Imię i nazwisko:

Logika dla informatyków

Egzamin połówkowy (część licencjacka)

4 grudnia 2010

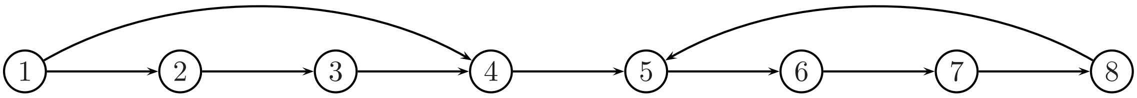
Zadanie 1 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz formułę w dysjunkcyjnej postaci normalnej równoważną formule $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

Zadanie 2 (1 punkt). W prostokąt poniżej wpisz formułę z trzema zmiennymi wolnymi x, y, z, która (interpretowana w zbiorze liczb naturalnych) mówi, że x jest największym wspólnym dzielnikiem liczb y i z.

Zadanie 3 (1 punkt). Jeśli istnieją takie zbiory A, B i C, że $A \setminus B = C$ oraz $A \neq (B \cup C)$, to w prostokąt poniżej wpisz przykład takich trzech zbiorów. W przeciwnym wypadku wpisz słowo „NIE".

Zadanie 4 (1 punkt). Jeśli inkluzja $\bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{t \in T} B_t$ zachodzi dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ i $\{B_t\}_{t \in T}$, to w prostokąt poniżej wpisz słowo „TAK". W przeciwnym przypadku wpisz odpowiedni kontrprzykład.

Zadanie 5 (1 punkt). Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Rozważmy relację $R \subseteq A \times A$, której graf jest przedstawiony na rysunku niżej (strzałka od wierzchołka x do wierzchołka y oznacza, że $\langle x, y \rangle \in R$).



W prostokąt poniżej wpisz taką formułę φ, że $\{\langle x, y \rangle \mid \varphi\}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

Zadanie 6 (1 punkt). Jeśli istnieje bijekcja $f : [0, 1]^{\mathbb{N}} \to [2, 4]^{\mathbb{P}}$, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką bijekcję. W przeciwnym wypadku wpisz słowo „NIE”. Tutaj $[a, b]$ oznacza domknięty przedział od a do b w zbiorze liczb rzeczywistych a $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych.

Zadanie 7 (1 punkt). Jeśli istnieje taka relacja równoważności w zbiorze liczb naturalnych, której wszystkie klasy abstrakcji są dokładnie dwuelementowe, to w prostokąt poniżej wpisz dowolną taką relację. W przeciwnym wypadku wpisz słowo „NIE”.

Zadanie 8 (1 punkt). Wpisz w puste pola poniższej tabelki moce odpowiednich zbiorów.

$\mathbb{Q}^{\{a,b\}}$	$\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\}$	$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \{0, 1\})$	$\{2010\}^{\mathbb{Q}}$	$(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$	$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$	$\{0, 1, 2\}^{\{a,b\}}$

Imię i nazwisko:

Oddane zadania:

Logika dla informatyków

Egzamin połówkowy (część zasadnicza)

4 grudnia 2010

Każde z poniższych zadań będzie oceniane w skali od -2 do podanej przy zadaniu liczby punktów. Osoba, która nie rozpoczęła rozwiązywać zadania otrzymuje za to zadanie 0 punktów.

Zadanie 9 (10 punktów). Rozważmy formuły zbudowane ze zmiennych p_1, p_2, p_3, p_4, spójników $\top, \bot, \Leftrightarrow$ oraz nawiasów. Udowodnij, że każda taka formuła jest spełniona przez 0, 8 lub 16 wartościowań zmiennych $p_1, \ldots, p_4$.
Wskazówka: Spójnik $\Leftrightarrow$ jest łączny i przemienny.

Zadanie 10 (10 punktów). Niech R i S będą dowolnymi relacjami równoważności na zbiorze A. Udowodnij, że RS jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy $RS = SR$.

Zadanie 11 (12 punktów). Rozważmy relację równoważności $\sim$ na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zdefiniowaną wzorem

$$f \sim g \overset{\text{df}}{\iff} f(\mathbb{N}) = g(\mathbb{N})$$

gdzie $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ a $f(\mathbb{N})$ oznacza obraz zbioru $\mathbb{N}$ przez funkcję f.

(a) Podaj moc zbioru klas abstrakcji relacji $\sim$.

(b) Czy istnieje taka funkcja f, że klasa abstrakcji $[f]_\sim$ jest zbiorem skończonym?

(c) Czy istnieje taka funkcja f, że klasa abstrakcji $[f]_\sim$ jest nieskończonym zbiorem przeliczalnym?

(d) Czy istnieje taka funkcja f, że klasa abstrakcji $[f]_\sim$ jest zbiorem nieprzeliczalnym?

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

Student name:

Logic for Computer Science

Midterm exam (bachelor part)

December 4, 2010

Question 1 (1 point). In the box below write a formula in disjunctive normal form equivalent to $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

Question 2 (1 point). If the formula $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge q \wedge \neg r$ is a contradiction then in the box below write the word "CONTRADICTION". Otherwise write a corresponding counter-example.

Question 3 (1 point). In the box below write a formula with three free variables x, y, z, that (interpreted in the set of natural numbers) expresses that x is the greatest common divisor of y and z.

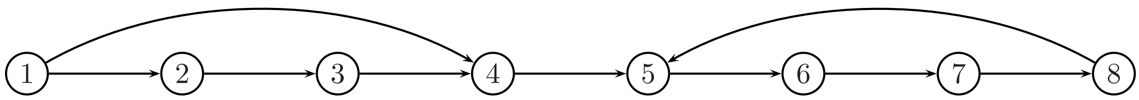
Question 4 (1 point). If the formula $(\forall x\, (\varphi \Rightarrow \psi)) \Leftrightarrow ((\forall x\, \varphi) \Rightarrow (\forall x\, \psi))$ is a tautology for all formulas φ and ψ of first-order logic then in the box below write the word "TAUTOLOGY". Otherwise write a corresponding counter-example.

Question 5 (1 point). If there exist sets A, B and C, such that $A \setminus B = C$ and $A \neq (B \cup C)$, then in the box below write an example of such three sets. Otherwise write the word "NO".

Question 6 (1 point). If the inclusion $\bigcup_{t\in T}(A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{t\in T} B_t$ is true for all indexed families of sets $\{A_t\}_{t\in T}$ and $\{B_t\}_{t\in T}$, then in the box below write the word "YES". Otherwise write a corresponding counter-example.

Question 7 (1 point). For $s, t \in \mathbb{R}$ let $A_{s,t} = \{x \in \mathbb{R} \mid s \leq x \wedge x \leq t\}$. In the box below write the value of the set $\bigcap_{s<0} \bigcup_{t>0} A_{s,t}$, that is, write an expression that denotes the same set and contains no symbols $\cap, \cup, \exists, \forall, s, t$.

Question 8 (1 point). Let $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Consider the relation $R \subseteq A \times A$ whose graph is shown on the picture below (an arrow from a vertex x to a vertex y denotes that $\langle x, y\rangle \in R$).



In the box below write a formula φ such that $\{\langle x, y\rangle \mid \varphi\}$ is the transitive closure of the relation R.

Student name:

Solutions returned:

Logic for Computer Science

Midterm exam (main part)

December 4, 2010

Question 9 (11 points). Consider formulas built from propositional variables p_1, p_2, p_3, p_4, connectives $\top$ and $\Leftrightarrow$, and brackets. Prove that each such formula is satisfiable.

Question 10 (11 points). The operation of *symmetric difference* $\dot{-}$ of two sets A and B is defined as follows.

$$x \in A \dot{-} B \quad \stackrel{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \quad (x \in A \Leftrightarrow x \notin B).$$

Prove that symmetric difference is an associative and commutative operation, that is for all sets A, B and C the equalities

$$(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B \dot{-} C) \quad \text{and} \quad A \dot{-} B = B \dot{-} A$$

are true.

Question 11 (11 points). Prove that for all sets A and B we have $A \times B = B \times A$ if and only if

$$A = \emptyset \quad \text{or} \quad B = \emptyset \quad \text{or} \quad A = B.$$