Matemática Discreta 2

Soluciones Segundo examen curso 2003 **23 / 12 / 2003**

1) a) Un comerciante compró 22 camisas en x293y pesos siendo x, y dígitos (x es el dígito de las decenas de mil e y es el dígito de las unidades). Se sabe que cada camisa cuesta más de $ 2500. ¿Cuál es el precio de cada camisa ?

Sol.: 22 = 2*11. Entonces x293y debe ser divisible por 11 y por 2. y debe ser par. (x+9+y)-(2+3) debe ser múltiplo de 11. O sea x+y+4 debe ser múltiplo de 11. Por otro lado 22 camisas cuestan más de 22*2500 = 55000, así que x > 5. x puede ser 6, 7, 8 o 9.
Si x=6, y+10 debe ser múltiplo de 11. Como y < 9 y par, no se cumple.
Si x=7, y+11 debe ser múltiplo de 11. Con y=0 se cumple.
Si x=8, y+12 debe ser múltiplo de 11. No se cumple pues y < 9
Si x=9, y+13 debe ser múltiplo de 11. No se cumple pues y < 9
Entonces las 22 camisas costaron $72930 y cada una $ 3315

b) Una compañía compró cierto número de reliquias falsas a $ 17 cada una y vendió algunas de ellas a $ 49 cada una. Si la cantidad comprada originalmente es mayor que 50 pero menor que 100 y la compañía obtuvo una ganancia de $ 245, ¿cuántas reliquias faltan por vender?

Sol.: Llamemos x a las reliquias compradas, y a las reliquias vendidas.
Se tiene : 49y – 17x = 245.
Mcd(49,17)= 1 pues 17 es primo y no divide a 49. Por tanto hay soluciones enteras.
49 = 17*2 +15
17 = 15 +2
15 = 2*7 + 1
Entonces: 1 = 15 – 2*7 = 15 – (17 – 15)*7 = 8*15 – 7*17 =
8*(49 – 17*2)-7*17= 8*49 – 23*17. 1 = 8*49 – 23*17
Entonces: 245 = 1960*49 – 5635*17
y = 1960 - 17k , x = 5635 - 49k
x > 50 implica 5635 - 49k > 50 O sea k < 113.97
x < 100 implica 5635 - 49k < 100 O sea k > 112.95
Por lo tanto k = 113 , x = 98 , y = 39. Faltan vender 59 reliquias.

c) Si p y q son primos distintos tales que : $a^p \equiv a \ (q)$ y $a^q \equiv a \ (p)$ entonces $a^{pq} \equiv a \ (pq)$

Sol.: Tenemos que si r es primo : $a^r \equiv a \ (r)$
Entonces $(a^p)^q \equiv a^p(q)$ pero $a^p \equiv a(q)$ con lo que $a^{pq} \equiv a \ (q)$
Análogamente $a^{pq} \equiv a \ (p)$. Entonces $a^{pq} - a$ es múltiplo de q y es múltiplo de p. Como p y q son primos distintos entonces $a^{pq} - a$ es múltiplo de pq. Por lo tanto : $a^{pq} \equiv a \ (pq)$

Nota: Para a) y b) se pide desarrollar un método de resolución. No se dará puntaje a resoluciones del tipo probar todos los casos posibles.

2) a) Sea G un grupo abeliano tal que |G| = 2k con k impar. Pruebe que G tiene un único elemento de orden 2

Sol.: Por Cauchy , existe a en G tal que o(a) = 2. Si existiera otro b en G con o(b) = 2, entonces consideramos H = {e, a, b, ab }
Los 4 elementos son distintos ya que el inverso de a es a y el de b es b.
Probemos que el producto es cerrado en H :
a.a = e, a.ab = b , b.b=e, b.ab = a.b.b = a.e = a , (ab)(ab) = (a.a)(b.b) = e
Los productos en el otro orden son iguales porque G es abeliano.

Como G es finito se tiene que H es subgrupo de G. Pero |H| = 4 que no divide a |G| = 2k porque k es impar.

b) Si G = S_3 , ¿cuántos elementos de orden 2 tiene? ¿Contradice esto la parte a) ? Justifique.

Sol.: S_3 = { e, (1 2 3) , (1 3 2), (1 2), (1 3), (2 3) } tiene 3 elementos de orden 2 que son las 3 trasposiciones. Esto no contradice a) pues S_3 no es abeliano

3) Se considera la permutación p de S_{12} :

p = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 5 & 12 & 3 & 8 & 7 & 4 & 1 & 11 & 9 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

a) Descomponer p en ciclos disjuntos

Sol.: p = (1 2 5 8) (3 12 6 7 4) (9 11 10)

b) Hallar el orden de p

Sol.: o(p) = mcm(4, 5, 3) = 60

c) Calcular p^{107}

Sol.:

$$p^{107} = (1\,2\,5\,8)^{107}(3\ 12\ 6\ 7\ 4)^{107}(9\ 11\ 10)^{107} = (1\ 2\ 5\ 8)^3(3\ 12\ 6\ 7\ 4)^2(9\ 11\ 10)^2$$

$$p^{107} = (1\ 8\ 5\ 2)(3\ 6\ 4\ 12\ 7)(9\ 10\ 11)$$

d) ¿Es p una permutación par o impar? Justificar la respuesta.

Sol.: p es impar pues es el producto de un 4 ciclo (impar) por un 5 ciclo (par) por un 3 ciclo (par)

4) Se considera el anillo A = $(Z_{36}\ , +\ ,\ .)$.

Sea H = $\{a \in A / \exists n \text{ entero positivo} / a^n = 0\}$

a) Hallar todos los elementos de H ¿Cuántos son ?

Sol.: a^n = 0 en Z_{36} si a^n es múltiplo de 36 = $2^2 3^2$ para algún n. Para que pase esto a debe ser par y múltiplo de 3, o sea múltiplo de 6. De hecho si esto pasa $a^2 = 0$ en Z_{36} . Por lo tanto H = { 0 , 6 , 12 , 18 , 24 , 30 } y |H| = 6

b) Probar que H es un ideal de A

Sol.: La suma en H es cerrada ya que si sumo múltiplos de 6 y resto (eventualmente) 36 el resultado es múltiplo de 6 y por tanto está en H.

Sea a un elemento de A y h un elemento de H. Como h es múltiplo de 6 se tiene que ah es múltiplo de 6 y (eventualmente) restando un múltiplo de 36 sigue quedando múltiplo de 6. Por tanto ah está en H. Lo mismo con ha pues ha = ah

c) Listar el anillo cociente A / H . ¿ Cuántos elementos tiene?

Sol.: [0] = H , [1] = {1, 7, 13, 19, 25, 31} , [2] = { 2, 8, 14, 20, 26, 32 } ,
[3] = { 3, 9, 15, 21, 27, 33 } , [4] = { 4, 10, 16, 22, 28, 34} ,
[5] = { 5, 11, 17, 23, 29, 35 } | A / H | = 6

d) Hallar las tablas de la suma y del producto en A / H

Sol.:

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]

*	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]

[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[0]	[2]	[4]	[0]	[2]	[4]
[3]	[0]	[3]	[0]	[3]	[0]	[3]
[4]	[0]	[4]	[2]	[0]	[4]	[2]
[5]	[0]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

e) Hallar un divisor de cero de A / H y probar que lo es.

Sol.: [2] es divisor de 0 ya que [2].[3] = [0]

5) Verificar mediante el uso del Algebra de Boole las igualdades:

a) $x\,\overline{y}(x+y)+x\,\overline{y}+\overline{x}+y=1$

Sol.: $x\,\overline{y}(x+y)=x\,\overline{y}x+x\,\overline{y}y=x\,\overline{y}$. Por idempotencia quedaría :
$x\,\overline{y}+\overline{x}+y$. Si y = 1 queda 1 = 1 y se cumple. Si y = 0 queda
$x+\overline{x}$ que vale 1

b) $(x+y)zw+\overline{z}\,w+\overline{z}\,wt=(x+y+\overline{z})w$

Sol.: Si w=0 se cumple. Analizamos w = 1. Además $\overline{z}\,\mathrm{w}+\overline{z}wt=\overline{z}w$
Habría que probar: $(x+y)z+\overline{z}=x+y+\overline{z}$
Si z = 0 se cumple. Si z = 1 también pues queda x + y = x+ y

Justificar los pasos y/o argumentos que se usen.

Puntajes : 1) 31 : a) 10 b) 10 c) 11
2) 16 : a) 11 b) 5
3) 16 : a) 4 b) 4 c) 5 d) 3
4) 27 : a) 6 b) 6 c) 6 d) 6 e) 3
5) 10 : a) 5 b) 5