Algebra II (ISIM), lista 6 (23.11.2017).

Teoria: Grupa wolna: definicja, konstrukcja, własności. Przykłady (lemat ping-pongowy). Grupy opisane (prezentowane) przez relacje. Komutant, abelianizacja.

1. Gdy grupa G działa na zbiorze X, mówimy, że X jest G-zbiorem. Mowimy, że G-zbiory X, Y są izomorficzne, gdy istnieje bijekcja $f : X \to Y$, która komutuje z działaniem G, tzn. $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ dla wszystkich $g \in G$ i $x \in X$.

   Załóżmy, że G działa tranzytywnie na zbiorze X. Niech $x_0 \in X$ oraz $H = G_{x_0} < G$. G działa tranzytywnie na zbiorze warstw G/H przez lewe przesunięcie. Udowodnić, że G-zbiory X i G/H sa izomorficzne.

2. Załóżmy, że grupa G jest abelowa. Udowodnić, że:
   (a) Jeśli każdy element niezerowy grupy G ma rząd 2, to grupa G jest izomorficzna z sumą prostą pewnej liczby kopii grupy $\mathbb{Z}_2$.
   (b) To samo, co w (a), lecz z liczbą 2 zastąpioną p rzez liczbę pierwsza p.
   (c) Jeśli grupa G jest beztorsyjna i podzielna, to G jest izomorficzna z sumą prostą pewnej liczby kopii $(\mathbb{Q}, +)$.
   (Wsk: w (a) i (b) wprowadzić w grupie G naturalną strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{Z}_p$, w (c) nad ciałem $\mathbb{Q}$.)

3. Udowodnić, że działanie konkatenacji w zbiorze słów nieskracalnych $\mathcal{F}(X)$ jest łączne.

4. Załóżmy, że $X \subseteq G$. Udowodnić, że X jest zbiorem wolnych generatorów grupy $F = \langle X \rangle \iff$ wartość w grupie G każdego nieskracalnego słowa $\sigma \neq \varepsilon$ nad X jest różna od e_G.

5. W wolnej grupie $\mathcal{F}(a, b)$ rangi 2 wskazać podgrupę wolną rangi nieskończonej.

6. $^-$ Sprawdzić, że macierze z wykładu generują wolną grupę rangi 2.

7. Wskazać niepuste rozłączne zbiory $A, B \subseteq \mathbb{N}$ i permutacje $\sigma, \tau \in Sym(\mathbb{N})$, które spełniają warunek z lematu pingpongowego.

8. * Udowodnić, że suma wolna grup $G * H$ z naturalnymi zanurzeniami $i_G : G \to G * H$, $i_H : H \to G * H$ jest ko-produktem w kategorii grup.

9. (a) Udowodnić, że $\mathcal{F}(X)_{ab} \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}x$ jest wolną grupą abelową rangi $|X|$.
   (b) Udowodnić, że jeśli F jest grupą wolną oraz X, Y są dwoma zbiorami jej wolnych generatorów, to X i Y sa równoliczne (więc pojęcie rangi grupy wolnej jest dobrze określone). (wsk: rozważyć F_{ab}, skorzystać z zadania 5.8).

10. Załóżmy, że $X \subseteq G$, $\mathcal{R}$ jest pewnym zbiorem relacji grupowych na X, które zachodzą w G. Udowodnić, że istnieje homomorfizm $f : \langle X | \mathcal{R} \rangle \to G$ taki, że $f|_X = id_X$.

11. * Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ warunki: $f(2x) = 2f(x) - 1$ i $f(x+2) = 4 + f(x)$. (wsk: Niech G będzie podgrupą grupy $Sym(\mathbb{R})$ generowaną przez funkcje s, t dane wzorami $s(x) = 2x,\ t(x) = x + 1$. Wyznaczyć orbity działania grupy G na $\mathbb{R}$.)

12. * Udowodnić, że grupa Burnside'a $B_{2,3}$ jest skończona.