Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 2- semipresencial

PRIMER PRUEBA - 11 DE SSETIEMBRE DE 2015. DURACIÓN: 1 HORA Y MEDIA

Primer prueba - soluciones

Ejercicio 1. Una tienda de cotillón vende chifles en bolsas de 46 **unidades y bolsas de** 26 **unidades.**

¿Cuántas bolsas de cada tipo tenemos que comprar si queremos comprar 600 **chifles?**

Mostrar el procedimiento para llegar a su respuesta.

Si x denota a la cantidad de bolsas de 46 unidades e y la cantidad de bolsas de 26 unidades que se comprarán, entonces necesitamos que

$$46x + 26y = 600$$

con las condiciones que $0 \leq x, y$.

Para simplificar, dividimos la ecuación entre 2 y nos queda:

$$23x + 13y = 300. \tag{1}$$

Como $\text{mcd}(23, 13) = 1$ sabemos que esta ecuación diofántica tiene solución y además con el Algoritmo de Euclides Extendido, sabemos también que

$$23\,(4) + 13(-7) = 1.$$

Multiplicando por 300 obtenemos que

$$23\,(1200) + 13(-2100) = 300$$

y por lo tanto $(x_0, y_0) = (1200, -2100)$ es una solución particular de la ecuación original. Por el Teorema de soluciones de ecuaciones diofánticas tenemos entonces que todas las soluciones de la ecuación son:

$$x = 1200 - 13k,\ y = -2100 + 23k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Para que se cumpla la condición $0 \leq x$, necesitamos $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq 1200 - 13k$; es decir $13k \leq 1200$. Por lo tanto $k \leq \frac{1200}{13} \sim 92,3$. Por lo que (al ser k entero) $k \leq 92$.

Para que se cumpla la condición $y \geq 0$, necesitamos $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-2100 + 23k \geq$; es decir $23k \geq 2100$. Por lo tanto $k \geq \frac{2100}{23} \sim 91,3$. Por lo que (como $k \in \mathbb{Z}$) $k \geq 92$.

De las dos condiciones resulta que la única solución al problema es tomando $k = 92$. Por lo tanto hay que comprar $x = 1200 - 13(92) = 4$ bolsas de 46 unidades e $y = -2100 + 23(92) = 16$ bolsas de 26 unidades.

Ejercicio 2. Para cada uno de los casos, determinar si existen naturales a y b que cumplan las siguientes ecuaciones:

1. $27a^2 = 16b^4$

2. $50a^3 = 27b^2$

Escribimos las descomposiciones factoriales de a y b:

$$a = \prod_{p \text{ primo}} p^{a_p},\ b = \prod_{p \text{ primo}} p^{b_p}$$

(donde $a_p, b_p \in \mathbb{N}$ y sólo una catidad finita de a_p y b_p son no nulos).

1. Tenemos que $27a^2 = 16b^4$ si y sólo si

$$27\left(\prod_{p \text{ primo}} p^{a_p}\right)^2 = 16\left(\prod_{p \text{ primo}} p^{b_p}\right)^4,$$

si y sólo si

$$3^3 \prod_{p \text{ primo}} p^{2a_p} = 2^4 \prod_{p \text{ primo}} p^{4b_p}$$

Entonces tenemos que se debe cumplir que

$$2^{2a_2}3^{3+2a_3}5^{2a_5}\cdots = 2^{4+4b_2}3^{4b_3}5^{4b_5}\cdots$$

Por unicidad de la descomposición factorial, el exponenete de cada primo en la expresión de la derecha, debe ser igual al exponente en la expresión de la izquierda. Por lo tanto, en particular, se debería cumplir que $3 + 2a_3 = 4b_3$, lo cual es imposible pues $3 + 2a_3$ es impar y $4b_3$ es par. Por lo tanto, no existen a, b que cumplan la condición.

2. De forma similar, usando que $50 = 2 \times 5^2$ tenemos que $50a^3 = 27b^2$ si y sólo si

$$2 \times 5^2 \prod_{p \text{ primo}} p^{3a_p} = 3^3 \prod_{p \text{ primo}} p^{2b_p}.$$

Es decir, si y sólo si

$$2^{1+3a_2}3^{3a_3}5^{2+3a_5}7^{3a_7}\cdots = 2^{2b_2}3^{3+2b_3}5^{2b_5}7^{2a_7}\cdots.$$

Por unicidad de la descomposición factorial, ésto sucede si y sólo si

$$\begin{aligned} 1 + 3a_2 &= 2b_2 \\ 3a_3 &= 3 + 2b_3 \\ 2 + 3a_5 &= 2b_5 \\ 3a_p &= 2b_p, \forall p \neq 2, 3, 5 \end{aligned}$$

- La condición $1 + 3a_2 = 2b_2$ se cumple por ejemplo tomado $a_2 = 1$ y $b_2 = 2$
- La condición $3a_3 = 3 + 2b_3$ se cumple por ejemplo tomando $a_3 = 1$ y $b_3 = 0$,
- La condición $2 + 3a_5 = 2b_5$ se cumple por ejemplo tomando $a_5 = 0$ y $b_5 = 1$,
- La condición $3a_p = 2b_p$ para $p \neq 2, 3, 5$, se cumple por ejemplo tomando $a_p = b_p = 0$.

Por lo tanto $a = 2^1 3^1 5^0 = 6$ y $b = 2^2 3^0 5^1 = 20$ cumplen la condición que $50a^3 = 27b^2$.

Observación: si bien no pedíamos hallar todas las soluciones, notar que

- La condición $1 + 3a_2 = 2b_2$ implica que a_2 es impar; es decir $a_2 = 2c_2 + 1$ para algún $c_2 \in \mathbb{N}$; y luego $2b_2 = 1 + 3(2c_2 + 1) = 6c_2 + 4$ y entonces $b_2 = 3c_2 + 2$.

- La condición $3a_3 = 3 + 2b_3$ implica que $2b_3 = 3a_3 - 3 = 3(a_3 - 1)$. Por lo tanto $3 \mid 2b_3$, y como $\mathrm{mcd}(2, 3) = 1$, por el Lema de Euclides tenemos que $3 \mid b_3$; por lo tanto, $b_3 = 3c_3$ para algún $c_3 \in \mathbb{N}$. Y despejando a_3 obtenemos que $a_3 = 1 + 2c_3$.

- La condición $2 + 3a_5 = 2b_5$ implica que $3a_5 = 2b_5 - 2 = 2(b_5 - 1)$ y por lo tanto $2 \mid 3a_5$ y nuevamente por el Lema de Euclides tenemos que se $2 \mid a_5$. Entonces $a_5 = 2c_5$ para algún $c_5 \in \mathbb{N}$. Y despejando b_5 obtenemos que $b_5 = 1 + 3c_5$.

- La condición $3a_p = 2b_p$ para $p \neq 2, 3, 5$, implica que (por el Lema de Euclides nuevamente) $2 \mid a_p$, es decir que $a_p = 2c_p$ para algún $c_p \in \mathbb{N}$. Y despejando b_p obtenemos que $b_p = 3c_p$.

Es decir que ara obtener todas las soluciones basta con conciderar para cada primo p, $c_p \in \mathbb{N}$, con sólo una cantidad finita no nulos; y luego

$$\begin{aligned} a &= 2^{1+2c_2} 3^{1+2c_3} 5^{2c_5} \prod_{2,3,5 \neq p \text{ primo}} p^{2c_p} \\ b &= 2^{2+3c_2} 3^{3c_3} 5^{1+3c_5} \prod_{2,3,5 \neq p \text{ primo}} p^{3c_p} \end{aligned}$$

Y si llamamos $c = \prod_{p \text{ primo}} p^{c_p}$ (es decir c es cualquier natural mayor que 1), obtenemos que todas las soluciones son $a = 2^1 3^1 c^2 = 6c^2$ y $b = 2^2 5^1 c^3 = 20c^3$.