Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin połówkowy (część licencjacka)

12 grudnia 2009

Zadanie 1 (1 punkt). Mówimy, że formuła φ jest uproszczeniem formuły ψ jeśli obie formuły są równoważne oraz w φ występuje mniej spójników logicznych niż w ψ.

W prostokąt poniżej wpisz formułę w dysjunkcyjnej postaci normalnej będącą uproszczeniem formuły $(p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee q)$ lub słowo „NIE”, jeśli taka formuła nie istnieje.

Zadanie 2 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz formułę z trzema zmiennymi wolnymi x, y, z, która (interpretowana w zbiorze liczb naturalnych) mówi, że z jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb x i y.

Zadanie 3 (1 punkt). Jeśli istnieją takie zbiory A, B i C, że $A \cup B \cup C \neq \emptyset$ oraz $A \setminus (B \dot{-} C) = (A \setminus B) \dot{-} (A \setminus C)$, to w prostokąt poniżej wpisz przykład takich trzech zbiorów. W przeciwnym wypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 4 (1 punkt). Dla $s \in \mathbb{R}$ niech $A_s = \{x \in \mathbb{R} \mid s \leq x\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość zbioru $\bigcap_{s<0} \bigcup_{t>s} A_t$, tzn. wpisz wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające żadnego z symboli $\cap, \cup, \exists, \forall, s, t$.

Zadanie 5 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz liczbę różnych relacji równoważności na zbiorze $\{a, b, c\}$.

Zadanie 6 (1 punkt). Rozważmy relacje $R = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = m+2\}$ i $S = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}\ n = k \cdot m\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $SR = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi\}$.

Zadanie 7 (1 punkt). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathcal{P}([0, 1]) \times [2, 3] \to [0, 1] \times \mathcal{P}([2, 3])$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym wypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 8 (1 punkt). Jeśli dla dowolnej funkcji różnowartościowej $f : A \to B$ i dla dowolnych zbiorów $X, Y \subseteq A$ zachodzi równość $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Imię i nazwisko:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin połówkowy (część zasadnicza)

12 grudnia 2009

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -2 do podanej przy zadaniu liczby punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.

Zadanie 9 (12 punktów). Mówimy, że formuła φ rachunku zdań należy do 3-CNF, jeżeli ma ona postać

$$\bigwedge_{i=1}^{n} (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}),$$

gdzie l_{ij}, dla $i = 1, \ldots, n$ i $j = 1, 2, 3$, są literałami, czyli zmiennymi zdaniowymi lub zanegowanymi zmiennymi zdaniowymi. Symbolem 3-CNF(V) oznaczamy zbiór formuł należących do 3-CNF, w których występują jedynie zmienne ze zbioru V.

Przez QBF oznaczamy rozszerzenie zbioru formuł rachunku zdań zadane regułami (i) każda formuła rachunku zdań należy do QBF, oraz (ii) jeżeli φ należy do QBF i p jest zmienną zdaniową to $\exists p\, \varphi$ należy do QBF.

Znaczenie formuł QBF jest zadane takimi samymi regułami jak znaczenie formuł rachunku zdań oraz dodatkową regułą

$$\hat{\sigma}(\exists p \varphi) \quad = \quad \begin{cases} \mathsf{T}, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\varphi[p/\top]) = \mathsf{T} \text{ lub } \hat{\sigma}(\varphi[p/\bot]) = \mathsf{T}, \\ \mathsf{F}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

(a) Udowodnij, że istnieje taka formuła φ należąca do 3-CNF, że formuła $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5$ jest równoważna formule $\exists x_1 \exists x_2\, \varphi$.

Wskazówka: Rozważ formułę $(x \leftrightarrow (p_1 \vee p_2)) \wedge (x \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5)$.

(b) Udowodnij, że formuła $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5$ nie jest równoważna żadnej formule ze zbioru 3-CNF($\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$).

Zadanie 10 (10 punktów). Niech R i S będą dowolnymi relacjami równoważności na zbiorze A. Udowodnij, że $R \cup S$ jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $a \in A$ zachodzi alternatywa $[a]_R \subseteq [a]_S$ lub $[a]_S \subseteq [a]_R$.

Zadanie 11 (10 punktów). Mówimy, że rodzina zbiorów $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ jest wstępująca (odpowiednio zstępująca) jeśli dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ zachodzi $X_i \subseteq X_{i+1}$ (odpowiednio $X_i \supseteq X_{i+1}$). Rozważmy dwa stwierdzenia poniżej.

Stwierdzenie 1 *Niech $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ będzie taką wstępującą rodziną zbiorów, że $A_0 \subseteq \mathbb{N}$ oraz dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ zbiory A_i oraz A_{i+1} są równoliczne. Wtedy A_0 jest równoliczne z $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.*

Stwierdzenie 2 *Niech $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ będzie taką zstępującą rodziną zbiorów, że $B_0 \subseteq \mathbb{N}$ oraz dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ zbiory B_i oraz B_{i+1} są równoliczne. Wtedy B_0 jest równoliczne z $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$.*

Sprawdź, które z powyższych dwóch stwierdzeń są prawdziwe. Jeśli któreś z tych stwierdzeń jest prawdziwe, to udowodnij je. Jeśli któreś jest fałszywe, to podaj odpowiedni kontrprzykład.

Student name:

Logic for Computer Science

Midterm exam (bachelor part)

December 12, 2009

Task 1 (1 point). We say that a formula φ is a simplification of a formula ψ if both formulas are equivalent and φ contains less logical connectives then ψ.

In the box below write a formula in disjunctive normal form that is a simplification of the formula $(p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee q)$, or the word "NO" if such a formula does not exist.

Task 2 (1 point). In the box below write a formula with three free variables x, y, z, that (interpreted in the set of natural numbers) expresses that z is the least common multiple of x and y.

Task 3 (1 point). If there exist sets A, B and C, such that $A \cup B \cup C \neq \emptyset$ and $A \setminus (B \dot{-} C) = (A \setminus B) \dot{-} (A \setminus C)$, then in the box below write an example of such three sets. Otherwise write the word "NO".

Task 4 (1 point). For $s \in \mathbb{R}$ let $A_s = \{x \in \mathbb{R} \mid s \leq x\}$. In the box below write the value of the set $\bigcap_{s<0} \bigcup_{t>s} A_t$, that is, write an expression that denotes the same set and contains no symbols $\cap, \cup, \exists, \forall, s, t$.

Task 5 (1 point). In the box below write the number of different equivalence relations on the set $\{a, b, c\}$.

Task 6 (1 point). Consider relations $R = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = m + 2\}$ and $S = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}\; n = k \cdot m\}$. In the box below write a formula φ such that $SR = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \varphi\}$.

Task 7 (1 point). If there exists a bijection $f : \mathcal{P}([0, 1]) \times [2, 3] \to [0, 1] \times \mathcal{P}([2, 3])$, then in the box below write an example of such a bijection. Otherwise write the word "NO".

Task 8 (1 point). If the equality $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$ holds for all injections $f : A \to B$ and all sets $X, Y \subseteq A$, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Student name:

Solutions returned:

Logic for Computer Science

Midterm exam (main part)

December 12, 2009

Task 9 (12 points). We say that a propositional formula φ is in 3-CNF form if is of the form

$$\bigwedge_{i=1}^{n} (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}),$$

where l_{ij}, for $i = 1, \ldots, n$ and $j = 1, 2, 3$, are literals.[1] By $3 - \mathrm{CNF}(V)$ we denote the set of all formulas in 3-CNF form built from variables in the set V, logical connectives and brackets.

Let QBF be a generalization of the set propositional formulas given by the rules (i) all propositional formulas are in the set QBF, and (ii) if φ is in QBF and p is a propositional variable then $\exists p\, \varphi$ is in QBF.

The meaning of QBF formulas is defined with the same rules as in the case of propositional formulas with one additional rule

$$\hat{\sigma}(\exists p \varphi) \quad = \quad \begin{cases} \mathsf{T}, & \text{if } \hat{\sigma}(\varphi[p/\top]) = \mathsf{T} \text{ or } \hat{\sigma}(\varphi[p/\bot]) = \mathsf{T}, \\ \mathsf{F}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(a) Prove that there exists a formula φ in 3-CNF, such that the formula $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5$ is equivalent to the formula $\exists x_1 \exists x_2\, \varphi$.

Hint: Consider the formula $(x \leftrightarrow (p_1 \vee p_2)) \wedge (x \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5)$.

(b) Prove that the formula $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_5$ is not equivalent to any formula in the set 3-CNF$(\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\})$.

Task 10 (10 points). Let R and S be arbitrary equivalence relations on a set A. Prove that $R \cup S$ is an equivalence relations if and only if for all $a \in A$ either $[a]_R \subseteq [a]_S$ or $[a]_S \subseteq [a]_R$.

Task 11 (10 points). We say that a family of sets $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ is *ascending* (respectively, it is *descending*) if for all $i \in \mathbb{N}$ we have $X_i \subseteq X_{i+1}$ (respectively, $X_i \supseteq X_{i+1}$) Consider two statements below.

> **Statement 1** *Let $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ be an ascending family of sets such that $A_0 \subseteq \mathbb{N}$ and for all $i \in \mathbb{N}$ there exists an injection from A_{i+1} to A_i. Then there exists an injection from $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ to A_0.*

> **Statement 2** *Let $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ be a descending family of sets such that $B_0 \subseteq \mathbb{N}$ and for all $i \in \mathbb{N}$ there exists an injection from B_i to B_{i+1}. Then there exists an injection from B_0 to $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$.*

Check, which of these statements are true. If some of these statements are true then prove them. If some of them are false then give corresponding counter-examples.

[1] Recall that a literal is a propositional variable or negated propositional variables. So, in other words, a formula in 3-CNF form is a conjunction of clauses with exactly three literals per clause.