Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (pierwsza część)

6 lutego 2014

Zadanie 1 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, równoważne formule $\neg((p \vee q) \Rightarrow r))$.

Zadanie 2 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ jest uproszczeniem formuły ψ, jeśli obie formuły są równoważne oraz φ zawiera mniej wystąpień spójników logicznych niż ψ. Jeśli istnieje uproszczenie formuły $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli istnieje formuła prawdziwa dla dokładnie trzech wartościowań zbioru zmiennych zdaniowych $\{p, q, r\}$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli formuła $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$ jest tautologią rachunku zdań to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej formuły w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie, dla którego ta formuła jest fałszywa.

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{p,\ \neg q \vee \neg r,\ \neg p \vee q,\ \ \neg p \vee r\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 6 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\neg \forall n \Big((\forall x \ \ x < n \Rightarrow x \in X) \Rightarrow n \in X \Big)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 7 (2 punkty). Rozważmy relacje $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times A$. W prostokąt poniżej wpisz formułę logiki I rzędu mówiącą, że relacja SR *nie jest* zwrotna. Formuła ta nie może zawierać symbolu negacji (ale może zawierać symbol $\notin$) i nie może zawierać symboli złożenia relacji SR (ale może zawierać symbole R i S).

Zadanie 8 (2 punkty). Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole $\cup, \cap, \setminus$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej symboli niż W'. Np. $A \setminus B$ jest uproszczeniem $(A \cup B) \setminus B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $(A \cap B) \cup C \setminus (A \cap (B \cup C))$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 9 (2 punkty). Niech $A_n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$. Jeśli zbiór $\bigcup_{m=17}^{\infty} \bigcap_{n \leq m} A_n$ jest pusty to w prostokąt poniżej wpisz słowo „PUSTY". W przeciwnym przypadku wpisz najmniejszy element tego zbioru.

Numer indeksu:

Zadanie 10 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podają \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które nie lubią ani jednego soku podawanego w barze *Jagódka*.

Zadanie 11 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \times \{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $f(x, k) = 3x + k$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 12 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze liczb naturalnych, która ma dokładnie 5 klas abstrakcji, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Zadanie 13 (2 punkty). Jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f : \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0, 2]) \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{Q} \cap [0, 1])$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką funkcję. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 14 (2 punkty). Jeśli istnieją takie trzy nieskończone zbiory, że żadne dwa z nich nie są równoliczne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich trzech zbiorów. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 15 (2 punkty). Jeśli istnieją takie zbiory A, B, surjekcja $f : A \xrightarrow{\text{na}} B$ oraz zbiory $X, Y \subseteq A$, że $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej surjekcji i takich zbiorów. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka funkcja i takie zbiory nie istnieją.

Zadanie 16 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz liczbę różnych relacji liniowego porządku na zbiorze $\{6, 2, 2014\}$.

Zadanie 17 (2 punkty). Jeśli istnieją takie dwie relacje porządku częściowego R i S na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$, że SR jest relacją równoważności, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie relacje nie istnieją.

Zadanie 18 (2 punkty). Rozważmy porządek $\preceq$ na funkcjach zadany wzorem $f \preceq g \overset{\text{df}}{\iff} \forall x\ f(x) \leq g(x)$. Jeśli porządki $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq \rangle$ i $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 19 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech różnych dobrych porządków.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

(a) $f(g(y), x, z) \overset{?}{=} f(x, y, z)$

(b) $f(g(y), a, z) \overset{?}{=} f(x, y, z)$

Numer indeksu:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część zasadnicza)

6 lutego 2014

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów[1].

Zadanie 21. Dla liczb naturalnych n niech $\underline{n}$ oznacza zbiór $\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$. W zbiorze $\underline{n}$ wprowadzamy relację równoważności $k \simeq l \stackrel{\text{df}}{\iff} 2|k - l$.

(a) [4 punkty] Ile klas abstrakcji ma relacja $\simeq$?

(b) [4 punkty] Ile elementów mają klasy abstrakcji $[0]_{\simeq}$ i $[1]_{\simeq}$?

(c) [16 punktów] Na klasach abstrakcji definiujemy działanie $[k]_{\simeq} + [l]_{\simeq} = [k + l \bmod n]_{\simeq}$. Dla jakich n to działanie jest poprawne?

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

Zadanie 22. Rozważmy następujące równanie rekurencyjne dla funkcji $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$:

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= \emptyset \\ f(X \cup \{n\}) &= f(X) \cup \{n\} \end{aligned}$$

gdzie $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

(a) [8 punktów] Wskaż inną niż identyczność funkcję spełniającą to równanie.

(b) [16 punktów] Udowodnij, że jest co najmniej continuum różnych funkcji spełniających to równanie.

Zadanie 23. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Porządek $\langle P, \leq^{-1} \rangle$ nazywamy porządkiem *dualnym* do $\langle P, \leq \rangle$.

(a) [12 punktów] Udowodnij, że porządek dualny do dobrego porządku jest dobrym porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy jest skończony.

(b) [12 punktów] Czy to samo można powiedzieć o porządkach regularnych? Tzn., czy porządek dualny do regularnego jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy jest skończony? Uzasadnij odpowiedź.

[1] Algorytm oceniania jest następujący: najpierw zadanie jest ocenione w skali od 0 do 24 punktów a następnie od wyniku zostają odjęte 4 punkty. Osoba, która nie oddaje rozwiązania zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.