program

December 17, 2017

1 Notatki do pracowni drugiej

```
In [1]: using PyPlot
        include("program.jl")
        c = 299792.458
        earth_rad = 6370.0
        sat_rad = 20000.0;
```

1.1 Metoda najmniejszych kwadratów

Mamy układ równań

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - \left[c(t_i - t)\right]^2 = 0\ ,\ i = 1, 2 \ldots n\ ,\ n > 4$$

Niech

$$f_i(x, y, z, t) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - \left[c(t_i - t)\right]^2$$

Chcemy znaleźć takie (x, y, z, t), że

$$\sum_1^n f_i^2(x, y, z, t)$$

będzie minimalne.

Zastosujemy metodę będącą uogólnieniem metody Newtona opisanej powyżej: Niech:

$$h_n = -(J_n^T J_n)^{-1} J^T F(x_n)$$

gdzie

J_n - macierz pochodnych cząstkowych w punkcie x_n

$J_{n}[i, j] = \partial f_{i \overline{\partial x_j}}$

$F(x) \in R^4 \rightarrow R^n, F(x) = \left[f_i(x)\right]$

Wtedy

$$x_{n+1} = x_n + h_n$$

Jest n-tym przybliżeniem metody.

```
In [2]: function leastSquares(sats, maxiter=20, satcnt=8)
            newton(sats[1:satcnt], maxiter)
        end;
```

2 Testy

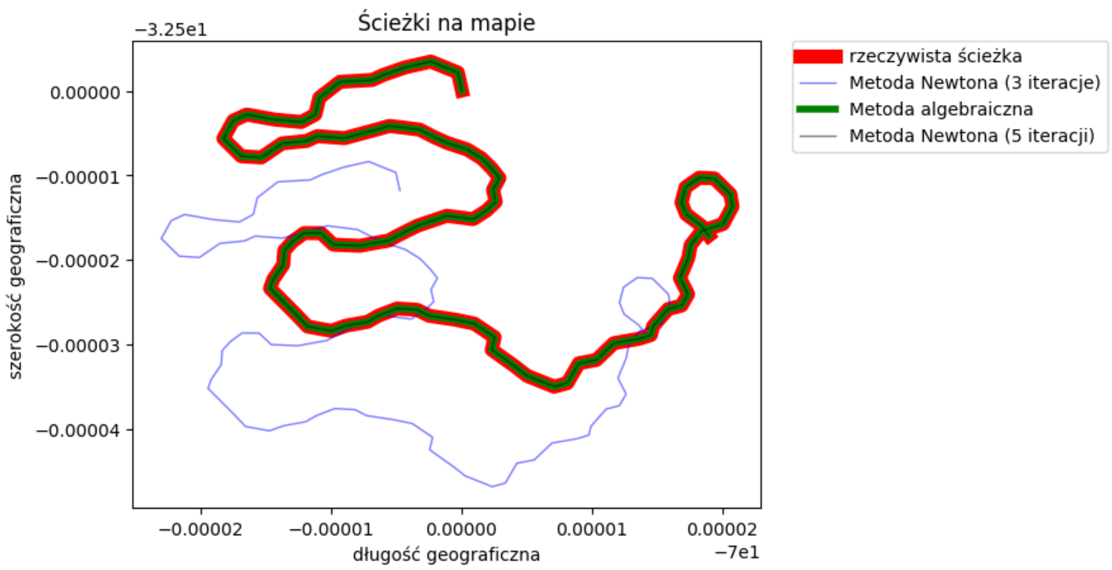
```
In [3]: sat = Array{Array{Float64}}(7)

        sat[1] = [15600.0, 7540.0, 20140.0, 7.074e-2]
        sat[2] = [18760.0, 2750.0, 18610.0, 7.220e-2]
        sat[3] = [17610.0, 14630.0, 13480.0, 7.690e-2]
        sat[4] = [19170.0, 610.0, 18390.0, 7.242e-2]
        sat[5] = rand_position(sat_rad)
        sat[6] = rand_position(sat_rad)
        sat[7] = rand_position(sat_rad)

        x = rand_position(earth_rad)
        prepsat!(x, sat)

        println(x)
        println(newton(sat))
        println(algebraic(sat))
        println(bancroft(sat))
        println(heura(sat))
```

```
[4508.58, -1805.25, -4121.98, -0.0657496]
[4508.58, -1805.25, -4121.98, -0.0657496]
[4508.58, -1805.25, -4121.98, -0.0657496]
[4508.58, -1805.25, -4121.98, -0.0657496]
[4508.58, -1805.25, -4121.98, -0.0657496]
```

2.1 Dokładność na losowej ścieżce, model teoretyczny

```
In [16]: sat_count = 8
         sat_coords = [ rand_position(sat_rad)[1:3] for i = 1:sat_count ]

         coords = path(3000, -70, -32.5)
         x = coords[1]
         y = coords[2]

         mistake = 0.005

         newton_coords = GPS_newton(coords, mistake, 3, false)
         xn = newton_coords[1]
         yn = newton_coords[2]

         newton5_coords = GPS_newton(coords, mistake, 5, false)
         xn5 = newton5_coords[1]
         yn5 = newton5_coords[2]

         alg_coords = GPS_alg(coords, mistake, false)
```

```
xa = alg_coords[1]
ya = alg_coords[2]

bancroft_coords = GPS_bancroft(coords, mistake, false)
xb = bancroft_coords[1]
yb = bancroft_coords[2]

fig, ax = subplots()

title("Ścieżki na mapie")
xlabel("długość geograficzna")
ylabel("szerokość geograficzna")
ax[:plot](x, y, "-", color="red", linewidth=8, alpha=1.0, label="rzeczywista ścieżka")
ax[:plot](xn, yn, "-", color="blue", linewidth=1, alpha=0.5, label="Metoda Newtona (3 i
ax[:plot](xa, ya, "-", color="green", linewidth=4, alpha=1.0, label="Metoda algebraiczn
ax[:plot](xn5, yn5, "-", color="black", linewidth=1, alpha=0.5, label="Metoda Newtona (

ax[:legend](bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespad=0.)
show()

methods =["Newtona, 3 iteracje", "Newtona, 5 iteracji", "Algebraiczna", "Bancrofta"]
results = [newton_coords, newton5_coords, alg_coords, bancroft_coords]

MinMaxMistakeTable(methods, results, coords)
```

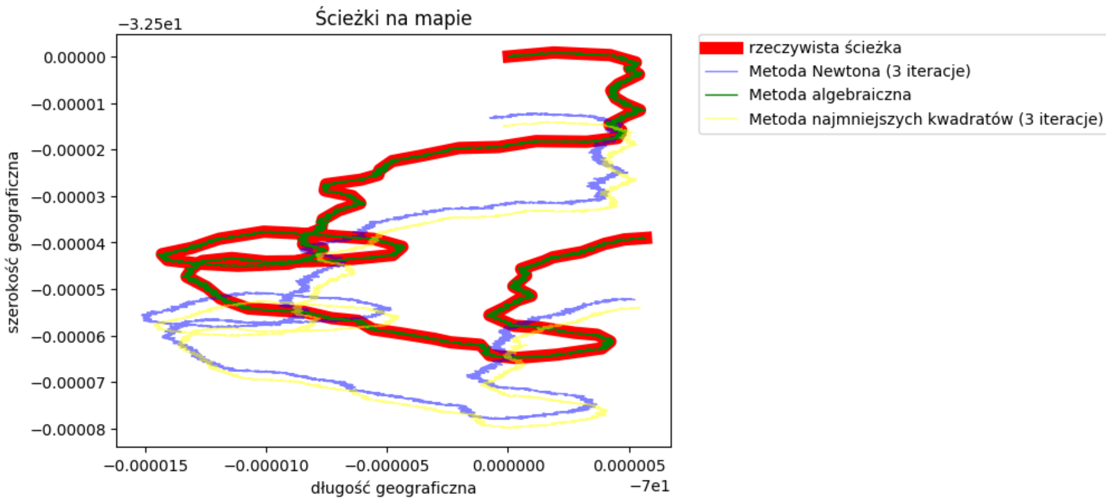



```
Out[16]: HTML{String}("<table border=\"1\">\n<tr><td><pre>Metoda</pre><td><pre>Największy błąd</
```

Będziemy sprawdzać dokładność metod za pomocą symulacji trasy obiektu na powierzchni Ziemi oraz pozycji satelit. Znając rzeczywiste położenie satelity, obiektu i błędu zegara wyliczamy stałe t_i. Następnie stosujemy każdą z metod do wyliczenia położenia obiektu.

Aby wzbogacić symulację, dodany został współczynnik *inacuraccy* mający na celu odwzorować zmiany prędkości światła ośrodkach innych niż próżnia.

In [10]:
```
sat_count = 8
sat_coords = [ rand_position(sat_rad)[1:3] for i = 1:sat_count ]

coords = path(3000, -70, -32.5)
x = coords[1]
y = coords[2]

mistake = 0.005

newton_coords = GPS_newton(coords, mistake, 3, true)
xn = newton_coords[1]
yn = newton_coords[2]

leastSquares_coords = GPS_leastSquares(coords, mistake, 3, sat_count, true)
xl = leastSquares_coords[1]
yl = leastSquares_coords[2]

alg_coords = GPS_alg(coords, mistake, true)
xa = alg_coords[1]
ya = alg_coords[2]

bancroft_coords = GPS_bancroft(coords, mistake, true)
xb = bancroft_coords[1]
yb = bancroft_coords[2]

fig, ax = subplots()

title("Ścieżki na mapie")
xlabel("długość geograficzna")
ylabel("szerokość geograficzna")
ax[:plot](x, y, "-", color="red", linewidth=8, alpha=1.0, label="rzeczywista ścieżka")
ax[:plot](xn, yn, "-", color="blue", linewidth=1, alpha=0.5, label="Metoda Newtona (3 i
ax[:plot](xa, ya, "-", color="green", linewidth=1, alpha=1.0, label="Metoda algebraiczn
ax[:plot](xl, yl, "-", color="yellow", linewidth=1, alpha=0.5, label="Metoda najmniejsz
ax[:legend](bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespad=0.)
show()

methods =["Newtona, 3 iteracje", "Najmnieszych kwadratów, 3 iteracje", "Algebraiczna",
results = [newton_coords, leastSquares_coords, alg_coords, bancroft_coords]

MinMaxMistakeTable(methods, results, coords)
```



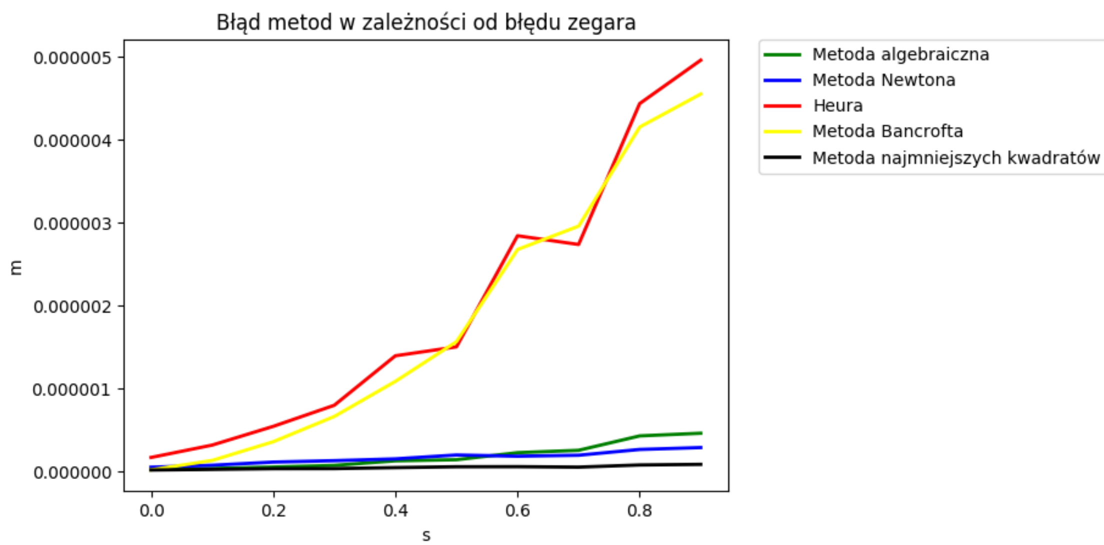

```
Out[10]: HTML{String}("<table border=\"1\">\n<tr><td><pre>Metoda</pre><td><pre>Największy błąd</
```

```
In [5]: function clock_mistake_plot(method, coords, maxiter)
            res = [[], []]
            dm = 0.1
            mistake = 0.0
            for i in 1:maxiter
                alg_coords = method(coords, mistake)
                dist = MAXdist(coords, alg_coords)
                push!(res[1], mistake)
                push!(res[2], dist)
                mistake+=dm
            end
            res
        end;
```

Istotnym czynnikiem wpływającym na niedokładność pomiaru jest błąd zegara.

```
In [6]: data1 = clock_mistake_plot(GPS_alg, coords, 10)
        x = data1[1]
        y1 = data1[2]

        data2 = clock_mistake_plot(GPS_newton, coords, 10)
        y2 = data2[2]

        data3 = clock_mistake_plot(GPS_heura, coords, 10)
        y3 = data3[2]

        data4 = clock_mistake_plot(GPS_bancroft, coords, 10)
        y4 = data4[2]
```

```
data5 = clock_mistake_plot(GPS_leastSquares, coords, 10)
y5 =  data5[2]

fig, ax = subplots()

title("Błąd metod w zależności od błędu zegara")
ylabel("m")
xlabel("s")
ax[:plot](x, y1, "-", color="green", linewidth=2, alpha=1.0, label="Metoda algebraiczna"
ax[:plot](x, y2, "-", color="blue", linewidth=2, alpha=1.0, label="Metoda Newtona")
ax[:plot](x, y3, "-", color="red", linewidth=2, alpha=1.0, label="Heura")
ax[:plot](x, y4, "-", color="yellow", linewidth=2, alpha=1.0, label="Metoda Bancrofta")
ax[:plot](x, y5, "-", color="black", linewidth=2, alpha=1.0, label="Metoda najmniejszych
ax[:legend](bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespad=0.)

show()
```



W metodach Newtona oraz najmniejszych kwadratów dokładność powinna zwiększać się wraz z liczbą iteracji. Można udowodnić, że powinna to być zbieżność kwadratowa.

```
In [7]: function iter_mistake_plot(method, coords, maxiter)
            res = [[], []]
            for i in 1:maxiter
                newton_coords = method(coords, 0.005, i)
                dist = MAXdist(coords, newton_coords)
                push!(res[1], i)
                push!(res[2], dist)
            end
            return res
```

```
    end
    show()
```

In [8]:
```
data1 = iter_mistake_plot(GPS_newton, coords, 10)
x = data1[1]
y1 = data1[2]

data2 = iter_mistake_plot(GPS_leastSquares, coords, 10)
y2 = data2[2]

tab = hcat(x, y1, y2)

table(tab, column_names=[:"Iteracja", :"Błąd metody Newtona (m)", :"Błąd metody najmniej
```

Out[8]:
```
HTML{String}("<table border=\"1\">\n<tr><td><pre>Iteracja</pre><td><pre>Błąd metody Newt
```

Poniżej sprawdzamy dokładność pomiarów dla losowych punktów na Ziemi

In [ ]:
```
sat_count = 10
sat = Array{Array{Float64}}(sat_count)

mean1 = 0
mean2 = 0
mean3 = 0
mean4 = 0
mean5 = 0

iters = 5000

for i = 1:iters
    sat = [ rand_position(sat_rad) for j = 1:sat_count ]
    x = rand_position(earth_rad)
    #LL = XYZtoLLA(x)
    #mistake = 0.00001
    #sat =  createSats(LL[1], LL[2], mistake)
    prepsat!(x, sat)
    x1 = newton(sat[1:4])
    x2 = algebraic(sat)
    x3 = bancroft(sat)
    x4 = heura(sat)
    x5 = leastSquares(sat)

    mean1 += sum(abs2, x1 - x)
    mean2 += sum(abs2, x2 - x)
    mean3 += sum(abs2, x3 - x)
    mean4 += sum(abs2, x4 - x)
    mean5 += sum(abs2, x5 - x)
end
```

```
mean1 /= iters
mean2 /= iters
mean3 /= iters
mean4 /= iters
mean5 /= iters

names = ["Newton", "Algebraiczna", "Bancroft", "Heura", "Najmniejszych kwadratów"]
results = [mean1, mean2, mean3, mean4, mean5]

table(hcat(names, results), column_names=[:Metoda, :"Średni błąd (m)"])
```

Wpływ liczby satelit na dokładność metody najmniejszych kwadratów

In [ ]:
```
function leastSquares_sat_plot(positers=100, satiters=50)
    res = [[],[]]

    sat = [ rand_position(sat_rad) for i in 1:satiters ]
    means = zeros(satiters)

    for i in 1:positers
        x = rand_position(earth_rad)
        prepsat!(x, sat)
        for sat_cnt in 4:satiters
            xgps = leastSquares(sat, 10, sat_cnt)
            means[sat_cnt] += sum(abs2, xgps-x)
        end
    end
    for i in 4:satiters
        push!(res[1], i)
        push!(res[2], means[i]/positers)
    end
    res
end;
```

In [ ]:
```
data = leastSquares_sat_plot()
x = data[1]
y = data[2]

fig, ax = subplots()

title("Błąd metody najmniejszych kwadratów w zależności od liczby satelit")
ylabel("m")
xlabel("liczba satelit")
ax[:plot](x, y, "-", color="red", linewidth=2, alpha=1.0)
show()
```