Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (część licencjacka)
17 lutego 2010

Aby zdać tę część egzaminu (być dopuszczonym do części zasadniczej) trzeba uzyskać co najmniej 10 punktów. Egzamin trwa 75 minut.

Zadanie 1 (1 punkt). Jeśli istnieje takie podstawienie $[p/\varphi_1,\ q/\varphi_2,\ r/\varphi_3]$, dla którego formuła $((p \vee q) \wedge \neg r)[p/\varphi_1,\ q/\varphi_2,\ r/\varphi_3]$ jest sprzeczna, to w prostokąt poniżej wpisz dowolne takie podstawienie. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE".

Zadanie 2 (1 punkt). Jeśli istnieje formuła równoważna formule $p \Leftrightarrow q$ i zbudowana tylko ze zmiennych p, q oraz spójników logicznych $\vee, \neg$ i nawiasów, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką formułę. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE".

Zadanie 3 (1 punkt). Jeśli formuły $p \wedge (q \Rightarrow r)$ oraz $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ są równoważne to w prostokąt poniżej wpisz słowo „RÓWNOWAŻNE". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 4 (1 punkt). Rozważmy relacje $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times A$. W prostokąt poniżej wpisz formułę, która mówi, że relacja RS *nie jest* zwrotna. Formuła ta nie może zawierać negacji (ale może zawierać symbol $\notin$) i nie może zawierać symbolu RS (ale może zawierac symbole R oraz S).

Zadanie 5 (1 punkt). Jeśli dla wszystkich formuł φ i wszystkich formuł ψ logiki pierwszego rzędu formuła $(\forall x\,(\varphi \Rightarrow \psi)) \Leftrightarrow ((\forall x\,\varphi) \Rightarrow (\forall x\,\psi))$ jest tautologią to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAUTOLOGIA". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 6 (1 punkt). Jeśli inkluzja $(A\cap B)\cup C\subseteq(A\cap(B\setminus C))\cup(C\setminus B)\cup(B\cap(C\setminus A))$ zachodzi dla dowolnych zbiorów A, B, i C, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 7 (1 punkt). Jeśli inkluzja $\bigcup_{t\in T}(A_t\setminus B_t)\subseteq\bigcup_{t\in T}A_t\setminus\bigcup_{t\in T}B_t$ zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ i $\{B_t\}_{t\in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK”. W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 8 (1 punkt). Dla $s,t\in\mathbb{R}$ niech $[s,t]$ oznacza przedział domknięty od s do t w zbiorze liczb rzeczywistych. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość zbioru $\bigcup_{s\in[0,1]}\bigcap_{t\in[2,3]}[s,t]$, tzn. wpisz wyrażenie oznaczające ten sam zbiór i nie zawierające symboli $\cap,\cup,\wedge,\vee,\exists,\forall$.

Zadanie 9 (1 punkt). Niech $R=\{\langle 2n,n\rangle\mid n\in\mathbb{N}\}$. W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle n,m\rangle\mid\varphi\}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

Zadanie 10 (1 punkt). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathcal{P}(\mathbb{N}^{\{0,1\}})$	$\mathcal{P}(\{a,b\}\times\{3,4,5\})$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{Q})$	$\{2010\}^{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$	$(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$\{0,1\}^{\{a,b,c\}}$

Imię i nazwisko:

Zadanie 11 (1 punkt). Jeśli istnieje bijekcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times [0, 2)) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, to w prostokąt poniżej wpisz definicję dowolnej takiej bijekcji. W przeciwnym razie wpisz słowo „NIE". Zbiór $[0, 2)$ to oczywiście przedział lewostronnie domknięty od 0 do 2 w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 12 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz dowolny przykład relacji równoważności na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$, która ma dokładnie cztery klasy abstrakcji.

Zadanie 13 (1 punkt). Jeśli funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadana wzorem $f(X) = X \cup \{2x + 1 \mid x \in X\}$ ma najmniejszy punkt stały, to w prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość tego punktu stałego. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 14 (1 punkt). W rodzinie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ definiujemy porządek $\preceq$ wzorem $X \preceq Y \overset{\text{df}}{\iff} X = Y \vee \min(X \dot{-} Y) \in Y$, gdzie $\dot{-}$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów, a $\min(A)$ jest najmniejszą w sensie naturalnego porządku liczbą w zbiorze A.

Niech $A_i = \{i\}$ oraz $X = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. W prostokąt poniżej wpisz wyliczoną wartość kresu górnego zbioru X lub słowo „NIE", jeśli ten kres nie istnieje.

Zadanie 15 (1 punkt). Jeśli zbiory uporządkowane $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 16 (1 punkt). Jeśli zbiory uporządkowane $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ i $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \supseteq \rangle$ są izomorficzne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny izomorfizm tych porządków. W przeciwnym przypadku wpisz uzasadnienie, dlaczego taki izomorfizm nie istnieje.

Zadanie 17 (1 punkt). Jeśli zbiór klauzul $\{\neg q \vee p,\ \neg r \vee \neg s,\ q \vee s,\ r \vee q,\ \neg q \vee \neg p\}$ jest sprzeczny, to w prostokąt poniżej wpisz rezolucyjny dowód sprzeczności tego zbioru. W przeciwnym przypadku wpisz wartościowanie spełniające ten zbiór.

Zadanie 18 (1 punkt). Jeśli zbiór uporządkowany $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$ jest dobrze ufundowany (czyli regularny), to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 19 (1 punkt). Jeśli termy $f(x, g(y), u)$ i $f(f(y, z), z, g(x))$ są unifikowalne, to w prostokąt poniżej wpisz dowolny unifikator tych termów. W przeciwnym przypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 20 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz sformułowanie (dowolnej wersji) zasady indukcji.

Imię i nazwisko:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy (część zasadnicza)

17 lutego 2009

Za każde z poniższych zadań można otrzymać od -2 do 20 punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.

Zadanie 21. Niech $R \subseteq A \times A$ oraz $S \subseteq A/_R \times A/_R$ będą relacjami równoważności. Zdefiniujmy relację $T \subseteq A \times A$ wzorem

$$T = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid \langle [x]_R, [y]_R\rangle \in S\}.$$

Udowodnij, że T jest relacją równoważności oraz że podział zbioru A na klasy abstrakcji relacji R jest drobniejszy od podziału zbioru A na klasy abstrakcji relacji T.

Zadanie 22. Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że zbiory $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $\{a, b\}^{\mathbb{N}\times\{0,1\}}$ są równoliczne.

Zadanie 23. Rozważmy następujący porządek $\preceq$ w rodzinie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Dla zbiorów $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zachodzi $X \preceq Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$X = Y \text{ lub } \min(X \dot{-} Y) \in Y,$$

gdzie $\dot{-}$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów, a $\min(A)$ jest najmniejszą w sensie naturalnego porządku liczbą w zbiorze A. Niech $A_i = \{i\}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$.

(a) Czy rodzina zbiorów $\{A_i \mid i \geq 2010\}$ ma w $\langle\mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq\rangle$ kres górny? Uzasadnij odpowiedź.

(b) Czy rodzina zbiorów $\{A_i \mid i \geq 2010\}$ ma w $\langle\mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq\rangle$ kres dolny? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 24. Udowodnij, że formuła

$$\exists x \exists y (R(x) \Rightarrow S(x)) \Rightarrow (R(y) \Rightarrow S(f(x, y)))$$

jest tautologią logiki I rzędu.

Student name:

Logic for Computer Science

Make-up exam (bachelor part)
February 17, 2010

This part lasts 75 minutes. To pass it one needs at least 10 points.

Task 1 (1 point). If there exists a substitution $[p/\varphi_1,\ \ q/\varphi_2,\ \ r/\varphi_3]$ such that the formula $((p \vee q) \wedge \neg r)[p/\varphi_1,\ q/\varphi_2,\ r/\varphi_3]$ is a contradiction, then in the box below write any such substitution. Otherwise write the word "NO".

Task 2 (1 point). If there exists a formula equivalent to $p \Leftrightarrow q$ and built only from variables p, q and logical connectives $\vee, \neg$ and brackets, then in the box below write any such formula. Otherwise write the word "NO".

Task 3 (1 point). If the formulas $p \wedge (q \Rightarrow r)$ and $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ are equivalent then in the box below write the word "EQUIVALENT". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 4 (1 point). Consider relations $R \subseteq A \times B$ and $S \subseteq B \times A$. In the box below write a formula of first-order logic that says that the relation RS *is not* reflexive. The formula must not contain negation symbol (but it may contain symbol $\notin$) and must not contain the composition symbol RS (but it may contain symbols R and S).

Task 5 (1 point). If the formula $(\forall x\, (\varphi \Rightarrow \psi)) \Leftrightarrow ((\forall x\, \varphi) \Rightarrow (\forall x\, \psi))$ is a tautology for all formulas φ and ψ of first-order logic then in the box below write the word "TAUTOLOGY". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 6 (1 point). If the inclusion $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cap (B \setminus C)) \cup (C \setminus B) \cup (B \cap (C \setminus A))$ is true for all sets A, B, and C, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 7 (1 point). If the inclusion $\bigcup_{t \in T} (A_t \setminus B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \setminus \bigcup_{t \in T} B_t$ is true for all indexed families of sets $\{A_t\}_{t \in T}$ and $\{B_t\}_{t \in T}$, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 8 (1 point). For $s, t \in \mathbb{R}$ let $[s, t]$ be the closed interval from s to t in the set of real numbers. In the box below write the value of the set $\bigcup_{s \in [0,1]} \bigcap_{t \in [2,3]} [s, t]$, that is, write an expression that denotes the same set and contains no symbols $\cap, \cup, \wedge, \vee, \exists, \forall$.

Task 9 (1 point). Let $R = \{\langle 2n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. In the box below write a formula φ such that $\{\langle n, m \rangle \mid \varphi\}$ is the transitive closure of the relation R.

Task 10 (1 point). Write in the empty fields of the table below the cardinalities of the respective sets.

$\mathcal{P}(\mathbb{N}^{\{0,1\}})$	$\mathcal{P}(\{a, b\} \times \{3, 4, 5\})$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q})$	$\{2010\}^{\mathbb{R}}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$\{0, 1\}^{\{a,b,c\}}$

Student name:

Task 11 (1 point). If there exists a bijection $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times [0, 2)) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, then in the box below write an expression defining any such bijection. Otherwise write the word "NO". Here $[0, 2)$ is the left-closed interval from 0 to 2 in the set of real numbers.

Task 12 (1 point). In the box below write any example of an equivalence relation on the set of natural numbers $\mathbb{N}$ with exactly four equivalence classes.

Task 13 (1 point). If the function $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ defined by $f(X) = \{2x+1 \mid x \in X\}$ has the least fixed point then in the box below write the value of this least fixed point. Otherwise write the word "NO".

Task 14 (1 point). Consider the order $\preceq$ on the family $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ of all subsets of the set of natural numbers defined by $X \preceq Y \overset{\text{df}}{\iff} X = Y \vee \min(X \dot{-} Y) \in Y$, where $\dot{-}$ is the symmetric difference of sets and $\min(A)$ is the least number in the set A.Let $A_i = \{i\}$ and $X = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. In the box below write the value of the least upper bound of the set X, or the word "NO" if this bound does not exist.

Task 15 (1 point). If the ordered sets $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ and $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$ are isomorphic, then in the box below write any isomorphism of these orders. Otherwise write a justification why such an isomorphism does not exist.

Task 16 (1 point). If the ordered sets $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ and $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \supseteq \rangle$ are isomorphic, then in the box below write any isomorphism of these orders. Otherwise write a justification why such an isomprphism does not exist.

Task 17 (1 point). If the set of clauses $\{\neg q \vee p,\ \neg r \vee \neg s,\ q \vee s,\ r \vee q,\ \neg q \vee \neg p\}$ is inconsistent then in the box below write a resolution proof of inconsistency of this set. Otherwise write a valuation satisfying this set.

Task 18 (1 point). If the ordered set $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{lex} \rangle$ is well-founded, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Task 19 (1 point). If the terms $f(x, g(y), u)$ and $f(f(y, z), z, g(x))$ are unifiable, then in the box below write any unifier of these terms. Otherwise write the word "NO".

Task 20 (1 point). In the box below write a formulation of (any version of) the induction principle.

Student name:

Solutions returned:

Logic for Computer Science

Make-up exam (main part)

February 17, 2010

Each of the task below is scored from -2 to 20 points. Empty solutions are scored with 0 points.

Task 21. Let $R \subseteq A \times A$ and $S \subseteq A/_R \times A/_R$ be equivalence relations. We define relation $T \subseteq A \times A$ by

$$T = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid \langle [x]_R, [y]_R\rangle \in S\}.$$

Prove that T is an equivalence relation and that the partition of the set A into equivalence classes of the relation R is finer than the partition of the set A into equivalence classes of the relation T.

Task 22. By constructing an appropriate bijection prove that the sets $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ and $\{a, b\}^{\mathbb{N}\times\{0,1\}}$ are equinumerous.

Task 23. Consider the order $\preceq$ on the family $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ of all subsets of the set of natural numbers defined by $X \preceq Y \overset{\mathrm{df}}{\iff} X = Y \vee \min(X \dot{-} Y) \in Y$, where $\dot{-}$ is the symmetric difference of sets and $\min(A)$ is the least number in the set A. Let $A_i = \{i\}$ for all $i \in \mathbb{N}$.

(a) Does the family $\{A_i \mid i \geq 2010\}$ have a least upper bound in the ordered set $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq\rangle$? Justify your answer.

(b) Does the family $\{A_i \mid i \geq 2010\}$ have a greatest lower bound in the ordered set $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \preceq\rangle$? Justify your answer.

Task 24. Prove that the formula

$$\exists x \exists y (R(x) \Rightarrow S(x)) \Rightarrow (R(y) \Rightarrow S(f(x, y)))$$

is a tautology of the first-order logic.