

# Pracownia z analizy numerycznej

## Sprawozdanie do zadania P2.2

Prowadzący: dr Rafał Nowak

Jakub ZADROŻNY, Mateusz HAZY

Wrocław, 17 grudnia 2017

### 1 Wstęp

Precyzyjne wyznaczanie położenia na Ziemi jest problemem, z którym ludzkość zmagą się od setek lat. Na początku wykorzystywano zupełnie prymitywne metody (jak obserwacja otoczenia), z czasem wypracowano bardziej zaawansowane sposoby (np. oparte na obserwacjach astronomicznych), aż w końcu opracowano rozwiązanie niemal doskonałe. Rozwiązaniem tym jest system GPS (*Global Positioning System*), czyli program nawigacji satelitarnej, pozwalający określać położenie obiektu z dokładnością do kilku metrów (czasem nawet dokładniej). Składa się on z trzech segmentów: kosmicznego, naziemnego oraz użytkownika. Niniejsze sprawozdanie skupia się na problemach segmentu użytkownika i ma na celu przedstawienie oraz porównanie metod wyznaczania położenia obiektu na podstawie informacji z segmentu kosmicznego.

#### 1.1 Opis problemu

Na potrzeby doświadczeń przyjmijmy model, w którym informacja, jaką użytkownik otrzymuje od satelity, składa się z 4 liczb:

- $(X, Y, Z)$  - współrzędne satelity w momencie wysłania sygnału
- $T_w$  - czas wysłania sygnału

Niech  $T_o$  będzie czasem odebrania sygnału przez użytkownika. Wtedy czas podróży sygnału wynosi  $T_o - T_w$  i przyjmując, że sygnał przemieszcza się stałe z prędkością światła, możemy określić, w jakiej odległości od satelity znajduje się odbiornik (w linii prostej). Innymi słowy, odbiornik leży na *sferze* o środku w punkcie  $(X, Y, Z)$  i promieniu  $c(T_o - T_w)$ . Jeżeli pozycję odbiornika oznaczmy

przez  $(x, y, z)$ , to równanie tej sfery wygląda następująco

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = [c(T_o - T_w)]^2$$

Posiadając informacje z trzech satelit, otrzymalibyśmy teoretycznie równania trzech sfer, które przecinałyby się w mniej więcej dwóch punktach, z których jeden leżałby w pobliżu Ziemi. Jednak w praktyce zegary satelit i odbiornika nie są zsynchronizowane, przez co promień każdej sfery zostanie przekłamanym i pozycja zostanie wyznaczona błędnie (lub sfery w ogóle nie będą mieć punktów wspólnych). Rozwiązaniem tego problemu jest wprowadzenie dodatkowej zmiennej  $t$  oznaczającej błąd zegara odbiorcy. Aby otrzymać jednoznaczne rozwiązanie potrzebujemy teraz dodatkowego równania. Prowadzi to do układu

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - [c(t_1 - t)]^2 &= 0 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 - [c(t_2 - t)]^2 &= 0 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 - [c(t_3 - t)]^2 &= 0 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 - [c(t_4 - t)]^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie  $(x_i, y_i, z_i)$  to współrzędne  $i$ -tego satelity w czasie wysłania sygnału,  $t_i$  to czas podróży sygnału od  $i$ -tego satelity oraz  $c$  – prędkość światła. Celem niniejszego sprawozdania jest rozważenie możliwości rozwiązania tego układu.

## 2 Metody rozwiązywania układu

Źródła donoszą, że w początkowym okresie działania systemu *GPS* do rozwiązywania układu (1) używano metod iteracyjnych (metody Newtona). Metody nieiteracyjne pojawiły się nieco później, a pierwszą z nich zaproponował w swojej pracy Stephen Bancroft w roku 1985. Od tego czasu opublikowano na ten temat wiele prac, w których stale rozwija się istniejące metody oraz porównuje się ich przydatność w rozmaitych sytuacjach praktycznych.

W niniejszym sprawozdaniu wyprowadzono szczegółowo dwa podstawowe podejścia: iteracyjne (metodę Newtona) oraz algebraiczne (nieco odmienne niż zaproponowane przez S. Bancrofta, jednak o podobnym charakterze).

### 2.1 Metoda Newtona

Niech  $D_i := ct_i$ , a pod zmienną  $t$  podstawmy  $ct$ . Wprowadźmy oznaczenia

$$f_i(x, y, z, t) := (x - X_i)^2 + (y - Y_i)^2 + (z - Z_i)^2 - (D_i - t)^2 \tag{2}$$

$$F(x, y, z, t) := (f_1(x, y, z, t) \ f_2(x, y, z, t) \ f_3(x, y, z, t) \ f_4(x, y, z, t))^T \tag{3}$$

dla  $1 \leq i \leq 4$ , zgodnie z notacją układu (1), gdzie  $T$  oznacza transpozycję.

Opracujemy metodę rozwiązania układu na podstawie metody Newtona. Chcemy znaleźć miejsce zerowe funkcji  $F$  określonej przez (3). Załóżmy, że mamy  $n$ -te przybliżenie wyniku  $x_n \in \mathbb{R}^4$ . Chcemy znaleźć takie  $h \in \mathbb{R}^4$ , że dla  $x_{n+1} = x_n + h$  zajdzie  $F(x_{n+1}) = 0$ .

**Lemat 1.** (*Linearyzacja*) Dla funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalnej na przedziale  $[a, b]$  oraz punktów  $c, x \in \mathbb{R}^n$  z przedziału  $[a, b]$  zachodzi

$$f(x) \approx f(c) + \nabla f(c) \circ (x - c)$$

Dowód lematu 1 dostępny jest w literaturze, m.in. w pozycji [1].

Korzystając z lematu 1 otrzymujemy

$$f_i(x + h) \approx f_i(x) + \nabla f_i(x) \circ h$$

gdzie  $x, h \in \mathbb{R}^4$ . Linearyzując funkcje  $f_i$  po kolei otrzymamy więc

$$F(x + h) \approx F(x) + \mathbf{J}(x)h$$

gdzie  $\mathbf{J}(x)$  to jacobian funkcji  $F$  w punkcie  $x$ .

Różniczkując funkcje  $f_i$  w punkcie  $p = (x \ y \ z \ t)^T$  po kolejnych zmiennych otrzymujemy

$$\mathbf{J}(p) = 2 \begin{pmatrix} x - X_1 & y - Y_1 & z - Z_1 & T_1 - t \\ x - X_2 & y - Y_2 & z - Z_2 & T_2 - t \\ x - X_3 & y - Y_3 & z - Z_3 & T_3 - t \\ x - X_4 & y - Y_4 & z - Z_4 & T_4 - t \end{pmatrix}$$

Aby sprawdzić, kiedy  $F(x_{n+1}) = 0$ , rozwiążemy układ równań liniowych

$$0 = F(x_n) + \mathbf{J}(x_n)h$$

$$-F(x_n) = \mathbf{J}(x_n)h$$

$$h = -\mathbf{J}(x_n)^{-1}F(x_n)$$

Możemy określić  $x_{n+1} := x_n + h$ .

**Uwaga.** Opisana powyżej metoda, jako szczególny przypadek metody Newtona, będzie cechować się lokalną zbieżnością kwadratową. Istotny będzie w niej wybór przybliżenia początkowego – ponieważ ustalamy pozycje głównie obiektów położonych na Ziemi, więc przyjmijmy przybliżenie początkowe jako wektor  $x_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ .

**Uwaga.** W implementacji niezbędne jest odwrócenie jacobianu funkcji  $F$  wyliczonego w pewnym przybliżeniu. W niniejszym rozwiązaniu osiągnięto to za pomocą funkcji bibliotecznej `\` języka Julia.

## 2.2 Metoda algebraiczna

Wyprowadzimy metodę opierającą się wyłącznie na podstawowych prawach algebry liniowej. Układ równań (1) po wykonaniu mnożeń wygląda następująco

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2xX_1 - 2yY_1 - 2zZ_1 + c_1 &= t^2 - 2tD_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xX_2 - 2yY_2 - 2zZ_2 + c_2 &= t^2 - 2tD_2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xX_3 - 2yY_3 - 2zZ_3 + c_3 &= t^2 - 2tD_3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xX_4 - 2yY_4 - 2zZ_4 + c_4 &= t^2 - 2tD_4 \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie  $c_i = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 - D_i^2$  dla  $1 \leq i \leq 4$ .

Po odjęciu czwartego równania stronami od pierwszych trzech otrzymamy

$$\begin{aligned} -2[x\Delta_{X,1} + y\Delta_{Y,1} + z\Delta_{Z,1}] + \Delta_{c,1} &= -2t\Delta_{D,1} \\ -2[x\Delta_{X,2} + y\Delta_{Y,2} + z\Delta_{Z,2}] + \Delta_{c,2} &= -2t\Delta_{D,2} \\ -2[x\Delta_{X,3} + y\Delta_{Y,3} + z\Delta_{Z,3}] + \Delta_{c,3} &= -2t\Delta_{D,3} \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie  $\Delta_{A,i} = A_i - A_4$  dla  $A \in \{X, Y, Z, D, c\}$  oraz  $1 \leq i \leq 4$ .

Jest to układ 3 równań liniowych na 4 zmiennych. Układ taki nie posiada jednoznanego rozwiązania, ale – o ile nie jest sprzeczny – posiada rozwiązania parametryczne. W przypadku układu (5), gdy dane z satelit nie są liniowo zależne, będą istnieć rozwiązania zależne od dokładnie jednego parametru. Oznacza to, że pozostałe zmienne można wyrazić jako kombinacje liniowe tego parametru (i stałej) tak, aby dla dowolnej wartości parametru układ równań był spełniony. W układzie (5) dla rzeczywistych danych żadna zmienna nie powinna być z góry ustalona, zatem możemy założyć, że parametrem jest  $t$ . Wtedy dla pewnych rzeczywistych  $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$  mamy

$$\begin{aligned} x &= a_x t + b_x \\ y &= a_y t + b_y \\ z &= a_z t + b_z \end{aligned} \quad (6)$$

oraz dla dowolnego  $t$  zachodzi

$$\begin{aligned} (a_x t + b_x)\Delta_{X,1} + (a_y t + b_y)\Delta_{Y,1} + (a_z t + b_z)\Delta_{Z,1} - 1/2\Delta_{c,1} &= t\Delta_{D,1} \\ (a_x t + b_x)\Delta_{X,2} + (a_y t + b_y)\Delta_{Y,2} + (a_z t + b_z)\Delta_{Z,2} - 1/2\Delta_{c,2} &= t\Delta_{D,2} \\ (a_x t + b_x)\Delta_{X,3} + (a_y t + b_y)\Delta_{Y,3} + (a_z t + b_z)\Delta_{Z,3} - 1/2\Delta_{c,3} &= t\Delta_{D,3} \end{aligned} \quad (7)$$

Układ (7) oznacza równość trzech funkcji liniowych na całej prostej, co implikuje

równość jej współczynników. Stąd

$$\begin{aligned}
a_x \Delta_{X,1} + a_y \Delta_{Y,1} + a_z \Delta_{Z,1} &= \Delta_{D,1} \\
a_x \Delta_{X,2} + a_y \Delta_{Y,2} + a_z \Delta_{Z,2} &= \Delta_{D,2} \\
a_x \Delta_{X,3} + a_y \Delta_{Y,3} + a_z \Delta_{Z,3} &= \Delta_{D,3} \\
b_x \Delta_{X,1} + b_y \Delta_{Y,1} + b_z \Delta_{Z,1} &= 1/2 \Delta_{c,1} \\
b_x \Delta_{X,2} + b_y \Delta_{Y,2} + b_z \Delta_{Z,2} &= 1/2 \Delta_{c,2} \\
b_x \Delta_{X,3} + b_y \Delta_{Y,3} + b_z \Delta_{Z,3} &= 1/2 \Delta_{c,3}
\end{aligned} \tag{8}$$

Niech

$$A := \begin{pmatrix} \Delta_{X,1} & \Delta_{Y,1} & \Delta_{Z,1} \\ \Delta_{X,2} & \Delta_{Y,2} & \Delta_{Z,2} \\ \Delta_{X,3} & \Delta_{Y,3} & \Delta_{Z,3} \end{pmatrix}$$

Wtedy

$$A \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{D,1} \\ \Delta_{D,2} \\ \Delta_{D,3} \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad A \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta_{c,1} \\ \Delta_{c,2} \\ \Delta_{c,3} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Z równości (9) możemy wyznaczyć współczynniki  $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ . Następnie, aby otrzymać konkretne rozwiązanie, podstawimy otrzymane zależności do czwartego równania układu (5) otrzymując równanie kwadratowe jednej zmiennej następującej postaci

$$\begin{aligned}
&t^2(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - 1) + \\
&+ 2t[a_x(b_x - X_4) + a_y(b_y - Y_4) + a_z(b_z - Z_4) + D_4^2] + \\
&+ (b_x - X_4)^2 + (b_y - Y_4)^2 + (b_z - Z_4)^2 - D_4^2 = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Po rozwiązaniu równania (10) otrzymamy dwa kandydаты na  $t$ , które na podstawie zależności (6) wyznaczą dwa rozwiązania  $x, y, z, t$ . W rozwiązaniu przyjęto, że szukanym wektorem jest ten o mniejszym bezwzględnym błędzie zegara ( $t$ ).

**Uwaga.** W implementacji niezbędne jest rozwiązanie pewnych układów równań liniowych oraz znalezienie miejsc zerowych funkcji kwadratowej. W niniejszym rozwiązaniu do układów równań zastosowano funkcję biblioteczną `\` języka `Julia`, natomiast do równań kwadratowych funkcję `roots` z pakietu `Polynomials`.

### 3 Teoretyczne Testy

W modelu obliczania położenia zmiennymi wpływającymi na wynik są:

- Położenie obiektu
- Położenie satelit
- Błąd zegara

Przeprowadzenie testów będzie polegało na losowaniu powyższych danych oraz sprawdzaniu dokładności wyników wyliczonych poszczególnymi metodami.

Każdy satelita wysyła informację postaci  $(x, y, z, t)$ . Położenie satelity jest niezależne od położenia obiektu, jednak czas potrzebny na dotarcie sygnału należy wyliczyć ze wzoru:

$$t = \frac{\sqrt{(x_s - x_o)^2 + (y_s - y_o)^2 + (z_s - z_o)^2}}{c} \quad (11)$$

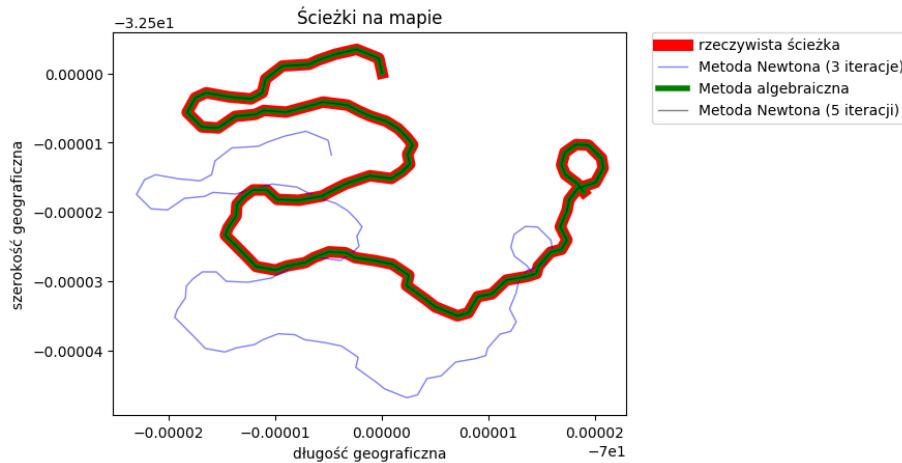
gdzie  $(x_s, y_s, z_s)$  jest położeniem satelity, a  $(x_o, y_o, z_o)$  położeniem obiektu.

Niech  $(x_0, y_0, z_0)$  będzie rzeczywistym położeniem obiektu na Ziemi, a  $(x, y, z)$  położeniem wyznaczonym przez jedną z opisanych wyżej metod. Wówczas dokładność wyniku można wyliczyć następująco:

$$M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

### 3.1 Dokładność na losowej ścieżce

System GPS bardzo często używany jest do wyznaczania pozycji podczas poruszania się. Aby sprawdzić dokładność pomiarów w takiej sytuacji, została stworzona symulacja losowej ścieżki na Ziemi. Obiekt porusza się ze stałą prędkością po ścieżce, a w regularnym odstępie czasu wyliczane jest jego domniemane położenie. Pozwala to na odtworzenie trasy obiektu na podstawie uzyskanych wyników.



Błąd metod na ścieżce		
Metoda	Największy błąd (m)	Najmniejszy błąd (m)
Newtona, 3 iteracje	1.3907	1.3907
Newtona, 5 iteracji	3.4006e-8	0.0
Algebraiczna	1.4097e-8	0.0
Bancrofta	1.3125e-8	0.0

### 3.2 Liczba iteracji w metodzie Newtona

W przeciwieństwie do metod algebraicznych, dokładność metody Newtona zależy od liczby iteracji, które zostaną wykonane. Wiemy, że lokalnie metoda jest zbieżna kwadratowo, jednak trudno oszacować jakie będzie tempo zbieżności wyników w praktyce.

Zbadamy błąd metody Newtona na wylosowanej wyżej ścieżce.

Liczba iteracji	Największy błąd metody Newtona (m)
1	134771.6765
2	2977.3072
3	1.3907
4	3.2278e-7
5	3.4006e-8
6	3.6961e-8
7	3.5122e-8
8	3.2584e-8

### 3.3 Skuteczność metod

Wyznaczanie pozycji za pomocą metody Newtona jest ryzykowne. Nie ma gwarancji, że przybliżenia wyznaczone w kolejnych iteracjach będą zbiegać do poprawnego wyniku. Z kolei w metodzie algebraicznej arbitralnie przyjęto, że poprawnym wynikiem jest ten o mniejszym błędzie bezwzględnym zegara.

Czasami uzyskane równania mogą mieć niejednoznaczne rozwiązanie, opracowane metody mogą znaleźć właśnie to drugie rozwiązanie. Taka sytuacja jest niemożliwa do wykrycia, ponieważ oba rozwiązania będą spełniać równania jednakowo dobrze. Warto sprawdzić, jak często wynik uzyskany przy użyciu tych metod będzie odbiegał od oczekiwanego. Sprawdzimy, jak często błędy tych metod przekraczają kilometr. Obliczenia wykonamy dla 10000 losowych punktów.

Metoda	Liczba pomyłek przy 10000 pomiarów
Newtona	1685
Algebraiczna	1609
Bancrofta	1481

Można więc przyjąć, że skuteczność tych metod to około 84 %.

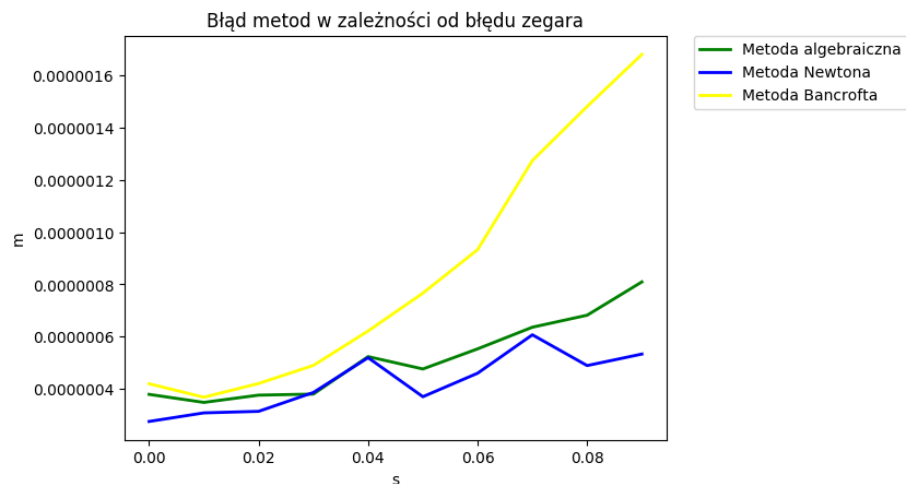
### 3.4 Losowe punkty na Ziemi

Sprawdźmy, jak dokładne wyniki można uzyskać dla losowych punktów na Ziemi przy użyciu poszczególnych metod. W przypadku metody Newtona i algebraicznej, będziemy odrzucać wyniki z błędem większym niż kilometr.

Metoda	Średni błąd (m)
Newtona	0.1567
Algebraiczna	0.2134
Bancrofta	0.0271

### 3.5 Błąd zegara

Istotnym czynnikiem wpływającym na jakość wyników jest błąd zegara. Można się spodziewać, że im gorzej zsynchronizowane są zegary satelitów i odbiorcy, tym większe będą błędy wyznaczania pozycji.





## 4 Metoda najmniejszych kwadratów

W powyższych punktach możemy zaobserwować niedoskonałości metod wyprowadzonych w punkcie ???. W teoretycznym modelu, gdzie sygnał podróżuje ze stałą prędkością i nie występują zakłócenia, metody z reguły sprawdzają się dobrze i zwracają dokładne rozwiązanie. Niestety czasami istnieje więcej niż jedno rozwiązanie układu (1), co więcej kilka z nich może być położonych w pobliżu Ziemi. Dlatego żadna metoda nie jest w stanie odróżnić właściwego rozwiązania od pozostałych i to, które rozwiązanie zwróci metoda zależy, w przypadku metody Newtona od przybliżenia początkowego, a w przypadku metod algebraicznych od usatłonego kryterium. Kolejny problem pojawia się, gdy porzucimy model teoretyczny i spróbujemy zastosować metody w praktyce. Z powodu zakłóceń sygnału otrzymujemy wówczas pozycję wyznaczoną z dokładnością do ok. 5 metrów. W tej części wyprowadzimy metodę, która pozwala częściowo wyeliminować opisane powyżej problemy.

W praktyce odbiornik ma z reguły dostęp do więcej niż czterech satelit. Korzystając z informacji z  $n \geq 4$  satelit otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - (D_1 - t)^2 &= 0 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 - (D_2 - t)^2 &= 0 \\ &\vdots \\ (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2 - (D_n - t)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

W kontekście układu (12) możemy rozszerzyć definicję  $f_i$  daną wzorem (2) na wszystkie  $1 \leq i \leq n$  oraz zdefiniować  $F$  następująco

$$F(x, y, z, t) := \begin{pmatrix} f_1(x, y, z, t) \\ f_2(x, y, z, t) \\ \vdots \\ f_n(x, y, z, t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Rozwiązaniem układu (12) będzie  $x \in \mathbb{R}^4$  t.j.e  $F(x) = 0$ . Niestety układ (12) może być sprzeczny, więc chcielibyśmy znaleźć taki wektor  $x$ , który minimalizuje  $\|F(x)\|_2$ .

W tym celu zastosujemy metodę będącą uogólnieniem metody Newtona opisanej w punkcie 2.1. Załóżmy, że mamy  $n$ -te przybliżenie wyniku  $x_n \in \mathbb{R}^4$ . Chcemy znaleźć takie  $h \in \mathbb{R}^4$ , że dla  $x_{n+1} := x_n + h$  wartość  $\|F(x_{n+1})\|_2$  będzie minimalna.

Na mocy lematu 1 mamy

$$F(x + h) \approx F(x) + \mathbf{J}(x)h \quad (14)$$

gdzie  $\mathbf{J}(x)$  to jacobian funkcji  $F$  w punkcie  $x$ .

Różniczkując funkcje  $f_i$  w punkcie  $p = (x \ y \ z \ t)^T$  otrzymamy wynik analogiczny do wzoru (2.1)

$$\mathbf{J}(p) = 2 \begin{pmatrix} x - X_1 & y - Y_1 & z - Z_1 & T_1 - t \\ x - X_2 & y - Y_2 & z - Z_2 & T_2 - t \\ \vdots & & & \\ x - X_n & y - Y_n & z - Z_n & T_n - t \end{pmatrix}$$

We wzorze (14) otrzymaliśmy układ potencjalnie sprzecznych równań liniowych postaci

$$F(x) + \mathbf{J}(x)h = 0 \quad (15)$$

dla którego chcemy znaleźć rozwiązanie *minimalne* zdefiniowane poniżej. Niech

$$\rho := \min_{h \in \mathbb{R}^4} \|F(x) + J(x)h\|_2$$

*Rozwiązanie minimalne* określamy jako wektor ze zbioru  $\{h \in \mathbb{R}^4 : \|F(x) + J(x)h\|_2 = \rho\}$  o najmniejszej normie.

**Twierdzenie 1.** *Rozwiązaniem minimalnym układu (15) jest*

$$h = -J(x)^+ F(x)$$

gdzie  $J(x)^+$  jest pseudoodwrotnością macierzy  $J(x)$ .

Dowód twierdzenia 1 dostępny jest w literaturze, m.in. w pozycji [2].

Na mocy twierdzenia 1 przyjmując  $x_{n+1} := x_n - J(x_n)^+ F(x_n)$  otrzymamy w punkcie  $x_{n+1}$  minimalną wartość zlinearyzowanej funkcji  $F$ .

**Uwaga.** W literaturze można odnaleźć analizę zbieżności i poprawności opisanej powyżej metody *Gaussa-Newtona*. Ogólnie, jeżeli metoda zbiega do pewnego punktu, to punkt ten jest punktem stałym funkcji  $F$  (niekoniecznie najlepszym rozwiązaniem). Jednak nie ma gwarancji, że metoda będzie w ogólności zbieżna globalnie, ani nawet lokalnie (patrz pozycja [3]). Z tego powodu niezmiernie istotny będzie wybór przybliżenia początkowego. Aby otrzymać jak najlepsze wyniki, zastosujemy metodę wielokrotnie, za każdym razem zaczynając od losowo wybranego punktu na powierzchni Ziemi. Ostatecznie wybierzemy tę pozycję, która podstawiona jako argument do funkcji  $F$  daje najmniejszą normę wyniku.

**Uwaga.** W implementacji niezbędne jest obliczenie pseudoodwrotności Moore'a-Penrose'a. W niniejszym rozwiązaniu zastosowano do tego funkcję biblioteczną `pinv` języka `Julia`.

## 5 Praktyczne testy

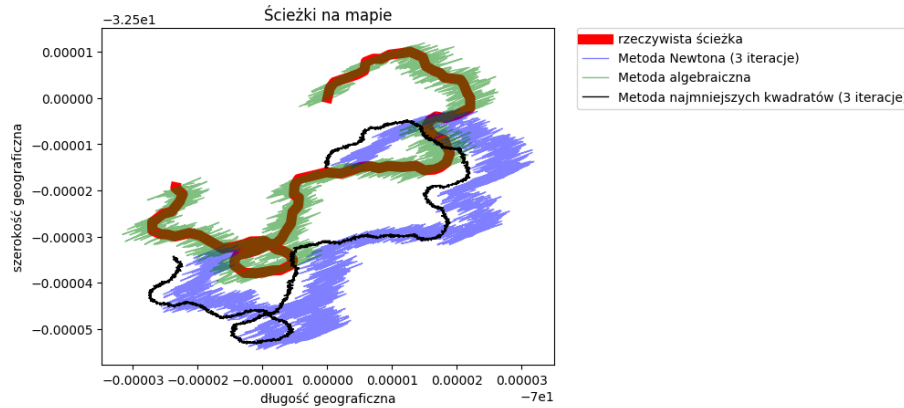
W praktyce na dokładność pomiaru istotny wpływ mają czynniki zewnętrzne:

- opóźnienie światła w troposferze
- interferencja fal elektromagnetycznych

W celu sprawdzania precyzji wyników w praktyce, model symulacji ścieżki został rozszerzony o współczynnik  $inaccuracy \in [1, 1 + \frac{1}{250000000}]$  mający na celu losowo zniekształcać pomiar czasu. (patrz (11)). Jest to uproszczona symulacja opóźnień wynikających ze zmian prędkości światła w zależności od ośrodka.

Można przypuszczać, że błędy wynikające z czynników zewnętrznych będą miały najmniejszy wpływ na dokładność wyniku metody najmniejszych kwadratów oraz Bancrofta przy użyciu więcej niż czterech satelit, ponieważ ewentualne duże zniekształcenie informacji z jednej z satelit będzie zamortyzowane dokładnymi danymi z pozostałych.

Przeprowadzimy ponownie symulację ścieżki, tym razem wzbogaconą o współczynnik  $inaccuracy$



Ścieżki odtworzone z wyników pomiarów metod Newtona i algebraicznej są zniekształcone. Można zauważyć duże różnice położenia w małym odstępie czasu.

### 5.1 Skuteczność metod

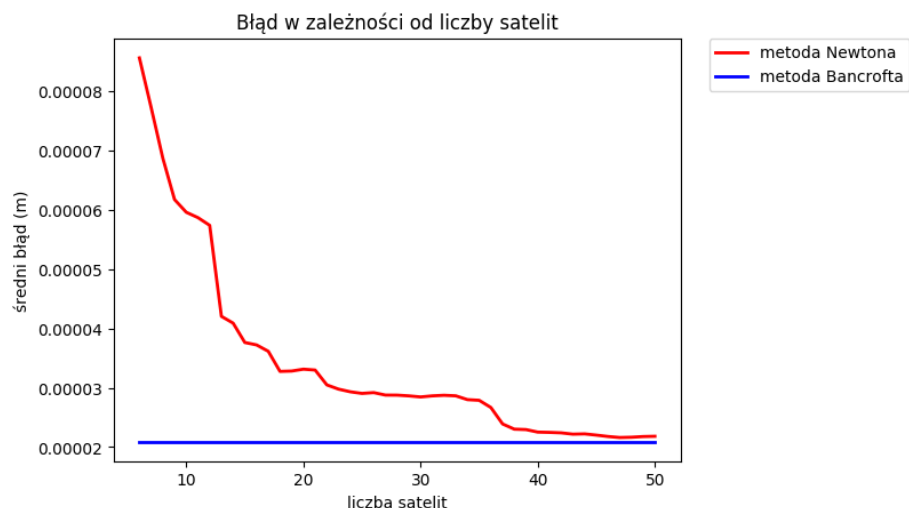
Można oczekiwać, że dzięki pozyskiwaniu informacji z większej liczby satelit, zarówno metoda Newtona jak i Bancrofta będą skuteczniejsze niż w przypadku działania na układzie czterech satelit, pomimo zniekształcania pomiaru czasu. Przeprowadzimy pomiar skuteczności na próbie 10000 losowych punktów.

Metoda	Liczba pomyłek przy 10000 pomiarów
Newtona	1603
Bancrofta	0

Okazuje się, że uogólniona metoda Newtona nie zwiększa skuteczności poprzez pobranie informacji z większej liczby satelit, natomiast metoda Bancrofta, staje się w 100 % skuteczna.

## 5.2 Liczba satelit

Rozwiązaniem problemu błędów wynikających z czynników zewnętrznych jest pobieranie informacji z więcej niż czterech satelit. Okazuje się, że z im więcej satelit odbiorca pobierze informacje, tym dokładniejsze będą wyniki metody najmniejszych kwadratów, pomimo losowego zniekształcenia pomiarów czasu.



W rzeczywistości segment kosmiczny składa się z 31 satelit rozmieszczonych równomiernie wokół kuli Ziemskiej, więc rozważenie scenariusza pobierania informacji z więcej niż 15 satelit jest tylko teoretyczne.

## 6 Wnioski

W systemie GPS można rozróżnić 2 istotne aspekty cechujące dobrą metodę numeryczną wyznaczania pozycji odbiorcy :

- skuteczność ( jak często metoda znajduje wynik odległy od oczekiwanego)
- odporność na czynniki zewnętrzne

Spośród metod pobierających informacje z czterech satelit trudno wskazać najlepszą. Zarówno skuteczność jak i odporność na czynniki zewnętrzne są porównywalne.

W przypadku metod działających na układzie więcej niż 4 satelit widać, że metoda Bancrofta jest lepsza pod każdym względem od uogólnionej metody Newtona. Jej skuteczność wynosi 100 % a średni błąd jest mniejszy przy użyciu 6 satelit, niż błąd metody Newtona dla nawet 50 nadajników.

## Literatura

- [1] The Johns Hopkins University. Department of Electrical and Computer Engineering. *Linearization*. 2010.
- [2] D. Kincaid, W. Cheney. *Numerical Analysis*. The Wadsworth Group, 2002.
- [3] A. Bjorck. *Numerical Methods for Least Squares Problems*. Siam, 1996.