Tempo di Palio - Formulazione Lagrangiana

26 aprile 2009

Data la fatica $F(\vec{x})$ e la traiettoria del cavallo $\vec{x}(s)$ (s è la distanza percorsa lungo la curva) possiamo assumere una arbitraria legge del moto $s(t)$ e definire lo sforzo

$$S(\vec{x}) = \int_A^B F(\vec{x}(s))ds = \int_{t_A}^{t_B} F(\vec{x}(t))\frac{ds}{dt}dt = \int_{t_A}^{t_B} F(\vec{x}(t))\sqrt{\dot{x}^2}\,dt \tag{1}$$

Il termine ds/dt fa si che l'integrale sia indipendente dalla $s(t)$ scelta; se invece la fatica dipendesse anche dalla velocità questo non sarebbe più vero.

Per ricavare le equazioni di Eulero-Lagrange eseguiamo una variazione $\delta\vec{x}(t)$ arbitraria ma nulla agli estremi.

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \left[\frac{\delta f(x)}{\delta x_i}\delta x_i\sqrt{\dot{x}^2} \;+\; f(x)\frac{\dot{x}_i\delta\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right] dt = \\
&= \int \frac{\delta f(x)}{\delta x_i}\delta x_i\sqrt{\dot{x}^2}dt \;+\; \left[f(x)\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}^2}}\delta x_i\right]_{t_A}^{t_B} \;-\; \int \frac{d}{dt}\left(f(x)\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right)\delta x_i dt = \\
&= \int \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\sqrt{\dot{x}^2} \;-\; \frac{d}{dt}\left(f(x)\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right)\right]\delta x_i dt
\end{aligned}$$

La variazione δS deve essere nulla per qualsiasi $\delta\vec{x}$ quindi si deve annullare l'integrando per ogni t, e si hanno le n equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\sqrt{\dot{x}^2} \;=\; \frac{d}{dt}\left(f(x)\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right) \tag{2}$$

Nel caso banale in cui $f(x)$ è una costante si ricava subito che il versore della velocità è costante, quindi la soluzione è un moto rettilineo uniforme.

Altrimenti dopo un po' di ginnastica si riscrive l'equazione di prima come

$$\left(\delta_{ij} - \frac{\dot{x}_i\dot{x}_j}{\dot{x}^2}\right)\left(\dot{x}^2\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - f(x)\ddot{x}_j\right) = 0 \tag{3}$$

E poi ve la risolvete da soli perché ora non ne ho voglia.