Numer indeksu:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (pierwsza część)

21 lutego 2014

Zadanie 1 (2 punkty). Jeśli formuły $\neg p \Rightarrow \neg q$ oraz $\neg p \vee q$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE”. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego te formuły nie są równoważne.

Zadanie 2 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ jest uproszczeniem formuły ψ, jeśli obie formuły są równoważne oraz φ zawiera mniej wystąpień spójników logicznych niż ψ. Jesli istnieje uproszczenie formuły $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 3 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz dwie formuły, odpowiednio w dysjunkcyjnej i koniunkcyjnej postaci normalnej, mające następującą tabelkę zero-jedynkową.

p	q	r	φ
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

Zadanie 4 (2 punkty). Rozważmy relacje $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times A$. W prostokąt poniżej wpisz formułę logiki I rzędu mówiącą, że para $\langle a, b\rangle$ nie należy do złożenia relacji SR. Formuła ta nie może zawierać symbolu negacji (ale może zawierać symbol $\notin$) i nie może zawierać symboli złożenia relacji SR (ale może zawierać symbole R i S).

Zadanie 5 (2 punkty). Jeśli formuła $\forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow \Big(\forall x\ p(x) \Rightarrow (\exists x\ q(x))\Big)$ jest prawem rachunku kwantyfikatorów, to w prostokąt poniżej wpisz dowód tej formuły w systemie naturalnej dedukcji. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 6 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech różnych relacji, których przechodnim domknięciem jest relacja $\{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}$.

Zadanie 7 (2 punkty). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg p \vee q,\ \neg p \vee r,\ p \vee s,\ \neg q \vee s,\ \neg r \vee \neg s \vee t,\ \ \neg s \vee p\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 8 (2 punkty). Mówimy, że formuła φ logiki I rzędu jest w *preneksowej postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, gdzie x_i są zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami (czyli $\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów. Jeśli istnieje formuła w preneksowej postaci normalnej równoważna formule $\forall z'(\exists k\ xk = z' \wedge \exists k\ yk = z') \Rightarrow z \leq z'$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”. (Dla ułatwienia: formuła ta mówi, że każda wspólna wielokrotność liczb x i y jest nie mniejsza niz z.)

Numer indeksu:

Zadanie 9 (2 punkty). Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq n\}$ i niech $B_n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq 2n\}$. Jeśli zbiór $\bigcup_{n=42}^{2014} A_n \setminus \bigcup_{n \leq 42} B_n$ jest pusty to w prostokąt poniżej wpisz słowo „PUSTY”. W przeciwnym przypadku wpisz najmniejszy element tego zbioru.

Zadanie 10 (2 punkty). Jeśli istnieje relacja równoważności na zbiorze liczb naturalnych, której każda klasa abstrakcji ma dokładnie 5 elementów, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację równoważności. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka relacja nie istnieje.

Zadanie 11 (2 punkty). Mówimy, że w algebrze zbiorów wyrażenie W jest uproszczeniem wyrażenia W' jeśli oba wyrażenia oznaczają ten sam zbiór, oba zawierają tylko zmienne, binarne symbole $\cup, \cap, \setminus$ i nawiasy, oraz W zawiera mniej symboli niż W'. Np. $A \setminus B$ jest uproszczeniem $(A \cup B) \setminus B$. Jeśli istnieje uproszczenie wyrażenia $(A \cap (B \setminus C) \cap D) \cup (A \cap C \cap D)$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie uproszczenie. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 12 (2 punkty). Rozważmy zbiory osób O, barów B i soków S oraz relacje $\mathit{Bywa} \subseteq O \times B$, $\mathit{Lubi} \subseteq O \times S$ i $\mathit{Podają} \subseteq B \times S$ informujące odpowiednio o tym jakie osoby bywają w jakich barach, jakie osoby lubią jakie soki oraz jakie bary podają jakie soki. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{x \mid \varphi\}$ jest zapytaniem relacyjnego rachunku dziedzin oznaczającym wykaz osób, które lubią wszystkie soki podawane w barze *Jagódka*.

Zadanie 13 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz liczbę różnych relacji równoważności na zbiorze $\{21, 2, 2014\}$.

Zadanie 14 (2 punkty). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathbb{N}^{\{0,1\}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną takią bijekcję. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego taka bijekcja nie istnieje.

Zadanie 15 (2 punkty). W prostokąt poniżej wpisz przykład trzech porządków, z których żadne dwa nie są izomorficzne.

Zadanie 16 (2 punkty). Jeśli istnieją takie zbiory X i Y, że $|\mathbb{R}| < |X|$ oraz $|X| < |Y|$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takich dwóch zbiorów. W przeciwnym razie wpisz uzasadnienie, dlaczego takie zbiory nie istnieją.

Zadanie 17 (2 punkty). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathcal{P}([0,1]) \to \{0,1\}^{[2,3]}$ to w prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład takiej bijekcji. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taka bijekcja nie istnieje.

Zadanie 18 (2 punkty). Jeśli istnieją takie dwie relacje równoważności R i S na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$, że SR jest relacją porządku, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie relacje. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego takie relacje nie istnieją.

Zadanie 19 (2 punkty). Jeśli zbiory uporządkowane $\langle\{m - \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m{>}0 \wedge n{>}0\}, \leq\rangle$ oraz $\langle \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_{lex}\rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 20 (2 punkty). W tym zadaniu f i g są symbolami funkcyjnymi, a jest symbolem stałej, natomiast x, y i z są zmiennymi. W prostokąty obok tych spośród podanych par termów, które są unifikowalne, wpisz najogólniejsze unifikatory tych termów. W prostokąty obok termów, które nie są unifikowalne, wpisz słowo „NIE”.

(a) $f(f(y,a),z) \stackrel{?}{=} f(f(x,y),z)$

(b) $f(f(g(y),a),g(z)) \stackrel{?}{=} f(f(x,y),z)$