Analiza numeryczna

4. Aproksymacja

Rafał Nowak

Definicja

Wzór

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b p(x) f(x) g(x) \, dx \tag{1}$$

definiuje **iloczyn skalarny** funkcji f, $g \in C_p[a,b]$. Sprawdza się że dla dowolnych f, g, h i $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) $\langle f, f \rangle \geqslant 0$; $\langle f, f \rangle = 0 \;\Leftrightarrow f = 0$;
(ii) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$,
(iii) $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$,
(iv) $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$.

Twierdzenie (Ortogonalizacja Grama-Schmidta)

Dla dowolnego układu $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *funkcji liniowo niezależnych układ* $g_1, g_2, \ldots, g_m$, *określony wzorami*

$$\begin{cases} g_1 := f_1, \\ g_k := f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle f_k, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle} g_i \quad (k = 2, 3, \ldots, m), \end{cases} \tag{2}$$

jest ortogonalny.

Wielomiany ortogonalne $\{\bar{P}_k\}$ nazwiemy **standardowymi**, jeśli dla każdego k wielomian $\bar{P}_k$ ma współczynnik 1 przy x^k. Zauważmy, że jeśli $\{P_k\}$ jest dowolnym ciągiem wielomianów ortogonalnych w tej przestrzeni i $P_k(x) = a_k x^k + \ldots$ $(k \geqslant 0)$, to $P_k = a_k \bar{P}_k$ $(k \geqslant 0)$.

Twierdzenie

Wielomiany ortogonalne $\{\bar{P}_k\}$ spełniają związek rekurencyjny

$$\bar{P}_0(x) = 1, \tag{3}$$

$$\bar{P}_1(x) = x - c_1, \tag{4}$$

$$\bar{P}_k(x) = (x - c_k)\bar{P}_{k-1}(x) - d_k\bar{P}_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

gdzie

$$c_k = \langle x\bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1}\rangle / \langle \bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1}\rangle \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

$$d_k = \langle \bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1}\rangle / \langle \bar{P}_{k-2}, \bar{P}_{k-2}\rangle \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Twierdzenie

Standardowe wielomiany ortogonalne względem parzystej funkcji wagowej $p(x)$ *w przedziale* $[-a, a]$ *(*$a > 0$*) spełniają związek rekurencyjny*

$$\bar{P}_0(x) = 1, \tag{8}$$

$$\bar{P}_1(x) = x, \tag{9}$$

$$\bar{P}_k(x) = x\bar{P}_{k-1}(x) - d_k\bar{P}_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \tag{10}$$

gdzie

$$d_k = \langle \bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1} \rangle / \langle \bar{P}_{k-2}, \bar{P}_{k-2} \rangle \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Wniosek

Jeśli funkcja wagowa $p(x)$ *jest parzysta, to dla* $m = 0, 1, \ldots$ *wielomiany* $\bar{P}_{2m}(x)$ *są funkcjami parzystymi,* $\bar{P}_{2m+1}(x)$ *– funkcjami nieparzystymi.*

Twierdzenie

Jeśli ciąg $\{P_k\} \subset C_p[a,b]$ *jest ortogonalny, to* n*-ty wielomian optymalny* w_n^* *określony w zadaniu 1 istnieje, jest określony jednoznacznie i wyraża się wzorem*

$$w_n^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, \tag{12}$$

a n*-ty błąd aproksymacji optymalnej funkcji* f *jest równy*

$$||f - w_n^*||_2 = \sqrt{||f||_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}. \tag{13}$$

Twierdzenie

Niech $\{P_k\}$ *będzie ciągiem wielomianów, określonych w następujący sposób rekurencyjny:*

$$P_0(x) = \alpha_0, \qquad P_1(x) = (\alpha_1 x - \beta_1)P_0(x),$$
$$P_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k)P_{k-1}(x) - \gamma_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

gdzie α_k, β_k, γ_k *są danymi stałymi. Wartość wielomianu*

$$s_n := a_0 P_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_n P_n$$

o danych współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *można obliczyć stosując następujący* *uogólniony algorytm Clenshawa:*
Obliczamy pomocnicze wielkości V_k *(*$k = 0, 1, \ldots, n+2$*) według wzorów*

$$V_k = a_k + (\alpha_{k+1} x - \beta_{k+1})V_{k+1} - \gamma_{k+2} V_{k+2} \quad (k = n, n-1, \ldots, 0),$$

gdzie $V_{n+1} = 0$, $V_{n+2} = 0$. *Wynik:* $s_n(x) = \alpha_0\, V_0$.

Definicja

Aproksymacją jednostajną nazywamy aproksymację w przestrzeni $C(T)$ funkcji rzeczywistych ciągłych na zbiorze zwartym (tj. domkniętym i ograniczonym) $T \subset \mathbb{R}1$, z normą

$$||f||_\infty \equiv ||f||_\infty^T := \max_{x \in T} |f(x)|,$$

zwaną *normą jednostajną* (albo *normą Czebyszewa*).

Twierdzenie

Dla dowolnej funkcji $f \in C(T)$ *i dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje dokładnie jeden* n*-ty wielomian optymalny.*

Twierdzenie (twierdzenie Czebyszewa o alternansie)

Niech T będzie dowolnym podzbiorem domkniętym przedziału $[a, b]$. Na to, by wielomian w_n był n-tym wielomianem optymalnym dla funkcji $f \in C(T)$ (tj. by dla każdego $u_n \in \Pi_n$ zachodziła nierówność $||f - w_n||_\infty^T \leqslant ||f - u_n||_\infty^T$) potrzeba i wystarcza, żeby istniały takie punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in T$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1})$, że dla $e_n := f - w_n$ jest

$$e_n(x_k) = -e_n(x_{k-1}) \qquad (k = 0, 1, ..., n+1), \tag{14}$$

$$|e_n(x_j)| = ||e_n||_\infty^T \qquad (j = 0, 1, ..., n+1). \tag{15}$$

Zbiór punktów $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, w których różnica e_n przyjmuje wartość $||e_n||_\infty^T = \max_{x \in T} |e_n(x)|$ z naprzemiennymi znakami, nazywamy (n-tym) alternansem funkcji f (związanym ze zbiorem T).

Przykład

Niech będzie $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $T = [a, b] = [-1, 1]$, $Y = \Pi_1$ (zauważmy, że $\dim Y = 2$), $g(x) \equiv \frac{1}{2}$. Wykresem różnicy $e := f - g$ w przedziale $[-1, 1]$ jest półokrąg o promieniu 1, przechodzący przez punkty $(-1, -\frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$ i $(1, -\frac{1}{2})$. Norma tej różnicy w przedziale $[-1, 1]$ jest równa $\frac{1}{2}$, a w trzech punktach -1, 0, 1 różnica e ma na przemian wartości -$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ i -$\frac{1}{2}$. Punkty te spełniają zatem równości (14), (15). Stąd i z Twierdzenia 2.3 wynika, że stała $\frac{1}{2}$ jest pierwszym wielomianem optymalnym dla funkcji $\sqrt{1-x^2}$ w przedziale $[-1, 1]$. Inaczej mówiąc, nie istnieje żaden wielomian postaci $a_0 + a_1 x$, o własności

$$||\sqrt{1-x^2} - (a_0 + a_1 x)||_\infty^{[-1,\,1]} < ||\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}||_\infty^{[-1,\,1]}.$$

Twierdzenie

Niech s *oznacza dowolną funkcję określoną zbiorze* $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ *(gdzie* $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$*) i taką, że* $s(x_k) = (-1)^k$ *(*$k = 0, 1, \ldots, n+1$*).* n*-ty wielomian optymalny dla funkcji* f *na zbiorze* T *wyraża się wzorem*

$$\begin{aligned} w_n(x) &= d(x_0) + (d[x_0,\, x_1](x - x_0) + \\ &\quad \ldots + d[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}), \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie

$$d := f - \varepsilon s, \qquad \varepsilon = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}]}{s[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}]}. \tag{17}$$

Twierdzenie

n-tym wielomianem optymalnym dla jednomianu x^{n+1} w przedziale $[-1,1]$ jest wielomian $x^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}(x)$, a n-ty błąd aproksymacji optymalnej tej funkcji jest równy 2^{-n} . Spośród wszystkich wielomianów postaci $x^{n+1} + a_1x^n + \ldots + a_{n+1}$ (z dowolnymi współczynnikami $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$) najmniejszą normę $||\cdot||_\infty^{[-1,\,1]}$, równą 2^{-n}, ma wielomian $\tilde{T}_{n+1} := 2^{-n}T_{n+1}$.

Algorytm Remeza I

Dane są: zbiór domknięty T zawierający co najmniej $n+2$ punkty i funkcja f, która na T jest ciągła i nie jest tam wielomianem klasy Π_n. Niech $w_n^{(m)}$ będzie n-tym wielomianem optymalnym dla funkcji f na podzbiorze

$$D_m = \{x_{m0}, x_{m1}, \ldots, x_{m,n+1}\} \qquad (x_{m0} < x_{m1} < \ldots < x_{m,n+1})$$

zbioru T, określonym w następujący sposób:

1. Podzbiór D_0 jest dowolny.
2. Jeśli $E_n(f; D_{m-1}) = 0$ $(m \geqslant 1)$, to wybieramy taki punkt $\xi \in T \setminus D_{m-1}$, że $f(\xi) - w_n^{(m-1)}(\xi) \neq 0$ i przyjmujemy $D_m := D_{m-1} \setminus \{x_{m-1,j}\} \cup \{\xi\}$ (j – dowolne).

Algorytm Remeza II

3. Jeśli zbiór D_{m-1} nie tworzy $(n+2)$-punktowego alternansu dla funkcji $f - w^{(m-1)}$ (tzn. wielomian $w_n^{(m-1)}$ nie jest n-tym wielomianem optymalnym dla funkcji f) na zbiorze T, to podzbiór D_m wybieramy tak, żeby
   - (R1) różnice $f(x_{mk}) - w_n^{(m-1)}(x_{mk})$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ są na przemian dodatnie i ujemne,
   - (R2) $|f(x_{mk}) - w_n^{(m-1)}(x_{mk})| \geqslant E_n(f; D_{m-1})$ $(k = 0, 1, ..., n+1)$,
   - (R3) $\max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n+1} |f(x_{mk}) - w_n^{(m-1)}(x_{mk})| = ||f - w_n^{(m-1)}||_\infty^T$.

Jeśli powyższy algorytm określa ciąg nieskończony $\{w_n^{(m-1)}\}$, to jest on zbieżny do n-tego wielomianu optymalnego w_n dla funkcji f na zbiorze T. W przeciwnym razie ostatni skonstruowany element ciągu jest równy w_n.

Wielomiany prawie optymalne

Przykładem wielomianu prawie optymalnego jest wielomian

$$S_n(x) := {\sum_{k=0}^{n}}' a_k T_k(x), \quad a_k := \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_k(x)(1-x^2)^{-1/2}\mathrm{d}x \quad (k \geqslant 0),$$

czyli n-ty wielomian optymalny w sensie aproksymacji w przestrzeni $L^2(-1,1,(1-x^2)^{-1/2})$, z normą

$$||f||_2 = \left(\int_{-1}^{1} f^2(x)(1-x^2)^{-1/2}\,dx\right).$$

Udowodniono, że dla dowolnej funkcji $f \in C[-1,1]$ zachodzi

$$||f - S_n||_\infty \leqslant K_n E_n(f), \tag{18}$$

gdzie

$$K_n := \frac{2n+2}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} k^{-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{2n+1} \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n. \tag{19}$$

np. $K_5 = 2.961,\ K_{10} = 3.223,\ K_{20} = 3.494,\ K_{100} = 4.139.$

Wielomian interpolacyjny I_n z węzłami $t_{n+1,j}$, wyraża się wzorem

$$I_n(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n}{}' \left(\sum_{j=0}^{n} f(t_{n+1,j}) T_i(t_{n+1,j}) \right) T_i(x). \tag{20}$$

Można wykazać, że

$$||f - I_n||_\infty \leqslant L_n E_n(f),$$

gdzie

$$L_n := 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tg} \frac{2k+1}{4n+4}\pi \sim \ln n.$$

Zatem czynnik L_n rośnie wolno wraz z n. Np. $L_5 = 3.104$, $L_{10} = 3.489$, $L_{20} = 3.901$, $L_{100} = 4.901$.