

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M8

6 grudnia 2017 r.

M8.1. 1,5 punktu Wykazać, że wielomiany Czebyszewa T_k spełniają równości

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_k(x) T_l(x) dx = 0 \quad (k \neq l; k, l = 0, 1, \dots),$$
$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} [T_k(x)]^2 dx = \begin{cases} \pi & (k=0), \\ \pi/2 & (k=1, 2, \dots). \end{cases}$$

Co one oznaczają?

M8.2. 1 punkt

- a) Wykazać, że dla ustalonej funkcji wagowej $p(x)$ i ustalonego przedziału $[a, b]$ ciąg wielomianów ortogonalnych jest określony jednoznacznie, z dokładnością do stałych mnożników.
- b) Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a, b]$ z wagą $p(x)$. Wykazać, że wielomiany P_0, P_1, \dots, P_n ($n \in \mathbb{N}$) tworzą bazę przestrzeni Π_n .
- c) Niech P_k będzie k -tym ($k > 0$) wielomianem ortogonalnym. Wówczas dla dowolnego wielomianu $Q \in \Pi_{k-1}$ jest $\langle Q, P_k \rangle = 0$.

M8.3. 1 punkt Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a, b]$, z wagą $p(x)$. Wykazać, że dla każdego $n = 1, 2, \dots$ wszystkie zera wielomianu P_n są rzeczywiste, pojedyncze i leżą w przedziale otwartym (a, b) .

M8.4. 1,5 punktu Udowodnić twierdzenie Pitagorasa, tzn. jeśli $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ jest układem ortogonalnym, to

$$\left\| \sum_{j=0}^n c_j f_j \right\|_2^2 = \sum_{j=0}^n |c_j|^2 \|f_j\|_2^2.$$

M8.5. 1 punkt Udowodnić, że wielomian $w_n^* \in \Pi_n$ jest n -tym wielomianem optymalnym dla funkcji $f \in C_p[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wielomianu $w_n \in \Pi_n$ zachodzi równość

$$\langle f - w_n^*, w_n \rangle = 0.$$

M8.6. 1 punkt Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden wielomian optymalny $w_n^* \in \Pi_n$ w sensie normy średniokwadratowej.

M8.7. 1 punkt Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T :

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

Wyznaczyć prawdopodobne wartości stałych a, b .

M8.8. 1,5 punktu Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów, określonych w następujący sposób rekurencyjny:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \alpha_0, & P_1(x) &= (\alpha_1 x - \beta_1) P_0(x), \\ P_k(x) &= (\alpha_k x - \beta_k) P_{k-1}(x) - \gamma_k P_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ są danymi stałymi. Uzasadnić następujący *uogólniony algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$s_n := a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n$$

o danych współczynnikach a_0, a_1, \dots, a_n .

Obliczamy pomocnicze wielkości V_k ($k = 0, 1, \dots, n+2$) według wzorów

$$V_k = a_k + (\alpha_{k+1} x - \beta_{k+1}) V_{k+1} - \gamma_{k+2} V_{k+2} \quad (k = n, n-1, \dots, 0),$$

gdzie $V_{n+1} = 0, V_{n+2} = 0$.

Wynik: $s_n(x) = \alpha_0 V_0$.