Matemática Discreta 2

2° Parcial curso 2003

15 / 7 / 2003

RESOLUCIÓN

a) Sea G un grupo tal que |G| = 100. Demostrar que G tiene un subgrupo normal no trivial (esto es, distinto de G y de {e}).

Dem: Por el teorema de Sylow, G tendrá n_5 subgrupos de orden 25 cumpliéndose que n_5 = 1 (mod 5) y n_5 divide a 100, por lo tanto n_5 debe ser 1 y por lo tanto el único subgrupo correspondiente deberá ser normal.

b) Sea G un grupo tal que |G| = 66

i)Probar que existe H subgrupo **normal** de G tal que |H| = 11.

Dem: igual que antes, n_{11} = 1 (mod 11) y debe dividir a 66, por lo que n_{11} = 1 y el subgrupo correspondiente será normal

ii) Probar que existe K subgrupo de G tal que |K| = 3.

Dem: tanto por el teorema de Sylow como por el de Cauchy debe existir un tal subgrupo por ser 66 múltiplo de 3.

iii) Probar que existe S subgrupo de G tal que |S| = 33.

Dem: Si llamamos N al subgrupo de la parte i) y H al de la parte ii), por el ejercicio 2 del práctico 7, el conjunto HN es un subgrupo de G y, por el ej 15 del práctico 7, tiene orden |H||N|= 33.

iv) Probar que S es normal en G

Dem: El índice de HN en G es 2, pues |G/HN|= |G|/|HN| = 2. Pero todo subgrupo S con índice 2 es normal, pues para todo $x\in G\backslash S$, G = S $\cup$ xS = S $\cup$ Sx donde las uniones anteriores son disjuntas, por lo tanto xS = Sx.

.

1) a) ¿Cuál es el máximo orden de un elemento de S_7 ? Justificar. Dar un ejemplo de una permutación de S_7 que tenga ese orden. Calcular su cuadrado y su inverso.

Sol:

- el máximo orden es12, pues dada una permutación de S_7, su descomposición en ciclos disjuntos será de alguna de las siguientes formas: (a), (a b), (abc), (abcd), (abcde), (abcdef), (abcdefg), (ab)(cd), (ab)(cde),(ab)(cdef),(ab)(cdefg),(abc)(def), (abc)(defg),(ab)(cd)(ef), (ab)(cd)(efg), cuyos órdenes son1,2,3,4,5,6,7,2,6,4,10,3,12,2,6, respectivamente.
- Un ejemplo es p = (123)(4567), su cuadrado será p^2 =(132)(46)(57) y su inverso p^{-1} =(321)(7654).

b) Dados *s* = (1 2 3) y *t* = (1 3 4) de S_4 , hallar el subgrupo de S_4 con la mínima cantidad de elementos y que contiene a *s* y a *t*. Justificar. (Puede servir observar que *s* y *t* son pares).

Sol: Hay varias maneras: **1)** Como s y t son pares A_4 (subgrupo alternante) es un subgrupo que contiene a s y a t. Si H es un subgrupo con la mínima cantidad de elementos que contiene a s y a t entonces H está incluido en A_4 ya que si no fuera así H intersección A_4 es un subgrupo que contiene a s y a t con menos elementos que H. Absurdo. Como e, s, s^2, t, t^2, s.t y t.s están en H y son todos distintos, se tiene que |H|>6. Como H es subgrupo de A_4 entonces |H| divide a 12 y por lo tanto |H|= 12 con lo que H = A_4. **2)** Como s tiene orden 3, y $|S_4|$=24, por Lagrange, el sugrupo H buscado, solo puede tener 3, 6, 12 o 24 elementos. Si tuviera 6, por Sylow, tendría un único subgrupo de orden 3, lo cual es falso ya que <s> y <t> son subgrupos de orden 3 diferentes. Por lo tanto H tiene orden o bien 12 o bien 24. Como A_4 contiene 12 elementos y contiene a s y a t, será el subgrupo buscado. **3)** hallar todo los productos posibles y ver que así se llega a A_4.

3) a) Hallar un *a* natural , 110 $\leq$ *a* $\leq$ 126, tal que $[a]_{165}$ es una unidad en $(Z_{165},+,.)$ y $[a]_{238}$ es una unidad en $(Z_{238},+,.)$

Sol: como 165 = 3.5.11 y 238 = 2.7.17, basta ver los 110 $\leq$ *a* $\leq$ 126 que no sean múltiplos ni de 2, ni de 3, ni de 5 ni de 7 ni de 17,

110,111,112,113,114,115,116,117, 118,119,120,121,122,122,123,124, 125,126

no múltiplos de 2: 111,113, 115,117, 119,121, 123, ,125,

no múltiplos de 3:113, 115, 119, 121, 125,
no múltiplos de 5:113, 119, 121,
no múltiplos de 7:113, 121,
no múltiplos de 11:113,
no múltiplos de 17:113

Por lo tanto *a* puede ser 113

b) Hallar $([a]_{165})^{-1}$ en Z_{165} y $([a]_{238})^{-1}$ en Z_{238}.

Sol: Aplicamos el algoritmo de Euclides a *a* = 113: 165 = 113.1+52; 113 = 52.2+ 9; 52 = 9.5 + 7; 9 = 7.1+2; 7 = 2.3+1 $\Rightarrow$ 1 = 7+2.3 = 7 –(9-7).3 = 7.4-9.3= (52-9.5).4-9.3=52.4-9.23=52.4-(113-52.2).23 = 52.50-113.23=(165-113).50-113.23= 165.50-113.73, por lo tanto $([113]_{165})^{-1}$=[-73]=[92]. Por otro lado 238 = 113.2+12; 113= 12.9+5; 12 = 5.2+2; 5 = 2.2+1 $\Rightarrow$ 1 = 5-2.2= 5-(12-5.2).2= 5.5-12.2= (113-12.9).5-12.2=113.5-12.47=113.5-(238-113.2).47 = 113.99-238.47 por lo tanto $([113]_{238})^{-1}$=[99]

4) Se considera el anillo A = $(Z_2 \times Z_8, +, .)$
Sea J = { (0,0) , (0,2) , (0,4) , (0,6) }

a) Probar que J es un ideal de A.
Dem: basta observar que J = (0,2)A

b) Hallar explícitamente los elementos del anillo cociente A / J.
Sol: los elementos son J= { (0,0) , (0,2) , (0,4) , (0,6) };J+(0,1) = { (0,1) , (0,3) , (0,5) , (0,7) }; J+(1,0) = { (1,0) , (1,2) , (1,4) , (1,6) } y J + (1,1) = { (1,1) , (1,3) , (1,5) , (1,7) }.

c) Construir las tablas de la suma y producto en A / J.

Sol:

+	[(0,0)]	[(0,1)]	[(1,0)]	[(1,1)]
[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,1)]	[(1,0)]	[(1,1)]
[(0,1)]	[(0,1)]	[(0,0)]	[(1,1)]	[(1,0)]
[(1,0)]	[(1,0)]	[(1,1)]	[(0,0)]	[(0,1)]
[(1,1)]	[(1,1)]	[(1,0)]	[(0,1)]	[(0,0)]

x	[(0,0)]	[(0,1)]	[(1,0)]	[(1,1)]
(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]
[(0,1)]	[(0,0)]	[(0,1)]	[(0,0)]	[(0,1)]
[(1,0)]	[(0,0)]	[(0,0)]	[(1,0)]	[(1,0)]
[(1,1)]	[(0,0)]	[(0,1)]	[(1,0)]	[(1,1)]

d) ¿Es A / J un cuerpo ? ¿Es un dominio de integridad?. Justificar.
Sol. No es ni cuerpo ni dominio de integridad por tener divisores de cero, por ejemplo, [(1,0)] [(0,1)] = [(0,0)]

a) Probar : Si f(x), g(x) $\in$ K[x] (K cuerpo) tienen una raíz común (esto es, existe *a* $\in$ K tal que f(*a*)=0 y g(*a*)=0) entonces f(x) y g(x) no son primos entre sí. (Dos polinomios son primos entre si su MCD es una constante diferente de cero)
Dem: Si fueran primos entre si tendríamos que existirían polinomios s(x) y t(x) tales que s(x)f(x)+t(x)g(x) = k$\neq$0, pero si *a* fuera raíz de f y g, entonces k=s(*a*)f(*a*)+t(*a*)g(*a*) = s(*a*)0+t(*a*)0 = 0+0=0 contradiciendo lo supuesto.

b) Hallar todos los polinomios de 2° grado de $Z_3[x]$ que son irreducibles.
(*Sug.:* Hallar primero los polinomios mónicos irreducibles)
Sol: Los polinomios mónicos de 2º grado de Z3[x] son
x^2
$x^2 +1$
$x^2 -1$
x^2+x;
x^2+x+1;
x^2+x-1;
x^2-x;
x^2-x+1;
x^2-x-1;
De ellos, los irreducibles son los que no tiene raices en Z3, esto es
$x^2 +1$
x^2+x-1;
x^2-x-1;
Para obtener los otros polinomios irreducibles, basta multiplicarlos por la única unidad diferente de 1, esto es, -1 (o 2), obteniendo
$-x^2 -1$
$-x^2-x+1$;
$-x^2+x+1$;

Puntajes :
1) 14 : a) 4 b) 10 : i) 3 ii) 1 iii) 3 iv) 3
2) 13 : a) 5 b) 8
3) 12 : a) 4 b) 8
4) 10 : a) 2 b) 2 c) 4 d) 2
5) 11 : a) 4 b) 7