Matemática Discreta 2

2° Parcial curso 2004 **29 de Junio de 2004**

Nota Importante: Redactar con cuidado. La presentación y justificación de los resultados forman parte de la calificación final.

1) Sea G un grupo tal que |G| = 1147. Probar que G es abeliano.

Sol: Factorizando 1147 se obtiene que 1147 = 31*37. 31 y 37 son ambos números primos. Además 31 no divide a 37 – 1 = 36. Por lo tanto por un Teorema dado en Teórico se tiene que G es cíclico.
Como es cíclico resulta ser abeliano.

2) a) En S_9 calcular $\tau.\sigma.\tau^{-1}$ siendo $\tau = (12)(57)(427)$ y $\sigma = (135)$
(Se expresará el resultado como un ciclo o producto de ciclos disjuntos)

Sol. : $\tau.\sigma.\tau^{-1} = (12)(57)(427)\,(135)(724)(75)(21)$ = (2 3 7)

b) Probar que no existe $\lambda \in S_8$ tal que $\lambda.(123)\lambda^{-1} = (13)(578)$

Sol.: Cualquiera sea λ , como ella y su inversa tienen la misma paridad, se tiene que el miembro a la izquierda de la igualdad es siempre par mientras que la permutación (13)(578) es impar.

3) Sea G un grupo abeliano. Se dice que un subgrupo H de G es denso si H $\cap$ K $\neq$ {e} para todo subgrupo K de G tal que K $\neq$ {e}

a) Probar que si un subgrupo H de G es denso entonces todo elemento del grupo cociente G / H tiene orden finito.

Sol: $\exists\ k \neq 0 / (Hg)^k = H \Leftrightarrow \exists\ k \neq 0 / g^k \in H$ lo cual es cierto porque
H $\cap$ <g> $\neq$ {e} $\Rightarrow \exists\ k \neq 0 / g^k \in H$

b) Probar que si un subgrupo H es denso entonces todo elemento de G de orden igual a un número primo pertenece a H.

Sol: Sea o(g) = p primo. <g> $\cap$ H $\neq$ {e} $\Rightarrow \exists\ k \neq 0 / g^k \in H$.
Como k no es 0 ni múltiplo de p entonces mcd(k,p)=1.
Existen a, b enteros / ak+bp = 1 : $g = g^1 = g^{ak+bp} = (g^k)^a (g^p)^b = (g^k)^a$
Como H es subgrupo y $g^k \in H \Rightarrow g = (g^k)^a \in H$

c) Dar un ejemplo de un grupo abeliano G con un subgrupo H denso (verificar que lo es) y H $\neq$ G

Sol.: En (Z,+), considero H = números pares. Los subgrupos de Z, como éste es cíclico, son cíclicos y generados por un elemento de Z.
Si K = <k> es un subgrupo / k no es 0, se tiene que en K está 2k que pertenece a H.

4) Sea A un anillo conmutativo con elemento unidad u y sea:

$$T_2(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix} / a,b,c \in A, ac = u \right\}$$ donde z es el neutro aditivo de A.

a) Demostrar que G = ($T_2(A)$, x) es un grupo donde x es el producto de matrices usual.

Sol.: - El producto es cerrado en $T_2(A)$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a' & b' \\ z & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & ab'+bc' \\ z & cc' \end{bmatrix}$$ donde (aa’)(cc’)=(ac)(a’c’)=u.u=u

- El producto es asociativo:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a' & b' \\ z & c' \end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix} a'' & b'' \\ z & c'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & ab'+bc' \\ z & cc' \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a'' & b'' \\ z & c'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa'a'' & aa'b''+ab'c''+bc'c'' \\ z & cc'c'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ z & c' \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a'' & b'' \\ z & c'' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a'a'' & a'b''+b'c'' \\ z & c'c'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa'a'' & aa'b''+ab'c''+bc'c'' \\ z & cc'c'' \end{bmatrix}$$

- Existe neutro : $\begin{bmatrix} u & z \\ z & u \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u & z \\ z & u \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} u & z \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix}$$

- Existe inverso :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a' & b' \\ z & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & ab'+bc' \\ z & cc' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & z \\ z & u \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} aa' = u \Leftrightarrow a' = c \\ ab'+bc' = z \Leftrightarrow b' = -b \\ cc' = u \Leftrightarrow c' = a \end{cases}$$

Entonces $\begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c & -b \\ z & a \end{bmatrix}$

b) ¿Es G abeliano cualquiera sea A? Demuéstrelo o encuentre un contraejemplo.

Sol.: $\begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a' & b' \\ z & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & ab'+bc' \\ z & cc' \end{bmatrix}$ Haciendo el producto en el otro orden

debería cumplirse que ab'+bc' = a'b+b'c

Considerando las matrices reales tenemos que si b = 0 , a= 2 , c= ½ y b' = 1 lo anterior no se cumple.

c) Demuestre que el conjunto de matrices de G con a = c = u es:

i) Subgrupo de G ii) Es normal en G iii) Es isomorfo al grupo (A, +)

Sol.: Llamaremos con B a este conjunto de matrices.

i) Alcanza con que el producto sea cerrado en B y que el inverso $\in$ B

$$\begin{bmatrix} u & b \\ z & u \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} u & b' \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & b'+b \\ z & u \end{bmatrix} \ ; \ \begin{bmatrix} u & b \\ z & u \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} u & -b \\ z & u \end{bmatrix}$$

ii) $\begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} u & b' \\ z & u \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -b \\ z & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b+b'c \\ z & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & b'c^2 \\ z & u \end{bmatrix}$

que está en el subgrupo B

iii) Sea $f: A \to B \,/\, f(b) = \begin{bmatrix} u & b \\ z & u \end{bmatrix}$ Está claro que f es biyectiva.

$$f(b+b') = \begin{bmatrix} u & b+b' \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & b \\ z & u \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} u & b' \\ z & u \end{bmatrix} = f(b).f(b')$$

Como f es isomorfismo resultan ser isomorfos los grupos.

d) Si A = Z_n : i) ¿ Cuántos elementos tiene $T_2(A)$?

Sol.: b puede ser cualquiera, a debe ser invertible en Z_n . Hay φ (n) elementos invertibles en Z_n (φ es la función de Euler).

Elegido a el c es único ya que es el inverso multiplicativo de a en Z_n

Entonces $|T_2(A)|$ = nφ (n)

ii) Si n = 3 , demuestre que $T_2(A)$ es cíclico.

Sol: $T_2(Z_3) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$

Si llamamos g a la quinta matriz de la lista anterior tenemos:

$$g^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, g^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, g^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g^5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, g^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto el grupo es igual a <g>

5) a) Hallar todos los subanillos del anillo A = $(Z_6 \ ,+, \ .\ )$. Justificar.

Sol.: Como (Z_6 ,+) es cíclico, sus subgrupos también lo son

<0> = {0} , <1> = Z_6 , <2> = {0,2,4} , <3> = {0,3} , <4> = <2> , <5>=<1>

Los 4 anteriores son subanillos de A

b) Probar que todos los subanillos no triviales de A tienen elemento unidad y que es distinto del elemento unidad de Z_6

Sol.: El elemento unidad de <3> es 3: 0.3 = 0 , 3.3 = 3 3 distinto de 1

El elemento unidad de <2> es 4: 0.4=0 , 2.4 = 2 , 4.4 = 4 4 distinto de 1

6) a) Dado P(x) = $x^3 + 5x^2 + ax + 4 \ \in Z_7[x]$, hallar todos los valores de a para los cuales resulta ser P(x) irreducible en $Z_7[x]$. Justificar.

Sol.: P(0)=4, P(1) = a+3 , P(2)= 2a+4,P(3)=3a-1,P(-3)=1-3a,P(-2)=-2a+2, P(-1)=1-a

Para que todos estos valores sean distintos de 0 debe ser a = 0 , 2, 3 , 6. Como P(x) es de tercer grado y no tiene raíces en Z_7 resulta ser irreducible en $Z_7[x]$

b) Dado Q(x) = $x^4 + bx^3 + 2x^2 + x + 2 \ \in Z_3[x]$. Hallar b para que Q(x) sea irreducible en $Z_3[x]$. Justificar que efectivamente lo es.

Sol.: Q(0) = 2 , Q(1) = b , Q(-1) = 1 – b . Debe ser entonces b = 2

Veamos que Q(x) no es el producto de 2 polinomios de 2° grado (que se pueden tomar mónicos pues Q lo es)

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + a'x + b') =$$

$$x^4 + (a + a')x^3 + (b + b' + aa')x^2 + (ba' + b'a)x + bb'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + a' = 2 \\ b + b' + aa' = 2 \\ ba' + b'a = 1 \\ bb' = 2 \end{cases}$$

Si bb’ = 2 entonces b=1 , b’ = 2 o bien b=2, b’ = 1 (que son casos simétricos). Estudiamos el primero: a+ a’ = 2 , aa’ =2 , a’ + 2a = 1

De aa’=2 sale que a=1 , a’ =2 o bien a= 2, a’ = 1 pero entonces a + a’ = 0 y por tanto el sistema es incompatible.

El caso b = 2 , b’ = 1 también genera un sistema incompatible.

Por lo tanto Q(x) es irreducible en $Z_3[x]$

Puntajes:

1) 6
2) 9 : a) 5 b) 4
3) 12 : a) 4 b) 4 c) 4
4) 18 : a) 4 b) 3 c) 6 : i) 2 ii) 2 iii) 2 d) 5 : i) 2 ii) 3
5) 6 : a) 3 b) 3
6) 9 : a) 4 b) 5