

# Matemática Discreta 2

Primer examen curso 2003

2 / 8 / 2003

Nº Examen =

Apellidos

Nombre

C.I.

- 1) a) Probar que si  $n$  es primo con 6 entonces  $n^2 \equiv 1 \pmod{24}$   
b) Hallar  $a$  y  $b$  sabiendo que :  $\text{mcd}(a,b)=18$ ,  $a$  tiene 21 divisores y  $b$  tiene 10  
c) Un bibliotecario cuenta los libros de un armario. Si los agrupa de a 4 o de a 5 o de a 6 siempre sobra 1. Si los agrupa de a 7 no le sobra ninguno. Sabiendo que los libros son menos de 400 ¿cuántos libros tiene ?  
d) Le pedí a Juan que multiplicara el número del día de su nacimiento por 12 y el número del mes de su nacimiento por 31 y los sumara. El me dijo que le dió 170. ¿Qué día es el cumpleaños de Juan?
- 2) Se considera  $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$  que con la suma y producto habituales de matrices y la aritmética de  $\mathbb{Z}_2$  es un anillo (esto no se pide probar).  
a) Hallar todos los elementos de  $M$  que conmutan (con el producto) con  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Mostrar que  $M$  no es anillo conmutativo.  
b) Hallar todas las soluciones de :  $x + y = \mathbf{I}$ ,  $x \cdot y = \mathbf{0}$  con  $x, y \in M$  ( $\mathbf{I}$  es el elemento unidad de  $M$ ,  $\mathbf{0}$  es la matriz nula de  $M$ )  
c) Hallar todas las unidades de  $M$  ( Sug.:  $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  es unidad  $\Leftrightarrow \text{Det}(x) = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$  en  $\mathbb{Z}_2$ . Esto no se pide probar) ¿Cuántas unidades hay ?  
d) Hallar la tabla del grupo formado por las unidades del anillo  $M$  con respecto a la multiplicación. Halle los inversos de cada elemento. ¿Este grupo es abeliano? ¿Es cíclico?  
e) Dado  $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} / a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ , probar que  $H$  es subanillo de  $M$ .  
Muestre que  $xh \in H \quad \forall x \in M$  y  $\forall h \in H$ . Pruebe que sin embargo  $H$  no es ideal de  $M$ .  
f) En  $(M, +)$   $H$  es subgrupo. ¿Cuántos elementos tiene el grupo cociente  $(M, +) / H$ ?. Hallarlos y escribir la tabla de la suma en  $(M, +) / H$
- 3) Sea  $G$  un grupo finito no abeliano y sean  $x, y, z$  elementos cualquiera de  $G$ . Probar que  $o(x \cdot y \cdot z) = o(z \cdot x \cdot y) = o(y \cdot z \cdot x)$  ( $o(g)$  es el orden de  $g$ )
- 4) Se considera la función booleana  $f(x, y, z) = xy(x + \bar{z})(y + z) + \bar{x}\bar{y}(z + \bar{x})$   
Hallar la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de  $f$ .

**Puntajes :** 1) 34 : a) 6    b) 9    c) 9    d) 10  
2) 46 : a) 4    b) 8    c) 6    d) 12    e) 7    f) 9  
3) 12  
4) 8