Algebra II (ISIM), lista 1 (12.10.2017).

Symbolem $-$ oznaczone będą ćwiczenia do samodzielnego wykonania, bez omawiania na zajęciach (chyba że na życzenie studentów). Wszystkie działania są (domyślnie) binarne. G oznacza zazwyczaj grupę.

Teoria: Działanie w zbiorze: definicja, własności działań (łaczność, przemienność, rozdzielność, element neutralny). Struktura algebraiczna, izomorfizm i homomorfizm struktur. Epi-, mono-, izo-, endo- i automorfizm. Podstruktura. Generowanie podstruktury. Indukowanie struktury (działania).

Grupa i grupa abelowa: definicja, podstawowe własności, notacja multyplikatywna i addytywna. Rząd grupy. Podgrupa: definicja, podstawowe własności, charakteryzacja podgrupy jako podstruktury. Przykłady grup: grupa czwórkowa Kleina K_4, n-ta grupa dihedralna D_n, n-ta grupa symetryczna S_n. Grupa automorfizmów struktury. n-ta grupa liniowa $GL_n(\mathbb{R}) \cong Aut(\mathbb{R}^n)$.

1. $^-$ Załóżmy, że $F : (A, \circ) \to (B, *)$ jest homomorfizmem struktur. Udowodnić, że $F[A]$ jest podstrukturą struktury B.
2. $^-$. Załóżmy, że $\emptyset \neq X \subseteq A$, gdzie $A = (A, \circ)$ jest strukturą algebraiczną. Udowodnić, że $\langle X \rangle$ jest najmniejszą podstrukturą struktury A zawierającą X.
3. Udowodnic uwagę 1.6. Podac wzór na indukowane działanie $*$.
4. $^-$ $F : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ określone jest przez: $F(0) = 1,\ F(1) = 3,\ F(2) = 0,\ F(3) = 2$. Podać tabelkę działania $*$ indukowanego w zbiorze $\mathbb{Z}_4$ przez F i $+_4$.
5. Załóżmy, że $\circ$ jest działaniem łącznym w skończonym zbiorze A. Udowndnić, ż eistnieje $a \in A$ takie, że $a \circ a = a$.
6. * W zbiorze A określone jest działanie $*$ takie, że dla dowolnych $a, b \in A$ mamy
$$(a * b) * b = a \text{ oraz } b * (b * a) = a.$$
Udowodnić, że:
(a) $(b * a) * b = a,\ b * (a * b) = a$.
(b) $*$ jest przemienne.
7. W zbiorze G określone jest działanie $\circ$. Swterdzić, czy jest to dzialanie grupowe.
(a) $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \circ y = xy$, gdy $x > 0$, oraz $x \circ y = x/y$, gdy $x < 0$.
(b) $G = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y$, gdy x jest parzyste, oraz $x \circ y = x - y$, gdy x jest nieparzyste.
8. $^-$ Udowodnić, że w grupie G dla każdego elementu istnieje jedyny element doń odwrotny.
9. Udowodnić uwagę 1.10.

10. (a) Podać przykład grupy $G = (G, \cdot)$ i jej podstruktury H, która nie jest podgrupą grupy G.
    (b) Udowodnić uwagę 1.12(2).

11. Niech $g \in G$. OKreślamy funkcje $l_g, r_g : G \to G$ (lewe i prawe przesunięcie o g): $l_g(x) = gx$, $r_g(x) = xg$. Udowodnić, że funkcje te są bijekcjami.

12. Udowodnić, że $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot_p)$ jest grupą.

13. załóżmy, że w grupie G, $a^2 = e$ dla wszystkich $a \in G$. Udowodnić, że G jest abelowa.

14. Wyznaczyć poniższe grupy automorfizmów.
    (a) $Aut(\mathbb{N}, +)$ – tu pokazać, że jest to grupa trywialna.
    (b)* $Aut(\mathbb{N}, \cdot)$ – tu pokazac, ż ejest ona izomorficzna z grupą $Sym(\mathbb{N})$ (w szczególności jest mocy continuum).

Program wykładu:
I. Grupy:
1. Podstawowe definicje i przykłady.
2. Działania grup. Twierdzenie Lagrange'a. Lemat Burnside'a z zastosowaniami.
3. Homomorfizmy grup, dzielniki normalne i grupy ilorazowe.
4. Grupy permutacji.
5. Twierdzenia Sylowa. Grupy małych rzędów.
6. Geometryczne przykłady grup.
7. Skończone grupy abelowe.
8. Grupa wolna i prezentacja grupy.

II. Pierścienie:
1. Podstawowe definicje i przykłady.
2. Teoria podzielności w pierścieniach, w tym warunek UFD.
3. Homomorfizmy perścieni, ideały i pierścienie ilorazowe.
4. Pierścienie ideałów głównych i poerścienie euklidesowe.
5. Dziedziny i ich ciała ułamków.
6. Jednoznaczność rozkladu w pierścieniach wielomianów.
7. Pierścienie noetherowskie. Twierdzenie Hilberta o bazie.
8. Bazy Groebnera.

III. Ciała:
1. Podstawowe definicje. Ciała jako pierścienie ilorazowe.
2. Ciała skończone. Kody BCH.

Książki:

M.Artin, Algebra
S.Lang, Algebra
Vinberg, Kurs algebry
Kostrykin, Wstęp do algebry
Gilbert, Nicholson, Modern algebra with applications

Shafarevich, Basic notions of algebra
Garrett, Abstract Algebra
Białynicki-Birula, Zarys Algebry.

Zaliczenie ćwiczeń: system 3 kolokwiów po 60 minut, na początku zajęć (3x20 pkt) + 20pkt (aktywność). Zaliczenie: minimum 30 pkt (w tym minimum 20 pkt za kolokwia).

Terminy kolokwiów: 17.11, 15.12 i 18.01.

Egzamin: pisemny, 150 minut.