Zadanie 570.

Mateusz Hazy

Grudzień 2016

1 Treść

Rozważmy funkcję Ackermanna zdefiniowaną wzorem

$$A(x,y) = \begin{cases} y+1 \; dla & x = 0 \\ A(x-1,1) & \text{dla } x > 0 \; i \; y = 0 \\ A(x-1, A(x, y-1)) & \text{wpp} \end{cases}$$

Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ obliczanie funkcji $A(x, y)$ się nie zapętla.

2 Rozwiązanie

Rozumowanie indukcyjne będziemy przeprowadzać na porządku leksykograficznym par $\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, który jest dobrym porządkiem.

1. Z definicji funkcji A wiemy, że dla par $\langle 0, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ obliczanie $A(0, y)$ nie zapętli się.

2. Założenie indukcyjne : Dla każdej pary $\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, x < n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, obliczanie $A(x, y)$ się nie zapętla.

   Teza indukcyjna: Dla par $\langle n, y\rangle, y \in \mathbb{N}$ $A(n, y)$ nie zapętla się.
   Dowód:

   (a) $A(n, 0) = A(n - 1, 1)$, więc z założenia indukcyjnego się nie zapętla.

   (b) Załóżmy teraz, że dla każdej pary $\langle n, y\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, y < m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$, obliczanie $A(n, y)$ nie zapętla się.
   Pokażemy, że z (a), (b) i założenia indukcyjnego wynika, że $A(n, m)$ nie zapętla się.
   $A(n, m) = A(n - 1, A(n, m - 1))$.
   Z (b) $A(n, m - 1)$ nie zapętla się, więc ma jakąś wartość.
   Niech $A(n, m - 1) = c, c \in \mathbb{N}$.
   $A(n, m) = A(n - 1, c)$, a z założenia indukcyjnego $A(n - 1, c)$ nie zapętla się.
   To oznacza, że dla każdego y $A(n, y)$ nie zapętla się.