[Büten Zar]
B.Sz

Comentarios

Büten Zar

FB

Letra

Ejercicio 1

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Ejercicio 4

Ejercicio 5

Ejercicio 6

Ejercicio 7

Ejercicio 8

Ejercicio 9

Ejercicio 10

Ejercicio 1

Menu

[Büten Zar]
B.Sz

$(G, \times, e_G)$ $\qquad$ $G\times K: (g,k)(g',k') = (g\times g', k * k') \quad \forall g,g' \in G$

$(K, *, e_K)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall k,k' \in K$

Demostrar que $G\times K$ con esa operación es un grupo.

Condición 1: Cierre $\quad a\odot b \in G\times K \quad \forall a,b \in G\times K$

Condición 2: Asociativa $\quad (a\odot b)\odot c = a\odot(b\odot c) \quad \forall a,b,c \in G\times K$

$$((g,k)\odot(g',k'))\odot(g'',k'') \stackrel{def}{=} (g\times g', k*k')\odot(g'',k'') \stackrel{def}{=} ((g\times g')\times g'', (k*k')*k'')$$

$$(g,k)\odot((g',k')\odot(g'',k'')) \stackrel{def}{=} (g,k)\odot(g'\times g'', k'*k'') \stackrel{def}{=} (g\times(g'\times g''), k*(k'*k''))$$

Se cumple, G y K son grupos entonces $\times$ y $*$ cumplen con asociativa

Condición 3: Neutro $\quad \forall a \in G\times K \quad a\odot e = e\odot a = a$

$$\boxed{e_{G\times K} = (e_G, e_K)}$$

Condición 4: $\forall a \in G\times K \; \exists b \;/\; a\odot b = b\odot a = e_{G\times K}$

sea $a = (g, k)$

$a\odot b = (g\times g', k * k') = (e_G, e_K)$

k' es el inverso de k en K

$\exists b$ $\qquad$ g' es el inverso de g en G

Esos inversos existen pues G y K son grupos

$(G\times K, \odot, e_{G\times K})$ es un grupo

Ejercicio 2

Menu

[Büten Zar]
B.Sz

① Sean G el grupo multiplicativo de las matrices invertibles 2x2, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Probar que A tiene orden $o(A) = 4$, B orden $o(B) = 3$ y que A.B tiene orden infinito.

El neutro de G es $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^4 = A^2 . A^2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B.B.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A.B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A.B)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A.B)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{no existe } n \,/\, A.B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow O(A.B) = \infty$$

② Hallar elementos $a, b \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ de orden infinito tales que $a+b$ tiene orden finito

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} = \{ (\bar{0}, 1)(\bar{0}, \ldots)\ldots, (\bar{1}, 1), (\bar{1}, 2), \ldots \}$$

El neutro es $(\bar{0}, 0)$

Sea $a = (\bar{1}, 1)$ entonces $a^n = (\bar{n}, n) \neq (\bar{0}, 0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ por lo que $O(a) = \infty$

Sea $b = (\bar{1}, -1)$ entonces $b^n = (\bar{n}, -n) \neq (\bar{0}, 0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ por lo que $O(b) = \infty$

$(a+b)^1 = (\bar{2}, 0) \implies O(a+b) = 1$

Ejercicio 3 Menu

[Büten Zar] B.Sz

Sean H y K subgrupos de un grupo G y e la unidad de G.

① Probar que si $|H|$ y $|K|$ son coprimos $\Longrightarrow H \cap K = \{e\}$

Forma 1:

$H \cap K$ es subgrupo de $H \overset{\text{Lagrange}}{\Rightarrow} |H \cap K| \,\big|\, |H|$

$H \cap K$ es subgrupo de $K \underset{\text{Lagrange}}{\Rightarrow} |H \cap K| \,\big|\, |K|$

$\left.\begin{array}{l} MCD(|H|, |K|) = 1 \\ |H \cap K| \,\big|\, |H| \\ |H \cap K| \,\big|\, |K| \end{array}\right\} \Rightarrow |H \cap K| = 1$

¿$e_G \in H \cap K$? $H \cap K$ es un subgrupo $\Rightarrow e_G \in (H \cap K)$

Forma 2:

$|H| = n$

$|K| = m$

$MCD(m, n) = 1$

$e_G \in H \cap K$

Hay que probar que $\forall\, g \in H \cap K \Rightarrow g = e_G$

Bezout $\exists\, x, y \in \mathbb{Z} \,/\, nx + my = 1$

$$g^1 = g = g^{nx+my} = \underbrace{(g^n)^x}_{e_G} \cdot \underbrace{(g^m)^y}_{e_G} = e_G^x \cdot e_G^y = e_G$$

props

$g \in H \Rightarrow g^{|H| = n} = e_G$

$g \in K \Rightarrow g^{|K| = m} = e_G$

② Hallar los posibles valores de $|H|$ si $K \subseteq H \subseteq G$, $|G| = 660$ y $|K| = 66$

K subgrupo de $H \overset{\text{Lagrange}}{\Rightarrow} |K| \,\big|\, |H| \Rightarrow \boxed{|H| = 66\,a} \quad a \in \mathbb{Z}^+$

H subgrupo de $G \overset{\text{lagra}}{\Rightarrow} |H| \,\big|\, |G| \Rightarrow 66a \,|\, 660 \Rightarrow a \,|\, 10$

$a = 1, 2, 5, 10$

$|H| = 66, 132, 330, 660.$

Ejercicio 4

Menu

Sea $f : (1,2,\dots,n) \longrightarrow (1,2,\dots,n)$ una función biyectiva, probar que la función:

$$f^{-1} = \underbrace{f \circ f \circ f \circ f \dots \circ f}_{n!-1 \text{ veces}}$$

Veamos que f es en realidad una permutación de n elementos.

$$\boxed{f \in S_n} \qquad |S_n| = n!$$

por teo $\longrightarrow$ $f^{|S_n|} = \overset{e}{id}$

$$\Longrightarrow f^{n!} = e_{S_n}$$

como $(S_n, \cdot)$ es un grupo $\Rightarrow \exists\, f^{-1} \in S_n$

$$f^{n!} \cdot f^{-1} = f^{-1}$$

$$\boxed{f^{n!-1} = f^{-1}}$$

Ejercicio 5

Menu

Sea G un grupo

① Si G es cíclico $\Rightarrow$ todo subgrupo de G también es cíclico.

Demostración:

M es subgrupo de G.

$\exists\, g \in G \,/\, G = \langle g \rangle$ por ser G cíclico.

Si $g \in M \Longrightarrow G = \langle g \rangle \subseteq M$ por lo que $G = M$

Si $g \notin M \Rightarrow$ entonces existe $g^i \in M$ con $|i|$ mínimo.

Entonces $(g^i)^n \in M \;\forall n \in \mathbb{Z}$, por lo cual $\langle g^i \rangle \subseteq M$.

¿$M \subseteq \langle g^i \rangle$?

Sea $g^k \in M$ $\quad k = q \cdot i + r \quad$ con $|r| < |i|$ o $|r| = 0$

como $|i|$ es el mínimo $\Rightarrow r = 0 \Rightarrow g^k = g^{q \cdot i} = (g^i)^q \in \langle g^i \rangle$

Entonces $M \subseteq \langle g^i \rangle$

por lo tanto $M = \langle g^i \rangle \Rightarrow M$ es cíclico.

(2) Si G no tiene subgrupos no triviales $\Rightarrow$ G es cíclico, finito y $|G|$ es primo.

Veamos primero que G debe ser finito:

Supongamos por absurdo que es infinito, consideremos $x \in G$.

Si $\langle x \rangle \neq G$ $\Longrightarrow$ $\langle x \rangle$ es un subgrupo no trivial $\lightning$

Si $\langle x \rangle = G$ $\Longrightarrow$ $O(x) = \infty$ $\Rightarrow$ $\langle x^2 \rangle \neq G$ porque si lo fuera x pertenecería a $\langle x^2 \rangle$ y entonces $x = x^{2i}$ por lo cual $O(x) \leq 2i - 1$ $\lightning$

Por lo tanto, si G es infinito, G tiene al menos un subgrupo no trivial. $\lightning$

Veamos que G debe ser cíclico:

Si consideramos $e_G \neq x \in G$ entonces $\{e\} \subset \langle x \rangle \leq G$

Por (H) $\Rightarrow$ $G = \langle x \rangle$

Como los únicos subgrupos de G son $\{e\}$ y G se tiene que los únicos divisores de $|G|$ son 1 y $|G|$, por lo que $|G|$ es primo.

Ejercicio 6 Menu

[Büten Zar]
B.Sz

Sea G un grupo y H un subgrupo de G / $H \cap K \neq \{e\}$ para todo subgrupo K de G / $K \neq \{e\}$

En este caso se dice que H es un subgrupo esencial de G.

① Probar que todo elemento de G de orden primo $\in H$.

$K = \langle g \rangle$ es subgrupo de G $\Rightarrow K \cap H \neq \{e\} \Rightarrow |H \cap K| \geq 2$

$K \cap H$ es subgrupo de H

$K \cap H$ es subgrupo de K

por teo Lagrange $|K \cap H| \,\big|\, |K| \Rightarrow |K \cap H| = |K|$ ($o(g)$ es primo), $K \cap H \leq K$ $\Rightarrow K \cap H = K$

$K = K \cap H \leq H \Rightarrow$ Todo elemento de K es elemento de H.

LQQD.

② Dar un ejemplo de un grupo abeliano G con un subgrupo esencial $H \neq G$

$(\mathbb{Z}_4, +)$ es abeliano

x	$o(x)$
$\bar{0}$	1
$\bar{1}$	4
$\bar{2}$	2
$\bar{3}$	4

$H = \{0 \pmod 4,\ 2 \pmod 4\}$

$H < \mathbb{Z}_4$

Ejercicio 7: Verificar si las siguientes funciones son o no morfismos de grupo.

Menu

① La función traza $tr: (M_{2x2}(\mathbb{R}), +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$

Condición 1: $(M_{2x2}(\mathbb{R}), +)$ es grupo ok

$(\mathbb{R}, +)$ es grupo ok

Condición 2:

$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ se cumple por propiedad de traza.

$\boxed{\text{Es morfismo}}$

② La función $f: (M_{2x2}(\mathbb{R}), +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +) \;/\; f(A) = tr(A^2)$

Condición 1: $(M_{2x2}(\mathbb{R}), +)$ es grupo ok

$(\mathbb{R}, +)$ es grupo ok

Condición 2: $f(A+B) = f(A) + f(B)$

$$f(A+B) = tr((A+B)^2) = tr(A^2) + tr(A.B) + tr(B.A) + tr(B^2) = f(A) + tr(A.B) + tr(B.A) + f(B)$$

$$f(A+B) \neq f(A) + f(B)$$

$\boxed{\text{No es morfismo}}$

③ La función determinante $det: (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$

Condición 1: $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ es grupo

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ es grupo

Condición 2: $det(A.B) = det(A) . det(B)$

Se cumple propiedad de determinante.

$\boxed{\text{Es morfismo}}$

(4) La función $f : (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot) \;/\; f(A) = \det(A^2)$

Condición 1: $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ es grupo

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ es grupo

Condición 2: $f(A.B) = f(A).f(B)$

$$f(A.B) = \det((A.B)^2) = \det((A.B).(A.B)) = \det(A.B).\det(A.B) = \det(A).\det(B).\det(A).\det(B)$$

$$= \det(A.A).\det(B.B) = f(A).f(B)$$

$\boxed{\text{Es morfismo}}$

(5) La función $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \longrightarrow (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \;/\; f(\lambda) = \lambda.A$ donde $A \in GL_n(\mathbb{R})$ es una matriz dada

Condición 1: $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ es grupo.

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ es grupo

Condición 2: $f(\lambda.\beta) = f(\lambda).f(\beta)$

$f(\lambda.\beta) = \lambda.\beta.A$

$f(\lambda).f(\beta) = \lambda.A.\beta.A = \lambda.\beta.A^2$

Se cumple solo cuando $A = A^2$

$\boxed{\text{Solo es morfismo cuando } A = A^2}$

6) La función trasponer $T : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \rightarrow (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \;/\; T(A) = A^t$

Condición 1: $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +)$ es grupo

Condición 2: $T(A+B) = T(A) + T(B)$

por propiedad de traspuesta se cumple

$\boxed{\text{Es morfismo}}$

7) La función trasponer $T : (Gl_n(\mathbb{R}), \cdot) \rightarrow (Gl_n(\mathbb{R}), \cdot) \;/\; T(A) = A^t$

Condición 1: $(Gl_n(\mathbb{R}), \cdot)$ es grupo

Condición 2: $T(A.B) = T(A).T(B)$

$$T(A.B) = (A.B)^t = B^t . A^t = T(B).T(A)$$

$$T(A).T(B) \neq T(B).T(A) \implies \boxed{\text{No es morfismo}}$$

8) La función $f : (\mathbb{R}^3, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot) \;/\; f(x,y,z) = e^{x-2y+z}$

Condición 1: $(\mathbb{R}^3, +)$ es grupo

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ es grupo

Condición 2: $f((x,y,z)+(x',y',z')) = f((x,y,z)) . f((x',y',z'))$

$$f((x,y,z)+(x',y',z')) = f((x+x', y+y', z+z')) = e^{x+x'-2y-2y'+z+z'}$$

$$= e^{x-2y+z} . e^{x'-2y'+z'} = f((x,y,z)) . f((x',y',z'))$$

$\boxed{\text{Es morfismo}}$

[Büten Zar]
B.Sz

Ejercicio 8

Menu

Sea $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos finitos.

① Sea $g \in G_1$, probar que $\theta(\varphi(g)) \mid MCD(|G_1|, |Im(\varphi)|)$

Lagrange $\theta(g) \mid |G_1|$

$\theta(\varphi(g)) \mid \theta(g)$

$$\boxed{\theta(\varphi(g)) \mid |G_1|}$$

$$\boxed{\theta(\varphi(g)) = |\langle \varphi(g) \rangle| \mid |Im(\varphi)|}$$

$Im(\varphi) \leqslant G_2$

$\langle \varphi(g) \rangle \leqslant Im(\varphi)$

Entonces $\theta(\varphi(g))$ es divisor común de $|G_1|$ y $|Im(\varphi)|$

$$\theta(\varphi(g)) \mid MCD(|G_1|, |Im(\varphi)|)$$

② Probar que si $MCD(|G_1|, |G_2|) = 1 \Longrightarrow \varphi$ es trivial $\left(\forall g \in G_1 \quad \varphi(g) = e_{G_2} \right)$

$Ker(\varphi) = G_1$

(3) $\varphi : G_1 \to G_2$ es isomorfismo de grupos. $g \in G_1$.

Probar que $\theta_{G_1}(g) = \theta_{G_2}(\varphi(g))$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ es isomorfismo} \longrightarrow \varphi \text{ es homomorfismo} \\ \theta_{G_1}(g) \text{ es finito} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\theta_{G_2}(\varphi(g)) \mid \theta_{G_1}(g)}$$

Por proposición $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ también es isomorfismo $\Longrightarrow \theta_{G_1}(\varphi^{-1}(\varphi(g))) \mid \theta(\varphi(g))$

Por definición de transformación inversa $\varphi^{-1}(\varphi(g)) = g$

$$\Longrightarrow \boxed{\theta_{G_1}(g) \mid \theta_{G_2}(\varphi(g))}$$

$$\Longrightarrow \theta_{G_1}(g) = \theta_{G_2}(\varphi(g)) \qquad \text{LQQD}$$

(4) Probar que $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos

$$\mathbb{Z}_4 = \{0 \ (\text{mod } 4),\ 1 \ (\text{mod } 4),\ 2 \ (\text{mod } 4),\ 3 \ (\text{mod } 4)\} \Longrightarrow |\mathbb{Z}_4| = 4$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0 \text{ mod } 2, 0 \text{ mod } 2),\ (0 \text{ mod } 2, 1 \text{ mod } 2),\ (1 \text{ mod } 2, 0 \text{ mod } 2),\ (1 \text{ mod } 2, 1 \text{ mod } 2)\}$$

$$\Longrightarrow |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2| = 4$$

$\mathbb{Z}_4$

g	$\theta(g)$
$\bar{0}$	1
$\bar{1}$	4
$\bar{2}$	2
$\bar{3}$	4

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

n	$\theta(n)$
$(\bar{0}, \bar{0})$	1
$(\bar{0}, \bar{1})$	2
$(\bar{1}, \bar{0})$	2
$(\bar{1}, \bar{1})$	2

$\mathbb{Z}_4$ es cíclico.

Si $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ fueran isomorfos entonces $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tendría que ser cíclico.

$\Longrightarrow \mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos.

Ejercicio 9

En cada caso verificar si los siguientes grupos son isomorfos o no; en caso que lo sean, encontrar un isomorfismo entre ellos.

i) Los grupos $(\mathbb{Z}_4, +)$ y $(U_{10}, \cdot)$

$\mathbb{Z}_4 = \{ 0 \ (\text{mod } 4),\ 1 \ (\text{mod } 4),\ 2 \ (\text{mod } 4),\ 3 \ (\text{mod } 4) \}$

$U_{10} = \{ \bar{m} \ / \ (m, 10) = 1 \} = \{ 1 \ (\text{mod } 10),\ 3 \ (\text{mod } 10),\ 7 \ (\text{mod } 10),\ 9 \ (\text{mod } 10) \}$

Como los grupos son finitos $\Rightarrow$ Si fueran isomorfos, $|\mathbb{Z}_4| = |U_{10}| = 4$ ok ✓

$\exists\ \varphi$ biyectiva $\Leftrightarrow$ φ inyectiva $\Leftrightarrow$ φ sobreyectiva

Entonces φ isomorfismo $\Leftrightarrow$ φ es morfismo inyectivo

$\varphi : \mathbb{Z}_4 \to U_{10}$

$\mathbb{Z}_4$

x	$O(x)$
$\bar{0}$	1
$\bar{1}$	4
$\bar{2}$	2
$\bar{3}$	4

U_{10}

$f(x)$	$O(f(x))$
$\bar{1}$	1
$\bar{3}$	4
$\bar{7}$	4
$\bar{9}$	2

$3^2 \equiv \bar{9} \neq \bar{1}$ ‖ $7^2 \equiv \bar{9} \neq 1$ ‖ $9^2 \equiv \bar{1}$

$3^3 \equiv \bar{7} \neq \bar{1}$ ‖ $7^3 \equiv \bar{3} \neq 1$

$3^4 \equiv \bar{1}$ ‖ $7^4 \equiv \bar{1}$

$\varphi_1 :$ $\mathbb{Z}_4 \to U_{10}$

$0 \to 1$

$1 \to 3$

$2 \to 9$

$3 \to 7$

Cayley $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Cayley U_{10}

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

Hay que chequear que se cumple $\varphi_1(x+y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}_4$

Ej $\varphi_1(\bar{2} + \bar{1}) = \varphi_1(\bar{2}) \cdot \varphi_1(\bar{1})$

$\underbrace{\varphi_1(\bar{3})}_{\bar{7}} = \underbrace{\bar{9} \cdot \bar{3}}_{\bar{7}}$

φ_1 es morfismo, φ_1 es biyectiva

$\Rightarrow \mathbb{Z}_4$ y U_{10} son isomorfos.

ii) Los grupos $(D_3, \circ)$ y $(S_3, \circ)$

$$|D_3| = 6 \qquad |S_3| = 6$$

$D_3 = \{id, rot_1, rot_2, sim_1, sim_2, sim_3\}$

S_3:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix} = Id \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} = P_1 \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix} = P_2$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix} = P_3 \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} = P_5 \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} = P_4$$

D_3

x	$\theta(x)$
ID	1
rot_1	3
rot_2	3
sim_1	2
sim_2	2
sim_3	2

S_3

$S(x)$	$\theta(S(x))$
ID	1
P_1	3
P_2	3
P_3	2
P_4	2
P_5	2

$\varphi_1 : D_3 \longrightarrow S_3$

$$\begin{aligned} ID &\longrightarrow ID \\ rot_1 &\longrightarrow P_1 \\ rot_2 &\longrightarrow P_2 \\ sim_1 &\longrightarrow P_3 \\ sim_2 &\longrightarrow P_4 \\ sim_3 &\longrightarrow P_5 \end{aligned}$$

Cayley D_3

$\circ$	ID	rot_1	rot_2	sim_1	sim_2	sim_3
ID	ID	rot_1	rot_2	sim_1	sim_2	sim_3
rot_1	rot_1	rot_2	ID	sim_3	sim_1	sim_2
rot_2	rot_2	ID	rot_1	sim_2	sim_3	sim_1
sim_1	sim_1	sim_2	sim_3	ID	rot_1	rot_2
sim_2	sim_2	sim_3	sim_1	rot_2	ID	rot_1
sim_3	sim_3	sim_1	sim_2	rot_1	rot_2	ID

GATOTSU

$sim_2 = rot_2 \circ sim_1$

$rot_1 = sim_1 \circ sim_2$

$rot_1 \circ sim_2 = sim_1$

$rot_1 \circ sim_3 = sim_2$

$rot_1 = sim_2 \circ sim_3$

$sim_3 = rot_2 \circ sim_2$

$sim_2 \circ rot_2 = sim_1 \circ rot_1 \circ rot_2$

$sim_2 \circ rot_2 = sim_1$

$sim_2 \circ rot_1 = sim_1 \circ rot_1 \circ rot_1$

$sim_2 \circ rot_1 = sim_1 \circ rot_2 = sim_3$

Cayley S_3

$\circ$	ID	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
ID	ID	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_2	ID	P_5	P_3	P_4
P_2	P_2	ID	P_1	P_4	P_5	P_3
P_3	P_3	P_4	P_5	ID	P_1	P_2
P_4	P_4	P_5	P_3	P_2	ID	P_1
P_5	P_5	P_3	P_4	P_1	P_2	ID

$P_1 \circ P_1$

$\begin{pmatrix} B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix}$

$P_1 \circ P_1 \circ P_1 = ID$

C A B
A B C

$P_1 \circ P_3$

$\begin{pmatrix} B & A & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$

$P_3 \circ P_1$

B C A
A C B

hay que chequear que se cumple $\varphi_1(x \circ y) = \varphi_1(x) \circ \varphi_1(y) \quad \forall x, y \in D_3$

Ejemplo

$$\varphi_1(sim_1 \circ rot_1) = \varphi_1(sim_1) \circ \varphi_1(rot_1)$$

$$\underbrace{\varphi_1(sim_2)}_{P_4} = \underbrace{P_3 \circ P_1}_{P_4}$$

φ_1 es morfismo, φ_1 es biyectiva

$\Rightarrow D_3$ y S_3 son isomorfos

Ejercicio 10

Menu

Sea G un grupo con 4 elementos

i) Probar que G es abeliano.

Como G es un grupo $\Rightarrow \exists\, e_G$ y $e_G^{-1} = e_G$

Sean a, b, c los otros elementos de G, como G es un grupo entonces $\exists\, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} \in G$.

hay dos opciones:

① $a = a^{-1}$, $b = b^{-1}$, $c = c^{-1}$ ó ② $a = c^{-1}$, $b = b^{-1}$, $c = a^{-1}$ (porque el inverso es único)

Tabla cayley

caso 1:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

caso 2:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

El grupo es abeliano pues las tablas son simétricas

ii) Probar que o bien $G \simeq \mathbb{Z}_4$ o bien $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Tabla cayley $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

es el caso 2!!

Tabla cayley $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$+$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$
$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$

caso 1

PRÁCTICO 7: Teoría de Grupos - Teorema de Lagrange, órdenes, homomorfismos.

Teorema de Lagrange: *Si G es un grupo finito y H subgrupo de G entonces $|H|$ divide a $|G|$.*

Ejercicio 1. Dados dos grupos $(G, \times, e_G)$ y $(K, *, e_K)$ se define la siguiente operación en el *producto directo* $G \times K$: $(g, k)(g', k') = (g \times g', k * k')$ $\forall g, g' \in G$ y $k, k' \in K$ (operaciones coordenada a coordenada). Probar que $G \times K$ con esta operación es un grupo.

Ejercicio 2.

i) Sean G el grupo multiplicativo de las matrices invertibles 2×2, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Probar que A tiene orden $o(A) = 4$, B orden $o(B) = 3$ y que AB tiene orden infinito.

ii) Hallar elementos $a, b \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ de orden infinito tales que $a+b$ tiene orden finito (suma coordenada a coordenada).

Ejercicio 3. Sean H y K subgrupos de un grupo G y e la unidad de G.

i) Probar que si $|H|$ y $|K|$ son coprimos entonces $H \cap K = \{e\}$.

ii) Hallar los posibles valores de $|H|$ si $K \subseteq H \subseteq G$, $|G| = 660$ y $|K| = 66$.

Ejercicio 4. Sea $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ una función biyectiva, probar que la función:

$$f^{-1} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n!-1 \text{ veces}}.$$

Ejercicio 5. Sea G un grupo. Probar las siguientes afirmaciones.

i) Si G es cíclico todo subgrupo de G también es cíclico.

ii) Si G no tiene subgrupos no triviales entonces G es cíclico, finito y $|G|$ es primo.

Ejercicio 6. Sea G un grupo y H un subgrupo de G tal que $H \cap K \neq \{e\}$ para todo subgrupo K de G tal que $K \neq \{e\}$. En este caso se dice que H es un subgrupo *esencial* de G.

1. Probar que todo elemento de G de orden primo pertenece a H.

2. Dar un ejemplo de un grupo abeliano G con un subgrupo esencial $H \neq G$.

Ejercicio 7. Verificar si las siguientes funciones son o no morfismos de grupo.

i) La función traza $tr : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (\mathbb{R}, +)$

ii) La función $f : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (\mathbb{R}, +)$ dada por $f(A) = tr(A^2)$.

iii) La función determinante $det : (Gl_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ (recordar que $Gl_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices invertibles $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$).

iv) La función $f : (Gl_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ dada por $f(A) = det(A^2)$.

v) La función $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (Gl_n(\mathbb{R}), \cdot)$ dada por $f(\lambda) = \lambda A$ donde $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ es una matriz dada (en caso de no serlo siempre, hallar condiciones sobre A para que si lo sea).

vi) La función trasponer $T : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +)$ dada por $T(A) = A^t$.

vii) La función trasponer $T : (Gl_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (Gl_n(\mathbb{R}), \cdot)$ dada por $T(A) = A^t$.

viii) La función $f : (\mathbb{R}^3, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ dada por $f(x, y, z) = e^{x-2y+z}$ (sug. pensarlo como composición de dos morfismos).

Ejercicio 8. Sea $\varphi : G_1 \to G_2$ un homorfismo de grupos finitos.

1. Sea $g \in G_1$, probar que $o(\varphi(g))$ divide a $\text{mcd}(|G_1|, |\text{Im}(\varphi)|)$.
2. Probar que si $|G_1|$ y $|G_2|$ son coprimos, entonces φ es trivial.
3. Si φ es un isomorfismo de grupos y $g \in G_1$. Probar que el orden de g en G_1 es igual al orden de $\varphi(g)$ en G_2.
4. Probar que $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos.

Ejercicio 9. En cada caso verificar si los siguientes grupos son isomorfos o no; en caso que lo sean, encontrar un isomorfismo entre ellos.

i) Los grupos $(\mathbb{Z}_4, +)$ y $(U_{10}, \cdot)$.

ii) Los grupos D_3 y S_3 (ambos con la composición).

Ejercicio 10. Sea G un grupo con 4 elementos.

i) Probar que G es abeliano.

ii) Probar que o bien $G \simeq \mathbb{Z}_4$ o bien $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 11. En cada parte, ver si existe un morfismo no trivial (es decir, que no mande todos los elementos al neutro) entre los siguientes pares de grupos. En caso de que existan construir dicho morfismo, y si no existe explicar porque.

i) S_6 con la composición y $\mathbb{Z}_3$ con la suma.

ii) $\mathbb{Z}_7$ con la suma y S_6 con la composición.