Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część licencjacka)

31 stycznia 2012

Zadanie 1 (1 punkt). Jeśli formuła $(p \lor q \lor r) \Rightarrow (((p \lor q) \land \neg r) \lor (r \land p \land q))$ jest tautologią to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAUTOLOGIA". W przeciwnym przypadku wpisz dowolne wartościowanie niespełniające tej formuły.

Zadanie 2 (1 punkt). Jeśli formuła $((p \lor q) \Rightarrow r) \land p \land \neg r$ jest sprzeczna, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „SPRZECZNA". W przeciwnym razie wpisz dowolne wartościowanie spełniające tę formułę.

Zadanie 3 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz formułę równoważną formule $p \Leftrightarrow \neg q$ i mającą dysjunkcyjną postać normalną.

Zadanie 4 (1 punkt). Jeśli istnieje formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych, spójników $\Rightarrow$ i $\neg$ oraz nawiasów równoważna formule $p \land q$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 5 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz równoważną z $(\forall x\ (p(x) \lor q(x))) \Rightarrow \bot$ formułę postaci $\forall x\ \varphi$ lub $\exists x\ \varphi$, gdzie φ nie zawiera kwantyfikatorów.

Zadanie 6 (1 punkt). Niech φ i ψ oznaczają formuły rachunku kwantyfikatorów, być może zawierające wolne wystąpienia zmiennej x. Jeśli formuła $(\exists x \varphi) \Rightarrow \Big((\exists x(\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\exists x \psi)\Big)$ jest prawem rachunku kwantyfikatorów, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym razie wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 7 (1 punkt). Jeśli inkluzja $A \cap (B \setminus C) \cap D \subseteq B \cap (A \setminus C) \cap D$ zachodzi dla dowolnych zbiorów A, B, C i D, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 8 (1 punkt). Jeśli istnieją takie zbiory A, B i C, że $A \cup B \cup C \neq \emptyset$ oraz $A \setminus (B \dot{-} C) = (A \setminus B) \dot{-} (A \setminus C)$, to w prostokąt poniżej wpisz przykład takich trzech zbiorów. W przeciwnym wypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 9 (1 punkt). Jeśli równość $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ zachodzi dla dowolnych zbiorów A, B, C i D, to wpisz w prostokąt poniżej słowo „TAK". W przeciwnym razie wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 10 (1 punkt). Niech $R = \{\langle 2n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle n, m\rangle \mid \varphi\}$ jest złożeniem relacji RR.

Numer indeksu:

Zadanie 11 (1 punkt). Niech $A_n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość zbioru $\bigcup_{m=5}^{\infty} \bigcap_{n \leq m} A_n$, tzn. wpisz wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup, \forall, \exists$.

Zadanie 12 (2 punkty). W pierwszej kolumnie poniższej tabeli podane są definicje dwóch relacji w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. W kolumnie „porządek?" wpisz słowo „TAK" obok tych relacji, które są relacjami porządku. W kolumnie „równoważność?" wpisz słowo „TAK" obok tych relacji, które są relacjami równoważności. W pozostałe pola wpisz słowo „NIE".

	porządek?	równoważność?
$\{\langle x, x+1 \rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$		
$\{\langle x, y \rangle \mid \exists k \in \mathbb{N} \;\; y = x \cdot k\}$		

Zadanie 13 (1 punkt). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{a, b\}^{\mathbb{N} \times \{0,1\}}$, to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące dowolną taką bijekcję. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE".

Zadanie 14 (1 punkt). Jeśli równość $f(X \setminus X') = f(X) \setminus f(X')$ zachodzi dla dowolnych funkcji $f : A \to B$ i dowolnych zbiorów $X, X' \subseteq A$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 15 (1 punkt). W poniższy prostokąt wpisz definicję jakiejkolwiek funkcji $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 16 (1 punkt). Rozważmy funkcje

$$\begin{aligned} f &: A^{B\times C} \to (A\times B)^C, \\ g &: C \to A \times B, \\ h &: B \times C \to A \end{aligned}$$

oraz elementy $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$. Wpisz słowo „TAK” w prostokąty obok tych spośród podanych niżej wyrażeń, które są poprawne. W pozostałe prostokąty wpisz słowo „NIE”.

$(f(h))(c)$		$(f(g))(b, c)$	
$f(h(b, c), b)$		$g(f(h))$	

Zadanie 17 (1 punkt). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste,} \\ -(n+1)/2, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f, to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 18 (1 punkt). Wpisz w puste pola poniższej tabelki odpowiednio $\mathbb{N}$ (jeśli dany zbiór jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych), $\mathbb{R}$ (jeśli dany zbiór jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych), lub słowo „NIE” (jeśli dany zbiór nie jest równoliczny ani z $\mathbb{N}$ ani z $\mathbb{R}$).

$\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}$	$\{a, b\} \times \mathbb{Q}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0, 1\})$	$\{a, b, c, d, e\}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	$\mathcal{P}(\{0, 1\})$

Zadanie 19 (1 punkt). W rodzinie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ definiujemy porządek $\preceq$ wzorem $X \preceq Y \overset{\text{df}}{\iff} X = Y \vee (\min(X \dot{-} Y) \in Y)$, gdzie $\dot{-}$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów, a $\min(A)$ jest najmniejszą w sensie naturalnego porządku liczbą w zbiorze A. W prostokąt poniżej wpisz zbiory $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ w kolejności od najmniejszego do największego w porządku $\preceq$.

Numer indeksu:	
Oddane zadania:	

Logika dla informatyków

Egzamin końcowy (część zasadnicza)

31 stycznia 2012

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -2 do 27 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.

Zadanie 20 (27 punktów). Niech V będzie dowolnym zbiorem zmiennych zdaniowych i niech dla dowolnego wartościowania $\sigma : V \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$, zmiennej zdaniowej $p \in V$ i wartości logicznej $b \in \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ napis $\sigma[p \mapsto b]$ oznacza wartościowanie $V \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ dane wzorem

$$\sigma[p \mapsto b](v) = \begin{cases} b, & \text{jeśli } v = p, \\ \sigma(v), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem wszystkich formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennych zdaniowych ze zbioru V i spójników $\neg, \wedge, \vee$ (oraz nawiasów). Udowodnij, że jeśli w formule $\varphi \in \mathcal{F}$ nie występuje zmienna p, to dla wszystkich wartościowań $\sigma : V \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ zachodzi równość

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \hat{\sigma}[p \mapsto \mathsf{T}](\varphi) = \hat{\sigma}[p \mapsto \mathsf{F}](\varphi).$$

Zadanie 21 (27 punktów). Niech A będzie dowolnym zbiorem. Dla dowolnej relacji binarnej $S \subseteq A \times A$ definiujemy $S^0 = I_A$ (gdzie I_A oznacza relację identyczności na zbiorze A) oraz $S^{n+1} = S^n S$ dla wszystkich $n \geq 0$. Rozważmy dowolną relację binarną $R \subseteq A \times A$. Udowodnij, że relacja

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} (R \cup R^{-1})^i$$

jest zawarta w każdej relacji równoważności określonej na zbiorze A zawierającej relację R.

Zadanie 22 (27 punktów). Udowodnij następujący lemat:

Lemat. *Niech*

$$\mathcal{F} = \{p \vee \varphi_1, \ldots, p \vee \varphi_k, \neg p \vee \psi_1, \ldots, \neg p \vee \psi_l, \rho_1, \ldots, \rho_m\}$$

będzie takim zbiorem klauzul, że zmienna p nie występuje w klauzulach $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $\psi_1, \ldots, \psi_l$, $\rho_1, \ldots, \rho_m$. Niech $\mathcal{F}_R$ będzie zbiorem wszystkich rezolwent klauzul z $\mathcal{F}$ względem zmiennej p, czyli

$$\mathcal{F}_R = \{\varphi_i \vee \psi_j \mid i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, l\}\}.$$

Jeśli zbiór $\mathcal{F}$ jest sprzeczny, to zbiór $\mathcal{F}_R \cup \{\rho_1, \ldots \rho_m\}$ też jest sprzeczny.

Wskazówka: W dowodzie nie wprost przyjmij że σ spełnia $\mathcal{F}_R \cup \{\rho_1, \ldots \rho_m\}$ i rozważ wartościowania $\sigma[p \mapsto \mathsf{T}]$ i $\sigma[p \mapsto \mathsf{F}]$. Możesz skorzystać z zadania 20, nawet jeśli go nie rozwiązałeś.[1]

[1] Dla ułatwienia przypominamy tu podstawowe definicje: zbiór formuł $\mathcal{F}$ jest sprzeczny, jeśli nie istnieje wartościowanie spełniające wszystkie formuły z $\mathcal{F}$. Klauzule to alternatywy literałów, literał to zmienna zdaniowa lub zanegowana zmienna zdaniowa.