1. *Wielomiany Legendre'a* $\{P_k\}$, ortogonalne w przedziale $[-1,1]$ z wagą $p(x) \equiv 1$. Przyjmiemy, że

$$P_k(1) = 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

   Uwaga. Niech $c_k := \bar{P}_k(1)$. Wówczas $P_k = c_k^{-1}\bar{P}_k$ dla $k = 0, 1, \ldots$.

   Związek rekurencyjny :

$$\begin{aligned} &P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) = x, \\ &P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x) \qquad (k \geqslant 2). \end{aligned}$$

   Wielomiany standardowe Legendre'a $\{\bar{P}_k\}$:

$$\begin{aligned} &\bar{P}_0(x) \equiv 1, \quad \bar{P}_1(x) = x, \\ &\bar{P}_k(x) = x\bar{P}_{k-1}(x) - \frac{(k-1)^2}{(2k-1)(2k-3)} \bar{P}_{k-2}(x) \qquad (k \geqslant 2). \end{aligned}$$

2. *Wielomiany Czebyszewa I rodzaju* $\{T_k\}$, ortogonalne w przedziale $[-1,1]$ z wagą $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} T_k(x) T_l(x)\, dx = 0 \qquad (k \neq l), \\ &\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} [T_k(x)]^2\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & (k \geqslant 1), \\ \pi & (k = 0). \end{cases} \end{aligned}$$

   Przyjmiemy, że

$$T_k(1) = 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

   Związek rekurencyjny :

$$\begin{aligned} &T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x, \\ &T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \qquad (k \geqslant 2). \end{aligned}$$

   Wielomiany standardowe Czebyszewa $\{\bar{T}_k\}$:

$$\begin{aligned} &\bar{T}_0(x) \equiv 1, \quad \bar{T}_1(x) = x, \\ &\bar{T}_k(x) = x\bar{T}_{k-1}(x) - \gamma_k \bar{T}_{k-2}(x) \qquad (k \geqslant 2), \end{aligned}$$

   gdzie $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ i $\gamma_k = \frac{1}{4}$ dla $k > 2$.

3. *Wielomiany Czebyszewa II rodzaju* $\{U_k\}$, ortogonalne w przedziale $[-1,1]$ z wagą $p(x) = (1-x^2)^{1/2}$. Przyjmiemy, że

$$U_k(1) = k + 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

   Związek rekurencyjny :

$$\begin{aligned} &U_0(x) \equiv 1, \quad U_1(x) = 2x, \\ &U_k(x) = 2xU_{k-1}(x) - U_{k-2}(x) \qquad (k \geqslant 2). \end{aligned}$$

   Wielomiany standardowe Czebyszewa II rodzaju $\{\bar{U}_k\}$:

$$\begin{aligned} &\bar{U}_0(x) \equiv 1, \quad \bar{U}_1(x) = x, \\ &\bar{U}_k(x) = x\bar{U}_{k-1}(x) - \frac{1}{4}\bar{U}_{k-2}(x) \qquad (k \geqslant 2). \end{aligned}$$

4. *Wielomiany Gegenbauera* $\{C_k^\lambda\}$, ortogonalne w przedziale $[-1,1]$ z wagą $p(x)=(1-x^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda>-\frac{1}{2}$. Przyjmiemy, że

$$C_k^\lambda(1)=\frac{(2\lambda)(2\lambda+1)\cdots(2\lambda+k-1)}{k!}\qquad (k=0,1,\dots).$$

Związek rekurencyjny :

$$\begin{aligned}
&C_0^\lambda(x)\equiv 1,\quad C_1^\lambda(x)=2\lambda x,\\
&C_k^\lambda(x)=2\frac{k+\lambda-1}{k}xC_{k-1}^\lambda(x)-\frac{k+2\lambda-3}{k}C_{k-2}^\lambda(x)\qquad (k\geqslant 2).
\end{aligned}$$

5. *Wielomiany Jacobiego* $\{P_k^{(\alpha,\beta)}\}$, ortogonalne w przedziale $[-1,1]$ z wagą $p(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, α, $\beta>-1$.

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x)\equiv 1,\qquad P_1^{(\alpha,\beta)}(x)=\left(\frac{a+b}{2}+1\right)x+\frac{a-b}{2},$$

$$\begin{aligned}
&2k(k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta-2)P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&=(2k+\alpha+\beta-1)\left[(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta-2)x+\alpha^2-\beta^2\right]P_{k-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&\qquad -2(k+\alpha-1)(k+\beta-1)(2k+\alpha+\beta)P_{k-2}^{(\alpha,\beta)}(x)
\end{aligned}$$

6. *Wielomiany Laguerre'a* $\{L_k^\alpha\}$, ortogonalne w przedziale $[0,\infty)$ z wagą $p(x)=e^{-x}x^\alpha$. Przyjmiemy, że

$$L_k^\alpha(x)=\frac{(-1)^k}{k!}x^k+\dots\qquad (k\geqslant 0).$$

Związek rekurencyjny :

$$\begin{aligned}
&L_0^\alpha(x)\equiv 1,\quad L_1^\alpha(x)=\alpha+1-x,\\
&L_k^\alpha(x)=\frac{2k+\alpha-1-x}{k}L_{k-1}^\alpha(x)-\frac{k+\alpha-1}{k}L_{k-2}^\alpha(x)\qquad (k\geqslant 2).
\end{aligned}$$

Wielomiany standardowe Laguerre'a $\{\bar{L}_k^\alpha\}$:

$$\begin{aligned}
&\bar{L}_0^\alpha(x)\equiv 1,\quad \bar{L}_1^\alpha(x)=x-\alpha-1,\\
&\bar{L}_k^\alpha(x)=(x-2k-\alpha+1)\bar{L}_{k-1}^\alpha(x)-(k-1)(k+\alpha-1)\bar{L}_{k-2}^\alpha(x)\qquad (k\geqslant 2).
\end{aligned}$$

7. *Wielomiany Hermite'a* $\{H_k\}$, ortogonalne na prostej $(-\infty,\infty)$ z wagą $p(x)=e^{-x^2}$. Przyjmiemy, że

$$H_k(x)=2^kx^k+\dots\qquad (k\geqslant 0).$$

Związek rekurencyjny :

$$\begin{aligned}
&H_0(x)\equiv 1,\quad H_1(x)=2x,\\
&H_k(x)=2xH_{k-1}(x)-2(k-1)H_{k-2}(x)\qquad (k\geqslant 2).
\end{aligned}$$

Wielomiany standardowe Hermite'a $\{\bar{H}_k\}$

$$\begin{aligned}
&\bar{H}_0(x)\equiv 1,\quad \bar{H}_1(x)=x,\\
&\bar{H}_k(x)=x\bar{H}_{k-1}(x)-\frac{1}{2}(k-1)\bar{H}_{k-2}(x)\qquad (k\geqslant 2).
\end{aligned}$$