Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Kolokwium połówkowe

17 grudnia 2011

Zadanie 1 (1 punkt). Mówimy, że formuła φ jest uproszczeniem formuły ψ, jeśli obie formuły są równoważne oraz φ zawiera mniej wystąpień spójników logicznych niż ψ.

W prostokąt poniżej wpisz formułę w dysjunkcyjnej lub w koniunkcyjnej postaci normalnej będącą uproszczeniem formuły $(p \lor q \lor r) \land ((p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor q)$ lub słowo „NIE", jeśli taka formuła nie istnieje.

Zadanie 2 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz dowód tautologii $(p \lor q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$ w systemie naturalnej dedukcji.

Zadanie 3 (1 punkt).

Wpisz słowo „TAK" w te spośród kratek poniższej tabelki, które odpowiadają zupełnym zbiorom spójników logicznych. W pozostałe kratki wpisz słowo „NIE".

$\neg$	$\land, \lor$	$\land, \lor, \neg$	$\lor, \Rightarrow$	$\land, \neg$	$\lor, \neg$	$\lor, \Leftrightarrow$	$\land, \lor, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Zadanie 4 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz formułę z trzema zmiennymi wolnymi k, m, n, która (interpretowana w zbiorze liczb naturalnych) mówi, że k jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n. Wolno używać symboli $+, \cdot, =$, spójników logicznych, nawiasów, zmiennych i kwantyfikatorów.

Zadanie 5 (1 punkt). Jeśli istnieją takie zbiory A, B i C, że $A \setminus B = C$ oraz $A \setminus C \neq B$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich zbiorów. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 6 (1 punkt). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowaną wzorem $f(n) = 2n$. Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f, to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz wyjaśnienie, dlaczego funkcja odwrotna nie istnieje.

Zadanie 7 (1 punkt). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $f(x) = x^2 + 1$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość przeciwobrazu odcinka domkniętego $[-1, 2]$ przez funkcję f.

Zadanie 8 (1 punkt). Rozważmy funkcję $\mathsf{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ zdefiniowaną wzorem

$$\mathsf{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jeśli} \quad x < 0, \\ 0, & \text{jeśli} \quad x = 0, \\ 1, & \text{jeśli} \quad x > 0, \end{cases}$$

oraz relację równoważności na zbiorze liczb rzeczywistych

$$\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \mathsf{sgn}(x) = \mathsf{sgn}(y)\}.$$

W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że zbiór $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi\}$ jest klasą abstrakcji liczby π. Formuła nie może zawierać symbolu sgn.

Numer indeksu:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Kolokwium połówkowe

17 grudnia 2011

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -2 do podanej przy zadaniu liczby punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.

Zadanie 9 (10 punktów). Rozważmy dowolne zbiory A, B, C. Udowodnij, że jeśli $A \times B = A \times C$ to $A = \emptyset$ lub $B = C$.

Zadanie 10 (12 punktów). Dla dowolnej relacji binarnej $S \subseteq A \times A$ definiujemy $S^0 = I_A$ (gdzie I_A oznacza relację identyczności na zbiorze A) oraz $S^{n+1} = S^n S$ dla wszystkich $n \geq 0$. Rozważmy dowolną relację binarną $R \subseteq A \times A$. Udowodnij, że

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} (R \cup R^{-1})^i$$

jest relacją równoważności. Możesz przy tym skorzystać z lematu (którego nie musisz dowodzić) mówiącego że dla dowolnej relacji S oraz dowolnych liczb $i, j \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $S^i S^j = S^{i+j}$.

Zadanie 11 (10 punktów). Rozważmy następujący lemat.

Lemat. *Niech*

$$\mathcal{F} = \{p \vee \varphi_1, \ldots, p \vee \varphi_k, \neg p \vee \psi_1, \ldots, \neg p \vee \psi_l, \rho_1, \ldots, \rho_m\}$$

będzie takim zbiorem klauzul, że zmienna p nie występuje w klauzulach $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $\psi_1, \ldots, \psi_l$, $\rho_1, \ldots, \rho_m$. Niech $\mathcal{F}_R$ będzie zbiorem wszystkich rezolwent klauzul z $\mathcal{F}$ względem zmiennej p, czyli

$$\mathcal{F}_R = \{\varphi_i \vee \psi_j \mid i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, l\}\}.$$

Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ jest sprzeczny, to zbiór $\mathcal{F}_R \cup \{\rho_1, \ldots \rho_m\}$ też jest sprzeczny.

Korzystając z tego lematu udowodnij następujące twierdzenie (zwane twierdzeniem o zupełności rezolucji dla rachunku zdań): *Jeśli $\mathcal{F}$ jest sprzecznym zbiorem klauzul, to istnieje rezolucyjny dowód sprzeczności zbioru $\mathcal{F}$.*
Wskazówka: Użyj indukcji względem liczby zmiennych występujących w $\mathcal{F}$.[1]

[1] Dla ułatwienia przypominamy tu podstawowe definicje: rezolucyjny dowód sprzeczności zbioru $\mathcal{F}$ to ciąg klauzul kończący się klauzulą pustą, w którym każda klauzula albo pochodzi ze zbioru $\mathcal{F}$, albo jest rezolwentą klauzul występujących wcześniej w tym ciągu. Klauzule to alternatywy literałów, ale dla uproszczenia rozumowań utożsamiliśmy je ze zbiorami literałów.