Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M 2

11 października 2017 r.

M2.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla danych: naturalnej liczby t oraz niezerowej liczby rzeczywistej $x = s\,m\,2^c$, gdzie s jest znakiem liczby x, c – liczbą całkowitą, a m – liczbą z przedziału $[1,\,2)$, o rozwinięciu dwójkowym $m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k}2^{-k}$, w którym $e_{-k} \in \{0,1\}$ dla $k \geqslant 1$, definiujemy *zaokrąglenie liczby* x do $t+1$ cyfr za pomocą wzoru

$$\mathrm{rd}\,(x) := s\,\bar{m}\,2^c,$$

gdzie $\bar{m} = 1 + \sum_{k=1}^{t} e_{-k}2^{-k} + e_{-t-1}2^{-t}$.

Wykazać, że

$$|\mathrm{rd}\,(x) - x| \leqslant 2^c\mathsf{u},$$

gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$ jest *precyzją arytmetyki*.

Wywnioskować stąd, że błąd względny zaokrąglenia liczby x nie przekracza precyzji arytmetyki u.

M2.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ i $\rho_j \in \{-1,+1\}$ dla $j = 1,2,\ldots,n$ oraz że $n\mathsf{u} < 1$, gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j)^{\rho_j} = 1 + \theta_n,$$

gdzie θ_n jest wielkością spełniającą nierówność $|\theta_n| \leqslant \gamma_n$, gdzie z kolei

$$\gamma_n := \frac{n\mathsf{u}}{1 - n\mathsf{u}}.$$

M2.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ dla $j = 1,2,\ldots,n$ oraz że $n\mathsf{u} < 0.01$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j) = 1 + \eta_n,$$

gdzie

$$|\eta_n| \leqslant 1.01n\mathsf{u}.$$

M2.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli x, y są liczbami maszynowymi takimi, że $|y| \leqslant \frac{1}{2}\mathsf{u}|x|$, to $\mathrm{fl}(x+y) = x$.

M2.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć liczbę maszynową x (`double`, w standardzie IEEE 754) z przedziału $(1,2)$, dla której $\mathrm{fl}(x \cdot \mathrm{fl}(1/x)) \neq 1$.

M2.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaproponować sposób uniknięcia utraty cyfr znaczących wyniku w związku z obliczaniem wartości wyrażeń

$$(\mathbf{a})\ e^x - e^{-2x}; \qquad (\mathbf{c})\ \cos^2 x - 1.$$

M2.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji f, podanej wzorem
(**a**) $f(x) = 1/(x^2 + c)$, gdzie c jest stałą; (**b**) $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$ dla $x \neq 0$.

4 października 2017 r.

Rafał Nowak