Matemática Discreta 2

Tercer Examen curso 2004 02 de Marzo de 2005

N° Examen =

Apellidos Nombre C.I.

Nota Importante: Redactar con cuidado. La presentación y justificación de los resultados forman parte de la calificación final.

1) a) Demostrar que 72 es solución de la congruencia de segundo grado:
$x^2 + 273x \equiv 29^{577} \quad (577)$.

b) Demostrar que hay exactamente 2 soluciones de la congruencia anterior que verifican $0 < x < 577$. Una es 72. Hallar la otra.
(*Sug.*: Hacer el cambio de variable $x = y + 72$, factorizar y usar que 577 es primo).

2) Resolver el sistema de ecuaciones con congruencias:
$$\begin{cases} 7x + 2y = 2 \pmod{15} \\ 5x - 4y = 8 \pmod{15} \end{cases}.$$

3) Se considera $\sigma \in S_7$ tal que:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & a & 4 & b & 6 & 7 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & a & 4 & b & 6 & 7 & c \end{pmatrix}$$
.

a) Hallar a, b, c para que $\sigma(2)=1$.
b) Hallar el orden de σ.
c) Calcular σ^{1027}.
d) Hallar la paridad de σ.

4) Sea A un anillo con unidad.
Un elemento $a \in A$ es *idempotente* si $a^2 = a$.
Por ejemplo 0 y 1 son idempotentes y se llaman *idempotentes triviales* de A.
Un idempotente $a \in A$ es *central* si $a \in Z(A)$ donde Z(A) denota al centro del anillo A (aquellos elementos de A que conmutan con todos).
Dos idempotentes a y b son ortogonales si ab=ba=0

a) Probar que si a es idempotente entonces 1-a es idempotente.
Probar que si además a es central entonces 1-a es central.
b) Probar que si a y b son idempotentes ortogonales y centrales entonces a+b es idempotente central.
c) Encontrar dos idempotentes ortogonales (diferentes del neutro y del elemento unidad) en $(Z_{12}, +, .)$ y en $(M_3(R),+, .)$.

5) A cada $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in B^4$ le asociamos el número natural
$$n_x = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2.$$
Se considera la función booleana $f : B^4 \to B$ tal que:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n_x \text{ es primo} \\ 1 & \text{si } n_x \text{ no es primo} \end{cases}.$$

a) Hallar la f.n.d. de f.
b) Hallar la f.n.c. de f.

Puntajes:
1) 20: a) 5 c) 15
2) 18.
3) 20 : a) 8 b) 5 c) 5 d) 2
4) 28 : a)10 b) 8 c) 10
5) 14: a) 7 b) 7