Algebra II (ISIM), lista 3 (26.10.2017).

G oznacza grupę.

Teoria: Działanie grupy G na zbiorze X (lewo- i prawostronne). Działanie lewostronne jako homomorfizm $\varphi : G \to Sym(X)$. Działanie wierne, tranzytywne. Stabilizator G_x, orbita $O(x) = Gx$. Sprzężenie w grupie, automorfizmy wewnętrzne. $C(X)$, $Z(G)$, $Inn(G)$. $|O(x)| = [G : G_x]$. Lemat Burnside'a. Grupy permutacji.

1. Załóżmy, że $X \subseteq G$. $C(X) = \{g \in G : g$ komutuje z każdym $x \in G\}$. Jest to tzw. centralizator zbioru X. Gdy $X = \{g\}$, piszemy $C(g)$ zamiast $C(\{g\})$. Gdy $X = G$, piszemy $Z(G)$ zamiast $C(X)$, jest to tzw. centrum grupy G. Udowodnić, że
(a)$^-$ $C(X) < G$; (b)$^-$ $Z(G)$ jest grupą abelową;
(c) $Z(G) \triangleleft G$;
(d) dla $g \in G$, $|g^G| = [G : C(g)]$;
(e) $G/Z(G) \cong Inn(G)$, gdzie $Inn(G)$ to grupa automorfizmów wewnętrznych grupy G;
(f) $Inn(G) \triangleleft Aut(G)$.

2. Udowodnić, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

3. Wyznaczyć wszystkie automorfizmy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$ (wsk: na co może przejść w automorfizmie generator grupy?). Które z tych automorfizmów są wewnętrzne?

4. Załóżmy, że $f : G \to H$ jest homomorfizmem grup, $g \in G$, $ord(g) = n$ oraz $k \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że
(a) $ord(g^k) = \frac{n}{NWD(n,k)}$
(b) $ord(f(g)$ dzieli $ord(g)$.

5. Ile różnych typów naszyjników można utworzyć z:
(a) 3 czarnych i 3 białych koralików,
(b) 4 czarnych, 3 białych i 1 czerwonego koralika?

6. Niech $\sigma \in S_n$ będzie iloczynem cykli rozłącznych $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takich, że α_i jest długości l_i. Udowodnić, że $ord(\sigma) = NWW(l_1, \ldots, l_k)$
(a) w przypadku, gdy $k = 2$,
(b) ogólnie.

7. Udowodnić, że permutacje $\sigma, \tau \in S_n$ są sprzężone w grupie S_n $\iff$ ich rozkłady na iloczyny cykli rozłącznych są podobne, tzn. dla każdego k w rozkładach σ i τ jest tyle samo cykli długości k.

8. Czy istnieje działanie grupy $G = (\mathbb{Z}, +_{10})$ na zbiorze 10-elementowym X o n orbitach, gdzie
(a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$? (wsk: rozważyć działanie G na zbiorze G/H przez lewe przesunięcie)

9. $^{-}$ (a) W grupie permutacji S_7 wyznaczyć rzędy elementów i ich klasy sprzężenia.
(b) Wyznaczyć klasy sprzężenia w grupie D_6.