Algebra II (ISIM), lista 5 (16.11.2017).

Teoria: Wyliczenie małych grup (do rzędu 8 włącznie). Ósemkowa grupa kwaternionów $\mathbb{Q}_8$. Grupy abelowe: suma prosta grup abelowych. $p$-prymarna składowa. Część torsyjna. Grupa beztorsyjna. $G_t = \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} G_p$. Wolna grupa abelowa. Podgrupa wolnej grupy abelowej jest wolna. Skończona grupa abelowa jest sumą prostą grup cyklicznych (informacyjnie). Skończenie generowana grupa abelowa jest sumą prostą grup cyklicznych.

1. $^-$ Wyznaczyć wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu) grupy abelowe rzędu 12, bez powtórzeń.
2. $^-$ Załóżmy, że $f : G \to (\mathbb{Z}, +)$ jest epimorfizmem grup abelowych. Udowodnić, że $G \cong (\mathbb{Z}, +) \times Ker(f)$ (wsk: powtórzyć dowód z wykładu).
3. $^*$ Udowodnić, że każda grupa abelowa jest homomorficznym obrazem wolnej grupy abelowej.
4. Dowieść, że jeśli $H < Z(G)$ i $G/H$ jest cykliczna, to $G$ jest abelowa.
5. Załóżmy, że $G < (\mathbb{Z}^n, +)$. Niech $g_i \in G$ będzie takie, że $i$-ta współrzędna $g_i$ jest najmniejsza $> 0$. Jesli takiego $g_i$ nie ma, przyjmujemy $g_i = 0$. Udowodnić, że elementy $g_1, \ldots, g_n$ generują grupę $G$.
6. (a) Czy $(\mathbb{Q}, +)$ jest wolną grupa abelową?
(b) Czy grupa $S_\infty$ (zespolonych pierwiastków z jedności) jest suma prostą grup cyklicznych?
(wsk: mówimy, że grupa abelowa $G$ jest podzielna, gdy $(\forall x \in G)(\exists n > 0)(\exists y \in G)ny = x$. Rozważyć, czy grupy z zadania są podzielne.)
7. Załóżmy, że $G$ jest grupą abelową i $G_1, \ldots, G_n < G$. Dowieść, że $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n \iff$
(1) $G = G_1 + \cdots + G_n$
(2) jeśli $x_1 \in G_1, \ldots, x_n \in G_n$ i $x_1 + \cdots + x_n = 0$, to $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
8. Załóżmy, że $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$ są bazami wolnej grupy abelowej $G$. Udowodnić, że bazy te sa równoliczne w następujący sposób: Niech $p$ będzie ulubioną liczbą pierwszą. Rozważyć grupę ilorazową $G/pG$, która jest sumą prostą pewnej liczby grup cyklicznych rzędu $p$.
(a) Gdy $\mathcal{B}$ lub $\mathcal{C}$ jest skończona, obliczyć rząd grupy $G/pG$ odwołując się do baz $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.
(b)$^*$ gdy obie bazy są nieskończone, użyć algebry liniowej nad ciałem $\mathbb{Z}_p$.
9. Mówimy, że podgrupa $H$ grupy $G$ jest charakterystyczna, gdy $f[H] = H$ dla każdego automorfizmu $f$ grupy $G$. Udowodnić, że:
(a) jeśli $H$ jest charakterystyczna w $G$, to $H \triangleleft G$.
(b) $Z(G)$ jest charakterystyczna w $G$.

(c)* Jeśli w grupie $G$ zachodzi równość $x^2 = e$, to jedyne charakterystyczne podgrupy grupy $G$ to sama $G$ i podgrupa trywialna.

10. * Ile wynosi suma elementów skończonej grupy abelowej?