Matemática Discreta 2

2° Parcial curso 2004 **29 de Junio de 2004**

N° Parcial =

Apellidos Nombre C.I.

Nota Importante: Redactar con cuidado. La presentación y justificación de los resultados forman parte de la calificación final.

1) Sea G un grupo tal que |G| = 1147. Probar que G es abeliano.

2) a) En S_9 calcular $\tau.\sigma.\tau^{-1}$ siendo $\tau = (12)(57)(427)$ y $\sigma = (135)$
(Se expresará el resultado como un ciclo o producto de ciclos disjuntos)
b) Probar que no existe $\lambda \in S_8$ tal que $\lambda.(123)\lambda^{-1} = (13)(578)$

3) Sea G un grupo abeliano. Se dice que un subgrupo H de G es denso si H $\cap$ K $\neq$ {e} para todo subgrupo K de G tal que K $\neq$ {e}
a) Probar que si un subgrupo H de G es denso entonces todo elemento del grupo cociente G / H tiene orden finito.
b) Probar que si un subgrupo H es denso entonces todo elemento de G de orden igual a un número primo pertenece a H.
c) Dar un ejemplo de un grupo abeliano G con un subgrupo H denso (verificar que lo es) y H $\neq$ G

4) Sea A un anillo conmutativo con elemento unidad u y sea:
$T_2(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ z & c \end{bmatrix} / a,b,c \in A, ac = u \right\}$ donde z es el neutro aditivo de A.
a) Demostrar que G = ($T_2(A)$, x) es un grupo donde x es el producto de matrices usual.
b) ¿Es G abeliano cualquiera sea A? Demuéstrelo o encuentre un contraejemplo.
c) Demuestre que el conjunto de matrices de G con a = c = u es:
i) Subgrupo de G ii) Es normal en G iii) Es isomorfo al grupo (A, +)
d) Si A = Z_n : i) ¿ Cuántos elementos tiene $T_2(A)$?
ii) Si n = 3 , demuestre que $T_2(A)$ es cíclico.

5) a) Hallar todos los subanillos del anillo A = $(Z_6 \ ,+\ ,\ .\ )$. Justificar.
b) Probar que todos los subanillos no triviales de A tienen elemento unidad y que es distinto del elemento unidad de Z_6

6) a) Dado P(x) = $x^3 + 5x^2 + ax + 4 \ \in Z_7[x]$, hallar todos los valores de a para los cuales resulta ser P(x) irreducible en $Z_7[x]$. Justificar.
b) Dado Q(x) = $x^4 + bx^3 + 2x^2 + x + 2 \ \in Z_3[x]$. Hallar b para que Q(x) sea irreducible en $Z_3[x]$. Justificar que efectivamente lo es.

Puntajes:
1) 6
2) 9 : a) 5 b) 4
3) 12 : a) 4 b) 4 c) 4
4) 18 : a) 4 b) 3 c) 6 : i) 2 ii) 2 iii) 2 d) 5 : i) 2 ii) 3
5) 6 : a) 3 b) 3
6) 9 : a) 4 b) 5