Algebra II (ISIM), lista 2 (19.10.2017).

p oznacza liczbę pierwszą, F, G, H sa grupami.

Teoria: Podgrupy $\langle a\rangle$ i $\langle A\rangle$ dla $a \in G, A \subseteq G$. Rząd $ord(a)$ elementu w grupie. Grupy cykliczne: definicja, wyliczenie. Warstwy podgrupy. $|G| = [G : K] \cdot |K|$. Twierdzenie Lagrange'a: rząd podgrupy dzieli rząd grupy. Rząd elementu grupy dzieli rząd grupy.

Homomorfizmy grup: jądro, obraz, własności. Dzielnik normalny (podgrupa normalna). Grupa ilorazowa. Zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie grup.

1. $^-$ Załóżmy, że $f : G \to H$ jest homomorfizmem grup Udowodnic, że
   (a) $f(e_G) = e_H$.
   (b) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
   (c) $Ker(f) < G,\ Im(f) < H$.

2. (Małe tw. Fermata) Załóżmy, że liczba całkowita n nie jest podzielna przez p. Udowodnić, że $p|n^{p-1}-1$ (wsk: sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $n \in \mathbb{Z}_p^*$).

3. (a) W grupie $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot_p)$ obliczyć iloczyn wszystkich elementów.
   (b) Udowodnić twierdzenie Wilsona: $p|(p-1)! + 1$.

4. Załóżmy, że $H < G$ oraz $[G : H] = 2$. Udowodnić, że $H \lhd G$.

5. Załóżmy, że $Y \subseteq X$. Udowodnić, że $(\mathcal{P}(X), \triangle)/(\mathcal{P}(Y), \triangle) \cong (\mathcal{P}(X \setminus Y), \triangle)$.

6. (Twierdzenie o faktoryzacji homomorfizmu grup). załóżmy, że $N \lhd G$ oraz $j : G \to G/N$ jest homomorfizmem ilorazowym. Załóżmy, że $f : G \to H$ jest homomorfizmem grup. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) Istnieje homomorfizm $\bar{f} : G/N \to H$ taki, że $f = \bar{f} \circ j$.
   (b) $N < Ker(f)$.

7. Załóżmy, że $F \lhd G,\ H < G$. Udowodnic, że:
   (a) $FH < G$ oraz $F \lhd FH$.
   (b) $F \cap H \lhd H$.
   (c) $H/(H \cap F) \cong (FH)/F$.

8. Załóżmy, że $F < H \lhd G$ oraz $F \lhd G$. Udowodnić, że $G/H \cong (G/F)/(H/F)$. (wsk. do tego zadania i zadania poprzedniego (c): zastosować odpowiednio twierdzenie o faktoryzacji).

9. * Załóżmy, że H jest podgrupą skończonego indeksu w G. Udowodnić, że istnieje podgrupa $N < H$ skończonego indeksu w G, normalna w G.

10. Niech $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} < (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
    (a) Określić epimorfizm grup $f : (\mathbb{R}, +) \to S$ taki, że $Ker(f) = \mathbb{Z}$.
    (b) Udowodnić, że grupa ilorazowa $(\mathbb{Q}, +)/(\mathbb{Z}, +)$ jest izomorficzna z grupą wszystkich zespolonych pierwiastków z jedności.
    (c) W grupie $(\mathbb{R}, +)/(\mathbb{Z}, +)$ wskazać elementy (1) rzędu nieskończoność (jakikolwiek) i (2) rzędu 5 (wszystkie).