Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania **P3.1**

Prowadzący: dr Rafał Nowak

Mateusz Hazy

Wrocław, 28 stycznia 2018

1 Wstęp

Rozwiązywanie równań różniczkowych jest szczególnie istotnym problemem ze względu na szerokie zastosowanie w opisywaniu rzeczywistości. Równania mechaniki klasycznej, zasad dynamiki, falowe, Einsteina, Maxwella i wiele innych kluczowych dla fizyki równań ma postać różniczkową. Istnieją metody rozwiązywania równań różczniczkowych pewnych szczególnych typów, jednak w ogólności jest to bardzo trudne. Niniejsze sprawozdanie ma na celu opisanie numerycznej metody znajdowania rozwiązań równań różniczkowych opracowanej przez C. W. Clenshawa i H. J. Nortona oraz przetestowanie tej metody w praktyce.

2 Opis problemu

Będziemy rozważać równania różniczkowe postaci:

$$y'(x) = f(y(x), x) \text{ z warunkiem początkowym } y(\xi) = \eta \tag{1}$$

zwane równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu.

Naszym celem będzie przybliżenie funkcji y na przedziale $[-1, 1]$

Metoda Clenshawa-Nortona opiera się o przedstawienie funkcji jako kombinacji liniowej wielomianów Czebyszewa oraz iterację punktu stałego zwaną iteracją Picarda. W następnych rozdziałach zajmiemy się własnościami wielomianów Czebyszewa, aproksymacji średniokwadratowej oraz iteracji Picarda potrzebnych do wyprowadzenia metody Clenshawa-Nortona.

3 Iteracja Picarda

Aby zastosować iterację Picarda, należy przekształcić równanie (1) do postaci całkowej.

Twierdzenie 1. *Równanie*

$$y'(x) = f(y(x), x) \quad y(\xi) = \eta$$

Jest równoważne równaniu

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(y(t), t)dt$$

Dowód.

$$y'(x) = f(y(x), x)$$

$$\int_{\xi}^{x} y'(t)dt = \int_{\xi}^{x} f(y(t), t)dt$$

$$y(x) - y(\xi) = \int_{\xi}^{x} f(y(t), t)dt$$

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(y(t), t) dt$$

□

W iteracji Picarda tworzony jest ciąg funkcji $y_i(x), \{i = 0, 1, 2 \ldots\}$ zadany wzorem:

$$y_0 = \eta, \quad y_i = \eta + \int_{\xi}^{x} f(y_{i-1}(t), t) dt \tag{2}$$

3.1 Zbieżność iteracji

Można pokazać, że w szczególnych przypadkach iteracja jest zbieżna, jednak w ogólnym przypadku nie należy się tego spodziewać. Dalsze rozważania na temat zbieżności iteracji Picarda można znaleźć w pozycjach [1] oraz [2].

4 Wybrane własności wielomianów Czebyszewa

Poniżej udowodnimy szereg własności wielomianów Czebyszewa. Każde z twierdzeń będzie bezpośrednio wykorzystane do wyprowadzenia metody Clenshawa–Nortona. Lematy będą niezbędne w dowodzeniu twierdzeń.

Przyjmijmy następujące oznaczenia :

$$T_k - \text{ k-ty wielomian Czebyszewa,}$$

$$u_j = \cos \frac{j\pi}{N} \text{ dla } j = 0 \ldots N - \text{ ekstrema } T_N,$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{N}{}'' f(u_j) g(u_j) - \text{pewien iloczyn skalarny.} \tag{3}$$

Lemat 1.

$$T_k(\cos x) = \cos kx \tag{4}$$

Dowód. (Indukcja)

1. dla $k = 0, 1$ równość jest prawdziwa.
2. Załóżmy że dla $l < k$ równość jest prawdziwa. Pokażemy że dla k również.

$$T_k(\cos x) = 2\cos x T_{k-1}(\cos x) - T_{k-2}(\cos x) = 2\cos x \cos{(k-1)x} - \cos{(k-2)x} =$$
$$= \big(\cos kx + \cos{(k-2)x}\big) - \cos{(k-2)x} = \cos kx$$

□

Twierdzenie 2. *Wielomiany Czebyszwa stopnia nie większego niż N tworzą bazę wielomianów ortogonalnych dla iloczynu skalarnego (3). Ponadto wartości $\langle T_k, T_j \rangle$ zadane są wzorem:*

$$\langle T_k, T_l \rangle = \begin{cases} 0, & gdy\ k \neq l \\ \frac{N}{2}, & gdy\ k = l\ ,\ k \neq 0, N \\ N, & gdy\ k = l\ ,\ k = 0, N \end{cases} \tag{5}$$

Dowód.

$$\langle T_k, T_l \rangle = \sum_{j=0}^{N}{}'' T_k(\cos \frac{j\pi}{N}) \cdot T_l(\cos \frac{j\pi}{N}) = \sum_{j=0}^{N}{}'' \cos \frac{kj\pi}{N} \cdot \cos \frac{lj\pi}{N} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=0}^{N}{}'' \cos \frac{(k-l)j\pi}{N} + \sum_{j=0}^{N}{}'' \cos \frac{(k+l)j\pi}{N} \Big)$$

Obie sumy mają postać $\sum_{j=0}^{N}{}'' \cos \frac{wj\pi}{N}$ dla pewnego w. Rozważmy wartości takiej sumy.

Lemat 2.

$$\sum_{j=0}^{N}{}'' \cos\frac{wj\pi}{N} = \begin{cases} N, & gdy\ w = 0, 2N \\ 0, & gdy\ 0 < w < 2N \end{cases} \tag{6}$$

Korzystając z powyższego lematu mamy:

$$\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=0}^{N}{}'' \cos\frac{(k-l)j\pi}{N} + \sum_{j=0}^{N}{}'' \cos\frac{(k+l)j\pi}{N}\Big) = \begin{cases} \frac{1}{2}(0+0) = 0, & \text{gdy } k \neq l \\ \frac{1}{2}(N+0) = \frac{N}{2}, & \text{gdy } k = l, k \neq 0, N \\ \frac{1}{2}(N+N) = N, & \text{gdy } k = l, k = 0, N \end{cases}$$

□

Dowód. **(Lematu 2.)**

1. $w = 0$

$$\sum_{j=0}^{N}{}'' \cos\frac{wj\pi}{N} = \sum_{j=0}^{N}{}'' \cos 0 = \sum_{j=0}^{N}{}'' 1 = N \tag{7}$$

2. $w = 2N$

$$\sum_{j=0}^{N}{}'' \cos\frac{wj\pi}{N} = \sum_{j=0}^{N}{}'' \cos\frac{2Nj\pi}{N} = \sum_{j=0}^{N}{}'' \cos 2j\pi = \sum_{j=0}^{N}{}'' 1 = N \tag{8}$$

3. $0 < w < 2N$

$$\sum_{j=0}^{N}{}'' \cos\frac{wj\pi}{N} = \sum_{j=0}^{N} \cos\frac{wj\pi}{N} - \frac{\cos 0}{2} - \frac{\cos w\pi}{2} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N} \cos\frac{wj\pi}{N} &= \frac{1}{\sin\frac{w\pi}{2N}} \sum_{j=0}^{N} \sin\frac{w\pi}{2N} \cdot \cos\frac{wj\pi}{N} = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{w\pi}{2N}} \sum_{j=0}^{N} \sin\frac{(2j+1)w\pi}{2N} + \sin\frac{(1-2j)w\pi}{2N} = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{w\pi}{2N}} \sum_{j=0}^{N} -\sin\frac{(2j-1)w\pi}{2N} + \sin\frac{(2j+1)w\pi}{2N} = \\ &= \frac{\sin\frac{w\pi}{2N} + \sin\left(\frac{k\pi}{2N} + w\pi\right)}{2\sin\frac{w\pi}{2N}} = \begin{cases} 0, & \text{dla } w \text{ nieparzystych} \\ 1, & \text{dla } w \text{ parzystych} \end{cases} \end{aligned}$$

Wracając do (9) otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^{N}{}'' \cos\frac{wj\pi}{N} = \begin{cases} 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0, & \text{dla } w \text{ nieparzystych} \\ 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, & \text{dla } w \text{ parzystych} \end{cases}$$

□

Kombinację liniową wielomianów Czebyszewa możemy jawnie scałkować. Wystarczy znaleźć zależność między współczynnikami kombinacji liniowej a współczynnikami całki z tej kombinacji.

Poniższy lemat zostanie wykorzystany w twierdzeniu opisującym tę zależność.

Lemat 3.

$$\int T_k = \frac{1}{2}\Big(\frac{T_{k+1}}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k-1}\Big)\ ,\ k > 1$$

Dowód. Zastosujmy podstawienie $x = \cos t$

$$\int T_k(x)dx = -\int T_k(\cos t)\sin t dt = -\int \cos kt \sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int sin(-(k-1)t) + sin((k+1)t)dt = -\frac{1}{2}\int -sin((k-1)t) + sin((k+1)t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\cos(k+1)t}{k+1} - \frac{\cos(k-1)t}{k-1}) = \frac{1}{2}(\frac{T_{k+1}}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k-1})$$

□

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że y (kombinacja liniowa wielomianów Czebyszewa) zadana jest wzorem:*

$$y = \sum_{k=0}^{N-1}{}' a'_k T_k$$

Natomiast całka z y wzorem:

$$\int y = \sum_{k=0}^{N}{}' a_k T_k$$

Wtedy

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2k}(a'_{k-1} - a'_{k+1}), & \text{\textit{dla} } k = 1 \dots N-2 \\ \frac{1}{2k}a'_{k-1}, & \text{\textit{dla k=N-1, N}} \end{cases} \tag{10}$$

Dowód.

$$\int y = \int \sum_{k=0}^{N-1}{}' a'_k T_k = \frac{a'_0}{2}x + \frac{a'_1}{2}x^2 + \sum_{k=2}^{N-1} a'_k \int T_k =$$

$$= \frac{a'_0}{2}x + \frac{a'_1}{2}x^2 + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{a'_k}{2}(\frac{T_{k+1}}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k-1}) + C_1 =$$

$$= \frac{a'_0}{2}x + \frac{a'_1}{4}(2x^2 - 1) + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{a'_k}{2}(\frac{T_{k+1}}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k-1}) + C_2 =$$

$$\sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{2k}(a'_{k-1} - a'_{k+1})T_k + \frac{a'_{N-1}}{2N}T_N + \frac{a'_{N-2}}{2(N-1)}T_{N-1} + C = \sum_{k=0}^{N}{}' a_k T_k$$

□

5 Aproksymacja średniokwadratowa

Zajmiemy się szczególnym przypadkiem aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym $\{\cos\frac{k\pi}{N} : k = 0 \dots N\}$.

Można udowodnić, że z ustalonym iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle$ N–ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej dla funkcji f wyraża się wzorem:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\langle f, P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle} P_k \tag{11}$$

gdzie

$\{P_k\}$– zbiór wielomianów ortogonalnych z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

W przypadku aproksymacji dyskretnej na zbiorze $\{\cos\frac{k\pi}{N} : k = 0 \dots N\}$ wzór ten można uprościć, o czym mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4. *N–ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej dla funkcji f z iloczynem skalarnym (3) zadany jest wzorem*

$$W_N^* := \sum_{r=0}^{N}{}'' c_r T_r, \quad c_r := \frac{2}{N}\sum_{s=0}^{N}{}'' f(\cos\frac{s\pi}{N})\cos\frac{rs\pi}{N} \tag{12}$$

Dowód. Z (2) wiemy, że $\{T_k\}$ jest zbiorem wielomianów ortogonalnych dla iloczynu skalarnego (3). Zatem N–ty wielomian optymalny funkcji f w sensie normy średniokwadratowej zadany jest wzorem:

$$\sum_{r=0}^{N} \frac{\langle f, T_r\rangle}{\langle T_r, T_r\rangle} T_r$$

Korzystając ze wzoru (5) przekształcamy:

$$\sum_{r=0}^{N} \frac{\langle f, T_r\rangle}{\langle T_r, T_r\rangle} T_r = \sum_{r=0}^{N}{}'' \Big[\frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N}{}'' f(u_s) T_r(u_s)\Big] T_r$$

Stąd:

$$c_r = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N}{}'' f(u_s) T_r(u_s) = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N}{}'' f(\cos\frac{s\pi}{N}) T_r(\cos\frac{s\pi}{N}) =$$
$$= \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N}{}'' f(\cos\frac{s\pi}{N}) \cos\frac{rs\pi}{N}$$

□

6 Metoda Clenshawa-Nortona

Ideą metody jest wykorzystanie aproksymacji średniokwadratowej funkcji na zbiorze punktów $\{\cos\frac{k\pi}{N} : k = 0 \ldots N\}$ w iteracji Picarda.

Przypomnijmy, że (2) tworzony był ciąg funkcji $\{y_i\}$.

Za pomocą metody Clenshawa–Nortona będziemy tworzyć ciąg funkcji $\{\widetilde{y_i}\}$, taki że $\widetilde{y_i} \approx y_i$ dla każdego i.

Zmodyfikujmy iterację Picarda:
Przez $W_N^{(i-1)}$ oznaczmy N–ty wielomian optymalny dla funkcji $f(\widetilde{y}_{i-1}(x), x)$.
W równaniu (2) pod f podstawmy $W_N^{(i-1)}$. Wówczas równanie (2) przyjmuje postać:

$$\widetilde{y_i} = \eta + \int_{\xi}^{x} W_N^{(i-1)}(t)dt \tag{13}$$

Możemy przyjąć że, jeśli

$$\widetilde{y}_{i-1} \approx y_{i-1}$$

to

$$f(y_{i-1}(x), x) \approx f(\widetilde{y}_{i-1}(x), x) \approx W_N^{(i-1)}$$

zatem

$$\eta + \int_{\xi}^{x} W_N^{(i-1)}(t)dt \approx \eta + \int_{\xi}^{x} f(y_{i-1}(t), t)dt$$

więc

$$\widetilde{y_i} \approx y_i$$

Rozważmy sposób, w jaki będzie tworzony ciąg funkcji $\widetilde{y}_0, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \widetilde{y}_3, \ldots$

Cel :
Dla każdego i funkcja $\widetilde{y_i}$ będzie przedstawiona w postaci:

$$\widetilde{y_i} = \sum_{r=0}^{N+1}{}' A_r^{(i)} T_r \tag{14}$$

Początek iteracji:
Przedstawmy $\widetilde{y}_0 = y_0 = \eta$ jako kombinację liniową wielomianów Czebyszewa

$$\widetilde{y}_0 := \sum_{r=0}^{N+1}{}' A_r^{(0)} T_r$$

gdzie

$$A_0^{(0)} := 2\eta, \quad A_r^{(0)} := 0 \quad \text{dla } r > 0$$

Krok metody:
Pokażemy, że jeśli $\widetilde{y}_{i-1}$ ma postać (14), to możemy wykonać krok metody i przedstawić $\widetilde{y}_i$ również w takiej postaci.

Załóżmy że

$$\widetilde{y}_{i-1} = \sum_{r=0}^{N+1}{}' A_r^{(i-1)} T_r$$

Wyliczamy $f(\widetilde{y}_{i-1}(\cos\frac{k\pi}{N}), \cos\frac{k\pi}{N}) \quad k = 0 \ldots N$.

Znając wartości f w punktach $\{\cos\frac{k\pi}{N}\}$ możemy wyliczyć N–ty wielomian optymalny dla funkcji $f(\widetilde{y}_{i-1}(x), x)$ korzystając ze wzoru (12).
Mamy:

$$W_N^{(i-1)}(x) := \sum_{r=0}^{N}{}'' C_r^i T_r(x) \approx f(\widetilde{y}_{i-1}(x), x)$$

$$\sum_{r=0}^{N}{}'' C_r^{(i)} T_r = \sum_{r=0}^{N}{}' B_r^{(i)} T_r, \text{ gdzie } B_r^{(i)} = \begin{cases} C_r^{(i)}, & \text{dla } r < N \\ \frac{C_r^{(i)}}{2}, & \text{dla } r = N \end{cases}$$

Więc:

$$W_N^{(i-1)}(x) = \sum_{r=0}^{N}{}' B_r^{(i)} T_r(x) \approx f(\widetilde{y}_{i-1}(x), x)$$

Wyliczamy całkę z $W_N^{(i-1)}(x)$ korzystając ze wzoru (10):

$$F_i(x) := \Big(\int W_N^{(i-1)}(t)dt\Big)(x) = \Big(\int \sum_{r=0}^{N}{}' B_r^{(i)} T_r(t)dt\Big)(x) = C + \sum_{r=1}^{N+1} A_r^{(i)} T_r(x)$$

Rozpisując (13) otrzymujemy

$$\widetilde{y}_i(x) = \eta + \int_\xi^x W_N^{(i-1)}(t)dt = \eta + F_i(x) - F_i(\xi) =$$

$$= \sum_{r=1}^{N+1} A_r^{(i)} T_r(x) + \Big(\eta - \sum_{r=1}^{N+1} A_r^{(i)} T_r(\xi)\Big) = \sum_{r=0}^{N+1}{}' A_r^{(i)} T_r(x)$$

gdzie

$$A_0^{(i)} := 2\Big(\eta - \sum_{r=1}^{N+1} A_r^{(i)} T_r(\xi)\Big)$$

7 Testy

W przeprowadzanych testach dokładnością wyniku będziemy nazywać największy moduł różnicy między wartością poprawnego rozwiązania, a rozwiązaniem uzyskanym za pomocą metody Clenshawa-Nortona w punktach $\{-1 + \frac{2k}{M} : k = 0, 1 \ldots M\}$ dla $M = 1000$.

Badając jakość metody Clenshawa–Nortona warto zwrócić uwagę na następujące zagadnienia:

1. Wybór kryterium zapewniającego zadaną dokładność wyniku.
2. Dokładność wyniku w zależności od wyboru N - długości kombinacji liniowej wielomianów Czebyszewa, którymi aproksymujemy funkcję.
3. Dokładność wyniku w zależności od liczby wykonanych iteracji.

7.1 Przykłady równań różniczkowych

Testy będą przeprowadzane na wybranych przykładach równań różniczkowych:

1. $f(y,x) = \frac{5(y-1)}{x-2} - \frac{10x^4}{x-2}$, $\quad y(1) = 2$, $\quad$ **Rozwiązanie:** $y(x) = x^5 + 1$
2. $g(y,x) = y^2$, $\quad y(-1) = \frac{2}{5}$, $\quad$ **Rozwiązanie:** $y(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}-x}$
3. $h(y,x) = 2\cos^2 x + y \tan x$, $\quad y(0) = 1$, $\quad$ **Rozwiązanie:** $y(x) = 2\frac{\sin x}{\cos x} - 2\frac{\sin^3 x}{3\cos x} + \frac{1}{\cos x}$
4. $p(y,x) = -y$, $\quad y(0) = 1$, $\quad$ **Rozwiązanie:** $y = e^{-x}$

Równania zostały wybrane tak, aby sprawdzić jak najwięcej typów równań różniczkowych.

7.2 Kryterium dokładności wyniku

W metodzie Clenshawa-Nortona trudno jednoznacznie stwierdzić, kiedy uzyskany wynik staje się dokładny. Dlatego warto stworzyć heurystykę na tyle dobrze sprawdzającą sie w praktyce, aby dokładność wyniku była proporcjonalna do dokładności żądanej w heurystyce.

Jedną z takich heurystyk może być kryterium podobne do warunku Cauchy'ego zbieżności funkcji.
Intuicyjnie: Jeśli od pewnego momentu kolejne iteracje powodują niewielkie zmiany funkcji $\widetilde{y}_i$, to znaczy, że uzyskaliśmy już dokładny wynik.
Ściśle:
Załóżmy, że

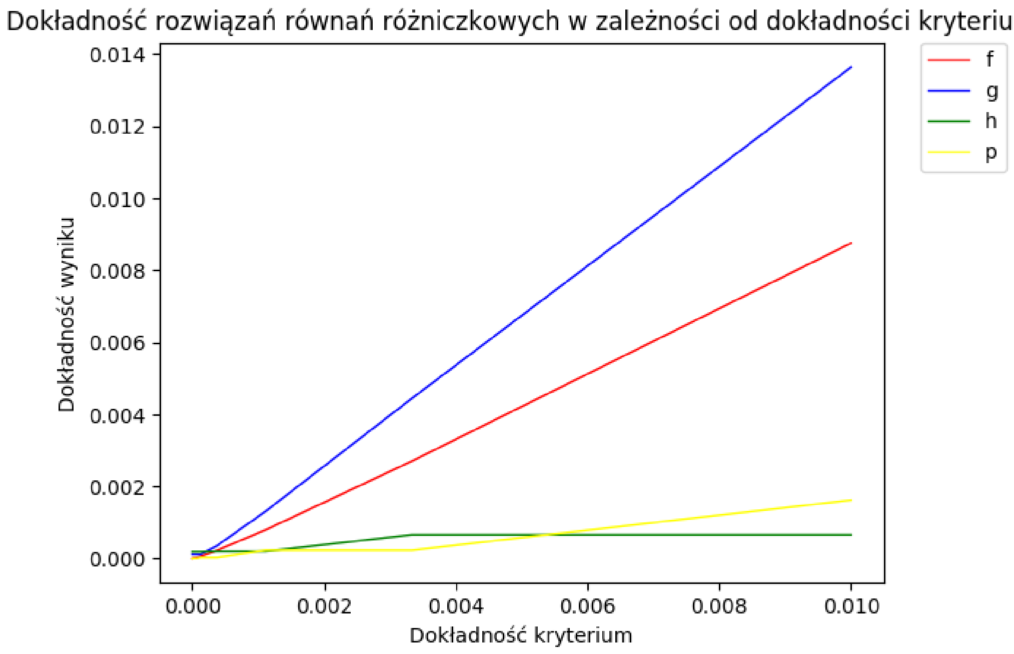
$$\widetilde{y}_i = \sum_{r=0}^{N+1}{}' A_r^{(i)} T_r(x), \quad \widetilde{y}_{i+1} = \sum_{r=0}^{N+1}{}' A_r^{(i+1)} T_r(x)$$

Ustalmy pewien $\varepsilon > 0$. (Wartość ε będziemy nazywać dokładnością kryterium).
Jeśli

$$\max_{0 \leqslant r \leqslant N} |A_r^{(i+1)} - A_r^{(i)}| < \varepsilon$$

to uznajemy, że uzyskaliśmy wynik z dokładnością $C \cdot \varepsilon$ dla pewnego C.

Sprawdźmy jak powyższa heurystyka sprawdza się w praktyce



Rzeczywiście dokładność wyniku dla każdego równania jest proporcjonalna do dokładności kryterium. Co więcej, w każdym przypadku dokładność wyniku nie przekracza dwukrotności dokładności kryterium.

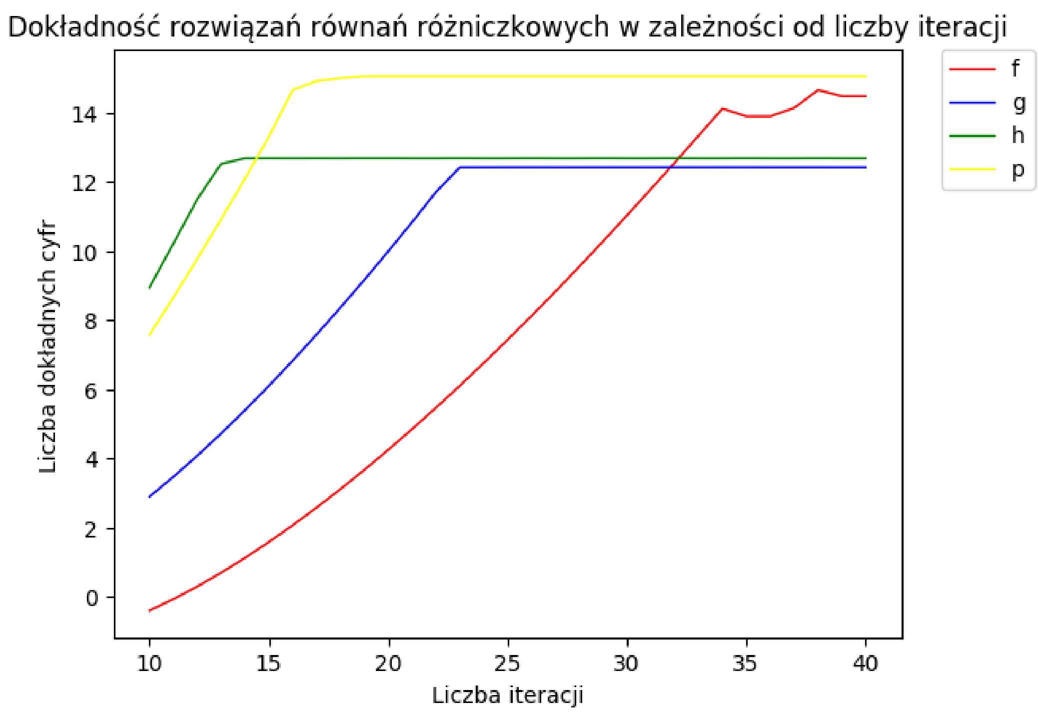
7.3 Dokładność wyniku w zależności od N oraz liczby iteracji

Można się spodziewać, że im większa liczba iteracji bądź im większe N, tym wynik będzie dokładniejszy.

Zwiększając N otrzymujemy lepsze przybliżenia funkcji przy aproksymacji, z kolei wyniki kolejnych iteracji powinny być coraz bliższe poprawnego wyniku, o ile metoda jest zbieżna.

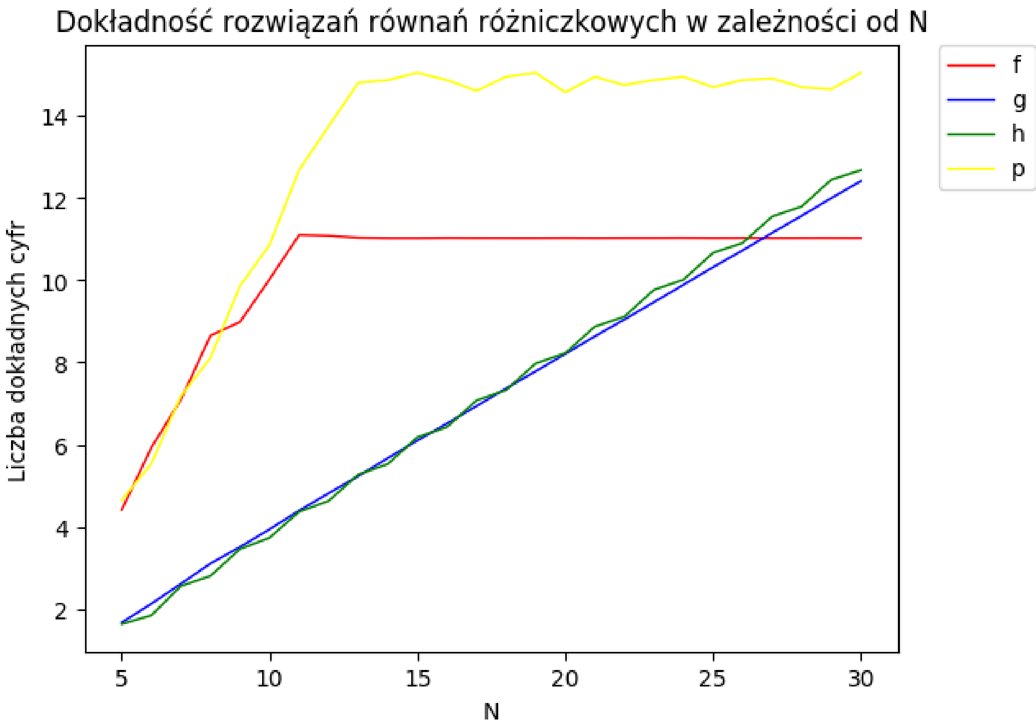
Liczbę dokładnych cyfr dziesiętnych wyniku możemy szacować przez $-log_{10}m$, gdzie m jest dokładnością wyniku.

Zbadajmy liczbę dokładnych cyfr dziesiętnych w zależności od liczby iteracji przy ustalonym $N = 30$.



Można zauważyć, że zależność jest liniowa i stabilizuje się na poziomie 12-14 dokładnych cyfr dziesiętnych. Jednak w zależności od równania, potrzeba do tego od 15 do aż 35 iteracji.

Zbadajmy liczbę dokładnych cyfr dziesiętnych w zależności od wartości N przy ustalonej liczbie 30 iteracji.

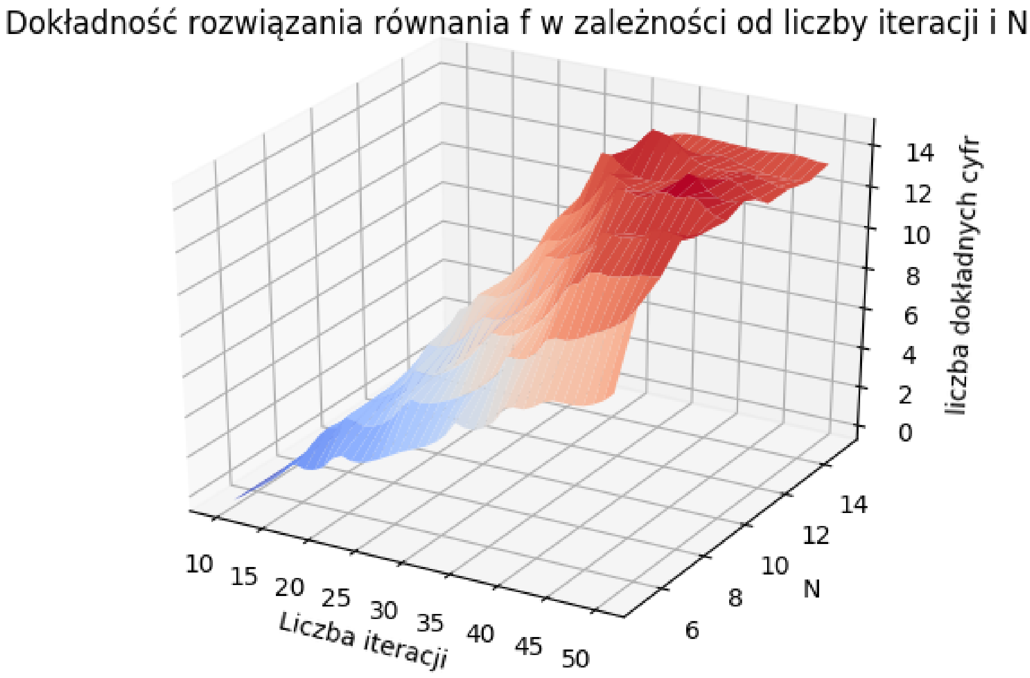


Można zaobserwować podobne zachowanie, jak w przypadku zależności liczby dokładnych cyfr w zależności od liczby iteracji.

Oznaczmy $D_\phi(N, R)$ jako liczbę dokładnych cyfr dziesiętnych rozwiązania równania ϕ w zależności od N oraz liczby iteracji (R) .
Na podstawie powyższych obserwacji możemy przypuszczać że

$$D_\phi(N, R) = aN + bR, \text{ dla pewnych } a, b \in \mathbb{R}$$

Sprawdźmy powyższą hipotezę na przykładzie równania f.



Wykres można przybliżyć płaszczyzną, co oznacza, że hipoteza rzeczywiście może być prawdziwa.

8 Równania wyższych rzędów

Rozważmy równanie różniczkowe postaci

$$y^{(k)} = f(y^{(k-1)}, y^{(k-2)}, \dots, y, x), \quad y^{(k-1)}(\xi_{k-1}) = \eta_{k-1}, \dots y(\xi_0) = \eta_0 \tag{15}$$

Rzędem równania (15) nazywamy wartość k.

Za pomocą metody Clenshawa-Nortona możemy rozwiązywać równania pierwszego rzędu. Można jednak uogólnić tę metodę, aby rozwiązywać równania wyższych rzędów.

Rozważmy ponownie krok iteracji:

W metodzie Clenshawa-Nortona aproksymujemy pochodną funkcji (y'), a następnie wyliczamy funkcję (y) całkując pochodną oraz korzystając z warunku początkowego. W każdym kroku funkcja y jest przedstawiona jako kombinacja liniowa wielomianów Czebyszewa.

W uogólnionej metodzie będziemy aproksymować najwyższą pochodną (y^k), a niższe pochodne będziemy wyliczać całkując pochodną o jeden wyższą i korzystając z warunków początkowych. Analogicznie, w każdym kroku funkcje $y^{(i)}$ będą przedstawione jako kombinacje liniowe wielomianów Czebyszewa. Korzystając ze wzoru (10) możemy uzyskać:

$$y^{(i)} = \int y^{(i+1)} = \sum_{r=1}^{N+k-i} A_{r_i} T_r + C$$

Wyraz wolny wyliczamy z warunku początkowego:

$$y^{(i)}(\xi_i) = \eta_i$$

$$C = \eta_i - \sum_{r=1}^{N+k-i} A_{r_i} T_r(\xi_i)$$

Podstawmy $A_{0_i} := 2C$.
Wówczas:

$$y^{(i)} = {\sum_{r=0}^{N+k-i}}' A_{r_i} T_r$$

8.1 Testy

W metodzie Clenshawa-Nortona tworzymy ciąg $\widetilde{y}_i$, którego każdy element jest bliski y_i. W każdym kroku zakładamy, że przybliżenie jest na tyle dokładne, że nie zaburza oryginalnej iteracji Picarda. W uogólnionym przypadku w każdym kroku zakładamy tak nie tylko dla y_i, ale również dla jej $k-1$ pochodnych. Można się więc spodziewać, że im wyższy będzie rząd równania, dla którego szukamy rozwiązania, tym zbieżność metody będzie wolniejsza.

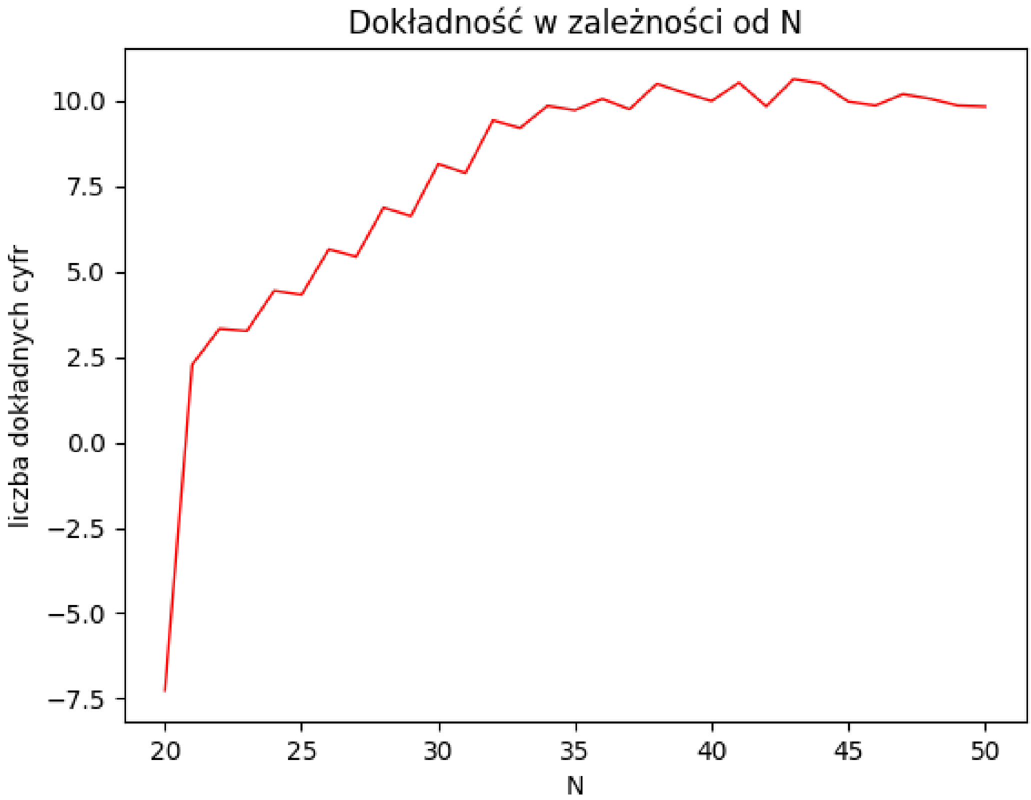
Rozważmy równanie ruchu harmonicznego:

$$f(y', y, x) = -\omega^2 y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

Rozwiązaniem równania jest:

$$y(x) = \cos \omega x + \frac{1}{2\omega} \sin \omega x$$

Sprawdźmy dokładność rozwiązań tego równania dla $\omega = 15$ po 500 iteracjach w zależności od N.



Dla $N \leqslant 20$ metoda nie jest zbieżna (błąd metody to około 10^7). Warto zauważyć, że pomimo dużej liczby iteracji, dokładność wyników dla $N \approx 25$ jest mała – od 3 do 5 dokładnych cyfr dziesiętnych. Dla dużych wartości N metoda uzyskuje wynik z dokładnością do 10 cyfr dziesiętnych.

9 Podsumowanie

Dzięki wykorzystaniu aproksymacji średniokwadratowej funkcji na zbiorze dyskretnym możemy w łatwy sposób przeprowadzić iterację Picarda ze względu na proste wzory na całkowanie wielomianów Czebyszewa. Pozwala to na rozwiązywanie skomplikowanych równań różniczkowych, w szczególności nieliniowych oraz wyższych rzędów.

Metoda Clenshawa–Nortona znajduje wielomian przybliżający rozwiązanie równania różniczkowego na przedziale $[-1, 1]$, więc za pomocą przekształceń afinicznych funkcji można przybliżać rozwiązanie na dowolnym przedziale.

W przeciwieństwie do wielu metod rozwiązywania równań różniczkowych, metoda Clenshawa-Nortona znajduje wynik jako funkcję, a nie zbiór wartości w wybranych punktach.

Niestety metoda w ogólności nie ma gwarancji zbieżności. Jednak możemy za jej pomocą uzyskać dokładne wyniki dla wielu istotnych w praktyce równań.

Doświadczenia wykazały, że brak zbieżności może być spowodowany wyborem zbyt małej wartości N. Jednak przy użyciu arytmetyki większej precyzji można skutecznie przeprowadzić iteracje dla znacznie większego N.

Podsumowując, metoda Clenshawa-Nortona stanowi bardzo silne narzędzie w dziedzinie rozwiązywania równań różniczkowych.

Literatura

[1] C. W. Clenshaw, H. J. Norton. *The solution of nonlinear ordinary differential equation in Chebyshev series.*

[2] M. A. Ahmed. *A characterization of the convergence of Picard iteration to a fixed point for a continuous mapping and an application.* Assiut University, 2005.

[3] R. Szwarc *Analiza matematyczna ISIM I.*