Algebra II (ISIM), lista 7 (30.11.2017).

Teoria: Grupy rozwiązalne.

1. Wyznaczyć rzędy grup obrotów własnych sześcianu i izometrii własnych sześcianu (wsk: rozważyć działanie tych grup na zbiorze wierzchołków sześcianu).

2. (a) Udowodnić, że grupa izometrii własnych czworościanu foremnego jest izomorficzna z grupą S_4.
(b) W grupie izometrii własnych sześcianu wskazać podgrupy izomorficzne z D_4 i z D_3.

3. (a)$^-$ W grupie automorfizmów liniowych przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ wskazać element rzędu 2 niebędący izometrią.
(b)* Czy w (a) istnieje taki element rzędu 3 (zamiast 2)?

4. Udowodnić, że:
(a) Każda z grup $G^{(k)}$ jest charakterystyczną podgrupą G.
(b)$^-$ $G^{(k+1)} \lhd G^k$ oraz $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ jest abelowa.

5. Udowodnić, że grupa G jest rozwiązalna stopnia $\leq k \iff$ istnieje ciąg normalny grupy G długości k, o faktorach abelowych.

6. $^-$ Dla $H_1, H_2 < G$ określamy komutant grup $[H_1, H_2]$ jako podgrupę generowaną przez komutatory $[h_1, h_2], h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$. Załóżmy, że $H_1, H_2 \lhd G$. Udowodnić, że $[H_1, H_2] \subseteq H_1 \cap H_2$ i $[H_1, H_2] \lhd G$.

7. Wyznaczyć komutant grupy D_4.

8. Dowieść, że (a) jeśli $f : G \to H$ jest epimorfizmem grup, to $f[G^{(k)}] = H^{(k)}$;
(b) jeśli $G < H$, to $G^{(k)} \subseteq H^{(k)}$.

9. Udowodnić, że dla $n > 2, [S_n, S_n] = A_n$. (wsk. dla inkluzji $\supseteq$: każda permutacja jest iloczynem transpozycji, dlatego permutacje postaci $(a, b)(c, d)$ generują A_n. Uzasadnić, że każda taka permutacja jest komutatorem.)

10. $^-$ Sprawdzić, że grupa S_4 jest rozwiązalna.

11. (a) Udowodnić, ze każdy element postaci $g_1 g_2 \ldots g_n g_1^{-1} g_2^{-1} \ldots g_n^{-1}$, gdzie $g_1, \ldots, g_n \in G$, należy do komutanta grupy G.
(b)** Udowodnić, że każdy element grupy $[G, G]$ jest powyższej postaci (mnie się nie udało).

12. Niech $T(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b \neq 0 \right\}$ i $U(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$.
(a)$^-$ Sprawdzić, że $U(2, \mathbb{R} < T(2, \mathbb{R}) < GL(n, \mathbb{R})$.
(b) Pokazać, że $U(2, \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}, +)$ i $U(2, \mathbb{R}) = [T(2, \mathbb{R}), T(2, \mathbb{R})]$.
Wywnioskować stąd, że $T(2, \mathbb{R})$ jest rozwiązalna stopnia 2.

13. Sprawdzić, że $Z(GL(n, \mathbb{R}))$ składa się z macierzy postaci $aI, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.