Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M 7

29 listopada 2017 r.

M7.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać poprawność algorytmu Wernera obliczania stałych

(1) $$\sigma_k \equiv \sigma_k^{(n)} := 1/p'_{n+1}(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Algorytm 1 (Werner, 1984)**.**
a) Obliczamy pomocnicze wielkości $a_k^{(i)}$ *wg wzorów*

$$a_0^{(0)} := 1, \quad a_k^{(0)} := 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\left.\begin{aligned} a_k^{(i)} &:= a_k^{(i-1)}/(x_k - x_i), \\ a_i^{(k+1)} &:= a_i^{(k)} - a_k^{(i)} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, i - 1),$$

b) Wówczas

$$\sigma_k := a_k^{(n)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

M7.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Określmy wielomian $H_{2n+1} \in \Pi_n$ za pomocą wzoru

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, h_k(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k)\, \bar{h}_k(x),$$

gdzie węzły $x_0, \ldots, x_n$ są parami różne, ponadto

$$\left.\begin{aligned} h_k(x) &:= [1 - 2(x - x_k)\lambda'{}_k(x_k)]\lambda_k^2(x), \\ \bar{h}_k(x) &:= (x - x_k)\lambda_k^2(x), \\ \lambda_k(x) &:= \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_k)p'_{n+1}(x_k)}, \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

oraz $p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Wykazać, że H_{2n+1} spełnia warunki

(2) $$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

M7.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć wielomian $H_5 \in \Pi_5$, spełniający warunki $H_5(x_i) = y_i$, $H'_5(x_i) = y'_i$ $(i = 0, 1, 2)$, gdzie x_i, y_i, y'_i mają następujące wartości:

i	x_i	y_i	y'_i
0	-1	7	-1
1	0	6	0
2	2	22	56

M7.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że dysponujemy programem do obliczania dyskretnej transformaty Fouriera, tzn. $DFT(\boldsymbol{x})$ dla $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]$ daje ciąg $\boldsymbol{y} = [y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}]$, gdzie

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{2\pi \mathrm{i} jk/N} \qquad (0 \leqslant k < N).$$

Pokazać, jak można użyć programu $DFT(...)$ w celu wyznaczenia współczynników α_k i β_k dla wielomianów I_n, J_n, tj. wielomianów interpolacyjnych dla węzłów Czebyszewa $t_{n+1,k}$ (zera T_{n+1}) oraz $u_{n,k}$ (punkty ekstremalne T_n).
Wskazówka: oprócz DFT dozwolone jest użycie funkcji `real(...)` zwracającej część rzeczywistą liczb(y) zespolon(ych)(ej).

M7.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że wielomian $I_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w węzłach

$$t_k \equiv t_{n+1,k} = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

(zerach wielomianu T_{n+1}) można zapisać w postaci

$$I_n(x) = {\sum_{i=0}^{n}}{}' \alpha_i \, T_i(x),$$

gdzie

$$\alpha_i := \frac{2}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(t_j)T_i(t_j) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

M7.6. $\boxed{\text{1 punkt, Włącz komputer!}}$ Niech $f(x) = e^{\arctan(x)}$. Rozważyć interpolację w przedziale $[a, b] := [-5, 5]$ w $n + 1$ równoodległych węzłach. Znaleźć postać potęgową wielomianu interpolacyjnego $L_n(x)$ oraz naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia $s(x)$. Rozważyć $n = 10, 20, 30$ i podać wartości całek

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx, \qquad \int_a^b [L_n''(x)]^2 dx, \qquad \int_a^b [s''(x)]^2 dx.$$

Wyniki należy przedstawić z dokładnością do 8 cyfr dziesiętnych.

M7.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli s jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia, interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$, to

$$\int_a^b [s''(x)]^2 \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right) M_k,$$

gdzie $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

24 listopada 2017
Rafał Nowak