

Analiza numeryczna

Algebra liniowa

Rafał Nowak

9 stycznia 2018 r.

Macierzą nazywamy prostokątną tablicę $m \times n$ liczb rzeczywistych, ustawionych w m wierszach i n kolumnach:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Sumą macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jest macierz $C = [c_{ij}]$ tego samego rozmiaru:

$$C = A + B, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Iloczyn macierzy $A = [a_{ij}]$ przez liczbę α jest macierz

$$B = \alpha A, \quad b_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Iloczyn macierzy A i B jest określony tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B . Iloczyn $C = AB$ macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ jest macierzą

$$C = [c_{ij}], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Mnożenie macierzy jest łączne i rozdzielne względem dodawania:

$$A(BC) = (AB)C, \quad A(B + C) = AB + AC,$$

jednak nie jest przemienne.

Wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ są **liniowo niezależne**, jeśli żaden z nich nie jest liniową kombinacją pozostałych, tj. jeśli

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Wektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ są **liniowo niezależne**, jeśli żaden z nich nie jest liniową kombinacją pozostałych, tj. jeśli

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Rząd macierzy A jest liczbą jej liniowo niezależnych kolumn (wierszy). Macierz kwadratowa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest **nieosobliwa** wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest równy n . Wówczas istnieje **macierz odwrotna** oznaczana symbolem A^{-1} , o własności

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Jeśli A i B są nieosobliwe, a iloczyn AB jest określony, to

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

tj. macierz odwrotna do iloczynu macierzy jest równa iloczynowi odwrotności czynników w odwrotnym porządku. Macierz jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

Definicja

Normą wektorową nazywamy nieujemną funkcję rzeczywistą $\|\cdot\|$, określoną w przestrzeni \mathbb{R}^n , o następujących własnościach:

$$\bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}} \{\|\mathbf{x}\| > 0\};$$

$$\bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|\};$$

$$\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\}.$$

Definicja

Normą wektorową nazywamy nieujemną funkcję rzeczywistą $\|\cdot\|$, określoną w przestrzeni \mathbb{R}^n , o następujących własnościach:

$$\bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} \{\|\mathbf{x}\| > 0\};$$

$$\bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|\};$$

$$\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\}.$$

Najczęściej używane są trzy normy wektorów, zwane *normami Hoeldera*, definiowane następująco ($\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$):

$$\|\mathbf{x}\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 := (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2},$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Definicja

Normą macierzy nazywamy nieujemną funkcję rzeczywistą $\|\cdot\|$, określoną w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{n \times n}$ wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n , o następujących własnościach:

$$\bigwedge_{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{\Theta\}} \{\|A\| > 0\};$$

$$\bigwedge_{A \in \mathbb{R}^{n \times n}} \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|\};$$

$$\bigwedge_{A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}} \{\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|\};$$

$$\bigwedge_{A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}} \{\|AB\| \leq \|A\| \|B\|\}.$$

Przyjęcie jakiejś normy wektora pozwala na wprowadzenie odpowiedniej normy macierzy, zdefiniowanej równością

$$\|A\| := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Mówimy, że ta norma macierzy jest **indukowana** przez normę wektora. Można sprawdzić, że

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = (\text{największa wartość własna macierzy } A^T A)^{1/2},$$

gdzie A^T oznacza macierz transponowaną do A . Normę $\|\cdot\|_2$ nazywamy niekiedy **normą spektralną**. Zauważmy, że $\|I\| = 1$ dla dowolnej normy macierzy, indukowanych przez normy wektorów. Symbol I oznacza macierz jednostkową, $I = \text{diag}(1, \dots, 1)$.

Definicja

Będziemy mówili, że normy macierzy i wektora są *zgodne*, jeśli

$$\bigwedge_{A \in \mathbb{R}^{n \times n}} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \}.$$

Definicja (Macierz trójkątna dolna)

Macierz $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywamy *trójkątną dolną*, jeśli $l_{ij} = 0$ dla $i < j$:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zbiór wszystkich macierzy trójkątnych dolnych stopnia n oznaczamy symbolem \mathbb{L}_n . Podzbiór zbioru \mathbb{L}_n , zawierający macierze o elementach $l_{ii} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), oznaczamy symbolem $\mathbb{L}_n^{(1)}$.

Definicja (Macierz trójkątna górna)

Macierz $U = [u_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywamy *trójkątną górną*, jeśli $u_{ij} = 0$ dla $i > j$:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zbiór wszystkich macierzy trójkątnych górnych stopnia n oznaczamy symbolem \mathbb{U}_n .

$$U\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbb{U}_n \ni U = [u_{ij}];$$

$$\sum_{j=i}^n u_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right\} \quad (i = n, n-1, \dots, 2, 1).$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbb{U}_n \ni U = [u_{ij}];$$

$$\sum_{j=i}^n u_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right\} \quad (i = n, n-1, \dots, 2, 1).$$

$$L\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbb{L}_n \ni L = [l_{ij}];$$

$$\sum_{j=1}^i l_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Rozkłady trójkątne

Twierdzenie (Rozkład trójkątny macierzy)

Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie taka, że

$$\det A_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie

$$A_k := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Wówczas istnieje dokładnie jedna para macierzy $L \in \mathbb{L}_n^{(1)}$, $U \in \mathbb{U}_n$, spełniających równość $LU = A$. Ponadto, $\det A = u_{11}u_{22} \cdots u_{nn}$.

Faktoryzacja LU

Dla $i = 1, 2, \dots, n$ obliczamy

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (j = i, i+1, \dots, n),$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right) / u_{ii} \quad (j = i+1, i+2, \dots, n).$$

Jeśli znany jest rozkład macierzy układu równań

$$Ax = b$$

na czynniki trójkątne:

$$A = LU,$$

to zadanie sprowadza się do rozwiązywania kolejno dwóch układów o macierzy trójkątnej:

$$\begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y \end{cases}$$

Eliminacja Gaussa

Rozważmy układ równań

$$Ax = b \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Eliminacja Gaussa

Rozważmy układ równań

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Niech

$$A^{(1)} = [a_{ij}^{(1)}] := A, \quad \mathbf{b}^{(1)} = [b_1^{(1)}, \dots, b_n^{(1)}]^T := \mathbf{b}.$$

Eliminacja Gaussa

Rozważmy układ równań

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Niech

$$A^{(1)} = [a_{ij}^{(1)}] := A, \quad \mathbf{b}^{(1)} = [b_1^{(1)}, \dots, b_n^{(1)}]^T := \mathbf{b}.$$

Układ (2) przekształcamy w sposób równoważny do układu

$$\sum_{j=k}^n a_{kj}^{(k)} x_j = b_k^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

gdzie $a_k^{(k)} \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) oraz

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1} a_{k-1,j}^{(k-1)}, \\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + m_{i,k-1} b_{k-1}^{(k-1)}, \\ m_{i,k-1} = -\frac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}} \end{array} \right. \quad (k = 2, 3, \dots, n; \quad i, j = k, k+1, \dots, n).$$

Współczynniki $a_{kk}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) nazywamy **elementami głównymi**.

Współczynniki $a_{kk}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) nazywamy **elementami głównymi**. Z układu (3) łatwo otrzymać rozwiązanie wg wzorów

$$x_k = \left(b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)} x_j \right) / a_{kk}^{(k)} \quad (k = n, n-1, \dots, 2, 1) \quad (4)$$

Zdefiniujmy stałą g_n , zwaną **współczynnikiem wzrostu**, wzorem

$$g_n := \max_{1 \leq i, j, r \leq n} |a_{ij}^{(r)}| / \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

Dla eliminacji z częściowym wyborem elem. gł. zachodzi nierówność

$$g_n \leq 2^{n-1}.$$

Zdefiniujmy stałą g_n , zwaną **współczynnikiem wzrostu**, wzorem

$$g_n := \max_{1 \leq i, j, r \leq n} |a_{ij}^{(r)}| / \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

Dla eliminacji z częściowym wyborem elem. gł. zachodzi nierówność

$$g_n \leq 2^{n-1}.$$

Najlepsze ze znanych oszacowań dla pełnego wyboru elem. gł.,

$$g_n \leq \varphi(n),$$

gdzie $\varphi(n) := n^{1/2} (2^1 3^{1/2} 4^{1/3} \dots n^{1/(n-1)})^{1/2} < 1.8n^{1/2 + \log n/4}$,
wydaje się natomiast poważnie zawyżone. Np. $\varphi(10) = 19$, $\varphi(50) = 530$,
 $\varphi(100) = 3570$,

Twierdzenie

Niech \tilde{x} oznacza rozwiązanie układu $Ax = b$, obliczone w t -cyfrowej arytmetyce fl za pomocą metody eliminacji z wyborem (częściowym lub pełnym) elementów głównych. Wówczas istnieje macierz $\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, spełniająca nierówność

$$\|\delta A\|_{\infty} \leq C n^3 g_n 2^{-t} \|A\|_{\infty} \quad (C - \text{const}) \quad (5)$$

i taka, że

$$(A + \delta A)\tilde{x} = b.$$

Wniosek

Metoda eliminacji z wyborem elem. gł. jest algorytmem numerycznie poprawnym (o ile współczynnik g_n nie jest zbyt duży).

Metoda Richardsona

Metodę iteracyjną Richardsona definiuje wzór

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_{\tau} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \quad (k \geq 0).$$

gdzie

$$B_{\tau} := I - \tau A, \quad \mathbf{c} := \tau \mathbf{b}. \quad (6)$$

Równoważnie, dla $k = 0, 1, \dots$ obliczamy

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \tau \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right). \quad (7)$$

Metoda Jacobiego

W metodzie Jacobiego mamy następującą macierz przekształcenia:

$$B \equiv B_J := -D^{-1}(L + U). \quad (8)$$

Wersję skalarną metody opisują wzory

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Twierdzenie

Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

to $\|B_J\|_\infty < 1$ i metoda Jacobiego jest zbieżna.

Metoda Gaussa-Seidela

W metodzie (Gaussa-)Seidela mamy następującą macierz przekształcenia:

$$B \equiv B_S := -(D + L)^{-1}U. \quad (10)$$

Wersję skalarną metody opisują wzory

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Metoda relaksacji

W metodzie relaksacji mamy następującą macierz przekształcenia:

$$B_\omega := (I - \omega M)^{-1} (\omega N + (1 - \omega)I) \quad (12)$$

gdzie

$$M := -D^{-1}L, \quad N := -D^{-1}U.$$

Wersję skalarą metody relaksacji można zapisać w następujący sposób:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (13)$$

Metoda relaksacji

W metodzie relaksacji mamy następującą macierz przekształcenia:

$$B_\omega := (I - \omega M)^{-1} (\omega N + (1 - \omega)I) \quad (12)$$

gdzie

$$M := -D^{-1}L, \quad N := -D^{-1}U.$$

Wersję skalarą metody relaksacji można zapisać w następujący sposób:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (13)$$

Twierdzenie (Kahan)

Dla dowolnej nieosobliwej macierzy A i dowolnej liczby ω zachodzi nierówność

$$\varrho(B_\omega) \geq |\omega - 1|. \quad (14)$$

Metoda relaksacji

W metodzie relaksacji mamy następującą macierz przekształcenia:

$$B_\omega := (I - \omega M)^{-1} (\omega N + (1 - \omega)I) \quad (12)$$

gdzie

$$M := -D^{-1}L, \quad N := -D^{-1}U.$$

Wersję skalarą metody relaksacji można zapisać w następujący sposób:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (13)$$

Twierdzenie (Ostrowski, 1954)

Jeśli macierz A jest symetryczna i dodatnio określona, to metoda relaksacji jest zbieżna dla każdego $\omega \in (0, 2)$.

Twierdzenie

Niech A będzie macierzą symetryczną, dodatnio określoną i niech ma postać blokowo-trójkątniową:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & U_1 & & \\ L_2 & D_2 & U_2 & \\ \dots & \dots & \dots & \\ & L_{m-1} & D_{m-1} & U_{m-1} \\ & & L_m & D_m \end{bmatrix},$$

gdzie D_i są kwadratowymi macierzami przekątniowymi. Wtedy $\varrho(B_S) = \varrho^2(B_J)$ i optymalny czynnik relaksacji wyraża się wzorem

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho(B_S)}}.$$

Optymalną wartością $\varrho(B_\omega)$ jest

$$\varrho(B_{\omega_{\text{opt}}}) = \omega_{\text{opt}} - 1.$$

Twierdzenie

Jeśli $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz $A = A^T$, to istnieje macierz ortogonalna $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, że

$$U^T A U = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

przy czym $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy A .

Twierdzenie

Jeśli $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz $A = A^T$, to istnieje macierz ortogonalna $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, że

$$U^T A U = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

przy czym $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy A .

Twierdzenie (Schur)

Jeli $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, to istnieje macierz unitarna $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, że

$$U^H A U = R \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

gdzie $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jest macierzą górną trójkątną. Jeśli wszystkie wartości własne macierzy A są rzeczywiste, to $U, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Twierdzenie (o rozkładzie SVD)

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ istnieją takie macierze ortogonalne $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, że

$$U^T A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\ell) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (14)$$

gdzie $\ell = \min(m, n)$. Ponadto, jeśli $\text{rank}(A) = r$, to

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0, \quad \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_\ell = 0.$$

Algorytm 1 Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Require: $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = n$

Ensure: $A = QR$, $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q^T Q = I_n$,
 $R = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $r_{ij} = 0 \quad (i > j)$

for $k = 1, 2, \dots, n$ **do**

▷ Obliczamy kolejne wektory \mathbf{q}_k

for $i = 1, 2, \dots, k - 1$ **do**
$$r_{ik} \leftarrow \mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_k$$

end for

$$\mathbf{p}_k \leftarrow \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{q}_i r_{ik}$$

▷ Można sprawdzić, że $\langle \mathbf{p}_k, \mathbf{q}_j \rangle = 0$ dla $j = 1, 2, \dots, k-1$

$$r_{kk} \leftarrow ||\mathbf{p}_k||$$
$$\mathbf{q}_k \leftarrow \mathbf{p}_k / r_{kk}$$

▷ W ten sposób mamy $\|\mathbf{q}_k\| = 1$

end for

