

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M13

17 stycznia 2018 r.

M13.1. 1 punkt Znaleźć rozkład LU macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 & 4 \\ 35 & 10 & 13 & 22 \\ 21 & 13 & 15 & 18 \\ 63 & 49 & 63 & 68 \end{bmatrix}.$$

M13.2. 1 punkt Niech $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ będzie danym wektorem oraz niech $a_k \neq 0$, gdzie $1 \leq k \leq n-1$. Określmy macierz $M^{(k)} \in \mathbb{L}_n^{(1)}$ wzorem

$$(1) \quad M^{(k)} := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & m_{nk} & & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $m_{ik} := -a_i/a_k$, ($i = k+1, k+2, \dots, n$). Udowodnić, że $M^{(k)}\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_k, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-k \text{ razy}}]^T$,

tj. przekształcenie $M^{(k)}$ zachowuje bez zmian k początkowych składowych, a zeruje $n-k$ ostatnich elementów wektora \mathbf{a} .

M13.3. 1 punkt Udowodnić, że macierz odwrotna do macierzy $M^{(k)}$ (zob. (1)) ma postać

$$[M^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -m_{nk} & & 1 \end{bmatrix}.$$

M13.4. 1 punkt Niech $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Sprawdzić, że wzór

a) $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$,

b) $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$,

definiuje normę w przestrzeni \mathbb{R}^n .

M13.5. 2 punkty Wykazać, że macierzowa *norma spektralna*, indukowana przez normę euklidesową wektorów $\|\cdot\|_2$, wyraża się wzorem

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)},$$

gdzie *promień spektralny* $\varrho(A^T A)$ macierzy $A^T A$ jest z definicji jej największą wartością własną.

M13.6. 1 punkt Wykazać, że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zachodzą nierówności

a) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty;$

b) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty;$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1.$

M13.7. 1 punkt Wykazać, że norma macierzowa indukowana przez normę wektorową $\|\cdot\|_\infty$ wyraża się wzorem

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

M13.8. 1 punkt Wykazać, że wzór

$$\|A\|_E := \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2}$$

definiuje submultiplikatywną normę w $\mathbb{R}^{n \times n}$, zwaną *normą euklidesową*, zgodną z normą wektorową $\|\cdot\|_2$.

M13.9. 1 punkt Wykazać, że iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) tego samego stopnia jest macierzą trójkątną dolną (górną).

M13.10. 1 punkt

a) Wykazać, że jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.

b) Opracować metodę wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy trójkątnej dolnej L , z jedynkami na przekątnej głównej.