Matemática Discreta 2

Primer Examen curso 2004 **17 de Julio de 2004**

N° Examen =

Apellidos Nombre C.I.

Nota Importante: Redactar con cuidado. La presentación y justificación de los resultados forman parte de la calificación final.

1) a) Probar que mcd(3 + 7k , 5 + 12k) = 1 para todo k natural
b) Un número de 6 cifras es de la forma 3a33b5 (a y b son dígitos decimales) Hallar el número si se sabe que es divisible por 225
c) Al dividir 730 y 820 entre n se obtiene como resto 2 y 1 respectivamente. Si n es natural, ¿cuáles son los valores de n?

2) Sea G un grupo abeliano. Se sabe que existe **a** elemento de G de orden 4 y **b** elemento de G de orden 25. Hallar (en función de **a** y **b**) un elemento de G de orden 10. Justificar (que efectivamente el orden es 10).

3) En el grupo (*Z*,+) notaremos con <n> el subgrupo generado por n $\in Z$
Probar que $\forall k, m \geq 0, \text{ se cumple que } \langle k \rangle / \langle km \rangle \cong Z_m$ (*Sug*.: Encontrar un homomorfismo adecuado y usar el Primer Teorema del Homomorfismo)

4) Sea A = $(Z_5 \times Z_5, \oplus, \otimes)$ definido como :
(a , b) $\oplus$ (a' , b') = (a + a' ,b + b') ; (a , b) $\otimes$(a' , b')= (a.a' +2b.b' , a.b' + a'.b)
(+ y . son suma y producto módulo 5)
a) Demostrar que A es un anillo conmutativo con elemento unidad
b) Hallar un x de A tal que $\mathrm{x}^2 = u \oplus u$ (u es el elemento unidad de A). Probar que x es una unidad de A (tiene inverso con la operación $\otimes$)
c) Demostrar que la función f : A $\to$ A tal que f ((a,b)) = (a , -b) es un isomorfismo de anillos.

5) Sea K un cuerpo de elementos { 0 , 1 , a , b } donde : 1+1=0, a+a=0, b+b=0, a+1=b, b+1=a, a+b=1 ; a.a=b, a.b=1, b.b=a
a) Hallar Cociente y Resto de dividir P(x) = $x^3 + \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + 1$ entre Q(x) = $\mathrm{b}x^2 + x + \mathrm{a}$ en K[x]
b) Determinar si H(x) = $\mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2 + x + 1$ es irreducible en K[x]. Justificar.

6) a) Dada t(x,y,z) = $xy + \overline{(x + yz)} + (x + \overline{y})(z + \overline{x}\, y)$, hallar la forma normal disyuntiva (f.n.d.) de t(x,y,z)
b) Sea g(x,y,z) = $xy + \overline{y}\, z + \overline{x}\, z$ y h(x,y,z) = $(x + \overline{y})(z + \overline{x})(y + \overline{z})$ se considera la ecuación booleana $(f + g)(\overline{f} + h) = f + h$ donde f(x,y,z) es una función booleana. Probar que o bien no existe ninguna f que verifique lo anterior o en caso contrario encontrar una f que verifique la ecuación.

Puntajes:
1) 24 : a) 8 b) 10 c) 6
2) 13
3) 13
4) 21 : a) 8 b) 6 c) 7
5) 18 : a) 9 b) 9
6) 11 : a) 5 b) 6