Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 11

3 stycznia 2018 r.

M11.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ stosując *kwadraturę Newtona-Cotesa*, czyli kwadraturę interpolacyjną z węzłami równoodległymi $x_k := a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gdzie $h := (b-a)/n$:

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k).$$

Wykazać, że

$$A_k = h(-1)^{n-k}\frac{1}{k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} (t-j)\,\mathrm{d}t \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Niech będzie $B_k := A_k/(b-a)$ $(k = 0,\ 1, \ldots, n)$. Sprawdzić, że

a) wielkości B_k są liczbami wymiernymi;

b) $B_k = B_{n-k}$ $\ (k = 0,\ 1, \ldots, n)$

M11.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Obliczyć $Q_n^{NC}(f)$ dla $n = 2, 4, 6, 8, 10$ dla całki

$$\int_{-4}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} 4.$$

Który wynik jest najdokładniejszy? Jak to skomentować?

M11.3. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $f \in C^4[a, b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratury *Newtona-Cotesa* dla $n = 3$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\xi \in [a, b]$, dla której

$$I(f) - Q_3^{NC}(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5 \qquad (h := (b-a)/3).$$

M11.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a,\ b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, gdy $n \to \infty$.

M11.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$

a) Stosując złożony wzór Simpsona S_n z odpowiednio dobranym n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$ z błędem $\leqslant 2 \cdot 10^{-5}$.

b) Jaka wartość n gwarantuje uzyskanie tak dokładnego wyniku, jeśli zamiast wzoru S_n użyjemy złożonego wzoru trapezów T_n?

M11.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdzić, że

$$S_n(f) = \frac{1}{3}[4T_n(f) - T_{n/2}(f)] \quad (n = 2, 4, \ldots),$$

gdzie $S_n(f)$ jest złożonym wzorem Simpsona, a $T_n(f)$ – złożonym wzorem trapezów. Jaki jest związek tej obserwacji z metodą Romberga?

M11.7. $\boxed{\text{1 punktu}}$ Wykazać, że dla każdej funkcji $f \in C[a,b]$ ciąg kwadratur Gaussa $\{G_n(f)\}$ jest przy $n \to \infty$ zbieżny do całki $\int_a^b p(x)f(x)\,dx$.

M11.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $w_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' a_k\, T_k(x)$, gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa. Wykazać, że

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)\,\mathrm{d}x = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}{}' \frac{a_{2i}}{1-4i^2}.$$

M11.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć, o ile to możliwe, takie węzły x_0, x_1 i współczynniki A_0, A_1, żeby dla każdego wielomianu f stopnia $\leqslant 3$ zachodziła równość $\int_0^1 (1+x^2)f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

M11.10. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Uzasadnić poprawność poniższej procedury, zapisanej w języku Julia, do obliczania całki $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratury Clenshawa-Curtisa.

```
function ClenshawCurtis3(f,n)
  # Chebyshev extreme points
  x  = cos(pi*(0:n)/n)
  fx = f(x)/(2n)
  # Fast Fourier transform
  g  = real(fft(vcat(fx,fx[n:-1:2])))
  # Chebyshev coefficients
  a  = vcat( g[1], g[2:n]+g[2*n:-1:n+2], g[n+1] )
  w  = zeros(a)
  w[1:2:end] = 2./(1-(0:2:n).^2)
  dot(w,a)
end
```

Jaka jest złożoność tej procedury?

26 grudnia 2017
Rafał Nowak