Exámen Matemática Discreta 2 Julio 2002

(Resolución)

1) a) Hallar a y b enteros positivos tales que : $a + b = 122$

$mcd(a,b) + mcm(a,b) = 1802$

Res.: mcd(a,b) divide a 122=2x61.
Mcd(a,b) puede ser 1, 2, 61 ó 122. 61 y 122 no dividen a 1802, por lo tanto mcd(A,b) es 1 o 2.
Si mcd(a,b) =1, => mcm(a,b) =1801, => a.b = 1801, pero a+b = 122 => $a^2 - 122\,a + 1801 = 0$ Ecuación sin soluciones naturales.
Si mcd(a,b) =2, => mcm(a,b) =1800, => a.b = 3600, pero a+b = 122 => a= $(122 \pm \sqrt{(122^2 - 4x3600)})/2 = 50$ o 72. Por lo tanto a = 50 y b = 72.

b) Resolver el sistema de ecuaciones con congruencias : $11x - 7y \equiv 10\ (45)$

$4x + 14y \equiv 12\ (45)$

Res.: el sistema es equivalente al sistema: $11x - 7y \equiv 10\ (5) \Leftrightarrow x + 3y \equiv 0\ (5)$

$4x + 14y \equiv 12\ (5) \Leftrightarrow -x - y \equiv 2\ (5)$

$11x - 7y \equiv 10\ (9) \Leftrightarrow 2x + 2y \equiv 1\ (9)$

$4x + 14y \equiv 12\ (9) \Leftrightarrow 4x + 5y \equiv 3\ (9)$

Sumando las primeras dos ecuaciones obtenemos $2y \equiv 2\ (5)$,=> $y \equiv 1(5)$, $x \equiv -3 \equiv 2\ (5)$
Como 2.5 = 10 = 1 (9) y 2.4 = -1 (9), obtenemos de las últimas 2 ecuaciones:

$x + y \equiv 5\ (9)$

$-x + y \equiv 6\ (9)$

De las cuales obtenemos $2\,y \equiv 11 \equiv 2\ (9)$ => $y \equiv 1\ (9)$ => $x \equiv 4\ (9)$.
Como $y \equiv 1\ (5)$, tenemos que $y \equiv 1\ (45)$. Como $x \equiv 2\ (5)$, entonces $x \equiv 22\ (45)$.

2) a) Sea G un grupo abeliano (no necesariamente finito) y n un número entero positivo; demostrar que H = { $x \in G$ / orden(x) divide a n }es un subgrupo de G

Sol.: Producto: si x, y están en H, entoces sus órdenes dividen a n, por lo tanto $x^n = e$ y $y^n = e$, por lo tanto, por la conmutatividad $(xy)^n = x^n y^n = e.e = e$.
Inverso: $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = (e)^{-1} = e$.

b) Se considera G = $(Z_4 \times Z_2\ , +)$

((a , b) + (c , d) = (a + c , b + d) donde a + c es la suma módulo 4 y b + d es la suma módulo 2)

i) Hallar H = < (2 , 1) > (subgrupo generado por (2 , 1))

Sol. : < (2 , 1) > ={(2 , 1) , (0 , 0)}

ii) Hallar los elementos del grupo cociente G / H

Sol.: {(2 , 1) , (0 , 0)}, {(3 , 1) , (1 , 0)}, {(2 , 0) , (0 , 1)}, {(3 , 0) , (1 , 1)}

iii) Hallar la tabla correspondiente a G / H

Sol. Llamemos xx a la clase de (x,x).

	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	01	00
11	11	10	00	01

iv) ¿Es G / H cíclico ? Justificar.

Sol.: Si por que <10> = {10, 01, 11, 00}

3) a) Sea A un anillo conmutativo. Se considera $J = \{ x \in A \ / \ \exists$ n tal que $x^n = z\}$
(z es el elemento nulo del anillo). Probar que J es un ideal de A
(*Sug.* : En un anillo conmutativo vale la fórmula del Binomio de Newton)

Sol.: Suma: sean x e y en J y n1 y n2 tales que $x^{n1} = y^{n2} = z$, entonces si n = n1 + n2 tenemos que los coeficiente de $(x+y)^n$ son de la forma $c.x^i y^{n-i}$ con $0 \le i \le n$, por lo tanto si $i \le n1$, entonces $n-i \ge n2 \Rightarrow y^{n-i} = z \Rightarrow c.x^i y^{n-i} = z$. En cambio si $i > n1$, entonces $x^i = z \Rightarrow c.x^i y^{n-i} = z$.

Opuesto: $(-x)^{n1} = (-1)^{n1} x^{n1} = (-1)^{n1} z = z$

Producto: $(ax)^{n1} = a^{n1} x^{n1} = a^{n1} z = z$.

b) i) En $Z_5[x]$ hallar un polinomio f(x) de segundo grado tal que : f (2) = 3 , f (3) = 4 , f (4) = 1

Sol. Si $f(x) = a x^2 + bx + c$, entoncess:
$$- a + 2 b + c \;\; 3 \equiv 0 \ (5)$$
$$- a - 2 b + c \equiv -1 \ (5)$$
$$a - b + c \equiv 1 \ (5)$$
Resolviendo el sistema por escalerización: $a \equiv 3$, $b \equiv 1$, $c \equiv 4$.

ii) ¿ Es f (x) reducible ? Justificar.

f(0) = 4 y f(1) = 3+1+4 = 3, por lo tanto f no tiene raices y por lo tanto no es reducible.

4) Se considera la función booleana $f : B^4 \rightarrow B$ tal que :
$$f(w, x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad w + x = wx \quad \text{o bien} \quad y + z = yz \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Hallar la forma normal conjuntiva de f.

Sol. Como w+x = wx si y solo si w = x. La función será 0 si y solo si $w \neq x$ y $y \neq z$. Es decir para las 4-uplas (0,1,0,1), (0,1,1,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), por lo tanto la f.n.c. de f es $f(w, x, y, z) = (w+x^c+y+z^c)(w+x^c+y^c+z)(w^c+x+y+z^c)(w^c+x+y^c+z)$.

Puntajes : 1) 28 : a) 14 b) 14
2) 30 : a) 14 b) 16 : i) 4 ii) 4 iii) 4 iv) 4
3) 28 : a) 14 b) 14 : i) 11 ii) 3
4) 14