

**Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática  
Discreta 2, semipresencial**

SEGUNDA PRUEBA PRÁCTICA- 30 DE OCTUBRE DE 2017. DURACIÓN: 1:30 HORAS

N° de prueba	Cédula	Apellido y nombre

Para cada pregunta o ejercicio, deben presentar claramente el razonamiento y cálculos realizados para obtener su respuesta final. Si una implicancia es válida debido a algún teorema, proposición o propiedad, deben especificarlo (nombre del teorema, lema, etc.) Presentar una respuesta final a la pregunta sin justificación carece de validez.

**Ejercicio 1.**

- a. Sean  $G$  y  $K$  dos grupos y  $F : G \rightarrow K$  un homomorfismo. Consideramos la imagen de  $F$ :  $\text{Im}(F) = \{k \in K : \exists g \in G \text{ tal que } F(g) = k\}$ . Probar que  $\text{Im}(F)$  es un subgrupo de  $K$ .
- b. Sea  $K$  un grupo tal que 3 no divide a  $|K|$  y sea  $F : S_3 \rightarrow K$  un homomorfismo no trivial.
- i) Probar que  $\text{Ker}(F) = \{Id, \sigma_1, \sigma_2\}$ .
  - ii) Probar que  $F(\tau_1) = F(\tau_2) = F(\tau_3)$ .
  - iii) Si  $K = \mathbb{Z}_4$ , hallar  $F$  (no es necesario probar que lo que se obtiene es un homomorfismo).

Notación:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 2.** Sea  $G$  un grupo abeliano con neutro  $e$ .

- a. Si  $g \in G$  es tal que  $g^{110} = e$ ,  $g^{10} \neq e$ ,  $g^{55} \neq e$  y  $g^{22} \neq e$ , probar que  $o(g) = 110$ .
- b. Sean  $h, k \in G$  tales que  $o(h) = 5$  y  $o(k) = 22$ , probar que  $o(hk) = 110$ .
- c. Sea  $G = U(121)$ .
- i) Hallar  $o(\overline{2})$ ,  $o(\overline{119})$  y  $o(\overline{3})$ .
  - ii) Hallar  $g \in G$  tal que  $G = \langle g \rangle$ .
  - iii) Hallar todos los homomorfismos  $F : G \rightarrow \mathbb{Z}_{20}$ .