Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M 4

25 października 2017 r.

M4.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania pierwiastka x^- (notacja z wykładu) równania kwadratowego równania

(1) $$x^2 + 2px + q = 0 \qquad (p^2 - q > 0, \quad p, q \neq 0).$$

Wskazówka: Rozpatrzyć funkcję

$$f(p,q) \coloneqq p - \sqrt{p^2 - q},$$

a następnie zbadać uwarunkowanie zadania obliczania jej wartości. Dla funkcji dwuargumentowej mówimy o dwóch wskaźnikach uwarunkowania obliczania jej wartości; pierwszy uwzględnia zmianę argumentu p, a drugi — argumentu q. Niech δ_p i δ_q oznaczają względne zmiany argumentów p i q. Następnie wystarczy skorzystać ze wzoru Taylora

$$f(p(1+\delta_p), q(1+\delta_q)) \approx f(p,q) + p\delta_p f'_p(p,q) + q\delta_q f'_q(p,q).$$

Przy badaniu błędu względnego otrzymanej wartości funkcji, rozpatrzyć osobno wielkości stojące przy δ_p i δ_q. W ten sposób otrzymamy odpowiednio wskaźniki uwarunkowania ze względu na zmienną p i q:

(2) $$\mathrm{cond}_p = -\frac{1}{\sqrt{1 - q/p^2}}, \qquad \mathrm{cond}_q = -\frac{1 + \sqrt{1 - q/p^2}}{2\sqrt{1 - q/p^2}}.$$

M4.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wywnioskować z podanego na wykładzie dowodu, że algorytm obliczania pierwiastka x^- równania (1) **nie** jest numerycznie poprawny.

Wskazówka: Powołać się na uwarunkowanie (jakie?) zadania obliczania tego pierwiastka (zob. (2)) dla złośliwych danych (jakich?), które zostały podane na wykładzie (co? gdzie? i kiedy?).

M4.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Uzasadnić poprawność (matematyczną, a nie numeryczną) następującego schematu Hornera zastosowanego do obliczenia wartości $p(z)$ i $p'(z)$ dla danego wielomianu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$.

— Niech $\alpha \coloneqq a_n$ oraz $\beta \coloneqq 0$.
— Kolejno dla $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ wykonaj
  — $\beta \coloneqq \alpha + z\beta$
  — $\alpha \coloneqq a_k + z\alpha$
— Wynik to $p(z) = \alpha$, $p'(z) = \beta$.

M4.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podać przykład funkcji $f \in C[a,b]$ dla której metoda regula-falsi jest zbieżna liniowo.

M4.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Które z ciągów:

$$\frac{1}{n^2}, \quad \frac{1}{2^{2^n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \frac{1}{e^n}, \quad \frac{1}{n^n}$$

są zbieżne kwadratowo? Odpowiedź uzasadnij.

M4.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć warunki dotyczące r, które gwarantują, że wzór iteracyjny

$$x_{n+1} = x_n - rf(x_n)$$

daje ciąg zbieżny liniowo do zera funkcji f, jeśli punkt początkowy leży blisko tego zera.

M4.7. $\boxed{\textsf{1 punkt}}$ Wyprowadzić wzory na metodę Newtona w dziedzinie liczb zespolonych dla funkcji

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

Załóżmy, że przybliżenie początkowe, to liczba zespolona $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, gdzie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Wyprowadzić wzory na kolejne przybliżenia $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, w których wykonywane są operacje arytmetyczne tylko na liczbach rzeczywistych.

M4.8. $\boxed{\textsf{1 punkt}}$ Rozważmy metodę iteracyjną określoną przez

$$F(x) = x + f(x)g(x),$$

gdzie $f(\alpha) = 0$ oraz $f'(\alpha) \neq 0$. Jakie warunki powinna spełniać funkcja g, aby dla dostatecznie bliskich wartości początkowych, metoda była zbieżna sześciennie do α?

17 października 2017
Rafał Nowak