

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M10

20 grudnia 2017 r.

M10.1. 1 punkt Niech $\{P_k(x)\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale $[-a, a]$, z wagą $p(x)$ o własności $p(-x) = p(x)$. Wykazać, że wówczas

$$P_{2m}(x) = S_m(x^2), \quad P_{2m+1}(x) = x R_m(x^2) \quad (m = 0, 1, \dots),$$

gdzie S_m, R_m są wielomianami stopnia m .

M10.2. 1 punkt Wykazać, że wielomiany $\{S_m(t)\}$ z poprzedniego zadania są ortogonalne w przedziale $[0, a^2]$ z wagą $v(t) = p(\sqrt{t})/\sqrt{t}$, a wielomiany $\{R_m(t)\}$ są ortogonalne w przedziale $[0, a^2]$ z wagą $w(t) = \sqrt{t}p(\sqrt{t})$.

M10.3. 1 punkt Wyznaczyć pierwszy wielomian optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[0, 1]$.

M10.4. 1 punkt Niech będzie $f(x) = x^{n+1} + a_1x^n + \dots + a_nx + a_{n+1}$ ($-1 \leq x \leq 1$; a_1, \dots, a_{n+1} – dane stałe) i niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję f w węzłach x_0, x_1, \dots, x_n , leżących w przedziale $[-1, 1]$. Jak należy wybrać te węzły, żeby wyrażenie $\|f - L_n\|_{\infty}^{[-1,1]}$ było możliwie najmniejsze? Uzasadnić odpowiedź.

M10.5. 2 punkty Niech dla $f \in C[a, b]$ istnieją wszystkie pochodne i niech $|f^{(k)}(x)| > 0$ dla każdego $x \in [a, b]$ ($k = 1, 2, \dots$). Wykazać, że dla każdego $n \geq 0$ zachodzi wówczas nierówność $E_n(f) > E_{n+1}(f)$.

M10.6. 1 punkt Wyznaczyć trzeci wielomian optymalny w sensie normy jednostajnej na zbiorze $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ dla funkcji o wartościach

x_k	0	1	2	4	6
$f(x_k)$	1	9	23	93	259

M10.7. 2 punkty Wyznaczyć z dokładnością do 6 miejsc po przecinku współczynniki wielomianu $w_2(x) = ax^2 + bx + c$, będącego drugim wielomianem optymalnym w sensie normy jednostajnej dla funkcji $\sin(x)$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

Wskazówka: $a + b + c \approx 0.465\dots$

M10.8. 2 punkty, Włącz komputer! Rozważyć aproksymację funkcji Rungego $f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$ w przedziale $[-1, 1]$ za pomocą wielomianu $w \in \Pi_9$. Dla każdego z poniższych wielomianów podać wartość błędu $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - w(x)|$ (wartość tę można przybliżyć obliczając $|f(x_k) - w(x_k)|$ dla $x_k = -1 + 2k/N$, gdzie N jest bardzo duże, np. $N = 1000$). Rozważyć następujące wielomiany:

- wielomian interpolujący funkcję f w węzłach równoodległych,
- wielomian interpolujący funkcję f w zerach wielomianu T_{10} ,
- wielomian interpolujący funkcję f w punktach ekstremalnych wielomianu T_9 ,
- 9-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową $p(x) \equiv 1$,
- 9-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową Czebyszewa.

13 grudnia 2017

Rafał Nowak