Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 2-semipresencial

Segunda prueba - 26 de octubre de 2015.

Segunda prueba - principales errores cometidos

Ejercicio 1.

1. Sea G un grupo y H, K dos subgrupos de G. Hallar los posibles valores de $|H|$ si $K \subsetneq H \subsetneq G$, $|G| = 345$ y $|K| = 23$.

   - En esta parte, si bien la mayoría notó que por el Teorema de Lagrange, al ser $H < G$ se debe cumplir que $|H| \mid |G|$, es decir que $|H| \mid 345$ muchos no se dieron cuenta que también s debe cumplir que $|K| \mid |H|$; es decir que $23 \mid |H|$. Como K y H son subgrupos de G y $K \subset H$, resulta que K es un subrupo de H; y por lo tanto el teo de Lagrange también se aplica para K y H.
   - Muchos no notaron la condición $H \neq K$ y $H \neq G$ en la letra; por lo que olvidaron descartar 23 y 345 de las posibildades para $|H|$.

2. Hallar todos los subgrupos del grupo diedral D_5.

   - Muchos escribieron conjuntos con cardinales que no dividen a $10 = |D_5|$. Por el teorema de Lagrange, estos conjuntos no pueden ser subgrupos de D_5.
   - Al buscar subgrupos, la mayoría se concentró en que si $h \in H$ entonces $h^{-1} \in H$, pero olvidaron la condición de que H debe ser cerrado por la operación. Por ejemplo, si $r \in H$, entonces pusieron que $r^{-1} \in H$, pero olvidaron que también debe pasar que $r * r \in H$.
   - Vale la pena notar, que en general, si $h \in H < G$, entonces $< h > \subset H$, ya que al ser H cerrado por inversos y por la operación, todas las potencias de h deben estar en H.
   - Muchos se equivocaron al hallar $(rs)^{-1}$. Recuerden que en general, para grupos no abelianos, vale que si $x, y \in G$ entonces $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ (y no $x^{-1}y^{-1}$). Por lo tanto en D_5 vale que $(rs)^{-1} = s^{-1}r^{-1} = sr^4$.

Ejercicio 2.

1. Sea G un grupo. Probar que si $a \in G$ cumple $a^n = e_G$ entonces $\mathrm{o}(a) \mid n$.

   En este ejercicio, al dividir n entre $o(a)$: $n = qo(a) + r$ con $0 \leq r < o(a)$ y luego obtener que $a^r = e$, para concluir que entonces $r = 0$ muchos dijeron que esto se debe a que $o(a)$ es el menor entero (o natural) tal que $a^m = e$. Faltó decir entero (o natural) **mayor que cero**. Por lo tanto al ser $o \leq r < o(a)$ y $a^r = e$, debe ser $r = 0$.

2. Sea el grupo de invertibles módulo 58 $G = U(58)$.

   a) Calcular el orden de $g = \overline{9} \in G$.

   - Aquí muchos no tuvieron en cuenta, que como (por Euler) $9^{\varphi(58)} \equiv 1 \pmod{58}$, entonces por la parte anterior $o(9) \mid \varphi(58) = \varphi(2 \times 29) = 28$, y que por lo tanto las posibilidades para $o(9)$ son $1, 2, 4, 7, 14$ y 28.
   - Varios dieron como respuesta para $o(9)$ números que no dividen al orden del grupo (es decir a 28).

- Algunos, como por errores de cuenta no obtuvieron un exponente tal que $9^n \equiv 1 \pmod{58}$, contestaron que entonces $o(9) = \infty$.
  Primero, por Euler sabemos que dicho exponente existe. Pero además, adentro de un grupo FINITO (es decir, con una cantidad FINITA de elementos) NO PUEDE HABER elementos de orden INFINITO!!!; pues tendríamos infinitas potencias distintas de ese elemento en el grupo, pero el grupo sólo tiene una cantidad finita de elementos!!

b) Es G cíclico? Si es cíclico dar un generador del grupo G.
Aquí muchos dieron como generador del grupo elementos con orden menor que $28 = |G|$

Ejercicio 3. Sea el grupo de permutaciones de 4 elementos $G = S_4$. Determinar si los siguientes conjuntos son subgrupos de G.

1. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.
2. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

- Uno de los errores más cometidos, fue que operaron mal con las permutaciones. La mayoría se equivocó en el orden de la composición. Si $f, g \in S_4$ entonces $f \circ g$ es la composición usual de funciones, por lo tanto hay que aplicar PRIMERO g y luego f. Por ejemplo: si

  $$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

  entonces para hallar $f \circ g$ debemos calcular

  - $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 3$
  - $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2) = 1$
  - $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 2$
  - $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(4) = 4$

  y por lo tanto

  $$f * g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Otro error fue que que para comprobar (en la segunda parte) que H es cerrado con la operación, es decir que si $h, h' \in H$ entonces también $h * h' \in H$, la mayoría olvidó considerar los casos cuando $h = h'$. Por ejemplo, para la segunda parte, los elementos de H son $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, Id, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
  Para probar que H es cerrado NO BASTA con ver que $f * g$ y $g * f$ están en H, también hay que ver que $f * f$ y $g * g$ están en H. En este ejemplo esto se cumple ya que $f * f = g \in H$ y $g * g = f \in H$. (no es necesario probar cuando unos de los elementos es id ya que para todo elemento h en H, $id * h = h * id = h \in H$.

- También, como S_4 no es conmutativo, si $f * g \in H$, esto no garantiza que $f * g \in H$; es decir, para ver que H es cerrado hay que probar que ambas composiciones $f * g$ y $g * f$ están en H. En este caso como JUSTO $f * g = id$, entonces g es el inverso de f y por lo tanto también se cumple que $g * f = id \in H$. Pero en general, si $x, y \in S_4$, pasa que $xy \neq yx$ y puede pasar que $xy \in H$ pero $yx \notin H$.