Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 2-semipresencial

PRIMER PRUEBA - 11 DE SETIEMBRE DE 2015. DURACIÓN: 1 HORA Y MEDIA

Primer prueba - principales errores cometidos

Ejercicio 1. Una tienda de cotillón vende chifles en bolsas de 46 unidades y bolsas de 26 unidades. ¿Cuántas bolsas de cada tipo tenemos que comprar si queremos comprar 600 chifles?

Si x denota a la cantidad de bolsas de 46 unidades e y la cantidad de bolsas de 26 unidades que se comprarán, entonces necesitamos que

$$46x + 26y = 600$$

con las condiciones que $0 \leq x, y$.

Al hacer el Algoritmo de Euclides, resulta que $\text{mcd}(46, 26) = 2$ que divide a 600 y por lo tanto la ecuación diofántica de arriba tiene solución. Ahora el primer paso es resolver

$$46x' + 26y' = 2.$$

Con el Algoritmo de Euclides Extendido, hallamos que $x' = 4$ e $y' = -7$ es solución de esta segunda diofántica; es decir que

$$46(4) + 26(-7) = 2$$

.

Ahora, para obtener una solución de $46x + 26y = 600$ basta con multiplicar x', y' por 300. Es decir que

$$x_0 = 4 \times 300 = 1200 \text{ e } y_0 = -7 \times 300 = -2100$$

es una solución particular de $46x + 26y = 600$; es decir $46(1200) + 26(-2100) = 600$.

Ahora, por el Teorema de soluciones de ecuaciones diofánticas (Teorema 1.5.3 de los apuntes de teórico) tenemos entonces que todas las soluciones de la ecuación son:

$$\left\{ x = 1200 + \frac{26}{\text{mcd}(46,26)}k,\ y = -2100 - \frac{46}{\text{mcd}(46,26)}k,\ k \in \mathbb{Z}. \right\}$$

Es decir que todas las soliciones de $46x + 26y = 600$ son

$$\left\{ x = 1200 + \frac{26}{2}k,\ y = -2100 - \frac{46}{2}k,\ k \in \mathbb{Z} \right\} = \{x = 1200 + 13k,\ y = -2100 - 23k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Muchos estudiantes se olvidaron de dividir entre el $\text{mcd}(46, 26)$ para obtener todas las soluciones (Ver teorema 1.5.3); es decir pusieron que todas las soluciones de $46x + 26y = 600$ son $x = 1200 + 26k$ e $y = -2100 - 23k$. Esto está mal, ya que por ejemplo,de esta forma no obtienen la solución $x = 1200 + 13$ $y = -2100 - 23$ ya que con $k = 1$ saltan directamente a $x = 1200 + 26$ e $y = -2100 - 46$.

  Si piensan que ésto les puede volver a pasar, les recomendamos trabajar siempre con coeficientes coprimos. Es decir, luego del primer donde hallaron que $\text{mcd}(46, 26) = 2$, y que como 2 divide a 600, entonces la diofántica tiene solución; pueden dividir toda la ecuación entre 2 y trabajar con la diofántica equivalente que es

  $$23x + 13y = 300.$$

  Y entonces aquí, como el $\text{mcd}(23, 13) = 1$ directamente las soluciones son $x = 1200 + 13k$, $y = -2100 - 23k$.

- Otro error es que algunos estudiantes primero hallaron todas las soluciones de la ecuación $46x'+26y'=2$, y luego multiplicaron todas esas soluciones por 300; esto también está mal, porque les faltan (muchísoluciones:

  Es decir que primero hicieron: $x'=4+13k$ e $y'=-7-23k$ (todas las soluciones de $46x'+26y'=2$); y luego multiplicaron éstas soluciones por 300 y concluyeron que todas las soluciones de $46x+26y=600$ eran

  $$x=1200+(13)(300)k; y=-2100-23(300)k.$$

  Observar que de esta forma, obtienen soluciones para la x en intervalos de 13(300) en vez de en intervalos de 13!!! Les faltan muchísimas soluciones!

  El Teorema 1.5.3, dice que LUEGO de hallar (x_0, y_0), una solución de $46x+23y=600$; es decir, luego de obtener $(x_0, y_0)=(1200,-2100)$, todas las soluciones de $46x+23y=600$ las obtienen como $x=x_0+13k=1200+13k$, $y=y_0-23k=-1200-23k$.

  Sólo para hallar UNA PARTICULAR, es decir (x_0, y_0) es que primero hallan UNA solución $46x'+23y'=2$; por ejemplo $x'=4$, $y'=-7$ y la multiplcan por 300, obteniendo $(x_0, y_0)=(1200,-2100)$.

Ejercicio 2. Para cada uno de los casos, determinar si existen naturales a y b que cumplan las siguientes ecuaciones:

1. $27a^2=16b^4$

2. $50a^3=27b^2$

- El principal error en este ejercicio fue utilizar la unicidad de la descomposición factorial, pero usando el 27 (o el 50) para esa unicidad. Es decir, usaron que 27 es primo, cuando $27=3^3$ o que el 50 es primo cuando $50=2\times 5^2$. Por ejemplo para la segunda parte escribieron:

  $$50a^3=2\times 5^2\times(2^{a_2}3^{a_3}\cdots 27^{a_{27}}\cdots)^3=2\times 5^2\times(2^{3a_2}3^{3a_3}\cdots 27^{3a_{27}}\cdots$$

  y

  $$27b^2=27\times\left(2^{b_2}3^{b_3}\cdots 27^{b_{27}}\cdots\right)^2=2^{2b_2}3^{2b_3}\cdots 27^{2b_{27}+1}\cdots$$

  Al utilizar el 27 en la factorización, ya no hay unicidad; es decir, el hecho de que $50a^3=27b^2$ NO IMPLICA que los exponentes de 27 tengan que ser los mismos en la factorización que utilizaron. Esto sucede sólo si la factorización involucra únicamente potencias de primos!!

  Vean que por ejemplo, los exponentes de 27 son distintos si escribimos $27^1=3^3\times 27^0$.

- Otro error que ocurrió varias veces, fue luego de llegar a una igualdad de fracciones:

  $$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

  concluyeron que entonces

  $$A=C \text{ y } B=D$$

  Esto claramente está mal: por ejemplo

  $$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

  y los numeradores son distintos, y lo mismo para los denominadores.

  Por este motivo, en la segunda parte, los estudiantes que escribieron algo como

  $$50a^3=27b^2\Leftrightarrow\frac{a^3}{b^2}=\frac{27}{50}$$

  y que entonces $b^2=50$ tienen el ejercicio mal.