s$........ 21=(h+1)(k+1).....

10 = (r+1)(s+1)...... Como h+1 ≥ 2 , k+1 ≥ 3 , r+1 ≥ 2 , s+1 ≥ 3 se tiene que s+1=5, con lo que r+1 = 2. Si h+1=3 entonces k+1=7. Si h+1=7 entonces k+1=3. Entonces b = $2.3^4$ y a = $2^2.3^6$ o a = $2^6.3^2$

Como mcd(a,b)=18 se tiene que a = $2^6.3^2$ y b = $2.3^4$

c) Un bibliotecario cuenta los libros de un armario. Si los agrupa de a 4 o de a 5 o de a 6 siempre sobra 1. Si los agrupa de a 7 no le sobra ninguno. Sabiendo que los libros son menos de 400 ¿cuántos libros tiene ?

**Solución:** Si x es la cantidad de libros, entonces x-1 es múltiplo de 4 , de 5 y de 6. Por lo tanto x-1 es múltiplo de mcm(4,5,6) = 60.

Entonces x = 60k +1. Queremos que 60k+1 ≡ 0 (7). O sea –3k ≡ -1 (7).

O sea 3k ≡ 1 (7) O sea k ≡ 5 (7). Con k = 5 x queda : x = 60.5+1=301.

El siguiente valor sería x = 60(5+7)+1 = 721 que se pasa de 400.

La solución es entonces 301.

d) Le pedí a Juan que multiplicara el número del día de su nacimiento por 12 y el número del mes de su nacimiento por 31 y los sumara. El me dijo que le dió 170. ¿Qué día es el cumpleaños de Juan?

**Solución:** Sea x el día e y el mes de nacimiento. Entonces 12x + 31y = 170.

Mcd(12,31)=1 así que existen soluciones enteras.

31 dividido 12 dá cociente 2 y resto 7

12 dividido 7 dá cociente 1 y resto 5

7 dividido 5 dá cociente 1 y resto 2

5 dividido 2 dá cociente 2 y resto 1

Entonces :

I) 1 = 5 – 2.2

II) 2 = 7 – 5

III) 5 = 12 – 7

IV) 7 = 31 – 2.12

Sustituyo el 2 de II) en I) : 1 = 5 – 2.(7 – 5) = 3.5 – 2.7. 1 = 3.5 – 2.7

Sustituyo el 5 de III) en esta última : 1 = 3.(12 – 7) – 2.7 = 3.12 – 5.7

1 = 3.12 – 5.7

Sustituyo el 7 de VI) en esta última: 1 = 3.12 – 5(31 – 2.12) = 13.12 – 5.31. O sea 1 = 13.12 – 5.31.

Entonces 170 = 12(2210) + 31(-850)

x = 2210 + 31k , y = -850 – 12k.

1 ≤ x ≤ 31 entonces 1 ≤ 2210 + 31k ≤ 31 , -71.25 ≤ k ≤ -70.29

k = -71. Entonces x = 9 , y = 2. Juan cumple el 9 de Febrero.

**2)** Se considera M = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ a,b,c,d \in Z_2 \right\}$ que con la suma y producto habituales de matrices y la aritmética de $Z_2$ es un anillo (esto no se pide probar).

a) Hallar todos los elementos de M que conmutan (con el producto) con

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Mostrar que M no es anillo conmutativo.

**Solución:** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ por lo tanto

c=b y d=a. Las matrices son $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ o sea son :

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ El anillo no es conmutativo.

b) Hallar todas las soluciones de : x + y = **I** , x.y = **0** con x, y $\in$ M
( **I** es el elemento unidad de M, **0** es la matriz nula de M)

**Solución:** x.(**I** – x) = **0** Entonces $x = x^2$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d \end{bmatrix}$$

a+bc=a , ab+bd=b, ac+cd=c, bc+d=d

O sea bc = 0 , b(a+d-1)=0 , c(a+d-1)=0

Si b=c=0 se cumplen las tres.

Si b=1 y c=0, entonces a + d – 1 = 0 con lo que a=1 y d=0 o bien a=0 y d=1

Si b=0 y c=1, entonces a + d – 1 = 0 con lo que a=1 y d=0 o bien a=0 y d=1.

Hay 8 soluciones para x :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Para cada una de estas x la y vale x + **I**

c) Hallar todas la unidades de M ( *Sug.*: x = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es unidad $\Leftrightarrow$
Det(x) = a.d – b.c $\neq$ 0 en $Z_2$ . Esto no se pide probar) ¿Cuántas unidades hay ?

**Solución:** a.d – b.c = 1 implica en $Z_2$ que a.d = 1 y b.c= 0 o bien a.d=0 y b.c= 1. En el primer caso tenemos : a = 1, d = 1 y b y c no ambos 1. En el segundo caso tenemos : b=1, c=1 y a y d no ambos 1. En total quedan 6 matrices diferentes.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

d) Hallar la tabla del grupo formado por las unidades del anillo M con respecto a la multiplicación. Halle los inversos de cada elemento. ¿Este grupo es abeliano? ¿Es cíclico?

**Solución:** Si llamamos e, x, y, z, v, w a las matrices anteriores nos queda la siguiente tabla del producto:

| . | e | x | y | z | v | w |
|---|---|---|---|---|---|---|
| e | e | x | y | z | v | w |
| x | x | e | v | w | y | z |
| y | y | w | e | v | z | x |
| z | z | v | w | e | x | y |
| v | v | z | x | y | w | e |
| w | w | y | z | x | e | v |

El inverso de e es e, el de x es x , el de y es y, el de z es z, el de v es w y el de w es v.

El grupo no es abeliano porque x.z=w pero z.x=v
No es cíclico ya que no es abeliano.

e) Dado H = $\left\{\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \;/\; a,b \in Z_2\right\}$, probar que H es subanillo de M.

Muestre que xh $\in$ H $\forall$ x $\in$ M y $\forall$ h $\in$ H. Pruebe que sin embargo H no es ideal de M.

**Solución:** Como H es finito alcanza con ver que la suma y el producto de elementos de H están en H para ver que es subanillo de M:

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & c \\ d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & a+c \\ b+d & b+d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c & c \\ d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+ad & ac+ad \\ bc+bd & bc+bd \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra+sb & ra+sb \\ ta+ub & ta+ub \end{bmatrix}$ está en H

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no está en H. Entonces H no es ideal de M.

f) En (M, +) H es subgrupo. ¿Cuántos elementos tiene el grupo cociente ( M , + ) / H ?. Hallarlos y escribir la tabla de la suma en (M, + ) / H

**Solución:** |M| = 16, |H| = 4. Entonces | (M, + ) / H | = 4

H = $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

H + $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ = $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ = A

H + $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ = $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ = B

H + $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ = C

| + | H | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| H | H | A | B | C |
| A | A | H | C | B |
| B | B | C | H | A |
| C | C | B | A | H |

**3)** Sea G un grupo finito no abeliano y sean x, y , z elementos cualquiera de G. Probar que o(x.y.z) = o(z.x.y) = o(y.z.x) ( o(g) es el orden de g)

**Solución:** Sean n=o(x.y.z), m=o(z.x.y), k=o(y.z.x)

$(x.y.z)^n$ = e y entonces $z.(x.y.z)^n$ = z.e = z
z.(x.y.z).(x.y.z)..........(x.y.z).(x.y.z)= z
(z.x.y).(z.x.y).............(z.x.y).(z.x.y).z = z
(z.x.y).(z.x.y).............(z.x.y).(z.x.y)= e
$(z.x.y)^n$ = e y por lo tanto o(z.x.y) = m divide a n

$(z.x.y)^m$ = e y entonces $(z.x.y)^m$.z = e.z = z
(z.x.y).(z.x.y)..........(z.x.y).(z.x.y).z= z
z.(x.y.z).(x.y.z)..........(x.y.z).(x.y.z)=z
(x.y.z).(x.y.z)..........(x.y.z).(x.y.z)= e
$(x.y.z)^m$ = e y por lo tanto o(x.y.z) = n divide a m

Como n y m son naturales entonces m = n
En forma análoga se prueba que o(z.x.y) = o(y.z.x)

**4)** Se considera la función booleana $f(x,y,z) = xy(x+\bar{z})(y+z) + \bar{x}\,\bar{y}(z+\bar{x})$
Hallar la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de f .

**Solución:**

| (x, y, z) | f |
|---|---|
| 0 0 0 | 0 + 1 = 1 |
| 0 0 1 | 0 + 1 = 1 |
| 0 1 0 | 0 + 0 = 0 |
| 0 1 1 | 0 + 0 = 0 |
| 1 0 0 | 0 + 0 = 0 |
| 1 0 1 | 0 + 0 = 0 |
| 1 1 0 | 1 + 0 = 1 |
| 1 1 1 | 1 + 0 = 1 |

forma normal disyuntiva = $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,z + xy\,\bar{z} + xyz$
forma normal conjuntiva = $(x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})$

**Puntajes** : 1) 34 : a) 6 b) 9 c) 9 d) 10
2) 46 : a) 4 b) 8 c) 6 d) 12 e) 7 f) 9
3) 12
4) 8