

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M9

13 grudnia 2017,r.

M9.1. 1 punkt Niech $\bar{T}_k(x)$ będą standardowymi wielomianami ortogonalnymi w przedziale $[-1, 1]$, z wagą $(1 - x^2)^{-1/2}$. Znaleźć związek rekurencyjny spełniany przez te wielomiany.

M9.2. 1 punkt Jakim wzorem wyraża się n -ty wielomian optymalny dla funkcji f w sensie normy

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-1/2} f^2(x) dx}?$$

M9.3. 1 punkt Niech $p_n, q_n \in \Pi_n$ będą wielomianami optymalnymi dla funkcji ciągłej f na odcinku $[a, b]$ w sensie normy jednostajnej. Udowodnić, że $p_n \equiv q_n$. Co z tego wynika?

M9.4. 1 punkt (Część twierdzenia Czebyszewa o alternansie) Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$, a w_n — wielomianem stopnia nie wyższego niż n . Udowodnić, że jeśli istnieją takie $n + 2$ punkty $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in [a, b]$, że $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ i że

(i) $f(x_j) - w_n(x_j) = -[f(x_{j-1}) - w_n(x_{j-1})]$ ($j = 1, 2, \dots, n + 1$),

(ii) $|f(x_k) - w_n(x_k)| = \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]}$ ($k = 0, 1, \dots, n + 1$),

to w_n jest n -tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f .

M9.5. 1,5 punktu (Charles Jean de la Vallée-Poussin) Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$, a p_n — wielomianem stopnia nie wyższego niż n . Udowodnić, że jeśli istnieją takie $n + 2$ punkty $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in [a, b]$, że $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ i że

$$\text{sign}(f(x_j) - p_n(x_j)) = \lambda(-1)^j \quad (j = 0, 1, \dots, n + 1),$$

gdzie $\lambda \in \{-1, 1\}$ jest ustaloną liczbą, to dla dowolnego wielomianu $w_n \in \Pi_n$ zachodzi nierówność

$$\min_{0 \leq j \leq n+1} |f(x_j) - p_n(x_j)| \leq \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]}.$$

Wynioskować, stąd, że

$$\min_{0 \leq j \leq n+1} |f(x_j) - p_n(x_j)| \leq \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]}.$$

M9.6. 1 punkt Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Wykazać, że dla dowolnego podprzedziału $[c, d]$ tego przedziału zachodzi nierówność $E_n(f; [c, d]) \leq E_n(f; [a, b])$.

M9.7. 1 punkt Znaleźć 5-ty wielomian optymalny dla funkcji $f(x) := 2016x^7 + 12x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ w sensie normy jednostajnej na przedziale $[-1, 1]$.

M9.8. 1 punkt Normę jednostajną funkcji $f \in C[a, b]$ podaje wzór $\|f\|_\infty \equiv \|f\|_\infty^{[a,b]} := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Sprawdzić, że n -ty błąd aproksymacji optymalnej funkcji f z przestrzeni $C[a, b]$, określony wzorem

$$E_n(f) \equiv E_n(f; [a, b]) := \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]},$$

ma następujące własności:

a) $E_n(\alpha f) = |\alpha| E_n(f)$;

b) $E_n(f + g) \leq E_n(f) + E_n(g)$;

c) $E_n(f + w) = E_n(f)$;

d) $E_n(f) \leq \|f\|_\infty$,

gdzie f, g są dowolnymi funkcjami z $C[a, b]$, w jest dowolnym wielomianem stopnia $\leq n$, natomiast α – dowolną liczbą rzeczywistą.

6 grudnia 2017
Rafał Nowak