Comentarios

Büten Zar

FB

Letra

Ejercicio 1
Ejercicio 2
Ejercicio 3
Ejercicio 4
Ejercicio 5
Ejercicio 6
Ejercicio 7
Ejercicio 8
Ejercicio 9
Ejercicio 10
Ejercicio 11
Ejercicio 12
Ejercicio 13
Ejercicio 14
Ejercicio 15

Ejercicio 1

Menu

① $\boxed{9000}$

9000	2
4500	2
2250	2
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$$9000 = \underline{2^3 . 3^2 . 5^3}$$

$\#$ divisores : $(3+1)(2+1)(3+1) = 16.3 = \boxed{48}$ divisores positivos.

② $\boxed{15^4 . 42^3 . 56^5}$

$$15^4 = (5.3)^4 = 5^4 . 3^4$$

$$42^3 = (7.2.3)^3 = 7^3 . 2^3 . 3^3 \quad \Rightarrow \quad 5^4 . 3^4 . 7^3 . 2^3 . 3^3 . 7^5 . 2^{15}$$

$$56^5 = (7.2^3)^5 = 7^5 . 2^{15} \qquad \boxed{2^{18} . 3^7 . 5^4 . 7^8}$$

$\#$ divisores : $(18+1)(7+1)(4+1)(8+1) = \boxed{6840}$ divisores positivos

③ $\boxed{10^n . 11^{n+1}}$

$$10^n . 11^{n+1} = 2^n . 5^n . 11^{n+1}$$

$\#$ divisores positivos $(n+1)(n+1)(n+2) = \boxed{(n+1)^2(n+2)}$

divisores positivos

El total de divisores en cada caso es el doble (Se suman los negativos)

Ejercicio 2

Menu

Hallar el menor número natural n / $6552 . n$ sea un cuadrado.

6552	2
3276	2
1638	2
819	3
273	3
91	7
13	13
1	

$$6552 = 2^3 . 3^2 . 7^1 . 13^1$$

para que $6552 . n$ sea un cuadrado, todos los exponentes tienen que ser pares.

$$6552 = 2^3 . 3^2 . 7^1 . 13^1$$

$$6552 . n = 2^4 . 3^2 . 7^2 . 13^2 \Rightarrow n = 2 . 7 . 13 = 182$$

Verificación:

$$\sqrt{6552 . 182} = 1092$$

Ejercicio 3

Menu

① $\boxed{a^2 = 8b^2}$

$0 < \alpha_i$

$8 | N$

$N = a^2 = 8b^2 \Rightarrow$ descomposición factorial de $N = 2^{2+\alpha} \cdot P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n}$

$a^2 = 2^{2+\alpha} \cdot P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n} \Rightarrow$ $2+\alpha$ tiene que ser par $\Rightarrow$ α par

α_i par.

$2^3 b^2 = 2^{2+\alpha} \cdot P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n}$

$b^2 = 2^{\alpha-1} P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n} \Rightarrow$ $\alpha - 1$ tiene que ser par $\Rightarrow$ α tiene que ser impar.

α_i par.

α es par e impar, absurdo $\Rightarrow$ no existen los enteros a y b.

② $\boxed{a^2 = 3b^3}$

$N = a^2 = 3b^3 \Rightarrow$ descomposición factorial de $N = 3^{\alpha} \cdot P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n}$

$a^2 = 3^{\alpha} \cdot P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n} \Rightarrow$ α tiene que ser par

α_i pares.

$3b^3 = 3^{\alpha} P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n} \Rightarrow$ $\alpha - 1$ es $\dot{3}$

$b^3 = 3^{\alpha-1} P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n}$ $\quad$ α_i tienen que ser $\dot{3}$

$$\begin{cases} \alpha_i \text{ pares y } \dot{3} \\ \alpha - 1 \text{ impar y } \dot{3} \Rightarrow \alpha \text{ par y } \dot{3}+1 \end{cases}$$

$$N = 3^{10} = \underbrace{(3^5)}_{a}{}^2 = 3\underbrace{(3^3)}_{b}{}^3$$

[Büten Zar]
B.Sz

③ $\boxed{7a^2 = 11b^2}$

$N = 7a^2 = 11b^2 \Rightarrow$ descomposicion factorial de $N = 7^{\alpha'} \cdot 11^{\beta'} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$

$7a^2 = 7^{\alpha} \cdot 11^{\beta'} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$

$a^2 = 7^{\alpha-1} \cdot 11^{\beta'} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n} \Rightarrow$ $\alpha-1$ es par $\Rightarrow$ α es impar

β es par

α_i es par.

$11b^2 = 7^{\alpha'} \cdot 11^{\beta} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$

$b^2 = 7^{\alpha} \cdot 11^{\beta-1} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n} \Rightarrow$ α es par, α_i par

$\beta-1$ es par $\Rightarrow$ β es impar.

Absurdo. $\Rightarrow$ No existen a y b enteros.

Ejercicio 4

Menu

① Probar que $a-b \mid a^n - b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$n=0 \Rightarrow a-b \mid 0$$

$$n=1 \Rightarrow a-b \mid a-b$$

$$n=2 \Rightarrow a-b \mid a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$n=3 \Rightarrow a-b \mid a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$n=4 \Rightarrow a-b \mid a^4-b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$$n=h \Rightarrow a-b \mid a^h-b^h = (a-b)\left(\sum_{i=0}^{h-1} a^i b^{h-1-i}\right)$$

$$\boxed{\text{Conclusión } \; a-b \mid a^n - b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

② Probar que si n es un número natural par $\Rightarrow a+b \mid a^n - b^n$

$$a+b = a-(-b) \overset{\text{parte ①}}{\Longrightarrow} a-(-b) \mid a^n - (-b)^n \overset{n \text{ par}}{\Longrightarrow} a-(-b) \mid a^n - b^n$$

③ Probar que si n es un número natural impar $\Rightarrow a+b \mid a^n + b^n$

$$a+b = a-(-b) \overset{①}{\Longrightarrow} a-(-b) \mid a^n - (-b)^n = a^n - (-1)^n (b)^n = a^n + b^n$$

$$\Rightarrow a+b \mid a^n + b^n$$

① Sea (P_n) la sucesión de los números primos, $P_1 = 2$, $P_2 = 3$, etc.

Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P_{n+1} \leq p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$.

Demostración

Le llamo "$\mathbb{N}$" a $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

Todo número se puede descomponer en factores primos (Por teo fund Aritmética)

$$P_1 \nmid \mathbb{N}, \ldots P_n \nmid \mathbb{N} \Rightarrow P_{n+1} \text{ podria dividir a } \mathbb{N}$$

$$P_i \mid \mathbb{N} \quad \text{con } i \geq n+1 \quad (|P_i| \leq |\mathbb{N}|)$$

como la sucesión está ordenada:

$$P_{n+1} \leq P_i \leq \mathbb{N} = P_1 \ldots P_n + 1$$

¿Es cierto que $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ es primo $\forall n \in \mathbb{N}$?

No es cierto.

Pues puede existir un P_i menor que n que lo divida

Ejercicio 5

②

148500	2
74250	2
37125	3
12375	3
4125	3
1375	5
275	5
55	5
11	11
1	

$$\boxed{148500 = 2^2 . 3^3 . 5^3 . 11}$$

7114800	
	$400 = 2^2 . 5^2$
71148	2
35574	2
17787	3
5929	7
847	7
121	11
11	11
1	

$$7114800 = 2^2 . 5^2 . 2^2 . 3 \ 7^2 . 11^2$$

$$\boxed{2^4 . 3 . 5^2 . 7^2 . 11^2}$$

7882875	$45 = 3^2 . 5$
175175	$175 = 5^2 . 7$
1001	7
143	11
13	13
1	

$$7882875 = 3^2 . 5 . 5^2 . 7 . 7 . 11 . 13$$

$$\boxed{3^2 . 5^3 . 7^2 . 11 . 13}$$

$$8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 2^3.7.3.2.5.2^2.3.2 = \boxed{2^7.3^2.5.7}$$

$$10! = 10.9.8! = 2.5.3^2.(2^7.3^2.5.7) = \boxed{2^8.3^4.5^2.7}$$

$$15! = 15.14.13.12.11.10! = 3.5.2.7.13.3.2^2.11.2^8.3^4.5^2.7$$

$$\boxed{2^{11}.3^6.5^3.7^2.11.13}$$

③ $m = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha n}$

$m^2 = P_1^{2\alpha_1} P_2^{2\alpha_2} \dots P_n^{2\alpha n}$

$m^3 = P_1^{3\alpha_1} . P_2^{3\alpha_2} \dots P_n^{3\alpha n}$

Ejercicio 6

Menu

$A = \{4n+1 : n = 0, 1, 2 \dots\} = \{1, 5, 9 \dots\}$

① $x = 4n+1 \qquad x \in A \quad x$ es A-compuesto

$\exists \ y_1 = 4k+1 \qquad y \in A \quad y$ es A-primo

$y_1 < x \ / \ y_1 | x \qquad \exists q / \ x = q \cdot y_1 \Longrightarrow x = q(4k+1)$

$x = 4y+1 =$

$(4n+1) = q(4k+1)$

$4n+1 = x = q \cdot y$

$1 + 4n = 4kq + q$

$\Longrightarrow \quad q \in A \qquad \boxed{1 + 4(n - kq) = q}$

Por lo tanto q y y_1 son A-primos.

Si alguno no lo es, se aplica el mismo procedimiento con lo cual se concluye que x es el producto de A-primos

② $\underline{4k+3}$

$k=1 \quad \boxed{7} \qquad 7 \cdot 7 = 49 \qquad 49$ es A-primo

$k=0 \quad \boxed{3} \qquad 3 \cdot 3 = 9 \qquad 9$ es A-primo

$7 \cdot 3 = 21 \qquad 21$ es A-primo

$$49 \cdot 9 = 441 = \underset{3 \times 7}{21} \times \underset{3 \times 7}{21}$$

$\Longrightarrow$ La descomposición no es única.

Ejercicio 7

① Demostrar $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ p, primo.

Supongamos por absurdo que $\sqrt{p}$ es racional.

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \quad \text{con} \quad MCD(a,b) = 1$$

$$b \neq 0$$

$$\Longrightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow p \cdot b^2 = a^2 \Rightarrow p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a.a \Rightarrow \boxed{p \mid a} \ (*)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = p \cdot k}$$

$$p\, b^2 = a^2 \Rightarrow p \cdot b^2 = p^2 k^2 \Rightarrow b^2 = p k^2 \Rightarrow p \mid b^2 \Rightarrow \boxed{p \mid b} \ (**)$$

$$\left.\begin{array}{l} * \ p \mid a \\ ** \ p \mid b \end{array}\right\} p \mid MCD(a,b) \Rightarrow \text{ABsurdo.}$$

② Demostrar que Log_{10}^{2} es irracional

Supongamos por absurdo que Log_{10}^{2} es racional.

$$Log_{10}^{2} = \frac{a}{b} \quad \text{con} \quad MCD(a,b) = 1$$

$$b \neq 0$$

$$10^{\frac{a}{b}} = 2 \Rightarrow 10^{a} = 2^{b} \Rightarrow 2^{a} 5^{a} = 2^{b} \Rightarrow$$ ABs contradice el teorem fundamental de la Aritmetic

③ Demostrar que Log_{10}^{P} es irracional

Supongamos por Absurdo que Log_{10}^{P} es racional.

$$Log_{10}^{P} = \frac{a}{b} \quad \text{con} \quad MCD(a,b) = 1$$

$$b \neq 0$$

$$10^{\frac{a}{b}} = p \Rightarrow 10^{a} = p^{b} \Rightarrow 5^{a} 2^{a} = p^{b} \Rightarrow$$ ABs contradice el teorema fundamental de la Aritmética.

Ejercicio 8

Menu

① Determinar el menor cuadrado perfecto que es divisible entre 7!

$$7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 7.(2.3).5.2^2.3.2$$

$$7! = 7.5.3^2.2^4$$

$$N = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_n^{\alpha_n}$$

$$N^2 = P_1^{2\alpha_1} P_2^{2\alpha_2} \cdots P_n^{2\alpha_n} \Rightarrow P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \cdots P_n^{m_n} \qquad m_i \text{ par}$$

$$N^2 = 7^2.5^2.3^2.2^4$$

$7! \mid 7^2 5^2 3^2 2^4$ el menor cuadrado perfecto que es divisible entre 7! es $7^2.5^2.3^2.2^4$

② Demostrar que $n \in \mathbb{N}$ es un cuadrado perfecto $\Longleftrightarrow$ n tiene un número impar de divisores positivos

$(\Longrightarrow)$

$$M^2 = N = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_n^{\alpha_n} \qquad \alpha_i \text{ son pares}$$

$$\# \text{div } \underbrace{(\alpha_1+1)}_{\text{impar}}\underbrace{(\alpha_2+1)}_{\text{impar}} \cdots \underbrace{(\alpha_n+1)}_{\text{impar}} = d \quad \text{impar.}$$

$(\Longleftarrow)$

$$\# \text{div } (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_n+1) = d \rightarrow \text{impar}$$

$$\Rightarrow (\alpha_i+1) \text{ es impar } \forall i \Rightarrow \alpha_i \text{ es par}$$

$N = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_n^{\alpha_n}$ es cuadrado perfecto.

③

1260	10 = 2.5
126	2
63	3
21	3
7	7

$$1260 = \boxed{2^2 . 3^2 . 5 . 7}$$

$$1260 . n = 2^2 . 3^2 . 5 . 7 . n$$

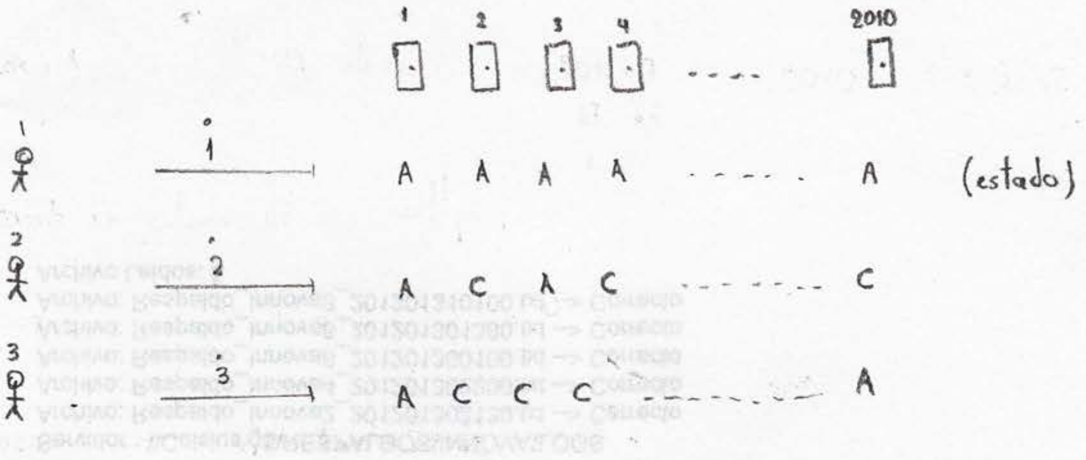
para que 1260.n sea cubo perfecto los exponentes de la descomposición tienen que ser $\dot{3}$ ~~pares~~.

$$\boxed{n = 2 . 3 . 5^2 . 7^2 = 7350}$$

$$\Rightarrow 1260 . 7350 = 2^3 . 3^3 . 5^3 . 7^3$$

$$\sqrt[3]{1260 . n} = 210$$

Ejercicio 9



Cada puerta se asocia con un número

→ Si la cantidad de divisores de ese número es impar ($n = \square$) entonces la puerta queda abierta.

→ Si la cantidad de divisores de ese número es par ($n \neq \square$) entonces la puerta queda cerrada.

Entonces la cantidad de puertas abiertas luego de que pasen los 2010 locos son igual a la cantidad de $\square$ entre 1 y 2010

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2, 12^2, 13^2, 14^2, 15^2, 16^2, 17^2, 18^2, 19^2, 20^2$

$21^2, 22^2, 23^2$ ---- 44^2

$\Longrightarrow$ Hay 44 puertas abiertas luego de que pasan todos los locos

Ejercicio 10

Menu

$N = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_n^{\alpha_n}$ $\quad N \leqslant 1000$

$\#\text{divisores} = 3 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$

La única manera es para $\alpha_1 = 2$ y solo 1 factor primo

$N = P_1^2 \Longrightarrow N = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2\}$

$N = \{4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961\}$

Ejercicio 11

Menu

[Büten Zar]
B.Sz

① Hallar todos los divisores de 300

$$\begin{array}{r|l} 300 & 100 = 2^2.5^2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{300 = 2^2.3.5^2}$$

Todos los divisores de 300 son de la forma: $\boxed{2^i.3^J.5^k}$

$0 \leq i \leq 2$

$0 \leq J \leq 1$

$0 \leq k \leq 2$

1	2	4
3	6	12
5	10	20
15	30	60
25	50	100
75	150	300

Pasos: ① Indicamos todas las potencias de 2.

② Multiplicamos c/u de ellas por 3

③ Multiplica todas las filas por 5

④ Multiplico las últimas 2 filas por 5.

② $\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline 5 & q \\ \cancel{r} & \end{array}$

$$\boxed{\begin{array}{l} mcm(a,b) = 12\ MCD(a,b) \\ a = bq + 5 \Rightarrow 5 = a - bq \end{array}}$$

$a > b$

$$\left.\begin{array}{l} MCD(a,b) \mid a \\ MCD(a,b) \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow MCD(a,b) \mid a - bq = 5 \Rightarrow MCD(a,b) = 5 \text{ o } 1$$

$\underline{MCD(a,b) = 1}$ $\Rightarrow$ a y b son coprimos. $mcm(a,b) = 2^2.3$

a y b no comparten factores primos. $\Rightarrow$ $a = 2^2$, $b = 3$ no sirve porque b es menor que el resto.

$\underline{MCD(a,b) = 5}$ $\Rightarrow$ 5 es factor primo de a y b.

$mcm(a,b) = 2^2.3.5 \Rightarrow$

$a = 2^2.5 \Rightarrow a = 20$

$b = 3.5 \Rightarrow b = 15$

o

$a = 5 \Longrightarrow a = 5$

$b = 5.2^2.3 \Longrightarrow b = 60$

b puede ser mayor a "a"

③ ¿Cuántas parejas de números naturales coprimos (a,b) verifican que $a+b=1000$?

$$b = 1000 - a$$

$\text{MCD}(a,b) = \text{MCD}(a, 1000-a) = 1$ $\qquad 0 \leqslant a \leqslant 1000$

propiedad: $\text{MCD}(a,b) = \text{MCD}(a, b \pm a)$

$$\text{MCD}(a, 1000) = \text{MCD}(a, 1000-a) = 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ast \text{ coprimos con } 1000 = 2^3 . 5^3 \longrightarrow a \neq \dot{2} \text{ y } a \neq \dot{5} \\ 0 \leqslant a \leqslant 1000 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 1000 \\ 2 \nmid a \\ 5 \nmid a \end{cases}$$

Por criterios de divisibilidad de 2 y 5

$a = x\ x\ x \rightarrow \neq \dot{2}, \dot{5}$

posibles: 1, 3, 7, 9

posibles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

posibles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$10 \times 10 \times 4 = 400$ números posibles

$\Longrightarrow$ Hay 400 parejas de números naturales coprimos (a,b) que verifican.

Ejercicio 12

Menu

datos : $MCD(a,b) = 18 = 2 . 3^2$

a tiene 21 divisores

b tiene 10 divisores

$a = P_1^{\alpha_1} . P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}$ $\quad 21 = 7 . 3 \Longrightarrow \alpha_1 = 6, \ \alpha_2 = 2$ o $\alpha_2 = 6, \ \alpha_1 = 2$

$a = P_1^2 . P_2^6$

$b = Q_1^{\beta_1} . Q_2^{\beta_2} \dots Q_n^{\beta_n}$ $\quad 10 = 5 . 2 \Longrightarrow \alpha_1 = 4, \ \alpha_2 = 1$ o $\alpha_2 = 4, \ \alpha_1 = 1$

$b = Q_1^1 . Q_2^4$

$MCD(a,b) = 2 . 3^2 \Longrightarrow 2, 3 \in$ al conjunto de factores primos de a y b.

Miremos b, como el mcd agarra el mínimo exponente para sus factores se deduce que $Q_1 = 2$ y $Q_2 = 3$

Miremos a, análogo: $P_1 = 3$ y $P_2 = 2$

$a = 3^2 . 2^6 = 576$

$b = 2 . 3^4 = 162$

Ejercicio 13

Menu

1 **a)** $\mathrm{MCD}(a^2, b^2) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} a = P_1^{\alpha_1} \ldots P_n^{\alpha_n} \\ b = Q_1^{\beta_1} \ldots Q_n^{\beta_n} \\ \mathrm{MCD}(a,b) = 1 \end{array}\right\}$$

a y b no comparten ningun factor primo.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = P_1^{2\alpha_1} \ldots P_n^{2\alpha_n} \\ b^2 = Q_1^{2\beta_1} \ldots Q_n^{2\beta_n} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

a^2 y b^2 no comparten ningun factor primo ∴ $\mathrm{MCD}(a^2, b^2) = 1$

b) $\mathrm{MCD}(a+b, a.b) = 1$

Llamemos d a $\mathrm{MCD}(a+b, a.b)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} d \mid a.b \\ d \mid a+b \Rightarrow d \mid ab+b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid b^2 \\ \\ \left.\begin{array}{l} d \mid a.b \\ d \mid a+b \Rightarrow d \mid a^2+ab \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid \mathrm{MCD}(a^2, b^2) \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

2 $\boxed{5 . (a+b)^2 = 147 . \mathrm{mcm}(a,b)}$ $\quad d = \mathrm{MCD}(a,b)$

$$5d^2(a'+b')^2 = 49.3\ a'.b'.d \Rightarrow 5d(a'+b')^2 = 49.3 . a'.b'$$

$a'+b'$ es coprimo con $a'b'$ $\Rightarrow (a'+b')^2$ también lo es con $a'b'$

$$\Rightarrow (a'+b')^2 \mid 49.3 \Rightarrow \boxed{a'+b' = 7}$$

$\boxed{5d = 3a'b'}$ $\quad 5 \mid 3a'.b' \Rightarrow 5 \mid a'$ o $5 \mid b'$

$$\left.\begin{array}{l} 5 \mid a' \\ a' \mid 7-b' \end{array}\right\} 5 \mid 7-b' \Rightarrow \boxed{b' = 2 \Rightarrow a' = 5}$$

$$5d = 3.10 \Rightarrow \boxed{d = 6} \qquad \Longleftarrow .$$

$$\left.\begin{array}{l} 5 \mid b' \\ b' \mid 7-a' \end{array}\right\} 5 \mid 7-a' \Rightarrow \boxed{a' = 2 \Rightarrow b' = 5}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 30 \quad y \quad b = 12 \\ \quad\quad o \\ a = 12 \quad y \quad b = 30 \end{array}}$$

Ejercicio 14

Menu

① $p > 2$ primo ⇒ es de la forma $4k \pm 1$

$$\begin{array}{l|l} p & 4 \\ \cline{2-2} ⓡ & k \end{array}$$

$0 \leq r < 4$

$r = 0$ ⟶ no sirve porque no sería primo

$\boxed{r = 1}$ ⟶ Ok

$r = 2$ ⟶ Solo serviría si p fuese 2 pero por Ⓗ $p > 2$.

$\boxed{r = 3}$ ⟶ Ok

$p = \boxed{4k + 1}$

o

$p = 4k + 3 = 4(\overbrace{k+1}^{k'}) - 1 = \boxed{4k' - 1}$

② Probar que si $p > 3$ es primo ⟶ es de la forma $6k \pm 1$

$$\begin{array}{l|l} p & 6 \\ \cline{2-2} ⓡ & k \end{array}$$

$0 \leq r < 6$

$r = 0$ ⟶ no sirve porque no sería primo

$\boxed{r = 1}$ ⟶ Ok

$r = 2$ ⟶ no sirve $p > 3$

$r = 3$ ⟶ no sirve $p > 3$

$r = 4$ ⟶ no sirve pues no sería primo

$\boxed{r = 5}$ ⟶ ok

$p = \boxed{6k + 1}$

o

$p = 6k + 5 = 6k + 6 - 1 = 6(k+1) - 1 = \boxed{6k' - 1}$

③ Probar que existen infinitos primos de la forma 4k - 1.

Demostración:

Supongo por absurdo que los primos de la forma 4k - 1 son finitos

Sea C el conjunto de todos esos primos $C = \{p_1, p_2, --- p_k\}$

Construyo n natural como $\boxed{n = 4(P_1 . P_2 ... P_k) - 1}$

Por el teorema fundamental de la aritmética, existe la factorización del número natural n (que es ≥ 2) en números primos.

Por lo tanto existe algún primo $P_i \in C$ que es divisor de n

$$\left.\begin{array}{l} P_i \mid n \\ P_i \mid 4(P_1 . P_2 ... P_k) \end{array}\right\} P_i \mid 4(P_1 ... P_k) - n \Longrightarrow P_i \mid 1$$

Como el único divisor natural de 1 es 1 y P_i es primo, $P_i \neq 1$ ↯ ABS

Ejercicio 15

Menu

$n = p^{\alpha} \cdot q^{\beta}$ n no es cuadrado perfecto $\Rightarrow$ α y β no pueden ser pares a la vez.

Los divisores de n son de la forma $p^i q^j$

$$0 \leq i \leq \alpha$$

$$0 \leq j \leq \beta$$

mult cada divisor de n ←

$$\prod_{d|n} d = \prod_{i=0}^{\alpha} \prod_{j=0}^{\beta} (p^i q^j) = \left(\prod_{i=0}^{\alpha} p^i\right)\left(\prod_{j=0}^{\beta} q^j\right)$$

$$= p^{\sum_{i=0}^{\alpha} i} \cdot q^{\sum_{j=0}^{\beta} j} = p^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} \cdot q^{\frac{\beta(\beta+1)}{2}} = \boxed{(p^{\alpha})^{\frac{\alpha+1}{2}} \cdot (q^{\beta})^{\frac{\beta+1}{2}}}$$

Universidad de la República **Matemática Discreta 2**
Facultad de Ingeniería **Curso 2012**
Instituto de Matemática y Estadística

Menu

PRÁCTICO 3: Números primos, Teorema fundamental de la Aritmética.

Ejercicio 1. Determinar cuántos divisores positivos tienen

$$9000 \qquad 15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5 \qquad 10^n \cdot 11^{n+1}$$

¿Y cuántos divisores en total?

Ejercicio 2. Hallar el menor número natural n tal que $6552n$ sea un cuadrado.

Ejercicio 3. Decidir si existen enteros a y b que satisfagan

1. $a^2 = 8b^2$. **2.** $a^2 = 3b^3$. **3.** $7a^2 = 11b^2$.

Ejercicio 4.

1. Probar que $a - b | a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Probar que si n es un número natural par entonces $a + b | a^n - b^n$.

3. Probar que si n es un número natural impar entonces $a + b | a^n + b^n$.

Ejercicio 5.

1. Sea (p_n) la sucesión de los números primos, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $p_1 p_2 \ldots p_n + 1 \geq p_{n+1}$. ¿Es cierto que $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ es primo para todo $n \in \mathbb{N}$?

2. Hallar la factorización en producto de primos de 148500, 7114800, 7882875, 8!, 10! y 15!.

3. Si la factorización en producto de factores primos de $m \in \mathbb{N}$ es $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, hallar la factorización en producto de números primos de m^2 y de m^3.

Ejercicio 6. Sea $A = \{4n + 1 : n = 0, 1, 2, \ldots\} = \{1, 5, 9, \ldots\}$. Un elemento $x \in A$, $x \neq 1$ se llama *A-primo* si los únicos divisores en A son 1 y x. Por ejemplo 9 es A-primo ya que 5 no divide a 9. Los elementos restantes de A, mayores que 1, se llaman *A-compuestos*.

1. Probar que todo número A-compuesto se descompone en producto de factores A-primos.

2. ¿La descomposición anterior es única? (Sugerencia: Observe que el producto de dos primos de la forma $4k + 3$ es un A-primo)

Ejercicio 7.

1. Demostrar que $\sqrt{p}$ es irracional para cualquier primo p.

2. Demostrar que $\log_{10} 2$ es irracional y que cuando p es primo $\log_{10} p$ es también irracional.

Ejercicio 8.

1. Determinar el menor cuadrado perfecto que es divisible entre 7!.

2. Demostrar que $n \in \mathbb{N}$ es un cuadrado perfecto si y solamente si n tiene un número impar de divisores positivos.

3. Hallar el menor número natural n para el cual $1260 \times n$ es un cubo perfecto.

Ejercicio 9. En un hospital de locos hay 2010 habitaciones numeradas con los números $1, 2, 3, \ldots, 2010$. En un principio están todas las puertas cerradas. Cuando pasa el primer loco abre las puertas de cada habitación, luego pasa el segundo loco y cambia de estado (es decir, la cierra si estaba abierta y la abre si estaba cerrada) las puertas $2, 4, 6, 8, \ldots$, pasa el tercer loco y cambia de estado las puertas $3, 6, 9, 12, \ldots$ y así hasta que pasa el loco 2010 que cambia de estado la puerta 2010. ¿Cuántas puertas abiertas quedan luego de pasar los 2010 locos?

Ejercicio 10. Hallar los números naturales menores o iguales a 1000 que tienen exactamente 3 divisores positivos distintos.

Ejercicio 11.

1. Hallar todos los divisores de 300.

2. Hallar los números naturales a y b que cumplen que el resto de dividir a entre b es 5 y que $\mathrm{mcm}(a, b) = 12 \times \mathrm{mcd}(a, b)$.

3. ¿Cuántas parejas de números naturales coprimos (a, b) verifican que $a + b = 1000$?

Ejercicio 12. Hallar los números naturales a y b sabiendo que $\mathrm{mcd}(a, b) = 18$, que a tiene 21 divisores y que b tiene 10.

Ejercicio 13.

1. Sean a y b naturales primos entre sí. Probar las siguientes afirmaciones.
a. a^2 y b^2 son primos entre sí.
b. $a + b$ y ab son primos entre sí.

2. Determinar las parejas de números naturales (a, b) que verifican $5 \times (a + b)^2 = 147 \times \mathrm{mcm}(a, b)$.
[Sugerencia: escribir $a = ca'$ y $b = cb'$ con a' y b' coprimos y aplicar 1. a a' y b'.]

Ejercicio 14.

1. Probar que si $p > 2$ es primo, entonces es de la forma $4k \pm 1$.

2. Probar que si $p > 3$ es primo, entonces es de la forma $6k \pm 1$.

3. Probar que existen infinitos primos de la forma $4k - 1$.
[Sugerencia: imitar la prueba de Euclides sobre la infinitud de primos.]

Ejercicio 15. Sea $n = p^\alpha q^\beta$ la descomposición en producto de factores primos de un natural n. Si n no es un cuadrado perfecto calcular el producto de los divisores de n.