

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M12

10 stycznia 2018 r.

- M12.1.** 1 punkt Znaleźć liczby c_j , dla których wielomian trygonometryczny $w_n(x) := \sum_{j=0}^n c_j \cos(jx)$ daje najmniejszą wartość całki

$$\int_0^\pi (\pi - x^2 - w_n(x))^2 dx.$$

- M12.2.** 2 punkty Udowodnić, że współczynniki $A_k^{(n)}$ kwadratury Gaussa-Czebyszewa spełniają równość

$$A_k^{(n)} = -\frac{\pi}{T'_{n+1}(t_k) T_{n+2}(t_k)},$$

gdzie T_j oznaczają wielomiany Czebyszewa, a t_k — zera wielomianu T_{n+1} .

- M12.3.** 1 punkt Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$T_{n+j}(u_k) = T_n(u_k) \cdot T_j(u_k)$$

gdzie u_k oznaczają punkty ekstremalne wielomianu T_n .

- M12.4.** 1 punkt Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$\int_{-1}^1 T_n(x) dx = \begin{cases} 0, & n \text{ nieparzyste,} \\ \frac{2}{1-n^2}, & n \text{ parzyste.} \end{cases}$$

- M12.5.** 1,5 punktu Udowodnić, że wzór

$$(1) \quad \int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-1/2} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^n f(\cos(k\pi/n))$$

jest dokładny dla $f \in \Pi_{2n-1}$.

- M12.6.** 1 punkt Podać przykład wielomianu $f \in \Pi_{2n}$, dla którego wzór (1) jest niedokładny. Co z tego wynika?

- M12.7.** 1 punkt Wyznaczyć, o ile to możliwe, takie wartości stałych A, B, C , żeby równość

$$\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-1/2} dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

zachodziła dla dowolnego wielomianu f stopnia ≤ 5 . Podać także przykład wielomianu stopnia 6, dla którego powyższa równość nie zachodzi.

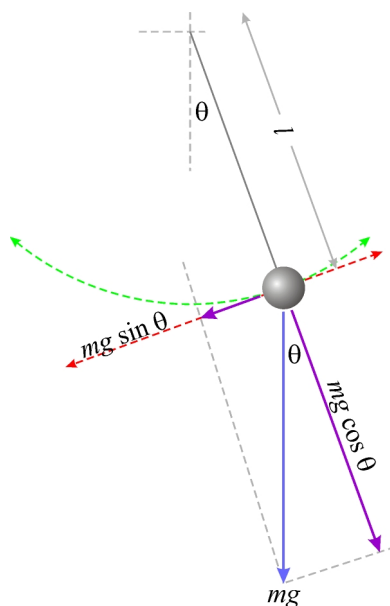
M12.8. 1 punkt Poeksperymentować z metodą adaptacyjną Simpsona

```
function AdaptiveSimpson(f,a,b; abstol=1.0e-8)
    nf = 3;
    ff = f([a, (a+b)/2, b]);
    nf = 3; # Initial Simpson approximation
    I1 = (b-a)*dot([1, 4, 1], ff)/6;
    function adaptrec(f,a,b,ff,I1,tol,nf)
        h = (b-a)/2;
        fm = f([a+h/2, b-h/2]);
        nf = nf + 2;
        # Simpson approximations for left and right subinterval
        fR = [ff[2], fm[2], ff[3]];
        fL = [ff[1], fm[1], ff[2]];
        IL = h*dot([1, 4, 1], fL)/6;
        IR = h*dot([1, 4, 1], fR)/6;
        I2 = IL + IR;
        I = I2 + (I2 - I1)/15;
        # Extrapolated approximation
        if (abs(I-I2) > tol)
            IL,nf = adaptrec(f,a,a+h,fL,IL,tol/2,nf);
            IR,nf = adaptrec(f,b-h,b,fR,IR,tol/2,nf);
            I = IL + IR;
        end
        return I,nf;
    end
    return adaptrec(f,a,b,ff,I1,abstol,nf);
end;
```

Podać przykład funkcji $f \in C^\infty[-1,1]$, dla której obliczanie całki $\int_{-1}^1 f(x) dx$, z dokładnością $\text{abstol}=10^{-6}$, wymaga co najmniej 1000 wywołań funkcji f .

M12.9. 2 punkty Rozważyć równanie wahadła (zob. <https://pl.wikipedia.org/wiki/Wahad%C5%82o>)

$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0.$$



Zastosować metodę Rungego-Kutty do symulacji ruchu wahadła (trwającego np. 10 sekund) z następującymi warunkami początkowymi

$$\begin{cases} \theta(0) &= \frac{\pi}{3}, \\ \theta'(0) &= 0. \end{cases}$$

3 stycznia 2018
Rafał Nowak