Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (część licencjacka)

12 lutego 2013

Zadanie 1 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, równoważne formule $p \Rightarrow (q \wedge r)$.

Zadanie 2 (2 punkty). Jeśli istnieje formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych, spójników $\wedge$ i $\neg$ oraz nawiasów równoważna formule $p \Rightarrow q$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 3 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg s \vee \neg q,\ \neg q \vee s,\ p \vee q,\ \neg r \vee \neg s,\ \neg p \vee q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 4 (2 punkty). Jeśli formuła $((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ jest tautologią, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej formuły w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym razie w prostokąt poniżej wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 5 (2 punkty). Mówimy, że formuła logiki I rzędu jest w *negacyjnej postaci normalnej* gdy negacja występuje w niej jedynie bezpośrednio przed formułami atomowymi. Np. formuła $\forall x \exists y\ x \leq y \vee \neg(x=y)$ jest w negacyjnej postaci normalnej a formuły $\forall x \exists y\ \neg(x \leq y \vee (x=y))$ oraz $\neg \forall x \exists y\ x \leq y \vee (x=y)$ nie są w takiej postaci. Jeśli istnieje formuła w negacyjnej postaci normalnej równoważna formule $\neg\Big((\forall x \quad x \in X \Rightarrow x \leq a) \ \wedge \ \forall b\Big((\forall x \quad x \in X \Rightarrow x \leq b) \Rightarrow a \leq b\Big)\Big)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 6 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\forall b\Big((\forall x \quad x \in X \Rightarrow x \leq b) \Rightarrow a \leq b\Big)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli inkluzja $(A \cap B) \cup C \subseteq A \cap (B \cup C)$ zachodzi dla wszystkich zbiorów A, B i C, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 8 (2 punkty). Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole $\cup, \cap, \setminus$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej symboli niż W'. Np. $A \setminus B$ jest uproszczeniem $(A \cup B) \setminus B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 9 (2 punkty). Jeśli równość $\bigcup_{t \in T} (A_t \setminus B_t) = \bigcup_{t \in T} A_t \setminus \bigcup_{t \in T} B_t$ zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ i $\{B_t\}_{t \in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Numer indeksu:

Zadanie 10 (2 punkty). Dla $m, n \in \mathbb{N}$ niech $A_{m,n} = \{i \in \mathbb{N} \mid m \leq i \ \wedge i \leq n\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość zbioru $\bigcup_{m=2013}^{\infty} \bigcup_{n=17}^{\infty} A_{m,n}$, tzn. wpisz wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup, \exists, \forall$.

Zadanie 11 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $Bywa \subseteq O \times B$, $Lubi \subseteq O \times S$ i $Podają \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz soków podawanych w barze *Jagódka*, których nie lubi żadna osoba bywająca w tym barze.

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \times \{0, 1, 2\} \to \mathbb{N}$ zdefiniowaną wzorem $f(n, k) = 3n + k$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f to w prostokąt poniżej wpisz tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 13 (2 punkty). Jeśli istnieje taka relacja równoważności R na zbiorze liczb naturalnych, że klasa abstrakcji $[5]_R$ ma dokładnie 5 elementów, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Zadanie 14 (2 punkty). Rozważmy funkcje

$$\begin{aligned} f &: A^{B \times C} \to A^C, \\ g &: B \times C \to A, \\ h &: A \to A^C \end{aligned}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne i słowo „NIE” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są niepoprawne.

$(f(g))(c)$		$h\Big((h(a))(c)\Big)$	
$h\Big((f(g))(b, c)\Big)$		$\Big(h(g(b, c))\Big)(c)$	

Zadanie 15 (2 punkty). Wpisz słowo „TAK” w te kratki poniższej tabelki, które odpowiadają parom zbiorów równolicznych. Wpisz „NIE” w kratki odpowiadające parom zbiorów nierównolicznych.

	$\mathbb{R} \times [0,1)$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q})$	$\mathcal{P}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathcal{P}(\{0,1\}^{\{2,3,4\}})$	$\mathbb{N}^{\{0,1,2\}}$
$\mathbb{N}$							
$\mathbb{R}$							
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$							

Zadanie 16 (2 punkty). Jeśli istnieje taki zbiór X, że $\mathbb{R} \subseteq X$ oraz $|X| \leq |\mathbb{N}|$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki zbiór nie istnieje.

Zadanie 17 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz liczbę różnych relacji równoważności na zbiorze $\{12, 2, 2013\}$.

Zadanie 18 (2 punkty). Jeśli istnieje taka relacja porządku częściowego R na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$, że $\langle \mathbb{N}, R^{-1} \rangle$ jest relacją równoważności, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Zadanie 19 (2 punkty). Rozważmy porządek $\preceq$ na funkcjach zadany wzorem $f \preceq g \overset{\text{df}}{\iff} \forall x\; f(x) \leq g(x)$ oraz porządek $\sqsubseteq$ na parach liczb zadany wzorem $\langle a,b \rangle \sqsubseteq \langle c,d \rangle \overset{\text{df}}{\iff} a \leq c \wedge b \leq d$. Jeśli porządki $\langle \mathbb{N}^{\{0,1\}}, \preceq \rangle$ i $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

(a) $f(g(y), y, z) \overset{?}{=} f(g(z), x, a)$

(b) $f(g(y), y, z) \overset{?}{=} f(z, x, a)$