Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część licencjacka)

31 stycznia 2013

Zadanie 1 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, równoważne formule $(p \vee q) \Rightarrow r$.

Zadanie 2 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK" w prostokąty obok tych par formuł, które są równoważne. W pozostałe prostokąty wpisz odpowiednie kontrprzykłady.

(a) $p \Rightarrow (q \wedge r)$ i $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

(b) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ i $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q,\ \neg q \vee r,\ p,\ \neg r \vee \neg p\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli istnieją takie zbiory A, B i C, że $A \cup (B \cap C) \not\subseteq A \cup (C \setminus A)$, to w prostokąt poniżej wpisz przykład takich trzech zbiorów. W przeciwnym wypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli równość $\bigcap_{t \in T}(A_t \setminus B_t) = \bigcap_{t \in T} A_t \setminus \bigcap_{t \in T} B_t$ zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ i $\{B_t\}_{t \in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 6 (2 punkty). Jeśli istnieje taki 7-elementowy zbiór X, że $\mathbb{N} \cup X = \mathbb{N}$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór nie istnieje. Jeśli istnieje taki 7-elementowy zbiór Y, że $\mathbb{N} \cap Y = \mathbb{N}$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór nie istnieje.

Zadanie 7 (2 punkty). Mówimy, że formuła ϕ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\exists n \Big((\forall k \ (k<n) \Rightarrow k \in X) \wedge n \notin X \Big)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 8 (2 punkty). Niech ϕ i ψ oznaczają formuły rachunku kwantyfikatorów, być może zawierające wolne wystąpienia zmiennej x. Jeśli formuła $(\forall x\, \phi \wedge \psi) \Rightarrow (\forall x\, \psi)$ jest prawem rachunku kwantyfikatorów, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej formuły w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym razie w prostokąt poniżej wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 9 (2 punkty). Rozważmy relacje $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times A$. W prostokąt poniżej wpisz formułę logiki I rzędu mówiącą, że relacja R *nie* jest relacją odwrotną do S. Formuła ta nie może zawierać symbolu negacji (ale może zawierać symbol $\notin$).

Zadanie 10 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, której każda klasa abstrakcji ma 4 elementy, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej relacji. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Numer indeksu:

Zadanie 11 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze liczb wymiernych, która ma continuum klas abstrakcji, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Zadanie 12 (2 punkty). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathbb{N}^{\{0,1\}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{0,1\}$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka bijekcja nie istnieje.

Zadanie 13 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{aligned} f &: A^{B\times C} \to A^B, \\ g &: B \times C \to A, \\ h &: A \to B^C \end{aligned}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. Wpisz słowo „TAK" w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne i słowo „NIE" w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są niepoprawne.

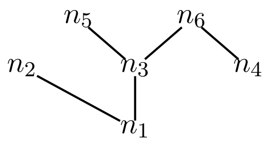
$(f(g))(b,c)$		$(h(a))(c)$	
$h\Big((f(g))(b)\Big)$		$\Big(h(g(b,c))\Big)(c)$	

Zadanie 14 (2 punkty). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{N}^{\{0,1\}}$	$\{1,2,3\}^{\{4,5\}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$	$\mathbb{N} \times \{2013\}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Zadanie 15 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja częściowego porządku w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Zadanie 16 (2 punkty). Jeśli istnieją takie liczby $n_1, \ldots, n_6 \in \mathbb{N}$, że diagram ich relacji podzielności (tj. diagram Hassego dla porządku $\langle \{n_1, \ldots, n_6\}, | \rangle$) ma postać taką jak na rysunku poniżej, to w prostokąt obok rysunku wpisz przykład takich liczb. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.



Zadanie 17 (2 punkty). *Poprzednikiem* elementu x w zbiorze uporządkowanym $\langle X, \leq \rangle$ nazywamy taki element $y \in X$, że $y < x$ oraz w zbiorze X nie istnieje taki element z, że $y < z$ i $z < x$. Jeśli zbiór liczb parzystych ma w zbiorze uporządkowanym $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ poprzednik, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki poprzednik. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego poprzednik nie istnieje.

Zadanie 18 (2 punkty). Jeśli istnieje taki porządek mocy continuum, w którym każdy element ma poprzednik, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki porządek. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego taki porządek nie istnieje.

Zadanie 19 (2 punkty). W poniższej tabeli $\leq_{lex}$ oznacza leksykograficzne rozszerzenie standardowego porządku w zbiorze liczb naturalnych, $\preceq$ jest porządkiem na funkcjach zadanym wzorem $f \preceq g \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \forall x\, f(x) \leq g(x)$, natomiast $\sqsubseteq$ jest porządkiem na parach liczb zadanym wzorem $\langle a, b \rangle \sqsubseteq \langle c, d \rangle \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} a \leq c \wedge b \leq d$. Wpisz słowo „TAK” w te pola tabeli, które odpowiadają parom porządków izomorficznych. W pozostałe pola wpisz słowo „NIE”.

	$\langle \mathbb{N} \times \{0,1\}, \leq_{lex} \rangle$	$\langle \{0,1\} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$	$\langle \mathbb{N}^{\{0,1\}}, \preceq \rangle$	$\langle \{0\}^*, \leq_{lex} \rangle$	$\langle \{0,1\}^*, \leq_{lex} \rangle$
$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$					
$\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq \rangle$					

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu x, y, z są zmiennymi, natomiast f symbolem funkcyjnym. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

(a) $f(f(x, y), z) \overset{?}{=} f(z, x)$

(b) $f(f(x, y), y) \overset{?}{=} f(z, x)$

Numer indeksu:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część zasadnicza)

31 stycznia 2013

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -4 do 20 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.

Zadanie 21. Rozważmy dowolny niepusty zbiór A i relację binarną $R \subseteq A \times A$. Niech $I_A = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$. Mówimy, że R jest relacją *funkcyjną* jeśli $RR^{-1} \subseteq I_A$. Mówimy, że R jest relacją *całkowitą* jeśli $(A \times A)R = A \times A$.

(a) Udowodnij, że R jest relacją funkcyjną wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x, y_1, y_2 \in A$ zachodzi implikacja
$$\langle x, y_1\rangle \in R \wedge \langle x, y_2\rangle \in R \Rightarrow y_1 = y_2.$$

(b) Udowodnij, że R jest relacją całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x \in A$ istnieje takie $y \in A$, że $\langle x, y\rangle \in R$.

(c) Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna funkcyjna, całkowita, symetryczna i przechodnia relacja na zbiorze A.

Zadanie 22. Mówimy, że liczba $d \in \mathbb{N}$ jest *dzielnikiem* liczby $x \in \mathbb{N}$ jeśli istnieje taka liczba $k \in \mathbb{N}$, że $dk = x$. Mówimy, że d jest *wspólnym dzielnikiem* liczb x i y jeśli d jest dzielnikiem x oraz d jest dzielnikiem y. Mówimy, że d jest *największym wspólnym dzielnikiem* liczb x i y (piszemy wtedy $d = gcd(x, y)$), jeśli d jest wspólnym dzielnikiem x i y oraz dla każdego wspólnego dzielnika d' liczb x i y zachodzi nierówność $d' \leq d$.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych x i y, jeśli $x > y$ i $y > 0$ to $gcd(x, y) = gcd(x - y, y)$.

Zadanie 23. Niech $t \in T(\Sigma, V)$ będzie termem nad sygnaturą Σ i zbiorem zmiennych V i niech $x \in V$. Przez $\{x/t\} : V \to T(\Sigma, V)$ oznaczamy takie podstawienie, że $\{x/t\}(x) = t$ oraz $\{x/t\}(y) = y$ dla wszystkich zmiennych $y \in V$ różnych od x.

(a) Niech θ będzie takim podstawieniem, że $\theta(x) = \theta(t)$. Udowodnij, że $\theta\{x/t\} = \theta$.

(b) Niech θ i σ będą takimi podstawieniami, że dla wszystkich zmiennych v występujących w termie t zachodzi równość $\theta(v) = \sigma(v)$. Udowodnij, że $\theta(t) = \sigma(t)$.

(c) Dla instancji problemu unifikacji $\mathcal{S}$ i podstawienia θ przez $\theta(\mathcal{S})$ oznaczamy zbiór równań $\{\theta(s) \stackrel{?}{=} \theta(t) \mid s \stackrel{?}{=} t \in \mathcal{S}\}$. Udowodnij, że jeśli θ jest unifikatorem zbioru $\mathcal{S} \cup \{x = t\}$ to istnieje taki unifikator σ zbioru $\{x/t\}(\mathcal{S})$, że $\sigma(x) = x$ oraz $\theta = \sigma\{x/t\}$.