Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część licencjacka)

3 lutego 2010

Zadanie 1 (1 punkt). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{N} \times \{0,1,2\}$	$\{a,b\} \times \mathbb{Q}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q} \setminus [0,1])$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$	$\{2010, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\{a,b,c\}}$	$\mathcal{P}(\{0,1\})$

Zadanie 2 (1 punkt). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{a,b\}^{\mathbb{N}\times\{0,1\}}$, to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące dowolną taką bijekcję. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 3 (1 punkt). Jeśli porządki $\langle \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq_{lex} \rangle$ i $\langle \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, \leq \rangle$, gdzie $\leq_{lex}$ jest leksykograficznym rozszerzeniem naturalnego porządku, są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 4 (1 punkt). Jeśli porządki $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 5 (1 punkt). Rozważmy zbiór $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ uporządkowany relacją porządku leksykograficznego $\leq_{lex}$ i funkcję $f : \{0,1\} \times \mathbb{N} \to \{0,1\} \times \mathbb{N}$ daną wzorem $f(a,b) = \langle a, b+1 \rangle$. Jeśli istnieje taki zbiór $X \subseteq \{0,1\} \times \mathbb{N}$, że $\sup X$ istnieje oraz $f(\sup X) \neq \sup\{f(x) \mid x \in X\}$, to w prostokąt poniżej wpisz taki zbiór X. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE".

Zadanie 6 (1 punkt). Jeśli funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadana wzorem $f(X) = \{1\} \cup \{2x \mid x \in X\}$ ma najmniejszy punkt stały, to w prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość tego punktu stałego. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 7 (1 punkt). W zbiorze $\{a,b\}^*$ wszystkich słów nad alfabetem $\{a,b\}$ definiujemy porządek prefiksowy $\preceq$ wzorem $u \preceq w \overset{\text{df}}{\iff} \exists v\ w = uv$. Niech $X = \{abba, abab, ababab\}$. Wpisz w prostokąty poniżej odpowiednio kres górny i dolny zbioru X lub słowo „NIE", jeśli odpowiedni kres nie istnieje.

$\sup X$

$\inf X$

Zadanie 8 (1 punkt). Jeśli istnieje nieskończony dobrze ufundowany (czyli regularny) i liniowy porządek, który nie jest izomorficzny z naturalnym porządkiem w zbiorze liczb naturalnych, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiego porządku. W przeciwnym wypadku wpisz słowo „NIE".

Imię i nazwisko:

Zadanie 9 (1 punkt). Jeśli termy $f(h(z), x)$ i $f(y, g(y))$ są unifikowalne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny unifikator tych termów. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 10 (1 punkt). Jeśli termy $f(h(x), x)$ i $f(y, g(y))$ są unifikowalne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny unifikator tych termów. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 11 (1 punkt). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg s \vee r,\ \neg q \vee r,\ s \vee q,\ \neg r \vee \neg p,\ \neg r \vee p\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 12 (1 punkt). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee \neg q \vee r,\ \neg p \vee q,\ \neg r \vee \neg s,\ \neg r \vee s\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Imię i nazwisko:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część zasadnicza)

3 lutego 2010

Za każde z poniższych zadań można otrzymać od -2 do 16 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.

Zadanie 13. Rozważmy relację równoważności na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ zdefiniowaną wzorem

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{Z}\ \ f(n) - g(n) = 2k.$$

(a) Podaj moc klasy abstrakcji takiej funkcji $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $z(n) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij odpowiedź.

(b) Udowodnij, że wszystkie klasy abstrakcji relacji $\sim$ są równoliczne.

(c) Podaj moc zbioru ilorazowego $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ (czyli zbioru klas abstrakcji relacji $\sim$). Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 14. Rozważmy kratę zupełną $\langle X, \leq \rangle$ i funkcję monotoniczną $f : X \to X$. Niech $a = \inf\{f^i(\top) \mid i \in \mathbb{N}\}$, gdzie $\top$ oznacza największy element zbioru X a f^i oznacza i-krotne złożenie funkcji f.

(a) Udowodnij, że dla każdego punktu stałego x funkcji f zachodzi nierówność $x \leq a$.

(b) Udowodnij, że jeśli X jest zbiorem skończonym, to a jest największym punktem stałym funkcji f.

Zadanie 15. Rozważmy instancję $S = \{t_1 \stackrel{?}{=} s_1, \ldots, t_n \stackrel{?}{=} s_n\}$ problemu unifikacji. Udowodnij, że jeśli θ jest unifikatorem $S \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$ to istnieje takie podstawienie σ, że $\theta = \sigma\{x/t\}$, gdzie $\{x/t\}$ jest taką fukcją ze zbioru zmiennych w zbiór termów, że $\{x/t\}(x) = t$ oraz $\{x/t\}(y) = y$ dla wszystkich zmiennych $y \neq x$.

Student name:

Logic for Computer Science

Final exam (bachelor part)

February 3, 2010

Task 1 (1 point). Write in the empty fields of the table below the cardinalities of respective sets.

$\mathbb{N} \times \{0,1,2\}$	$\{a,b\} \times \mathbb{Q}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q} \setminus [0,1])$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$	$\{2010, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\{a,b,c\}}$	$\mathcal{P}(\{0,1\})$

Task 2 (1 punkt). If there exists a bijection $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{a,b\}^{\mathbb{N}\times\{0,1\}}$, then in the box below write an expression defining any such bijection. Otherwise write the word "NO".

Task 3 (1 punkt). If the ordered sets $\langle\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}, \leq_{lex}\rangle$ and $\langle\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, \leq\rangle$, where $\leq_{lex}$ is the lexicographic extension of the natural order, are isomorphic, then in the box below write any isomorphism of these orders. Otherwise write a justification why such an order does not exist.

Task 4 (1 punkt). If the ordered sets $\langle\mathbb{Q}, \leq\rangle$ and $\langle\mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \leq_{lex}\rangle$ are isomorphic, then in the box below write any isomorphism of these orders. Otherwise write a justification why such an order does not exist.

Student name:

Task 5 (1 point). Consider the set $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ ordered by lexicographic order $\leq_{lex}$ and the function $f : \{0,1\} \times \mathbb{N} \to \{0,1\} \times \mathbb{N}$ defined by $f(a,b) = \langle a, b+1 \rangle$. If there exists a set $X \subseteq \{0,1\} \times \mathbb{N}$, such that $\sup X$ exists and $f(\sup X) \neq \sup\{f(x) \mid x \in X\}$, then in the box below write any such set X. Otherwise write the word "NO".

Task 6 (1 point). If the function $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ defined by $f(X) = \{1\} \cup \{2x \mid x \in X\}$ has the least fixed point then in the box below write the value of this least fixed point. Otherwise write the word "NO".

Task 7 (1 point). Consider the prefix order $\preceq$ on the set $\{a,b\}^*$ of all words over the alphabet $\{a,b\}$, defined by $u \preceq w \overset{\text{df}}{\iff} \exists v \; w = uv$. Let $X = \{abba, abab, ababab\}$. In the boxes below write respectively the least upper bound $\sup X$ and the greatest lower bound $\inf X$ of the set X, if they exist. Otherwise, if the respective bounds do not exist, write the word "NO".

$\sup X$

$\inf X$

Task 8 (1 point). If there exists an infinite well-founded and totally ordered set that is not isomorphic to the natural order on the set of natural numbers, then in the box below write any example of such an ordered set. Otherwise write the word "NO".

Student name:

Task 9 (1 point). If the terms $f(h(z), x)$ and $f(y, g(y))$ are unifiable, then in the box below write any unifier of these terms. Otherwise write the word "NO".

Task 10 (1 point). If the terms $f(h(x), x)$ and $f(y, g(y))$ are unifiable, then in the box below write any unifier of these terms. Otherwise write the word "NO".

Task 11 (1 point). If the set of clauses $\{\neg s \vee r,\ \neg q \vee r,\ s \vee q,\ \neg r \vee \neg p,\ \neg r \vee p\}$ is inconsistent then in the box below write a resolution proof of inconsistency of this set. Otherwise write a valuation satisfying this set.

Task 12 (1 point). If the set of clauses $\{\neg p \vee \neg q \vee r,\ \neg p \vee q,\ \neg r \vee \neg s,\ \neg r \vee s\}$ is inconsistent then in the box below write a resolution proof of inconsistency of this set. Otherwise write a valuation satisfying this set.

Student name:

Solutions returned:

Logic for Computer Science

Final exam (main part)

February 3, 2010

Each of the task below is scored from −2 to 16 points. Empty solutions are scored with 0 points.

Task 13. Consider the equivalence relation on the set $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ of all functions from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$ defined by

$$f \sim g \stackrel{\text{df}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{Z} \;\; f(n) - g(n) = 2k.$$

(a) What is the cardinality of the equivalence class of the function $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, such that $z(n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$. Justify your answer.

(b) Prove that all equivalence classes of the relation $\sim$ are equinumerous.

(c) What is the cardinality of the quotient set $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ (that is, of the set of all equivalence classes of the relation $\sim$). Justify your answer.

Task 14. Consider a complete lattice $\langle X, \leq \rangle$ and a monotone function $f : X \to X$. Let $a = \inf\{f^i(\top) \mid i \in \mathbb{N}\}$, where $\top$ is the greatest element of the set X and f^i denotes the i-fold composition of f with itself.

(a) Prove that for all fixed points x of the function f the inequality $x \leq a$ holds.

(b) Prove that if X is a finite set then a is the greatest fixed point of the function f.

Task 15. Consider an instance $S = \{t_1 \stackrel{?}{=} s_1, \ldots, t_n \stackrel{?}{=} s_n\}$ of the unification problem. Prove that if θ is a unifier of $S \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$ then there exists a substitution σ such that $\theta = \sigma\{x/t\}$, where $\{x/t\}$ is a function from the set of variables to the set of terms such that $\{x/t\}(x) = t$ and $\{x/t\}(y) = y$ for all variables $y \neq x$.