Universidad de la República — **Matemática Discreta 2**
Facultad de Ingeniería — **Curso 2018**
Instituto de Matemática y Estadística

PRÁCTICO 1: Sistemas de numeración, divisibilidad, mcd y mcm.

Ejercicio 1. *Sistemas de numeración.*

a. Escribir en las bases 2, 4, 8 y 16 los números decimales 137, 6243 y 12354.
Escribir en la base 28 el número decimal 16912.

b. Escribir en las bases 2 y 10 los números hexadecimales $A7$, $4C2$, $1C2B$ y $A2DFE$.

c. Escribir en las bases 10 y 16 los números binarios 11001110, 00110001, 11110000 y 01010111.

d. Pasar los siguientes números dados en las bases indicadas a los números decimales correspondientes: $BACK_{(21)}$ y $OJO_{(25)}$.

Ejercicio 2.
En este ejercicio vamos a utilizar la siguiente numeración de los **28** símbolos:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	␣
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

El objetivo de este ejercicio es asociar una secuencia de números enteros a una secuencia de palabras (por ejemplo una frase) de la siguiente manera. Primero separamos el texto en bloques de a tres caracteres (incluyendo el espacio en blanco); por ejemplo si el texto es "MUY BIEN" nos quedan tres bloques: $\boxed{\texttt{M}|\texttt{U}|\texttt{Y}}$ $\boxed{\sqcup|\texttt{B}|\texttt{I}}$ $\boxed{\texttt{E}|\texttt{N}|\sqcup}$. A cada bloque de tres letras le hacemos corresponder un entero entre 0 y $28^3 - 1$ con el siguente criterio. Si tenemos un bloque de letras $\boxed{\texttt{X}|\texttt{Y}|\texttt{Z}}$, le asociamos el bloque de enteros según la tabla de arriba $\boxed{x|y|z}$, y a este bloque le asociamos el entero $x28^2 + y28^1 + z(28)^0$. Por ejemplo, al bloque $\boxed{\texttt{M}|\texttt{U}|\texttt{Y}}$, letra a letra le corresponde el bloque $\boxed{12|21|25}$ al cual le hacemos corresponder el entero $12(28)^2 + 21(28)^1 + 25(28)^0$.

Asocie la secuencia de enteros que se obtienen de la frase: "Me encanta el carnaval".
Halle la frase correspondiente a la secuencia de enteros: 768, 7048, 337, 6397.

Ejercicio 3. En un libro de mil hojas numeradas del 1 al 1000 se arrancan todas las hojas cuyo número contenga algún dígito impar (p. ej. se eliminan las páginas $7, 12, 93, 100$ pero no la 248).

a. ¿Qué página ocupará la posición 100 luego de que le fueran arrancadas dichas hojas?

b. ¿Qué posición ocupará la página que aparece con el número 888?

Ejercicio 4. El *Juego del Polinomio* consiste en que alguien piensa un polinomio de coeficientes enteros no negativos y de grado cualquiera, y nosotros tenemos que adivinar de qué polinomio se trata. Para averiguar el polinomio se nos permite preguntar a la otra persona cuánto vale su polinomio evaluado en los valores que nos parezcan oportunos. El objetivo del juego es adivinar el polinomio en la menor cantidad de evaluaciones.

Probar que siempre es posible averiguar el polinomio incógnita con dos evaluaciones.

[Sugerencia: elegir el segundo punto de evaluación luego de conocer el resultado del primero.]

Ejercicio 5. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de

a. la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18,

b. la división de $a^2 + 7$ por 36,

c. la división de $4a + 1$ por 9,

d. la división de $7a^2 + 12$ por 28.

Ejercicio 6. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Probar o refutar dando un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

a. Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.

b. Si $a|b$ entonces $ac|bc$.

c. Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$.

d. Si $ac|bc$ entonces $a|b$.

e. Si $a|bc$ entonces $a|b$ o $a|c$.

f. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

g. Si $4|a^2$ entonces $2|a$.

h. Si $9|b+c$ entonces $9|b$ o $9|c$.

i. Si $a + c|b + c$ entonces $a|b$.

Ejercicio 7.

a. Demostrar que el producto de tres naturales consecutivos es múltiplo de 6.

b. Probar que $n(2n + 1)(7n + 1)$ es divisible entre 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 8. Un número natural se dice *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores positivos propios. Por ejemplo, 6 es perfecto pues $6 = 1 + 2 + 3$.

a. Verificar que 28 y 496 son perfectos.

b. Probar que si $2^m - 1$ es primo entonces $2^{m-1}(2^m - 1)$ es perfecto.

Ejercicio 9. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

a. $99|10^{2n} + 197$

b. $9|7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$

c. $56|13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$

d. $256|7^{2n} + 208n - 1$

Ejercicio 10. Sea $n \in \mathbb{N}$ cuya representación en base 10 es $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$. Demostrar que:

a. $2|n$ si y sólo si $2|a_0$.

b. $4|n$ si y sólo si $4|a_1 a_0$.

c. $8|n$ si y sólo si $8|a_2 a_1 a_0$.

d. Establecer el resultado general sugerido por los casos anteriores.

e. Investigar si 32 divide a 1.273.460.

Ejercicio 11. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. Probar las siguentes afirmaciones

a. $\operatorname{mcd}(ca, cb) = c \operatorname{mcd}(a, b)$.

b. Si $c|a$ y $c|b$ entonces

$$\operatorname{mcd}(a/c, b/c) = \operatorname{mcd}(a, b)/c.$$

c. $\operatorname{mcd}(b, a + bc) = \operatorname{mcd}(a, b)$.

d. Si a es par y b impar entonces

$$\operatorname{mcd}(a, b) = \operatorname{mcd}(a/2, b).$$

e. $\operatorname{mcd}(a, b) = \operatorname{mcd}(a - b, b)$

f. Si a, b son primos entre sí entonces

$$\operatorname{mcd}(a - b, a + b) = 1 \text{ o } 2.$$

Ejercicio 12. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que a y b son primos entre sí. Probar o dar contraejemplos que

a. Si $a|(bc)$ entonces $a|c$.

b. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

c. ¿Valen las partes anteriores si $\text{mcd}(a, b) \neq 1$?

Ejercicio 13. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a. Se define la *sucesión de Fibonacci* como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Demostrar que dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci son coprimos.

b. Demostrar que $\text{mcd}(7k + 3, 12k + 5) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

c. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tales que $(ad - bc)|a$ y $(ad - bc)|c$. Probar que $\text{mcd}(an + b, cn + d) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 14. En cada caso, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ que verifiquen las condiciones dadas.

a. $a + b = 122$ y $\text{mcd}(a, b) + \text{mcm}(a, b) = 1802$.

b. $ab = 22275$ y $\text{mcd}(a, b) = 15$.

c. $a + b = 1271$ y $\text{mcm}(a, b) = 330 \cdot \text{mcd}(a, b)$.

d. $ab = 1008$ y $\text{mcm}(a, b) = 168$.

Ejercicio 15. Hallar $\text{mcd}(a, b)$ sabiendo que $\text{mcd}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b) = 48$ y $a^2 = b^2 + 28$.

Ejercicio 16. Probar que si de los números del 1 al 200 se eligen 101 números cualesquiera, entonces hay al menos entre los elegidos dos números a y b tales que a divide a b.