Matemática Discreta 2

Resolución 1er Parcial curso 2004

1) a) Sean a’ y b’ dos enteros positivos primos entre sí. Probar que :

i) a'^2 y b'^2 son primos entre sí.

ii) a’ + b’ y a’b’ son primos entre sí

Sol: i) Un divisor primo común a a'^2 y b'^2 es divisor de a'^2 y como es primo debe ser divisor de a’. Análogamente es divisor de b’ y por lo tanto sería divisor primo común de a’ y b’. Como a’ y b’ son primos entre sí no tienen divisores primos comunes, así que no hay divisores primos comunes entre a'^2 y b'^2 con lo que a'^2 y b'^2 son primos entre sí.

ii) Si p es un divisor primo de a’b’ y de a’+b’ entonces como divide a a’b’ entonces divide a a’ o divide a b’. Supongamos que divide a a’. Como divide a a’ + b’ y divide a a’ entonces divide a b’ y sería un divisor primo común a a’ y b’. Como a’ y b’ son primos entre sí no tienen ningún divisor primo común y por lo tanto a’+b’ y a’b’ tampoco, con lo que son primos entre sí.

b) Determinar las parejas de enteros positivos a, b tales que :

$$5\,(a+b)^2 = 147\,\mathrm{mcm}(a,b)$$

Sug. : Escribir a = ca’ y b = cb’ donde c es un número positivo bien conocido que depende de a y b. Relacionar con la parte anterior.

Sol: Tomamos c = mcd(a,b). Tenemos que ab = c*mcm(a,b)

Entonces $5\,c(a'+b')^2 = 147\,a'b' = 3*49*a'b'$

Como a’+b’ es primo con a’b’ entonces $(a'+b')^2$ es primo con a’b’ y por tanto divide a 3*49. 3 y 49 son primos entre sí y como $(a'+b')^2$ no divide a 3 debe dividir a 49 y por lo tanto a’ + b’ = 7. Entonces 5c = 3a’b’.

Como a’ y b’ son primos entre sí tenemos que 5| a’ o 5| b’ con lo que a’ = 5 y b’ = 2 o a’ = 2 y b’ = 5. Entonces c = 6 y por lo tanto a = 30 y b = 12 o a= 12 y b = 30

2) Sea a un divisor cualquiera de 360 y sea b un divisor cualquiera de 588.

a) ¿Qué valores puede tomar mcd(a,b) ?

Sol.: mcd(a,b) es divisor común de a y de b y por tanto es divisor común de 360 y 588, con lo que es divisor de mcd(360,588) = 12.
Mcd(a,b) puede ser 12, 6, 4, 3, 2, 1

b) Dar un ejemplo de parejas a, b con a < b para cada una de las respuestas de la parte a)

Sol.: mcd(12,84) = 12, mcd(6, 84) = 6 , mcd (4,84) = 4 , mcd(3, 84) = 3,
Mcd(2,84) = 2, mcd(1,84) = 1

3) a) Resolver el sistema de ecuaciones con congruencias:

$$4x - 5y \equiv 13 \mod 18,$$
$$3x + 2y \equiv 8 \mod 18,$$

Sol. : Restando $x - 7y \equiv 5 \mod 18$

$x \equiv 5 + 7y \mod 18$

Sustituyendo en la segunda : $3(5+7y) + 2y \equiv 8 \mod 18$

$23y \equiv 11 \mod 18$

$5y \equiv 11 \mod 18$

3 = 18 – 3*5

2 = 5 – 3

1 = 3 - 2

1 = 3 – (5- 3) = 2*3 – 5

1 = 2*(18 – 5*3) – 5 = 2*18 – 7*5
Multiplicando por 11 : 11 = 2*18 – 77* 5
Así que (-77)*5 ≡ 11 mod 18
y ≡ 13 mod 18 y entonces x ≡ 5 + 7*13 = 96 mod 18
x ≡ 6 mod 18

b) Hallar el resto de la división de 12^{1257} entre 5

Sol.: Por Fermat $12^4 \equiv 1(5)$. 1257 = 4*314 + 1 con lo que

$12^{1257} = 12^{4*314+1} = (12^4)^{314} 12 \equiv 12 \equiv 2 \quad (5)$

Por lo tanto el resto de la división entre 5 vale 2

c) Calcular el resto de la división de 11^{34} entre 12

Sol.: $11^{34} \equiv (-1)^{34} \quad (12) \qquad (-1)^{34} = 1$

Por lo tanto el resto de la división entre 12 vale 1

4) En Z se considera la operación ⊗ definida por :

a ⊗ b = ab –2(a+b) + 6

a) Probar que la operación ⊗ es conmutativa, asociativa y posee un elemento neutro que se hallará.

Sol.: b ⊗ a = ba –2(b+a) + 6 = ab –2(a+b) + 6 = a ⊗ b , con lo que es conmutativa.
(a ⊗ b) ⊗ c = (ab – 2(a+b) +6) ⊗ c = (ab – 2(a+b) +6)c
–2(ab – 2(a+b) +6 + c) + 6 = abc –2ac – 2bc + 6c – 2ab + 4a + 4b
-2c – 6.
a ⊗ (b ⊗ c) = a ⊗ (bc-2(b+c)+6) = a(bc-2(b+c)+6) –2(a+bc-2(b+c)+6)
+6 = abc –2ab – 2ac+6a-2a-2bc+4b+4c-6
Ambas expresiones son iguales así que la operación es asociativa.
Neutro: a ⊗ x = a para todo a entero.
a = ax – 2(a+x) +6. Si a = 0 queda: 0 = -2x + 6 , con lo que x sería 3.
En efecto a ⊗ 3 = 3a -2(a+3) +6 = a. Entonces Neutro = 3

b) Hallar los elementos de Z que tienen inverso por ⊗ .
Deducir que (Z, ⊗) no es un grupo.

Sol.: a ⊗ b = 3 . ab – 2(a+b) + 6 = 3 sii b(a-2) = 2a-3. Si a = 2 no hay ningún b que verifique. Si a ≠ 2, entonces b=(2a-3)/(a-2)= 2 + 1/(a-2) que será entero sii a-2 divide a 1 sii a-2 pertenece a {-1,1} sii a pertenece a {1,3}
Si a =1 el inverso es 1 y si a =3 el inverso es 3 (normal por ser neutro).
Los elementos invertibles son 1 y 3.
Además para otro a el valor de b que resultaría no es en general entero. Así que hay elementos sin inverso y por lo tanto (Z, ⊗) no es un grupo.

5) Sean *a* y *b* dos elementos de un grupo G tales que :
a ≠ e , b ≠ e, $a^7 = e$, $b^3 = e$, $ab = ba^2$

a) Probar que G no es abeliano

Sol.: Si G fuera abeliano entonces $ba^2 = ba$ con lo que cancelando términos quedaría a = e. Por tanto G no es abeliiano.

b) Probar que $(ab)^2 = b^2a^6$

Sol.:

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = (ba^2)(ba^2) = (ba)(ab)a^2 = (ba)(ba^2)a^2 = b(ab)a^4 = b(ba^2)a^4 = b^2a^6$$

c) Probar que $(ab)^3 = e$

Sol.: $(ab)^3 = (ab)^2(ab) = (b^2a^6)(ab) = b^2a^7b = b^2eb = b^2b = b^3 = e$

Nota general: Redactar con cuidado. La presentación y la justificación de los resultados forman parte de la calificación final.

Puntajes:

1) 9 : a) 4 : i) 2 ii) 2 b) 5
2) 6 : a) 3 b) 3
3) 11 : a) 7 b) 2 c) 2
4) 7 : a) 4 b) 3
5) 7 : a) 2 b) 3 c) 2