Imię i nazwisko:	Maksymilian Debeściak

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (część licencjacka)

15 lutego 2011

Zadanie 1 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz formułę w dysjunkcyjnej postaci normalnej i równoważną formule

$$\neg\Big(((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg q\Big).$$

$\neg p \vee q \vee \neg r$

Zadanie 2 (1 punkt). Jeśli istnieje formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych, spójników $\Rightarrow$ i $\neg$ oraz nawiasów równoważna formule $p \wedge q$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$\neg(p \Rightarrow \neg q)$

Zadanie 3 (1 punkt). Jeśli istnieje formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych, spójników $\Rightarrow$ i $\vee$ oraz nawiasów równoważna formule $p \wedge \neg q$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

NIE

Zadanie 4 (1 punkt). Jeśli istnieje formuła logiki I rzędu, która interpretowana w zbiorze uporządkowanym $\langle A, \leq \rangle$ mówi, że a jest kresem górnym zbioru X, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

$(\forall x \in X \;\; x \leq a) \;\wedge\; \forall b\Big((\forall x \in X \; x \leq b) \Rightarrow a \leq b\Big)$

Zadanie 5 (1 punkt). Jeśli inkluzja $A \cap (B \cup C) \subseteq B \cap (A \cup C)$ zachodzi dla wszystkich zbiorów A, B i C, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$A = \{1\},\ B = \{0\},\ C = \{1\}$

Zadanie 6 (1 punkt). Jeśli inkluzja $\bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{t\in T} B_t \subseteq \bigcup_{t\in T}(A_t \cap B_t)$ zachodzi dla wszystkich indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ i $\{B_t\}_{t\in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

$T = \{1,2\}$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $B_1 = \{2\}$, $B_2 = \{1\}$

Zadanie 7 (1 punkt). Dla $m, n \in \mathbb{N}$ niech $A_{m,n} = \{i \in \mathbb{N} \mid m \leq i \ \wedge i \leq n\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość zbioru $\bigcap_{n=2011}^{\infty} \bigcup_{m=15}^{n} A_{m,n}$, tzn. wpisz wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap, \cup, \exists, \forall$.

$\{i \in \mathbb{N} \mid 15 \leq i \ \wedge i \leq 2011\}$

Zadanie 8 (1 punkt). Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste,} \\ -(n+1)/2, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli istnieje funkcja odwrotna do f to w prostokąt poniżej wpisz wyrażenie definiujące tę funkcję. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $\qquad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jeśli } x \geq 0, \\ -2x-1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$

Zadanie 9 (1 punkt). Rozważmy relację równoważności na zbiorze liczb naturalnych $R = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \lfloor m/3 \rfloor = \lfloor n/3 \rfloor\}$. Jeśli klasa abstrakcji $[5]_R$ jest zbiorem skończonym, to w prostokąt poniżej wpisz wszystkie elementy tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

3, 4, 5

Zadanie 10 (1 punkt). Jeśli istnieje taki zbiór $X \neq \mathbb{Q}$, że $\mathbb{Q} \subseteq X$ oraz $|X| \leq |\mathbb{N}|$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki zbiór. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$

Zadanie 11 (1 punkt). Wpisz słowo „TAK" w te kratki poniższej tabelki, które odpowiadają parom zbiorów równolicznych. Wpisz „NIE" w kratki odpowiadające parom zbiorów nierównolicznych.

	$[0,1) \times \mathbb{R}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \{0,1\})$	$\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{Q} \cup \{\pi, \sqrt{2}\}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\{0,1\}^{\{2,3,4\}}$	$\mathbb{N}^{\{0,1,2\}}$
$\mathbb{N}$	NIE	NIE	NIE	TAK	NIE	NIE	TAK
$\mathbb{R}$	TAK	TAK	TAK	NIE	NIE	NIE	NIE

Imię i nazwisko: Maksymilian Debeściak

Zadanie 12 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz liczbę różnych relacji liniowego porządku na zbiorze $\{1,2,3,4\}$.

24

Zadanie 13 (1 punkt). Jeśli istnieje taka relacja porządku częściowego R na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$, że $\langle \mathbb{N}, R^{-1} \rangle$ jest relacją porządku częściowego, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$R = \{\langle m,n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$

Zadanie 14 (1 punkt). Jeśli porządki $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, \leq_{lex} \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zbiory $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ nie są równoliczne

Zadanie 15 (1 punkt). Rozważmy zbiór liczb naturalnych uporządkowany relacją podzielności $\langle \mathbb{N}, | \rangle$. Niech $S = \{6, 8, 10\}$. Jeśli zbiór S ma w $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ kres górny, to w prostokąt oznaczony $\sup S$ poniżej wpisz wyliczoną wartość tego kresu; w przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE". Jeśli S ma kres dolny, to w prostokąt oznaczony $\inf S$ poniżej wpisz wyliczoną wartość tego kresu; w przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$\sup S$ 120 $\inf S$ 2

Zadanie 16 (1 punkt). Jeśli istnieje taka relacja $R \subseteq (\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})) \times (\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, że $\langle \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}), R \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$R = \{\langle \langle x, Y \rangle, \langle x', Y' \rangle \rangle \mid x \leq x' \land Y \subseteq Y'\}$

Zadanie 17 (1 punkt). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniowaną wzorem $f(X) = \{10\} \cup \{\lfloor n/2 \rfloor \mid n \in X\}$. Jeśli funkcja f ma w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ najmniejszy punkt stały, to w prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość tego punktu stałego. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$\{10, 5, 2, 1, 0\}$

Zadanie 18 (1 punkt). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. Jeśli istnieje unifikator termów $f(y, g(y), z)$ i $f(g(z), x, a)$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny taki unifikator. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$$\{y/g(a),\ x/g(g(a)),\ z/a\}$$

Zadanie 19 (1 punkt). Jeśli zbiór klauzul $\{s \vee r,\ \neg q \vee s,\ p \vee q,\ \neg r \vee \neg s,\ \neg p \vee q\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

$$\sigma(p) = \mathsf{T},\ \sigma(q) = \mathsf{T},\ \sigma(r) = \mathsf{F},\ \sigma(s) = \mathsf{T}$$

Zadanie 20 (1 punkt). Powiemy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są pewnymi zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\forall n \Big((\forall (k < n) \quad k \in X) \Rightarrow n \in X \Big)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

$$\forall n \exists k\ \ (k < n \wedge k \notin X) \vee n \in X$$