[Büten Zar]
B.Sz

Comentarios

Büten Zar

FB

Sistemas de Numeración

Letra

Ejercicio 1

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Ejercicio 4

Ejercicio 5

Ejercicio 6

Ejercicio 7

Ejercicio 8

Ejercicio 9

Ejercicio 10

Ejercicio 11

Ejercicio 12

Ejercicio 13

Ejercicio 14

Ejercicio 15

Ejercicio 16

Ejercicio 17

Ejercicio 1

① $\boxed{\text{Si } a|b \text{ y } c|d \Rightarrow ac|bd}$

$a|b \rightarrow \exists p \,/\, b = ap$

$c|d \rightarrow \exists p' \in \mathbb{Z} \,/\, d = cp'$

$b.d = ap.cp' = pp'ac \Rightarrow ac|bd$

$\boxed{\text{Verdadera.}}$

② $\boxed{\text{Si } a|b \Rightarrow ac|bc}$

$a|b \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} \,/\, b = ap$ $\quad b.c = acp \Rightarrow ac|bc$

$\boxed{\text{Verdadera}}$

③ $\boxed{\text{Si } a \nmid bc \Rightarrow \begin{array}{l} a \nmid b \\ a \nmid c \end{array}}$ $\quad \boxed{\text{Verdadera.}}$

Supongamos por abs $a|b \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} \,/\, b = ap \Rightarrow bc = a\overset{Q}{\boxed{cp}} \Rightarrow a|bc$ ABsurdo

④ $\boxed{\text{Si } ac|bc \Rightarrow a|b}$

$ac|bc \rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} \,/\, bc = acp$ por prop cancelativa de enteros y como $c \neq 0$ $\quad b = ap \Rightarrow a|b$

$\boxed{\text{Verdadero}}$

⑤ $\boxed{\text{Si } a|bc \Rightarrow a|b \text{ o } a|c}$

Falso, pues $6|12$ pero $6 \nmid 4$ o $6 \nmid 3$

⑥ $\boxed{\text{Si } a|c \text{ y } b|c \Rightarrow ab|c}$

Falso pues $\begin{array}{l} 8|24 \\ 6|24 \end{array}$ pero $48 \nmid 24$ $\quad (a.b \,|\, c^2)$

[Büten Zar]
B.Sz

7 $\boxed{\text{Si } 4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a}$

$\boxed{\text{Verdadero}}$

Si $\left.\begin{array}{l} 2 \mid 4 \\ 4 \mid a^2 \end{array}\right\} \; 2 \mid a^2 \longrightarrow 2 \mid a.a \rightarrow 2 \mid a$

2 es primo

8 $\boxed{\text{Si } 9 \mid b+c \Rightarrow 9 \mid b \text{ o } 9 \mid c}$

$\boxed{\text{Falso}}$ $9 \mid 18$ pero $9 \nmid 10$ y $9 \nmid 8$

9 $\boxed{\text{Si } a \mid b+c^2 \Rightarrow a \mid b}$

$\boxed{\text{Falso}}$ $4 \mid 12$ pero $4 \nmid 3$

$12 = 3 + 3^2$

Ejercicio 2 | Menu

[Büten Zar]
B.Sz

① Probaremos por IC

Paso base: $n=1$ $\quad 1.2.3 = 6x \iff x=1$ ✓

Paso Inductivo:

Ⓗ $n=h \qquad h(h+1)(h+2) = 6x$

Ⓣ $n=h+1 \qquad (h+1)(h+2)(h+3) = 6x$

Demostración:

$$(h+1)(h+2)(h+3) = (h+1)(h+2)h + 3\underbrace{(h+1)(h+2)}_{2|(h+1)(h+2)} \overset{H}{=} 6x + 3.2y = 6(x+y)$$

② Probar que $6 \mid n(2n+1)(7n+1)$ o $n(2n+1)(7n+1) = 6x$

Se puede probar que $2 \mid n(2n+1)(7n+1)$ y $3 \mid n(2n+1)(7n+1)$

para es alcanza que divida a uno de los términos

$n \,\underline{|\,2}$, resto 0, cociente q $\Rightarrow 2 \mid n \Rightarrow 2 \mid n(2n+1)(7n+1)$

$n \,\underline{|\,2}$, resto 1, cociente q $\Rightarrow n = 2q+1 \Rightarrow 7n+1 = 14q+8 = 2(7q+4) \Rightarrow 2 \mid (7n+1) \Rightarrow 2 \mid (2n+1)(7n+1)n$

$n \,\underline{|\,3}$, resto 0, cociente q $\Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow 3 \mid n(2n+1)(7n+1)$

$n \,\underline{|\,3}$, resto 1, cociente q $\Rightarrow n = 3q+1 \Rightarrow 2n+1 = 6q+3 = 3(2q+1) \Rightarrow 3 \mid (2n+1) \Rightarrow 3 \mid n(2n+1)(7n+1)$

$n \,\underline{|\,3}$, resto 2, cociente q $\Rightarrow n = 3q+2 \Rightarrow 7n+1 = 21q+15 = 3(7q+5) \Rightarrow 3 \mid (7n+1) \Rightarrow 3 \mid n(2n+1)(7n+1)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \mid n(2n+1)(7n+1) \\ 2 \mid n(2n+1)(7n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3.2 = 6 \mid n(2n+1)(7n+1)$$

3 y 2 no tienen factores en común.

Ejercicio 3

Menu

[Büten Zar]
B.Sz

Recordar $\sum_{i=0}^{m} 2^i = 2^{m+1} - 1$

① Verificar que 28 y 496 son perfectos

$\boxed{28} = 2 \cdot 14 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = \boxed{2^2 \cdot 7}$ $\to 2^3 - 1$

Divisores $(28) = 2^0, 2^1, 2^2$ → Div propios

$2^0 \cdot 7,\ 2^1 \cdot 7,\ 2^2 \cdot 7$ → 28

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

$\boxed{496} = 2^1 \cdot 248 = 2^2 \cdot 124 = 2^3 \cdot 62 = \boxed{2^4 \cdot 31}$ $2^5 - 1$

Divisores $(496) = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ → Div propios

$2^0 \cdot 31,\ 2^1 \cdot 31,\ 2^2 \cdot 31,\ 2^3 \cdot 31,\ 2^4 \cdot 31$ → 496

$$\begin{array}{r} 2^0 \\ 2^1 \\ + \ 2^2 \\ 2^3 \\ 2^4 \\ \hline 2^5 - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \cdot 2^0 \\ 31 \cdot 2^1 \\ + \ 31 \cdot 2^2 \\ 31 \cdot 2^3 \\ \hline 31(2^4 - 1) \end{array}$$

$\boxed{2^5 - 1 = 31}$

$31 + 31(2^4 - 1) = \boxed{31 \cdot 2^4 = 496}$

② Probar que si $(2^m - 1)$ es primo $\Rightarrow 2^{m-1}(2^m - 1)$ es perfecto.

Divisores $\left(\boxed{2^{m-1} \cdot (2^m - 1)}\right) = 2^0, 2^1, \dots, 2^{m-1}$

$2^0 \cdot (2^m - 1),\ 2^1 (2^m - 1),\ \dots,\ 2^{m-2}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^m - 1)$

$$\sum_{i=0}^{m-1} 2^i + (2^m - 1) \sum_{i=0}^{m-2} 2^i = (2^m - 1) + (2^m - 1)(2^{m-1} - 1) = \boxed{(2^m - 1)\, 2^{m-1}}$$

Ejercicio 4

① $\boxed{3n-1 \mid n+7}$

$a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$

$|3n-1| \leq |n+7|$

Si $n=0 \Rightarrow -1 \mid 7$ ✓

Si $n>0 \Rightarrow 3n-1 \leq n+7 \Rightarrow n \leq 4$

$n=4$	$11 \mid 11$	OK
$n=3$	$8 \mid 10$	NO
$n=2$	$5 \mid 9$	NO
$n=1$	$2 \mid 8$	OK

Todos los n son:

0, 1, 4

② $\boxed{3n-2 \mid 5n-8}$

$$\left.\begin{array}{l} 3n-2 \mid 5n-8 \\ 3n-2 \mid (3n-2)\cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3n-2 \mid 2n-6$$

Si $n=0 \Rightarrow -2 \mid -8$ OK

Si $n=1 \Rightarrow 1 \mid -3$ OK

Si $n=2 \Rightarrow 4 \mid 2$ NO

$\forall n \geq 4 \quad 3n-2 \leq 2n-6$

$n \leq -4$ no se cumple.

Todos los n son:

0, 1, 3

Si $n=3 \Rightarrow 7 \mid 7$ OK

③ $\boxed{2n+1 \mid n^2+5}$

prop $\left.\begin{array}{l} a \mid c \\ a \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid b \pm c$

$a \mid b \Rightarrow a \mid b \cdot c$

$$2n+1 \mid 2n+1 \overset{\text{prop}}{\Rightarrow} 2n+1 \mid (2n+1)n = 2n^2+n$$

$$2n+1 \mid n^2+5 \overset{\text{prop}}{\Rightarrow} 2n+1 \mid (n^2+5)2 = 2n^2+10$$

$$\left.\begin{array}{l} 2n+1 \mid 2n^2+n \\ 2n+1 \mid 2n^2+10 \end{array}\right\} \underset{\text{prop}}{\Rightarrow} 2n+1 \mid 2n^2+n-2n^2+10 \Rightarrow 2n+1 \mid n-10$$

$$|2n+1| \leq |n-10|$$

$\forall n > 10 \quad 2n+1 \leq n-10 \Rightarrow n \leq -9$ ✗ n es natural

n	$2n+1 \mid n-10$	
0	$1 \mid -10$	OK
1	$3 \mid -9$	OK
2	$5 \mid -8$	NO
3	$7 \mid -7$	OK
4	$9 \mid -6$	NO
	⋮	NO

$\boxed{\text{Todos los } n \text{ son: } 0, 1, 3}$

4) $\boxed{n-2 \mid n^3-8}$

$$\left.\begin{array}{l} n-2 \mid n-2 \Rightarrow n-2 \mid n^3-2n^2 \\ n-2 \mid n^3-8 \end{array}\right\} \boxed{n-2 \mid 2n^2-8}$$

$a.c \mid b.c \Rightarrow a \mid c$

$$\left.\begin{array}{l} n-2 \mid (n-2)2n \Rightarrow n-2 \mid 2n^2-4n \\ n-2 \mid 2n^2-8 \end{array}\right\} \boxed{n-2 \mid 4n-8} \Rightarrow n-2 \mid 4(n-2) \Rightarrow 1 \mid 4 \checkmark$$

Todo n natural lo cumple.

Ejercicio 5

① $\boxed{99 \mid 10^{2n} + 197}$ ∘ $10^{2n} + 197 = 99.k$

Demuestro por IC

Paso base: $n=1$ $100 + 197 = 99.3$ ✓

Paso Inductivo:

Ⓗ $n=h$ $10^{2h} + 197 = 99.k$

Ⓣ $n=h+1$ $10^{(h+1)2} + 197 = 99k$

Demostración:

$$10^{2(h+1)} + 197 = 10^{2h}.100 + 197 = 10^{2h}(99+1) + 197 = 99.10^{2h} + 10^{2h} + 197$$

por Ⓗ es igual a $99.10^{2h} + 99.k = 99(10^{2h}+k)$

Queda demostrado que $99 \mid 10^{2n} + 197$ $\forall n \in \mathbb{N}$

② $\boxed{9 \mid 7.5^{2n} + 2^{4n+1}}$ ∘ $7.5^{2n} + 2^{4n+1} = 9.k$

Paso base: $n=1$ $7.5^2 + 2^5 = 25.7 + 32 = 207 = 9.23$

Paso Inductivo:

Ⓗ $n=h$ $7.5^{2h} + 2^{4h+1} = 9k$ Ⓣ $n=h+1$ $7.5^{(h+1)2} + 2^{4(h+1)+1} = 9K$

Demostración:

$$7.5^{(h+1)2} + 2^{4(h+1)+1} = 7.5^{2h}.5^2 + 2^{4h+1}.2^4 = 7.25.5^{2h} + 2^{4h+1}.16 = 7(16+9)5^{2h} + 16\,2^{4h}$$

$$7.16.5^{2h} + 7.9.5^{2h} + 16.2^{4h+1} = 16(7.5^{2h} + 2^{4h+1}) + 9.(7.5^{2h}) \overset{Ⓗ}{=} 9.16k + 9(7.5^{2h})$$

$$= 9(\underbrace{16k + 7.5^{2h}}_{k'})$$

$\Rightarrow$ Queda demostrado que $9 \mid 7.5^{2n} + 2^{4n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$

Paso base: $n=1$ $\quad 13^2 + 28 - 84 - 1 = 56 \cdot 2$ ✓

Paso Inductivo:

(H) $n=h$ $\quad 13^{2h} + 28h^2 - 84h - 1 = 56 \cdot k$

(T) $n=h+1$ $\quad 13^{2h+2} + 28(h+1)^2 - 84(h+1) - 1 = 56 \cdot k$

Demostración:

$13^{2h} \cdot 169 + 28(h+1) + 28h(h+1) - 84h - 84 - 1 = 56 \cdot k$

$13^{2h} \cdot 169 + 28(h+1) + 28h^2 + 28h - 84h - 84 - 1 = 56 \cdot k$

$13^{2h} \cdot (168 + 1) + 28h + 28 + 28h^2 + 28h - 84h - 84 - 1 \overset{(H)}{=} 13^{2h} \cdot 168 + 56h - 56 + 56k$

$= 56(13^{2h} \cdot 3 + h - 1 + k)$

$\Longrightarrow$ Queda demostrado $\forall n \in \mathbb{N}$ que $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$

4) $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

paso base: $n = 1$ $\quad 7^2 + 208 - 1 = 256 . 1$ ✓

paso Inductivo:

(H) $n = h \quad 7^{2h} + 208h - 1 = 256 . k$

(T) $n = h+1 \quad 7^{2h+2} + 208(h+1) - 1 = 256 . k$

Demostración:

$$7^{2h+2} + 208h + 208 - 1 = 7^{2h} . 49 + 208h + 208 - 1 = 7^{2h} + 48(7)^{2h} + 208h + 208 - 1$$

$$\overset{H}{=} 256k + 48(7)^{2h} + 208 \overset{H}{=} 256k + 48 . 256k - 48 . 208h + 48 + 208$$

$$= 49 . 256k + 256 - 48 . 208h = 49 . 256k + 256 - 3 . 13 . 256h = 256(49k + 1 - 3.13h)$$

Queda demostrado que $\forall n \in N \quad 256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

Ejercicio 6

Menu

① $\boxed{137}$

$137 \div 2 = 68$, resto 1; $68 \div 2 = 34$, resto 0; $34 \div 2 = 17$, resto 0; $17 \div 2 = 8$, resto 1; $8 \div 2 = 4$, resto 0; $4 \div 2 = 2$, resto 0; $2 \div 2 = 1$, resto 0; 1

En base 2 10001001

Método Fast de base 2 a las 4, 8, 16: $\boxed{137}$

base 2 : 10001001

base 4 : 10 00 10 01 = 2021

base 8 : 010 001 001 = 211

base 16 : 1000 1001 = 89

$137 \div 4 = 34$, resto 1; $34 \div 4 = 8$, resto 2; $8 \div 4 = 2$, resto 0; 2

En base 4 2021

$2.4^3 + 0 + 2.4^1 + 1.4^0 = 128 + 8 + 1 = 137$

$137 \div 8 = 17$, resto 1; $17 \div 8 = 2$, resto 1; 2

211 En base 8

$2.8^2 + 1.8 + 1.8^0 = 128 + 8 + 1 = 137$

$137 \div 16 = 8$, resto 9; 8

89 en base 16

$\boxed{6243}$

$6243 \div 2 = 3121$, resto 1; $3121 \div 2 = 1560$, resto 1; $1560 \div 2 = 780$, resto 0; $780 \div 2 = 390$, resto 0; $390 \div 2 = 195$, resto 0; $195 \div 2 = 97$, resto 1; $97 \div 2 = 48$, resto 1; $48 \div 2 = 24$, resto 0; $24 \div 2 = 12$, resto 0; $12 \div 2 = 6$, resto 0; $6 \div 2 = 3$, resto 0; $3 \div 2 = 1$, resto 1; 1

es en base 2 1100001100011

$2^{12} + 2^{11} + 2^6 + 2^5 + 2^1 + 1$

$4096 + 2048 + 64 + 32 + 2 + 1 = 6243$

6243 | 4
3 1560 | 4
0 390 | 4
2 97 | 4
1 24 | 4
0 6 | 4
2 1

En base 4   1201203

$3 + 2.4^2 + 4^3 + 2.4^5 + 4^6$

$3 + 32 + 64 + 2048 + 4096 = 6243$

6243 | 8
3 780 | 8
4 97 | 8
1 12 | 8
4 1

En base 8   14143

Método Fast de base 2 a las demás : 6243

base 2 : 1100001100011

base 4 = 01 10 00 01 10 00 11
1 2 0 1 2 0 3

base 8 : 001 100 001 100 011
1 4 1 4 3

base 16 : 0001 1000 0110 0011
1 8 6 3

6243 | 16
3 390 | 16
6 24 | 16
8 1

En base 16   1863

12354

12354 | 2
0 6177 | 2
1 3088 | 2
0 1544 | 2
0 772 | 2
0 386 | 2
0 193 | 2
1 96 | 2
0 48 | 2
0 24 | 2
0 12 | 2
0 6 | 2
0 3 | 2
1 1

En base 2   11000001000010

12354 | 4
2 3088 | 4
0 772 | 4
0 193 | 4
1 48 | 4
0 12 | 4
0 3

En base 4   3001002

12354 :

11000001000010

base 4 : 11 00 00 01 00 00 10
3 0 0 1 0 0 2

base 8 011 000 001 000 010
3 0 1 0 2

base 16 0011 0000 0100 0010
3 0 4 2

12354 | 8
2 1544 | 8
0 193 | 8
1 24 | 8
0 3

$\boxed{\text{En base 8} \quad 30102}$

12354 | 16
115 772 | 16
34 4 48 | 16
2 0 3

$\boxed{\text{En base 16} \quad 3042}$

$$3 . 16^3 + 4 . 16 + 2 = 12288 + 64 + 2$$

2) $\boxed{A7}$

En base 10 $\quad 16^1 . A + 16^0 . 7 = 16.10 + 7 = \boxed{167}$

167 | 2
1 83 | 2
1 41 | 2
1 20 | 2
0 10 | 2
0 5 | 2
1 2 | 2
0 1

$\boxed{10100111 \quad \text{en base 2}}$

$\boxed{4C2}$

$$16^2 . 4 + 16 . C + 2 = 1024 + 16.12 + 2 = \boxed{1218}$$

1218 | 2
0 609 | 2
1 304 | 2
0 152 | 2
0 76 | 2
0 38 | 2
0 19 | 2
1 9 | 2
1 4 | 2
0 2 | 2
0 1

$\boxed{\text{En base 2} \quad 10011000010}$

[Büten Zar]
B.Sz

1C2B

$$1 \cdot 16^3 + \overset{C}{12} \cdot 16^2 + 2 \cdot 16 + \overset{B}{11} = 4096 + 3072 + 32 + 11 = \boxed{7211 \text{ en base } 10}$$

7211 | 2
1 3605 | 2
1 1802 | 2
0 901 | 2
1 450 | 2
0 225 | 2
1 112 | 2
0 56 | 2
0 28 | 2
0 14 | 2
0 7 | 2
1 3 | 2
1 1

$\boxed{\text{En base 2} \quad 1110000101011}$

A2DFE

$$10 \cdot 16^4 + 2 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16 + 14 = 655360 + 8192 + 3328 + 240 + 14 = \boxed{667134}$$

667134 | 2
0 333567 | 2
1 166783 | 2
1 83391 | 2
1 41695 | 2
1 20847 | 2
1 10423 | 2
1 5211 | 2
1 2605 | 2
1 1302 | 2
0 651 | 2
1 325

325 | 2
1 162 | 2
0 81 | 2
1 40 | 2
0 20 | 2
0 10 | 2
0 5 | 2
1 2 | 2
0 1

$\boxed{\text{En base 2} \quad 10100010110111111110}$

[Büten Zar]
B.Sz

3

$\boxed{11001110}$

$$0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^6 + 2^7 = 128 + 64 + 8 + 4 + 2 = \boxed{206 \text{ en base } 10}$$

$\underbrace{1100}$ y 1110 $\boxed{\text{CE en base } 16}$

$2^3 + 2^2 = 12$ $2^3 + 2^2 + 2 = 14$

C E

$\boxed{00110001}$

$$1 + 2^4 + 2^5 = 32 + 16 + 1 = \boxed{49 \text{ en base } 10}$$

$\underbrace{0011}_{3}$ y $\underbrace{0001}_{1}$ $\boxed{31 \text{ en base } 16}$

$\boxed{11110000}$

$$2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 = 128 + 64 + 32 + 16 = \boxed{240 \text{ en base } 10}$$

$\underbrace{1111}_{F}$ $\underbrace{0000}_{0}$ $\boxed{\text{F0 en base } 16}$

$\boxed{01010111}$

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 = 64 + 16 + 4 + 2 + 1 = \boxed{87 \text{ en base } 10}$$

$\underbrace{0101}_{5}$ $\underbrace{0111}_{7}$ $\boxed{57 \text{ en base } 16}$

Ejercicio 7

Menu

Mi sistema en base 5

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow 0 \\ 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 4 \\ 3 \longrightarrow 6 \\ 4 \longrightarrow 8 \end{cases}$$

(a)

$$\begin{array}{l|l} 100 & 5 \\ \hline 0 & 20 \;|\; 5 \\ & 0 \quad 4 \end{array}$$

$\rightarrow 400 \xrightarrow{\text{transf}} 800 \Rightarrow$ la página 800 está en el lugar 100.

(b)

página $888 \longrightarrow 444 \rightarrow 4.5^2 + 4.5 + 4 = 100 + 20 + 4 = 124$

La página 888 está en el lugar 124.

Ejercicio 8 Menu

[Büten Zar]
B.Sz

$P(x)$ tiene coeficientes enteros no negativos.

① $P(1) = N$ y $N \geq$ coeficientes

② $P(N) = m$ pasó m a base N y puedo ver los coeficientes en cada lugar.

Ejemplo: $x^5 + 2x^4$

① $P(1) = 3$

② $P(9) = 243 + 162 = 405$

$$
\begin{array}{l}
405 \;\underline{|\,3} \\
0 \quad 135 \;\underline{|\,3} \\
\quad\quad 0 \quad 45 \;\underline{|\,3} \\
\quad\quad\quad\quad 0 \quad 15 \;\underline{|\,3} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad 5 \;\underline{|\,3} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2 \quad 1
\end{array}
$$

x^4 x^1 x^0

1 2 0 0 0 0

x^5 x^3 x^2

$x^5 + 2x^4$

[Büten Zar]
B.Sz

Ejercicio 9

Menu

$n \in \mathbb{N}$ $\qquad a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ es n en base 10

$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \ldots + 10^k a_k = n$$

① $\boxed{2|n \iff 2|a_0}$

$(\Rightarrow)$ $2|n \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} / n = 2q$

$$a_0 + 2(\underbrace{5a_1 + 50a_2 + \ldots}_{q'}) = 2q \Rightarrow a_0 = 2(q - q') \Rightarrow 2|a_0$$

$(\Leftarrow)$ $2|a_0 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} | \ a_0 = 2q$

$$a_0 = n - 2(5a_1 + 50a_2 + \ldots) = 2q$$

$$n = 2(q + 5a_1 + 50a_2 + \ldots) \Rightarrow 2|n$$

② $\boxed{4|n \iff 4|a_1a_0}$

$(\Rightarrow)$ $4|n \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} / n = 4q$

$$a_0 + 10a_1 + 4(\underbrace{25a_2 + 250a_3 + \ldots}_{q'}) = 4q$$

$$a_0 + 10a_1 = 4(q - q') \Rightarrow 4|a_0 + 10a_1 \ (a_1a_0)$$

$(\Leftarrow)$ $4|a_0 + 10a_1 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} / \ a_0 + 10a_1 = 4q$

$$n - 4(25a_2 + 250a_3 + \ldots) = a_0 + 10a_1$$

$$n = 4(q + 25a_2 + 250a_3 + \ldots) \Rightarrow 4|n$$

3 $\boxed{8 | n \iff 8 | a_2 a_1 a_0}$

$(\Rightarrow)$ $8|n \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \mid n = 8q$

$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 8(125a_3 + 1250a_4 + \dots) = 8q$$

$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 = 8(q - q') \Rightarrow 8 | a_0 + 10a_1 + 100a_2$$

$(\Leftarrow)$ $8 | a_0 + 10a_1 + 100a_2 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \mid a_0 + 10a_1 + 100a_2 = 8q$

$$n - 8(125a_3 + 1250a_4 + \dots) = a_0 + 10a_1 + 100a_2$$

$$\Rightarrow \quad n = 8(q + 125a_3 + 1250a_4 + \dots) \Rightarrow 8|n$$

4 $2^k | n \iff 2^k | a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$

Ejercicio 10

Menu

[Büten Zar]
B.Sz

① $\boxed{MCD(ca, cb) = c\, MCD(a,b)}$

$MCD(a,b) \mid a \Rightarrow a = a' \cdot MCD(a,b) \Rightarrow ca = a' c\, MCD(a,b)$

$MCD(a,b) \mid b \Rightarrow b = b' \cdot MCD(a,b) \Rightarrow cb = b' c\, MCD(a,b)$

$MCD(a', b') = 1$

$$\left.\begin{array}{l} ca = c \cdot MCD(a,b) \cdot a' \\ cb = c \cdot MCD(a,b) \cdot b' \\ MCD(a', b') = 1 \end{array}\right\} \overset{prop}{\Rightarrow} c \cdot MCD(a,b) = MCD(ca, cb)$$

② $$\boxed{\text{Si } \left\{\begin{array}{l} c \mid a \\ c \mid b \end{array}\right. \Rightarrow MCD\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{MCD(a,b)}{c}}$$

$MCD\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \mid \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a}{c} = k' \cdot MCD\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \Rightarrow a = k' \cdot c \cdot MCD\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$

$MCD\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \mid \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = J' \cdot MCD\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \Rightarrow b = J' \cdot c \cdot MCD\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$

$$\underset{MCD(J', k') = 1}{\overset{prop}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{l} MCD(a, b) = c \cdot MCD\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \\ c \mid MCD(a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MCD(a,b)}{c} = MCD\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$$

③ $\boxed{MCD(b, a+bc) = MCD(a,b)}$

Sea $e = MCD(b, a+bc)$

$d = MCD(a,b)$

$$\left.\begin{array}{l} e \mid b \\ e \mid a+bc \end{array}\right\} e \mid (a+bc)1 + (-c).b \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e \mid a \\ \text{además } e \mid b \end{array}\right\} \boxed{e \mid d}$$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \mid a + (c)b \\ \text{Además } d \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d \mid e}$$

$$\left.\begin{array}{l} e \mid d \\ d \mid e \end{array}\right\} \boxed{e = d}$$

④ $\boxed{\text{Si } a \text{ es par y } b \text{ impar} \Longrightarrow MCD(a,b) = MCD(\frac{a}{2}, b)}$

$a = 2.K$

$d = MCD(a,b)$

$e = MCD(\frac{a}{2}, b)$

$$\left.\begin{array}{l} e \mid \frac{a}{2} \Rightarrow e \mid a \\ e \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{e \mid d}$$

por Ⓗ d tiene que ser impar.

$$d \mid a \Rightarrow a = x.d \Longrightarrow \frac{a}{2} = \frac{x.d}{2} \qquad \begin{array}{ll} 2 \nmid d & \text{Abs} \\ 2 \mid x & \checkmark \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{2} = x'.d \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \mid \frac{a}{2} \\ d \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid x.\frac{a}{2} + yb = e$$

$$\left.\begin{array}{l} e \mid d \\ d \mid e \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{e = d}$$

5 $\boxed{mcd(a,b) = MCD(a-b, b)}$

$e = MCD(a-b, b)$

$d = MCD(a, b)$

$$\left.\begin{array}{l} e \mid a-b \\ e \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow e \mid a-b+b = a \Rightarrow \boxed{e \mid d}$$

(VAL)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid a-b \\ (d \mid b) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d \mid e}$$

$\boxed{d = e}$

6 $\boxed{\text{Si } a, b \text{ son primos entre sí} \Rightarrow mcd(a-b, a+b) = 1 \text{ o } 2}$

$d = MCD(a-b, a+b)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} d \mid a-b \\ d \mid a+b \end{array}\right\} d \mid a-b+a+b \Rightarrow d \mid 2a \\ \left.\begin{array}{l} d \mid a-b \\ d \mid a+b \end{array}\right\} d \mid -a+b+a+b \Rightarrow d \mid 2b \end{array}\right\} d \mid MCD(2a, 2b)$$

$$\Rightarrow d \mid 2 \cdot \overbrace{MCD(a,b)}^{1 \text{ por letra}} \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 1 \text{ o } 2.$$

$$\Rightarrow MCD(a-b, a+b) = 1 \text{ o } 2$$

Ejercicio 11

$MCD(a,b) = 1$

Lema Euclides: Si n es un número entero y divide a un producto a y b y es coprimo con uno de sus factores. Entonces n divide al otro factor

① Si $a \mid bc \Rightarrow a \mid c$

$a \mid bc \Rightarrow \boxed{bc = aq}$

$MCD(a,b) = \boxed{1 = ax + by}$ (ID Bezout)

$1 = ax + by \Rightarrow c = cax + cby \Rightarrow c = cax + aqy$

$\Rightarrow c = a(cx + qy) \Rightarrow a \mid c$

② Si $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow ab \mid c$

$c = aq$

$c = bq'$

$MCD(a,b) = 1 = ax + by$

$1 = ax + by \Rightarrow c = cax + cby \Rightarrow c = baq'x + abqy$

$\Rightarrow c = ab(q'x + qy) \Rightarrow ab \mid c$

③ No valen si a y b no son coprimos

$a = 6 \quad b = 4 \quad MCD(6,4) = 2$

① $6 \mid 4.3$ pero $6 \nmid 4$, $6 \nmid 3$

② $6 \mid 12$ y $4 \mid 12$ pero $6.4 = 24 \nmid 12$

Probar que si de los números del 1 al 200 se eligen 101 números cualesquiera

Entonces hay al menos dos que son coprimos.

Dados a y b consecutivos, a y b son coprimos.

Si se eligen 100 números impares $\Rightarrow$ el otro número será par y será consecutivo a uno de los ya elegidos $\therefore$ hay dos números coprimos.

Dados a y b consecutivos, $MCD(a,b) = 1$

n y $n+1$.

Demostración:

$$\begin{array}{r|l} n+1 & n \\ \hline 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n & 1 \\ \hline 0 & n \end{array}$$

$$MCD(n, n+1) = MCD(1, n) = MCD(0, 1) = 1$$

Ejercicio 13

$$F_0 = 0 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$
$$F_1 = 1$$

$$\boxed{MCD(a,b) = MCD(b, a+bc)}$$

$$MCD(F_{n+1}, F_{n+2}) = MCD(\overset{b}{\overline{F_{n+1}}}, \overset{b.c}{\overline{F_{n+1}}} + \overset{a}{\overline{F_n}}) = MCD(F_n, F_{n+1}) = MCD(\overset{b}{\overline{F_n}}, \overset{b.c}{\overline{F_n}} + \overset{a}{\overline{F_{n-1}}})$$

$$= \ldots = MCD(F_1, F_2) = MCD(F_1, F_1 + F_0) = MCD(F_0, F_1) = 1$$

Ejercicio 14

Menu

Demostrar que $MCD(7k+3,\ 12k+5) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Euclides: $MCD(a,b) = MCD(b, r_0) = MCD(r_0, r_1) \ \ldots$

Lema:

$$\begin{array}{l|l} 12k+5 & 7k+3 \\ \hline 5k+2 & 1 \\ r & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 7k+3 & 5k+2 \\ \hline 2k+1 & 1 \\ r & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 5k+2 & 2k+1 \\ \hline k & 2 \\ r & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 2k+1 & k \\ \hline 1 & 2 \\ r & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} k & 1 \\ \hline 0 & k \\ r & \end{array}$$

$MCD(7k+3,\ 12k+5) = MCD(k,1) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$MCD(7k+3,\ 12k+5) = MCD(1,0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 15

Menu

[Büten Zar]
B.Sz

$$\left.\begin{array}{l} a,b,c,d \in \mathbb{N} \\ ad-bc \mid a \\ ad-bc \mid c \end{array}\right\} \Rightarrow MCD(an+b,\ cn+d) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} ad-bc \mid a \\ ad-bc \mid c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{ad-bc \mid MCD(a,c)}$$

$$\left.\begin{array}{l} MCD(a,c) \mid a \\ MCD(a,c) \mid c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{MCD(a,c) \mid ad-bc}$$

$$\Rightarrow \boxed{MCD(a,c) = ad-bc}$$

$$MCD(a,c) = ad - bc \Rightarrow 1 = \frac{\overbrace{a}^{k}\cdot d}{ad-bc} - b \cdot \overbrace{\frac{c}{ad-bc}}^{k'}$$

$$\left.\begin{array}{l} MCD(b,d) \mid b \\ MCD(b,d) \mid d \end{array}\right\} \Rightarrow MCD(b,d) \mid k\cdot d - bk' \Rightarrow MCD(b,d) \mid 1 \Rightarrow \boxed{MCD(b,d) = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} MCD(an+b,\ cn+d) \mid an+b \\ MCD(an+b,\ cn+d) \mid cn+d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} MCD(an+b,\ cn+d) \mid can+cb \\ MCD(an+b,\ cn+d) \mid can+da \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MCD(an+b,\ cn+d) \mid ad-bc \\ \boxed{MCD(an+b,\ cn+d) \mid MCD(a,c)} \end{array}$$

Id Bezout $\quad MCD(an+b,\ cn+d) = x(an+b) + y(cn+d) = 1$

$$y = \frac{a}{ad-bc} \qquad \frac{-can - bc + acn + ad}{ad-bc} = 1$$

$$x = -\frac{c}{ad-bc}$$

Ejercicio 16 Menu

[Büten Zar]
B.Sz

1 $\begin{cases} a+b = 122 \\ MCD(a,b) + mcm(a,b) = 1802 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} MCD(a,b) \mid a \Rightarrow a = MCD(a,b) \cdot a' \\ MCD(a,b) \mid b \Rightarrow b = MCD(a,b) \cdot b' \end{array}\right\}$ $MCD(a',b') = 1$

sustituyo $\begin{cases} a'\,MCD(a,b) + b'\,MCD(a,b) = 122 & \Rightarrow MCD(a,b) \mid 122 \\ MCD(a,b) \cdot a' \cdot b' + MCD(a,b) = 1802 & \Rightarrow MCD(a,b) \mid 1802 \end{cases}$ $MCD(a,b) \mid MCD(122, 180$

$MCD(a,b) \mid 2$

$MCD(a,b) = 1$ o 2

Si $MCD(a,b) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a' + b' = 122 \\ a' \cdot b' + 1 = 1802 \end{cases}$ $\to a' = 122 - b'$

$(122 - b')\,b' = 1801$

$-(b')^2 + 122 b' - 1801 = 0$

$\dfrac{-122 \pm \sqrt{14884 - 4 \cdot -1 \cdot -1801}}{-2}$ val / val

no entero

Si $MCD(a,b) = 2$ $\begin{cases} a' + b' = 61 \\ a'b' = 900 \end{cases}$ $\to a' = 61 - b'$

$-(b')^2 + 61 b' - 900 = 0$

$\dfrac{-61 \pm \sqrt{61^2 - 4 \cdot -1 \cdot 900}}{-2} = \dfrac{-61 + 11}{-2} = 25$

$\dfrac{-61 - 11}{-2} = 36$

$b' = 25 \to a' = 36$

$b = 2 \cdot 25 = 50$

$a = 72$

$b' = 36 \Rightarrow b = 72 \to a = 50$

$\boxed{\text{Las soluciones son : } (a,b) = (72, 50) \quad (a,b) = (50,72)}$

[Büten Zar]
B.Sz

2

$$\begin{cases} a \cdot b = 22275 \\ MCD(a,b) = 15 \end{cases}$$

$$a \cdot b = m \cdot d \qquad \boxed{\begin{array}{ll} d = MCD(a,b) & a' = \frac{a}{d} \\ m = mcm(a,b) & b' = \frac{a}{d} \end{array}}$$

$$m = a'b'd \implies a \cdot b = a'b'd^2$$

$$a' \cdot b' \cdot (15^2) = 22275$$

$$a' \cdot b' = 99$$

$$a' | 99 \longrightarrow Div(99) = 99, 33, 11, 9, 3, 1$$

$$b' | 99$$

$$\left.\begin{array}{l} a', b' \text{ son coprimos} \\ a' \cdot b' = 99 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} a' = 99 \longrightarrow b' = 1 \\ a' = 33 \longrightarrow b' = 3 \quad \times \\ a' = 11 \longrightarrow b' = 9 \end{array}$$

$$a' = 99 \text{ y } b' = 1 \begin{cases} a = 15 \cdot 99 \implies a = 1485 \\ b = 15 \cdot 1 \implies b = 15 \end{cases}$$

$$a' = 11 \text{ y } b' = 9 \begin{cases} a = 15 \cdot 11 \implies a = 165 \\ b = 15 \cdot 9 \implies b = 135 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Las soluciones son: } (a,b) = (1485, 15) \rightarrow (15, 1485) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (a,b) = (165, 135) \rightarrow (135, 165) \end{array}}$$

3

$$\begin{cases} a + b = 1271 \\ \text{mcm}(a,b) = 330\ \text{MCD}(a,b) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \text{MCD}(a,b) \cdot a' \\ b = \text{MCD}(a,b) \cdot b' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{MCD}(a,b)\, a' + \text{MCD}(a,b)\, b' = 1271 \\ \cancel{\text{MCD}(a,b)} \cdot a' \cdot b' = 330\ \cancel{\text{MCD}(a,b)} \end{cases}$$

$$\text{MCD}(a,b) \mid 1271 \Rightarrow \text{MCD}(a,b) = 1 \text{ o } 31 \text{ o } 41 \text{ o } 1271$$

<u>$\text{MCD}(a,b) = 1$</u>

$$a' + b' = 1271 \longrightarrow a' = 1271 - b'$$

$$a' \cdot b' = 330 \longrightarrow -(b')^2 + 1271\, b' - 330 = 0$$

$$\frac{-1271 \pm \sqrt{1271^2 - 4 \cdot 1 \cdot 330}}{-2}$$ no enter

<u>$\text{MCD}(a,b) = 31$</u>

$$a' + b' = 41$$

$$a' \cdot b' = 330 \longrightarrow -(b')^2 + 41\, b' - 330 = 0$$

$$\frac{-41 \pm \sqrt{1681 - 1320}}{-2} = \frac{-41 + 19}{-2} = 1$$

$$\frac{-41 - 19}{-2} = 3$$

$$b' = 30 \longrightarrow b = 30 \cdot 31 \qquad b' = 11 \longrightarrow b = 11 \cdot 31$$

$$a' = 11 \longrightarrow a = 11 \cdot 31 \qquad a' = 30 \longrightarrow a = 30 \cdot 31$$

<u>$\text{MCD}(a,b) = 41$</u>

$$a' + b' = 31$$

$$a' \cdot b' = 330 \longrightarrow -(b')^2 + 31\, b' - 330 = 0$$

$$\frac{-31 \pm \sqrt{961 - 1320}}{-2}$$ no entero

<u>$\text{MCD}(a,b) = 1271$</u>

$$a' + b' = 1 \longrightarrow -(b')^2 + b' - 330 = 0$$ no da entero.

$$a' \cdot b' = 330$$

$$\boxed{\text{Las soluciones son: } (a,b) = (341, 930) \quad (a,b) = (930, 341)}$$

4 $\begin{cases} a \cdot b = 1008 \\ mcm(a,b) = 168 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \cdot d = 1008 \\ a' \cdot b' \cdot d = 168 \end{cases}$

$$\begin{cases} a' \cdot b' \cdot d^2 = 1008 & (1) \\ a' \cdot b' \cdot d = 168 & (2) \end{cases}$$

$\overset{\text{sustituyo}}{\underset{(1)}{\Longrightarrow}} \quad 168\, d = 1008$

$$d = \frac{1008}{168} = \frac{\cancel{8} \cdot 126}{\cancel{8} \cdot 21} = \boxed{6 = MCD(a,b)}$$

de (2) $\quad a' \cdot b' \cdot 6 = 168 \Longrightarrow a' \cdot b' = 28.$

divisores de 28 = 1, 2, 4, 7, 14, 28.

$$\left.\begin{array}{l} a'b' = 28 \\ MCD(a,b) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lll} a' = 28 & y & b' = 1 \checkmark \\ a' = 14 & y & b' = 2 \times \\ a' = 7 & y & b' = 4 \checkmark \end{array}$$

$a' = 28 \Longrightarrow a = 6 \cdot 28 = 168$

$b' = 1 \Longrightarrow b = 6 \cdot 1 = 6$

$a' = 7 \Rightarrow a = 42$

$b' = 4 \Rightarrow b = 24$

Las soluciones son (a,b)

$(168, 6)$ y $(42, 24)$

y al revés

$$\begin{cases} MCD(a,b)\cdot mcm(a,b) = 48 \\ a^2 = b^2 + 28 \end{cases} \longrightarrow a\cdot b = 48 \longrightarrow a^2b^2 = 48^2$$

$$b^4 + 28b^2 - 48^2 = 0$$

$\underline{b^2 = x}$

$$x^2 + 28x - 2304 = 0$$

$$\frac{-28 \pm \sqrt{784 - 4\cdot 2304}}{2} = \frac{-28+100}{2} = 36 \checkmark$$

$$\frac{-28-100}{2} = -64 \quad X$$

$$b^2 = 36 \longrightarrow b = 6 \quad \text{Si}$$

$$b = -6 \quad \text{NO}$$

$$b = 6 \Longrightarrow a\cdot 6 = 48 \Longrightarrow a = 8$$

$$\boxed{MCD(8,6) = 2}$$

Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Matemática Discreta 2
Curso 2012

Menu

PRÁCTICO 1: DIVISIBILIDAD, MCD Y MCM.

Ejercicio 1. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Probar o refutar dando un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

1. Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$. **2.** Si $a|b$ entonces $ac|bc$. **3.** Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$.

4. Si $ac|bc$ entonces $a|b$. **5.** Si $a|bc$ entonces $a|b$ o $a|c$. **6.** Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

7. Si $4|a^2$ entonces $2|a$. **8.** Si $9|b+c$ entonces $9|b$ o $9|c$. **9.** Si $a|b+c^2$ entonces $a|b$.

Ejercicio 2.

1. Demostrar que el producto de tres naturales consecutivos es múltiplo de 6.

2. Probar que $n(2n+1)(7n+1)$ es divisible entre 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Un número natural se dice *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores positivos propios. Por ejemplo, 6 es perfecto pues $6 = 1 + 2 + 3$.

1. Verificar que 28 y 496 son perfectos.

2. Probar que si $2^m - 1$ es primo entonces $2^{m-1}(2^m - 1)$ es perfecto.

Ejercicio 4. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que:

1. $3n - 1|n + 7$ **2.** $3n - 2|5n - 8$ **3.** $2n + 1|n^2 + 5$ **4.** $n - 2|n^3 - 8$

Ejercicio 5. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

1. $99|10^{2n} + 197$ **2.** $9|7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$ **3.** $56|13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$ **4.** $256|7^{2n} + 208n - 1$

Ejercicio 6. *Sistemas de numeración.*

1. Escribir en las bases 2, 4, 8 y 16 los números decimales 137, 6243 y 12354.

2. Escribir en las bases 2 y 10 los números hexadecimales A7, 4C2, 1C2B y A2DFE.

3. Escribir en las bases 10 y 16 los números binarios 11001110, 00110001, 11110000 y 01010111.

Ejercicio 7. En un libro de 1000 hojas numeradas del 1 al 1000 se arrancan todas las hojas cuyo número contenga algún dígito impar (p. ej. se eliminan las páginas $7, 12, 93, 100$ pero no la 248).

1. ¿Qué página ocupará la posición 100 luego de que le fueran arrancadas dichas hojas?

2. ¿Qué posición ocupará la página que aparece con el número 888?

Ejercicio 8. El *Juego del Polinomio* consiste en que alguien piensa un polinomio de coeficientes enteros no negativos y de grado cualquiera, y nosotros tenemos que adivinar de qué polinomio se trata. Para averiguar el polinomio se nos permite preguntar a la otra persona cuánto vale su polinomio evaluado en los valores que nos parezcan oportunos. El objetivo del juego es adivinar el polinomio en la menor cantidad de evaluaciones.

Probar que siempre es posible averiguar el polinomio incógnita con dos evaluaciones.

[Sugerencia: elegir el segundo punto de evaluación luego de conocer el resultado del primero.]

Ejercicio 9. Sea $n \in \mathbb{N}$ cuya representación en base 10 es $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$. Demostrar que:

1. $2|n$ si y sólo si $2|a_0$. **2.** $4|n$ si y sólo si $4|a_1 a_0$. **3.** $8|n$ si y sólo si $8|a_2 a_1 a_0$.

4. Establecer el resultado general sugerido por los casos anteriores.

Ejercicio 10. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. Probar las siguentes afirmaciones

1. $\text{mcd}(ca, cb) = c\,\text{mcd}(a, b)$. **2.** Si $c|a$ y $c|b$ entonces $\text{mcd}(a/c, b/c) = \text{mcd}(a, b)/c$.

3. $\text{mcd}(b, a + bc) = mcd(a, b)$. **4.** Si a es par y b impar entonces $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a/2, b)$.

5. $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a - b, b)$ **6.** Si a, b son primos entre sí entonces $\text{mcd}(a - b, a + b) = 1$ o 2.

Ejercicio 11. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que a y b son primos entre sí. Probar que

1. Si $a|(bc)$ entonces $a|c$. **2.** Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$. **3.** ¿Valen 1. y 2. si $\text{mcd}(a, b) \neq 1$?

Ejercicio 12. Probar que si de los números del 1 al 200 se eligen 101 números cualesquiera, entonces hay dos al menos entre los elegidos que son primos entre sí.

Ejercicio 13. Se define la *suceción de Fibonacci* como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Demostrar que dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci son coprimos.

Ejercicio 14. Demostrar que $\text{mcd}(7k + 3, 12k + 5) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 15. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tales que $(ad - bc)|a$ y $(ad - bc)|c$. Probar que $\text{mcd}(an + b, cn + d) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. [Sugerencia: expresar el problema en términos de una matriz 2×2.]

Ejercicio 16. En cada caso, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ que verifiquen las condiciones dadas.

1. $a + b = 122$ y $\text{mcd}(a, b) + \text{mcm}(a, b) = 1802$.

2. $ab = 22275$ y $\text{mcd}(a, b) = 15$.

3. $a + b = 1271$ y $\text{mcm}(a, b) = 330 \cdot \text{mcd}(a, b)$.

4. $ab = 1008$ y $\text{mcm}(a, b) = 168$.

Ejercicio 17. Hallar $\text{mcd}(a, b)$ sabiendo que $\text{mcd}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b) = 48$ y $a^2 = b^2 + 28$.