

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M3

18 października 2017 r.

**M3.1.** 1,5 punktu Załóżmy, że  $x, y$  są liczbami maszynowymi, tzn.  $\text{rd}(x) = x, \text{rd}(y) = y$ , takimi, że  $0 < y < x$ . Wykazać, że jeśli

$$2^{-q} \leq 1 - \frac{y}{x} \leq 2^{-p}$$

( $p$  i  $q$  są całkowite), to

$$p \leq \text{liczba bitów straconych przy odejmowaniu } x - y \leq q.$$

**M3.2.** 1 punkt Wartość wielomianu  $L(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  w punkcie  $x$  można obliczyć według następującego *schematu Hornera*:

— Oblicz wielkości pomocnicze  $w_0, w_1, \dots, w_n$  za pomocą wzorów

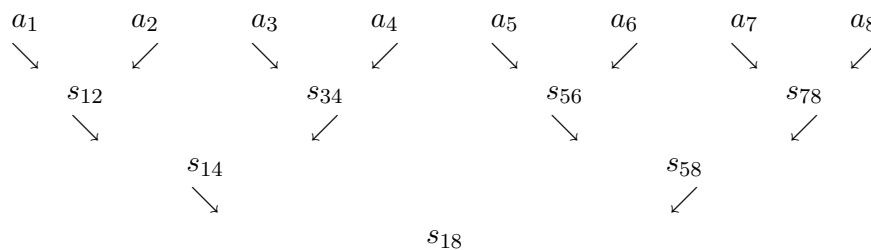
a)  $w_n := a_n$ ,

b)  $w_k := w_{k+1} \times x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \dots, 0)$ .

— Wynik:  $L(x) = w_0$ .

Zakładając, że  $a_0, a_1, \dots, a_n$  oraz  $x$  są liczbami zmiennopozycyjnymi wykazać, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

**M3.3.** 1 punkt Wartość sumy  $\sum_{k=1}^n a_k$ , gdzie  $n := 2^m$  dla pewnego  $m \in \mathbb{N}$ , można wyznaczyć stosując strategię *dziel i zwyciężaj*. Np. dla  $m = 3$  obliczenia wykonywane są wówczas zgodnie z następującym diagramem:



gdzie  $s_{ij} := a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ . Wykazać, że ten algorytm jest numerycznie poprawny i — dla dużych wartości  $n$  — dokładniejszy (na ogół) niż zwykły algorytm sumowania.

**M3.4.** 1 punkt Pole  $n$ -kąta foremnego ( $n \geq 4$ ) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$P_n = \frac{1}{2}n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Wartość  $P_n$  jest przybliżeniem liczby  $\pi$  — tym lepszym, im większe jest  $n$ . Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno  $P_4, P_8, P_{16}, \dots$ :

$$s_2 := 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2;$$

$$s_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1} s_k \quad (k = 3, 4, \dots).$$

a) Uzasadnić powyższy algorytm.

b) Stosując wybraną arytmetykę  $t$ -cyfrową ( $t \geq 128$ ) obliczyć  $P_{2^k}$  dla  $k = 2, 3, \dots, 2t$ .

c) Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

**M3.5.** 1,5 punktu Załóżmy, że  $f'(x) > 0$  i  $f''(x) > 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Ponadto, niech  $\alpha$  będzie pierwiastkiem równania  $f(x) = 0$ . Wykazać, że jest to jedyny pierwiastek, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego  $x_0$ .

**M3.6.** 1,5 punktu Uzasadnić, że odwrotność liczby  $c$  można obliczać bez wykonywania dzielenia, za pomocą wzoru  $x_{n+1} := x_n(2 - cx_n)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Uzasadnić (lokalną?) zbieżność tej metody. Dla jakich wartości  $x_0$  metoda jest zbieżna?

**M3.7.** 1 punkt Podać przykład funkcji  $f \in C^2[a, b]$  oraz przybliżenia początkowego  $x_0 \in [a, b]$ , dla którego ciąg przybliżeń otrzymany za pomocą metody Newtona jest zbieżny liniowo do pierwiastka funkcji  $f$ .

**M3.8.** 1 punkt Zaprogramować w języku Julia metodę Steffensena

$$c_{n+1} = c_n - \frac{[f(c_n)]^2}{f[c_n + f(c_n)] - f(c_n)},$$

a następnie zastosować ją do znalezienia pierwiastka równania

$$e^{-x} - \sin x = 0.$$

Zastosować arytmetykę wysokiej precyzji (np.  $t \geq 128$ ), aby móc podać eksperymentalną wartość wykładnika zbieżności (lokalnej?) tej metody.

10 października 2017  
Rafał Nowak