

Fisica

Fisica

18/02/2019

Metodo Scientifico

Unità del sistema internazionale

Grandezze fisiche e la loro misurazione

Incertezza di misura

Grandezze Fondamentali

Sistemi di Unità di Misura

Sistema Internazionale

Cifre significative e Arrotondamenti

Cinematica

Legge oraria del moto

Velocità media

Velocità istantanea

Accelerazione

Accelerazione Gravitazionale

Integrale della velocità

Esercizio

22/02/2019

Esercizio: Doppio lancio verticale

Grandezze vettoriali

Velocità istantanea in più dimensioni

Accelerazione in più dimensioni

Moto circolare uniforme

25/02/2019

esercizio palla di cannone

Inerzia

Primo principio di inerzia:

Secondo principio di inerzia:

Esperimenti carrelli

Esercizio pallina da tennis

01/03/2019

Forza di gravità

Forza Peso

Piano inclinato

Forza di attrito

L'attrito statico

Attrito dinamico

04/03/2019

Esercizio: Macchina che frena(senza ABS)

Esempio della carrucola

Lavoro

Esempio: Lancio sasso in aria

Con Forza non costante:

Potenza

Potenza istantanea

Potenza media

08/03/2019

Forza conservativa

Forza Non conservativa

Scelta origine del sistema di riferimento

Energia Potenziale

Energia Cinetica

Bilancio energetico

Varie casistiche

Energia Meccanica

Esercizi:

Lancio massa m in aria, a che altezza arriva?

Per casa

11/03/2019

Moto armonico

Equazione differenziale armonica

Forza Elastica

Esercizio: Calcolo molla con piccole contrazioni

Esercizio: Ciclista

12/03/2019

Esercizio: Massa puntiforme che fa un cerchio

Esercizio: Giro della morte

Esercizio: Terra

Termodinamica

Energia interna

Gas Ideale

22/03/2019

Pressione

Costante di Boltzman

Equazione di stato di gas perfetti

Energia interna media in un gas perfetto monoatomico

Equipartizione dell'energia cinetica

Esercizio moli

Esercizio

Principi della termodinamica

Esempio dei pistoni

Calore

25/03/2019

Esercizio pistone

Esercizio ruota bicicletta

Scatola con gas dentro

Calore

Primo principio della termodinamica

Conduzione

Convezione

- Irraggiamento
- Sistema Isolato
- Esempio sistema isolato
- Trasformazioni
 - Trasformazione isocora
 - Trasformazione adiabatica
 - Trasformazione isotermica
- Capacità termica
- Calore specifico
- Esperimento di Joule
 - Esempio pozzanghera
- Calore latente
- Stati della materia
- Per casa

29/03/2019

Esercizio

01/04/2019

Centro di massa

- Esempio Sole Terra
- Esempio raggio sole
- Utili da sapere per esame
- Esempio su Aero
- La quantità di moto si conserva
- Esperimento barra
- Urto perfettamente anaelastico
- Esperienza di Joule (Espansione Libera)

05/04/2019

08/04/2019

Calore Specifico in base al processo

Relazione di Mayer

Grafici p V

Cicli Termodinamici

- Ciclo termico/Macchina termica
- Ciclo frigorifero/Macchina frigorifera
- Calore ceduto e calore assorbito
- Lavoro subito e lavoro effettuato
- Rendimento di una macchina termica
- Reversibilità di una trasformazione
- Ciclo di Carnot

12/04/2019

- Rappresentazione macchina termica
- Rappresentazione macchina frigorifera
- Secondo principio della termodinamica
- Dimostrazione per assurdo
- Teorema di Carnot

Metodo Scientifico

Fenomeno di interesse e sua idealizzazione, ho grandezze fisiche per descriverlo (**unità**), osservazione e misura (**incertezze**), formulazione di ipotesi, passando dal **modello alla legge fisica**.

Attraverso quest'ultima (legge fisica) per descrivere e prevedere ed in caso **falsificare l'ipotesi**.

Unità del sistema internazionale

Grandezze fisiche e la loro misurazione

Incertezza di misura

Grandezze Fondamentali

Sistemi di Unità di Misura

Sistema Internazionale

Cifre significative e Arrotondamenti

Cinematica

La cinematica è la descrizione del moto degli oggetti, rappresentati da punti materiali.

Punto materiale: Punto con delle proprietà fisiche, privandolo dell'estensione. Lecito quanto piccolo è l'oggetto.
(*Più piccolo, più lecito*).

Esempio:

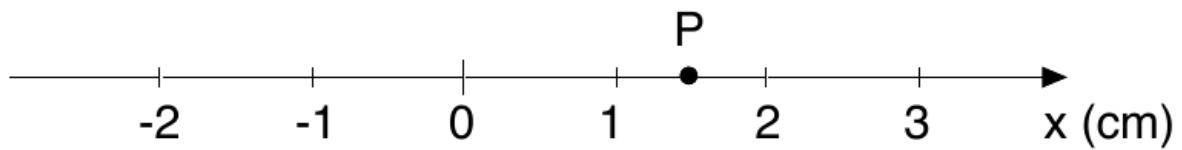
Luna è un punto materiale con un rapporto 100 alla terra .

Legge oraria del moto

Scelgo un **punto**, un **verso di percorrenza** e creo il movimento del punto in **UNA dimensione**.

Un punto materiale non fa spazio ne ingombro.

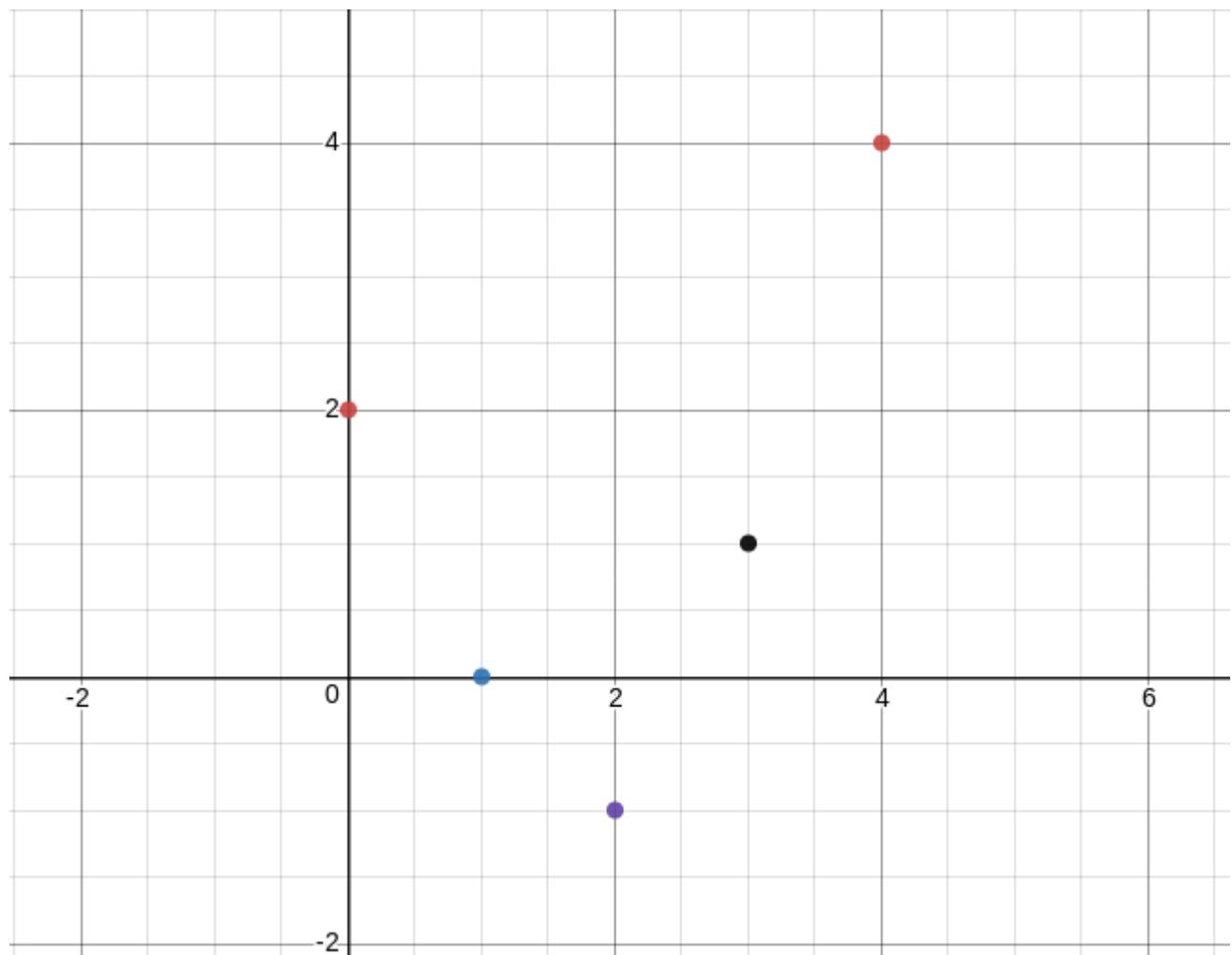
Posso assumere una unità di misura nella retta orientata (tipo centimetri).



La legge oraria posso esprimere con una **tavella**:

$t(s)$	$s(m)$
0	2
1	0
2	-1
3	1
4	4

E disegno un **GRAFICO**:



Equazione oraria: $s = s(t)$

spazio in funzione del **tempo**.

La legge oraria può variare in base alla funzione che ho su $s(t)$

Esempi

$$s = A \cos(Bt)$$

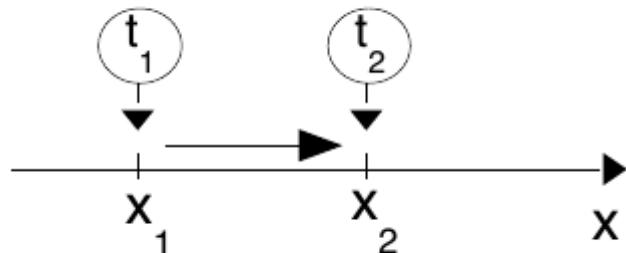
Nota bene che:

NON posso rimuovere la costante A, mentre posso rimuovere la costante B(se ad esempio la B vale 1), ma è consigliato tenerla in ogni caso. Senza A non posso dire di che cosa si tratta, di lunghezza, di tempo etc etc, quindi A deve essere **DEFINITA** ed avere una unità di misura.

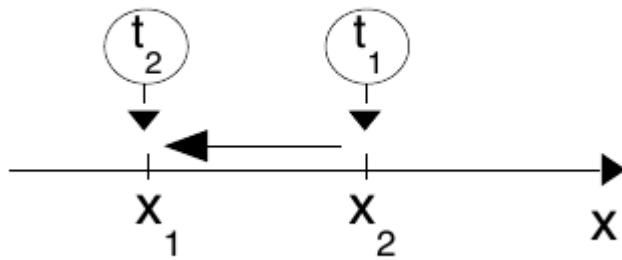
Pulsazione: nella **formula precedente** la pulsazione è $\omega = B$.

Velocità media

Velocità positiva



Velocità negativa



Equazione: $V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Ovviamente ha una unità di misura

$$[v] = \frac{[s]}{[t]}$$

Le parentesi quadre indicano una equazione dimensionale, stiamo considerando l'uguaglianza del punto di vista delle **dimensioni**.

Abbiamo ovviamente una **unità di misura**

$$udm(v) = \frac{udm(s)}{udm(t)} = \frac{m}{s}$$

può essere metri al secondo come altro(km/h...)

Nota che è una differenza, non dipende dal sistema che abbiamo utilizzato.

utilizzando il sistema di riferimento di prima (**tabella**), abbiamo:

$$\frac{-2}{1} = -2 \frac{m}{s}$$

$$-1 \frac{m}{s}$$

$$2 \frac{m}{s}$$

$$3 \frac{m}{s}$$

Coefficiente Angolare: Nel grafico ho

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nota bene che il grafico con tempo, non può avere valori che "tornano indietro nel tempo".

Velocità istantanea

Velocità nel tempo che dipende dall'istante t .

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

anche detta

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} = v(t)$$

Rapporto incrementale, quindi è la **derivata** nel grafico spazio tempo.

Esempi:

$$s(t) = At \implies v(t) = \frac{ds}{dt} = A$$

Essendo t Tempo, **A** sarà spazio tempo perchè mi fornisce un uguaglianza = spazio, quindi deve dare spazio. Quindi **A** sarà la **Velocità**.

$$v(t) = A[-\sin(\omega t)]\omega = -A\omega \sin(\omega t)$$

In questo caso **A** è **Spazio**.

Avendo la **legge oraria della velocità**, posso ottenere la **legge oraria del moto** integrando $v(t)$

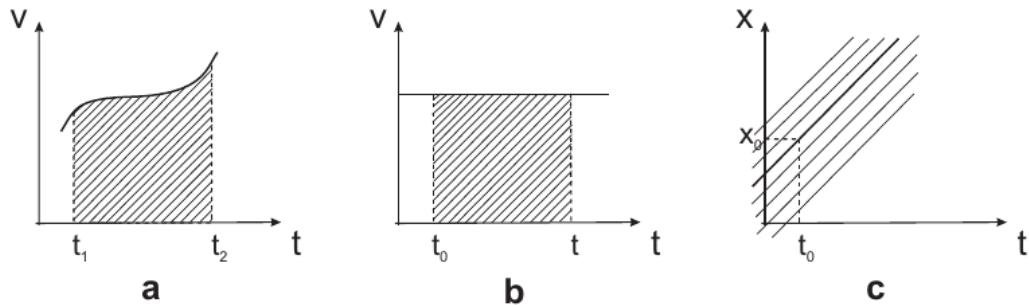


Figura 2.4: Calcolo della legge oraria, nota la velocità in funzione del tempo

$$s(t) - s_0 = \int_{t_0}^t d\tau v(\tau) \implies s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t d\tau v(\tau)$$

quindi

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t \bar{v} d\tau = s_0 + \bar{v}(t - t_0)$$

Avendo una velocità costante ottengo

$$s(t_0) = s_0 + \bar{v}(t_0 - t_0) = s_0$$

Accelerazione

Variazione della velocità nel tempo o **Derivata** della velocità nel tempo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = a(t_0)$$

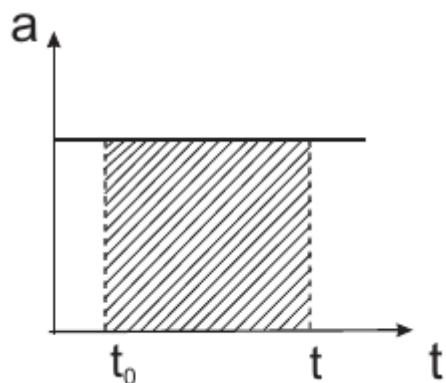
Protip: Controllo di avere consistenza dimensionale

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[s]}{[t][t]} = [s/t^2]$$

Accelerazione Gravitazionale

L'accelerazione gravitazionale è pari a

$$g = 9,8055 \frac{m}{s^2}$$



Punti estremanti: Punti di massimo e di minimo, punti nei quali l'accelerazione vale ZERO, cioè la velocità è costante.

Integrale della velocità

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t d\tau a(\tau)$$

Nota che:

Integrando accelerazione, ottengo la **velocità**.

Integrando ancora, ottengo lo **spazio**.

Derivando lo spazio, ottengo la **velocità**.

Derivando ancora ottengo l'**accelerazione**.

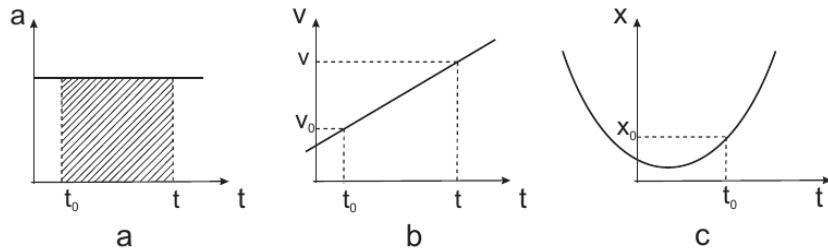


Figura 2.5: Calcolo della legge oraria per un moto uniformemente vario: (a) accelerazione, (b) velocità, (c) posizione in funzione del tempo

Protip:

$$F = \frac{-G \cdot m \cdot M}{r^2} = -m \cdot g \cdot r$$

l'accelerazione gravitazionale è **diversa** in base a dove mi trovo nella terra, ma di poco, quindi la **assumo** come **definita prima**.

Esercizio

Protip: io posso piazzare il mio asse delle x , cioè $s(t)$ come mi pare e piace, quindi posso ottenere una g **negativa**, per avere una accelerazione **positiva**.

Un tipo tira un sasso in aria

DATI:

$$v_0 = ?$$

$$h = 4,0m$$

$$s_0 = 0, t_0 = 0$$

$$a = +g (g = -9,81m/s^2)$$

$$v(t) = v_0 > 0 + \int_0^t d\tau a(\tau) = v_0 + \int_0^t d\tau g = v_0 + gt$$

dove g è ovviamente l'accelerazione gravitazionale.

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t d\tau v(\tau) = \int_0^t d\tau (v_0 + g\tau) = v_0 t + g \frac{t^2}{2}$$

22/02/2019

Ricordiamo che l'**accelerazione** è un **differenziale** della velocità

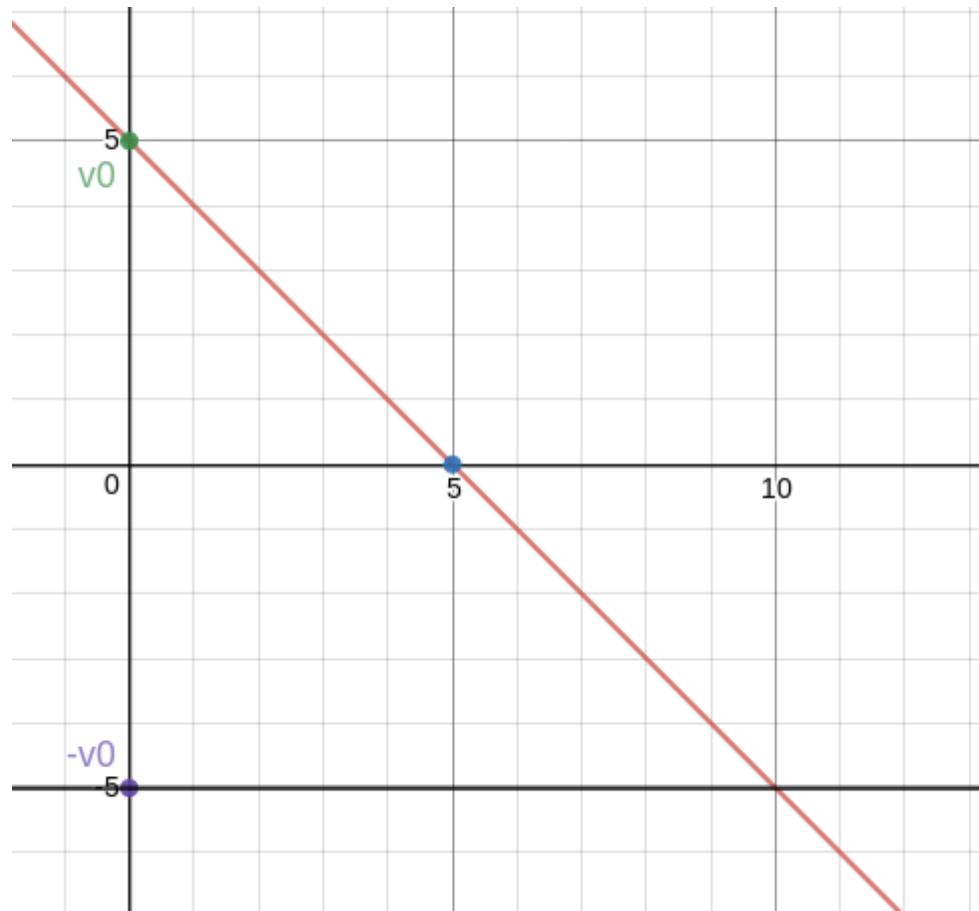
$$\frac{dv}{dt} = a$$

tornando all'esercizio precedente, otteniamo

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + gt \\ s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

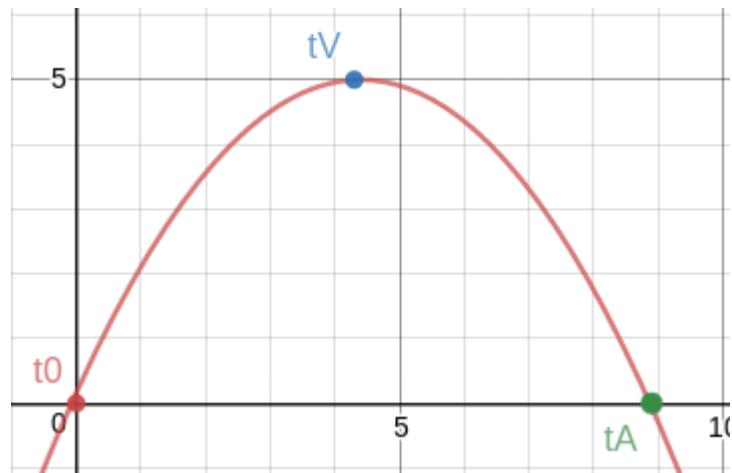
Ora nel punto in cui la velocità è zero:

$$\begin{cases} v(t) = 0 = v_0 + gt_{max} \\ s(t) = h_{max} = v_0 t_{max} + \frac{1}{2}gt_{max}^2 \end{cases}$$



Continuando:

$$\begin{cases} v_0 = -gt_{max} \\ h_{max} = -\frac{1}{2}gt_{max}^2 \end{cases} = \begin{cases} v_0 = -g\sqrt{\frac{2h_{max}}{-g}} = \sqrt{|g|^2 \frac{2h_{max}}{-g}} = \sqrt{-2gh_{max}} = 8,9m/s \\ t_{max} = \sqrt{\frac{2h_{max}}{-g}} = \sqrt{\frac{8m}{9,8m/s^2}} = \sqrt{0,816} \end{cases}$$



Esercizio: Doppio lancio verticale

Vengono lanciati due sassi

DATI:

$$v_0 = 8,0 \text{ m/s}$$

$$a = g = -9,8055 \text{ m/s}^2$$

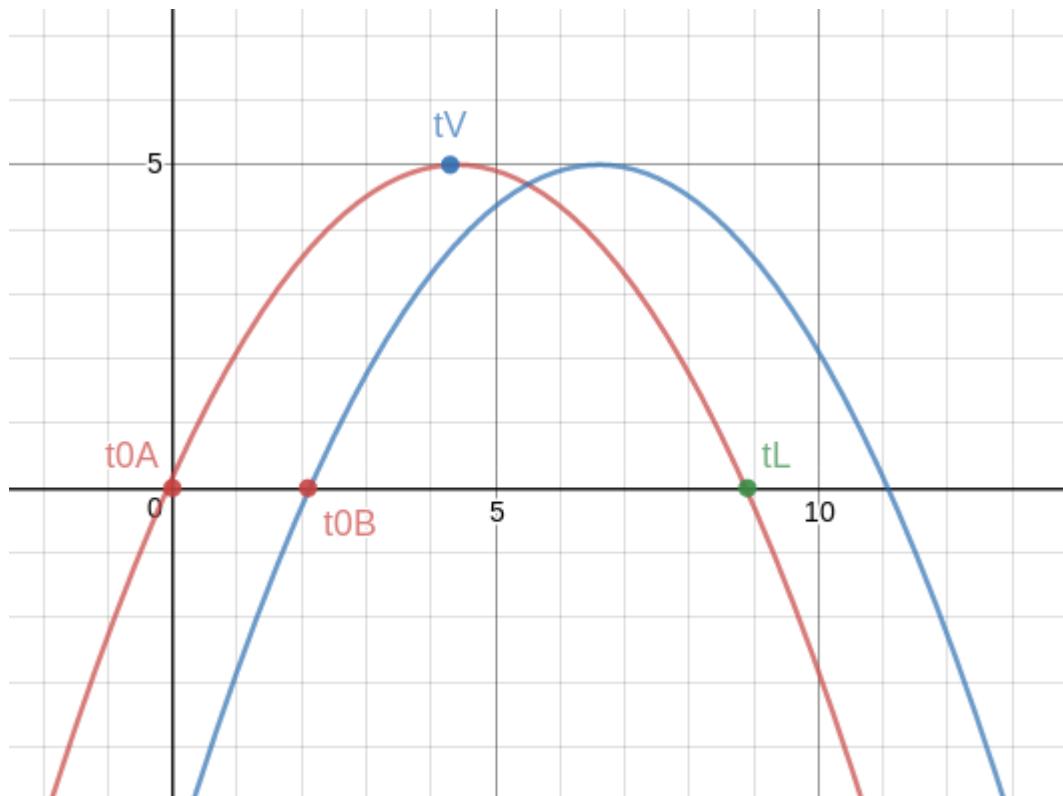
$$s_0 = 0 \text{ m}$$

$$t_{0A} = 0 \text{ s}$$

$$t_{0B} = \text{Arbitrario}$$

Si incontrano per $s > 0$?

Se aspetto che il primo sasso vada a terra, **no.**



Come possiamo vedere, la possibilità che si incontrino è nell'intersezione delle due parabole.

1. **Primo Caso/Modo:** $t_{0B} > t_{LA} = 2t_{max} = 2\sqrt{\frac{-2h_{max}}{g}}$

se ho che lo lancia dopo il landing dell'altro.

2. **Secondo Caso/Modo:** $\begin{cases} s(t) = v_{0A}(t - t_{0A}) + \frac{1}{2}g(t - t_{0A})^2 \\ s(t) = v_{0B}(t - t_{0B}) + \frac{1}{2}g(t - t_{0B})^2 \end{cases}$ ottengo

~~$v_{0B}t + \frac{1}{2}gt^2$~~ $= v_{0A}(t - t_{0B}) + \frac{1}{2}g(t - t_{0B})^2$

Ottengo dunque che

$$0 = -v_{0A}t_{0B} + \frac{1}{2}gt_{0B}^2 - gt_{0B}$$

arrivando a t

$$t = \frac{\frac{1}{2}gt_{0B}^2 - v_{0A}t_{0B}}{gt_{0B}} = \frac{t_{0B}}{2} - \frac{v_{0A}}{g}$$

Grandezze vettoriali

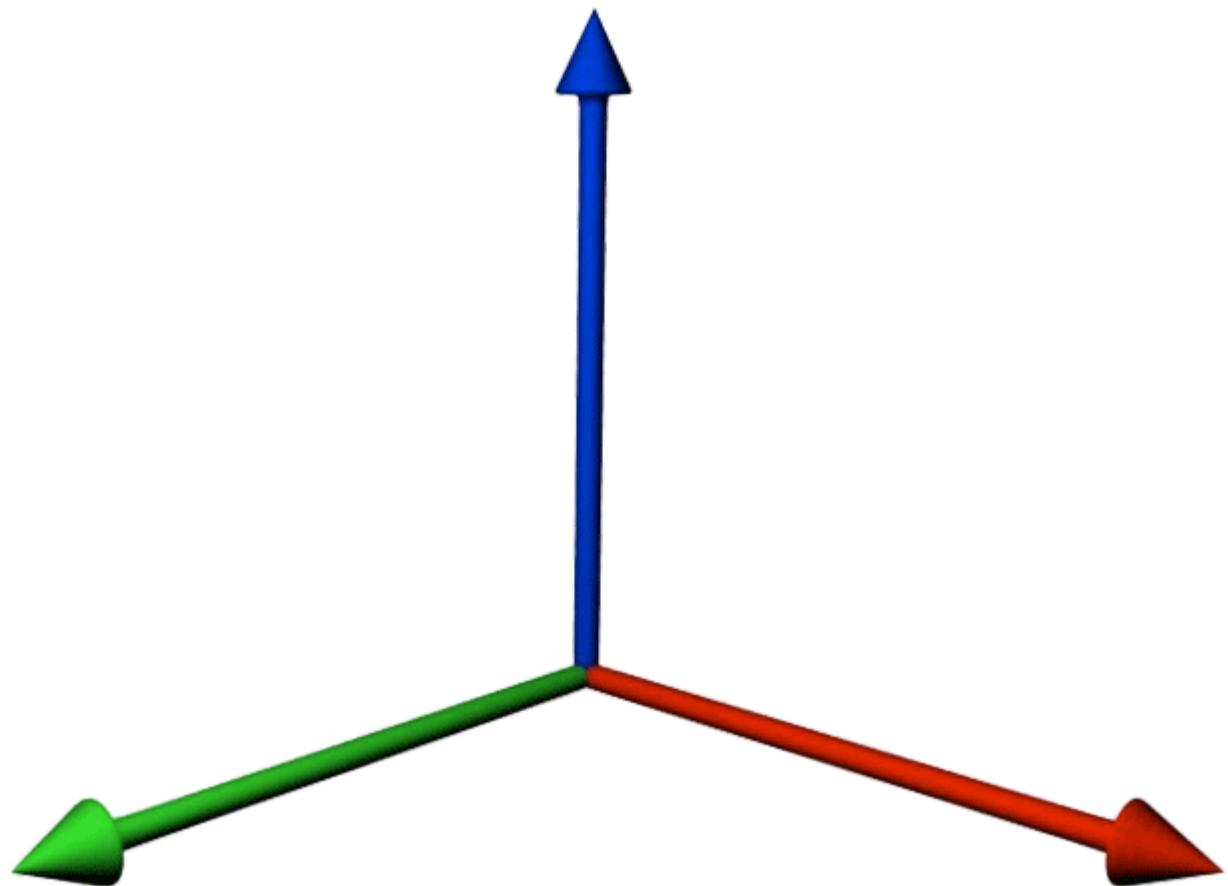
$$s \longrightarrow \vec{s}$$

$$v \longrightarrow \vec{v}$$

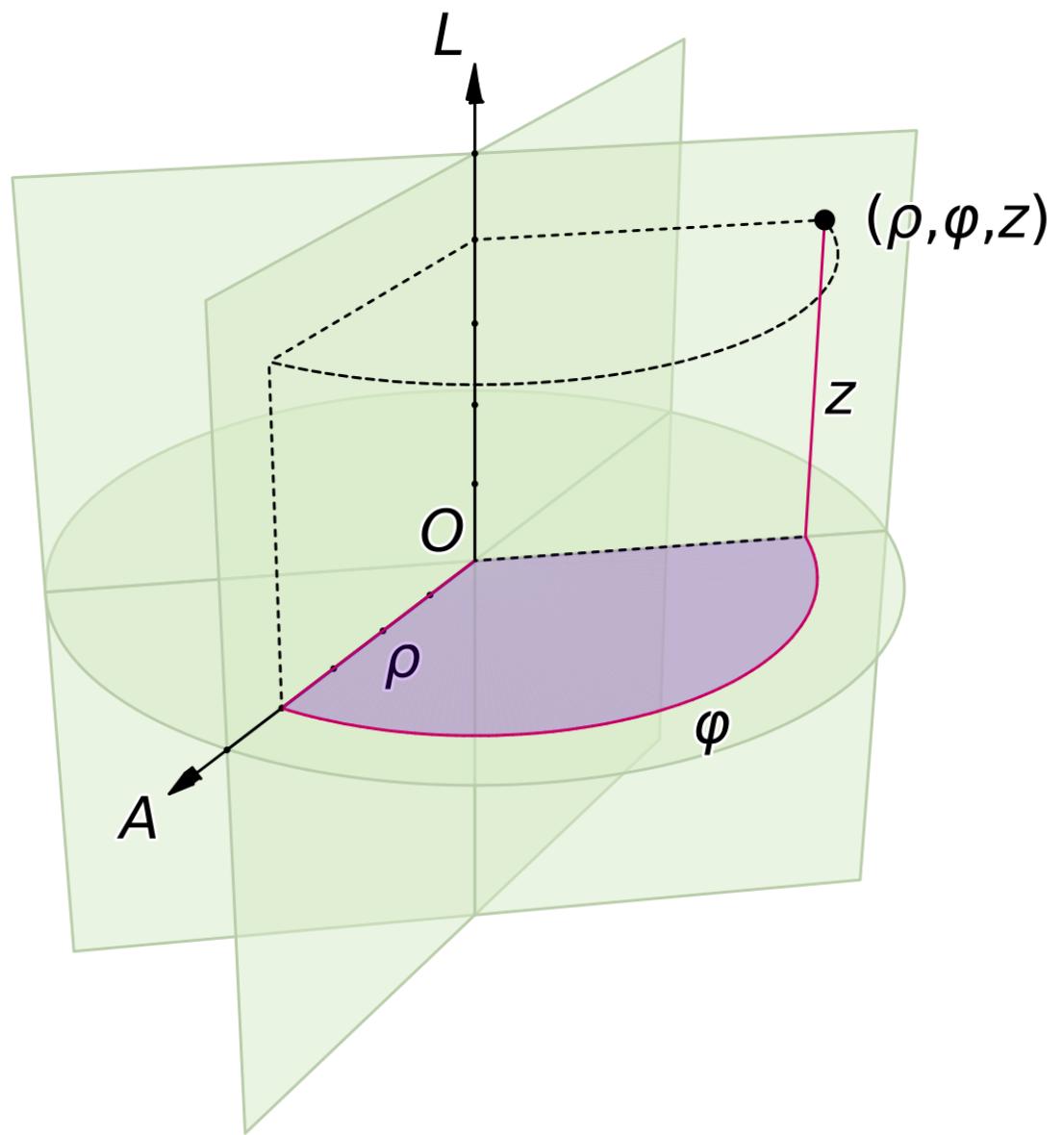
$$a \longrightarrow \vec{a}$$

Ci sono diversi tipi di assi

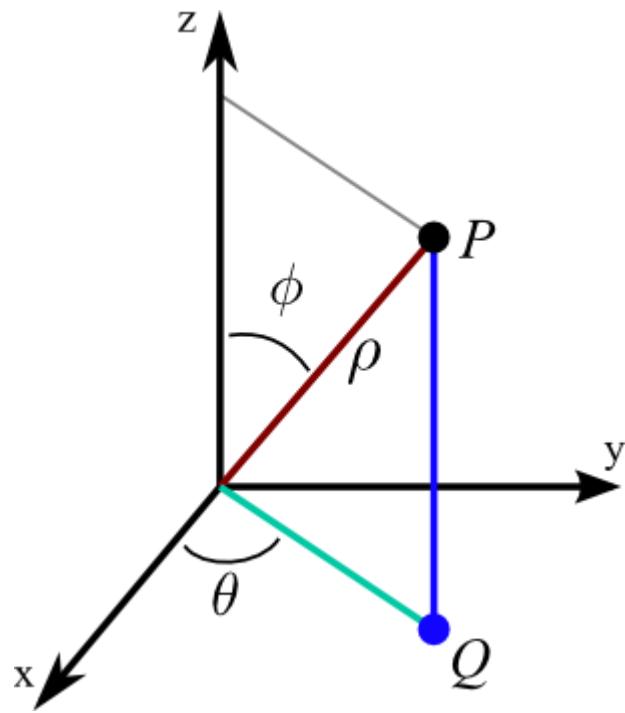
1. Cartesiano



2. Cilindrico



3. Polare



Formule (le quali non ho idea a cosa si riferiscono)

$$s \longrightarrow \Delta \vec{s} = \Delta \vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y} + \Delta z \hat{z}$$

$$\vec{v}_M = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

Velocità istantanea in più dimensioni

$$\vec{v}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{s}(t') - \vec{s}(t)}{t' - t}$$

Al cambio di dimensioni posso avere valori in più.

La velocità, in ogni caso, è **sempre tangenziale alla direzione**.

Accelerazione in più dimensioni

$$\vec{a}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t}$$

Prima avevo solo una variazione di velocità, qui invece ci dice che l'accelerazione c'è se la velocità in un certo istante è diversa dalla velocità in un altro istante. Ciò **non implica** che i due valori siano diversi. In matematiche:

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(t') \neq \vec{v}(t) \Rightarrow v(t') \neq v(t)$$

Possiamo avere

1. Moto rettilineo uniforme (**MRV**)
2. Moto rettilineo uniforme vario (**MRVA**)
3. Moto non rettilineo uniforme (**MNRV**)
4. Moto non rettilineo non uniforme (**MNRRNV**)

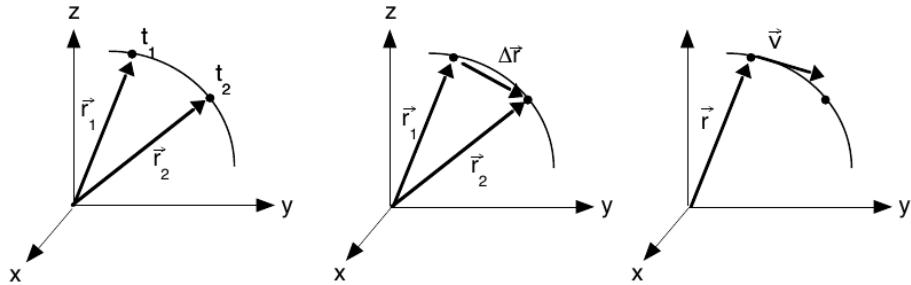


Figura 2.7: Vettori posizione del punto P agli istanti t_1 e t_2 (a sinistra). Vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ (al centro). Vettore velocità \vec{v} (a destra).

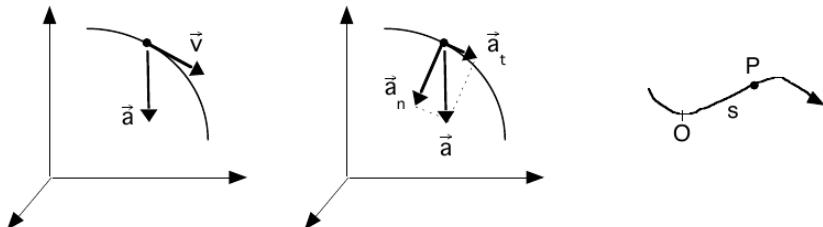


Figura 2.8: A sinistra: il vettore accelerazione è diretto verso la concavità della traiettoria. Al centro: componenti tangenziale e normale dell'accelerazione. A destra: coordinata curvilinea

Moto circolare uniforme

Ha velocità costante, con traiettoria circonferenza.

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

per trovare le coordinate.

$$r(t) = \cos t = R \Rightarrow s = R\phi$$

Perchè $R=s_{_phi} \dots$? boh(dubbio)

Ogni punto della velocità è tangente alla circonferenza (incerto)

La velocità è il prodotto della **velocità angolare** per il raggio.

Velocità:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\phi)}{dt} = R \frac{dy}{dt} = \omega R$$

ω è la **pulsazione**, cioè la **velocità angolare**.

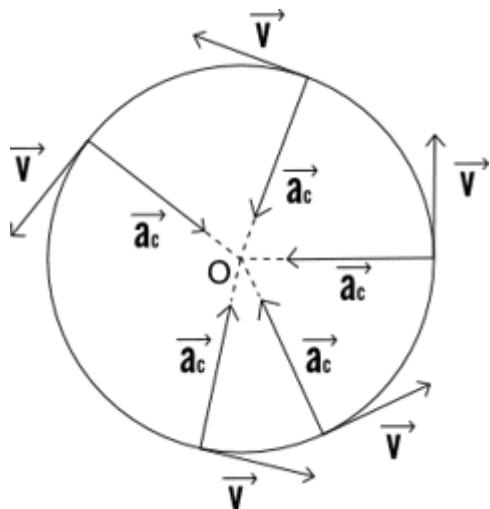
L'accelerazione:

$$a = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \alpha R$$

L'accelerazione è **diretta verso il centro**, cioè **accelerazione centripeta**.

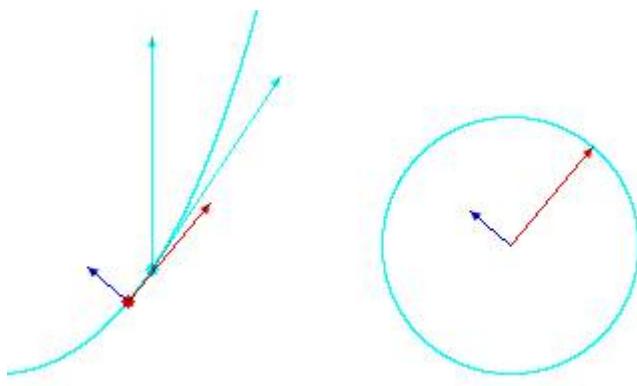
Accelerazione centripeta in un moto non circolare = **accelerazione normale**.

È normale moto, perpendicolare.



Nota che:

Se non ho una circonferenza, posso dire che **l'accelerazione ORTOGONALE** ci porta ad avere un'accelerazione centripeta verso una ipotetica circonferenza per la nostra curva:



$$v_x = \frac{dx}{dt} = R \frac{d \cos \phi}{dt} = -R \sin \phi \frac{d\phi}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R \frac{d \sin \phi}{dt} = R \cos \phi \frac{d\phi}{dt}$$

Quindi ottengo che

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R \frac{d\phi}{dt} = R\omega$$

con le accelerazioni

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R[\cos \phi (\frac{d\phi}{dt})^2 + \sin \phi \cancel{(\frac{d^2\phi}{dt^2})}]$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = R[-\sin \phi (\frac{d\phi}{dt})^2 + \cos \phi \cancel{(\frac{d^2\phi}{dt^2})}]$$

Nota bene: $\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right]$

dove $\left[\frac{dy}{dt} \right] = \omega$ è costante, quindi la derivata di una costante è zero.

25/02/2019

$$\omega = \cos t$$

Velocità angolare: $v = \omega r$

esercizio palla di cannone

Calcolo della traiettoria di un oggetto sparato con un cannone.

Il cannone è posizionato su $(0, 0)$.

$$x_0 = 0 \quad v_{0x} = v_0 \cos \phi$$

$$y_0 = 0 \quad v_{0y} = v_0 \sin \phi$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y} \iff v_o, \phi$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2v_{0x}}gx^2 \end{cases}$$

ottenendo

$$x = -\frac{b}{a} = \tan \phi \frac{2v_{0x}^2}{g} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Sottolineo che ho sostituito $y = \tan \phi x - \frac{g}{2V_{0x}^2}x^2 = bx + ax^2$

La componente **perpendicolare** cambia la direzione del moto.

Nota

Non posso dopo un po' continuare a derivare perchè ottengo

$$\vec{F} = c \cdot \vec{a}$$

derivando rimarrebbe solo c .

Inerzia

Primo principio di inerzia:

$$\vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{costante}}$$

Un corpo rimane in moto rettilineo uniforme fino a quando una forza esterna ne cambia e ferma la quiete del moto.

Sistema di riferimento inerziale: Sistema di sistemi di riferimento tra i quali, per passare tra di essi attraverso una **velocità costante**.

Molto importante: Se sono sopra un oggetto movente non posso affermare se si sta muovendo, perchè mi sto muovendo con esso.

Secondo principio di inerzia:

Esperimenti carrelli

IMMAGINE che non trovo

avendo due carrelli che si tirano tra loro con una molla di mezzo cosa succede?

Beh se i carrelli sono uguali, ho i $\Delta v_1 = \Delta v_2$

altrimenti, se carrello 2 è 2 volte la **massa** del carrello 1 ottengo $\Delta v_1 = 2\Delta v_2$

idem se vale 3 ottengo $\Delta v_1 = 3\Delta v_2$

da qui otteniamo che

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Sull'es di prima ottengo

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Forza è la variazione della quantità di moto per l'unità di tempo.

La forza è l'interazione.

per l'esercizio di prima, con v_1 con stessa massa di v_2 abbiamo

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\text{dove } \vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt}, \vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

OTTENENDO

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\text{Noi sappiamo che } a = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

quindi abbiamo la **seconda legge della termodinamica**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\text{cioè } \vec{F} = m \cdot \vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

LA MAGGIOR PARTE DELLE VOLTE $\frac{dm}{dt}\vec{v}$ SI PUÒ IGNORARE PERCHÈ È NULLO, vale se abbiamo tipo un razzo mandato nello spazio.

Unità di misura: **NEWTON** =km/h

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

per calcolare la

forza media dobbiamo avere l'impulso.

$$\text{Impulso: } \Delta\vec{p} = \int_{t_0}^t \vec{F}(\tau)d\tau$$

Avendo poi

$$\text{Forza media: } \vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Esercizio pallina da tennis

Ho una pallina da tennis, la tiro contro il muro che succede?

$m = 150g$ di pallina

$$v = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$$

otteniamo

~~$$\vec{p}_i = 1,5 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$~~ è sbagliato!

Non ho un vettore dall'altra parte! devo mettere \hat{x}

$$\vec{p}_i = 1,5 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \hat{x}$$

ottenendo

$$\begin{cases} \vec{p}_i = 1,5 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \hat{x} \\ \vec{p}_i = -1,5 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \hat{x} \end{cases}$$

il professore dovrà fornirmi in quanto tempo si stretcha. (Δt)

Principio di sovrapposizione:

Gli effetti delle forze sono equivalenti alla sovrapposizione degli effetti delle forze (*somma*)

$$\vec{F}_{tot} = m \vec{a}_{tot}$$

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \vec{v}_0(\tau) + \int_{t_0}^t d\tau + \int_{t_0}^t du \frac{\vec{F}(u)}{m} \quad (\cancel{du} - \cancel{du})$$

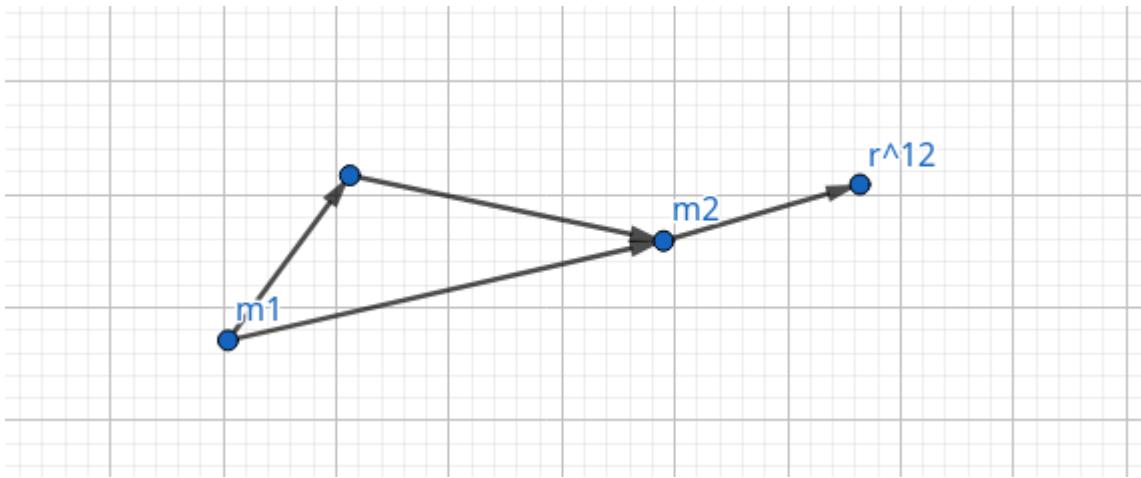
in ordine di forza crescente:

1. Forza di gravità
2. Forza debole
3. Forza elettromagnetica
4. Forza Forte

01/03/2019

Forza di gravità

#



La massa descrive **quanto intensamente** sento la gravità.

Forza che 1 esercita su 2: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$

dove G è la costante di **gravitazione universale**

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

La massa m_1 è influenzata dalla massa m_2 e viceversa.

La gravità si propaga alla velocità della luce, ma non è istantanea, però per noi abbiamo velocità infinita.

Nota sulla elettricità:

$$\vec{F} = Kel \frac{g_1 g_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \text{ dove } Kel = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Forza Peso

Forza con la quale descrivo il fenomeno della caduta dei gravi sulla superficie terrestre.

Ho un palazzo alto 100 metri, butto un sasso.

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \text{ dove } M \text{ è la massa della terra, } m \text{ è la massa del sasso.} (\vec{P} = -m\vec{g})$$

Teorema della forza centrale: Posso assumere che la massa sia concentrata al centro dell'oggetto, poiché le forze applicate vanno al centro.

$$\vec{F} = -G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = -\frac{GM_T}{R_T^2(1 + \frac{h}{R_T})} m$$

ora so che

$$(1 + \epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon \text{ con } \epsilon \ll 1$$

quindi

$$\frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \epsilon$$

So che

$$-\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 + 2\frac{h}{R_T}\right)m = -\frac{GM_T}{R_T^2} \text{ perch\`e } \left(1 + 2\frac{h}{R_T}\right) \text{ \`e dell'ordine di } 10^{-5}$$

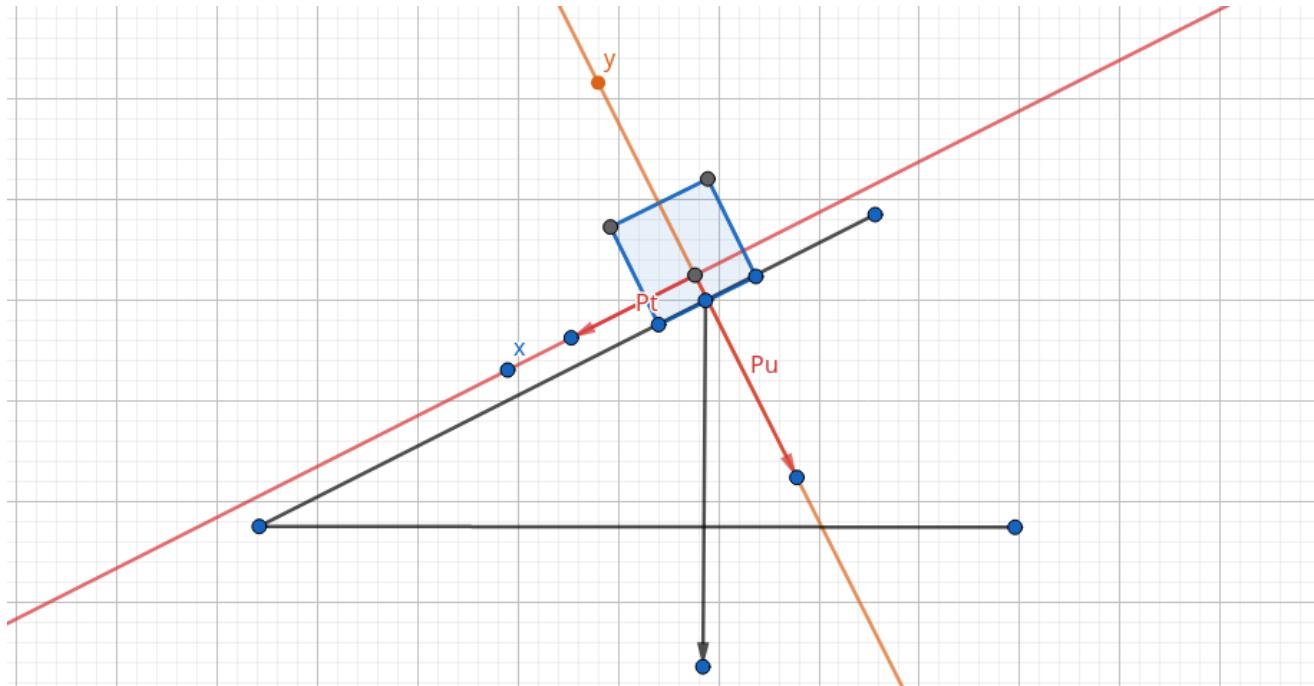
$$\vec{g} = G \frac{M_T}{R_T^2} \hat{R}_T$$

La gravit\`a della luna \`e un sesto della gravit\`a della terra

la massa \`e collegata in qualche modo a ci\`o?

NO.

Piano inclinato



$$\vec{N} + \vec{P}_{perp} = 0$$

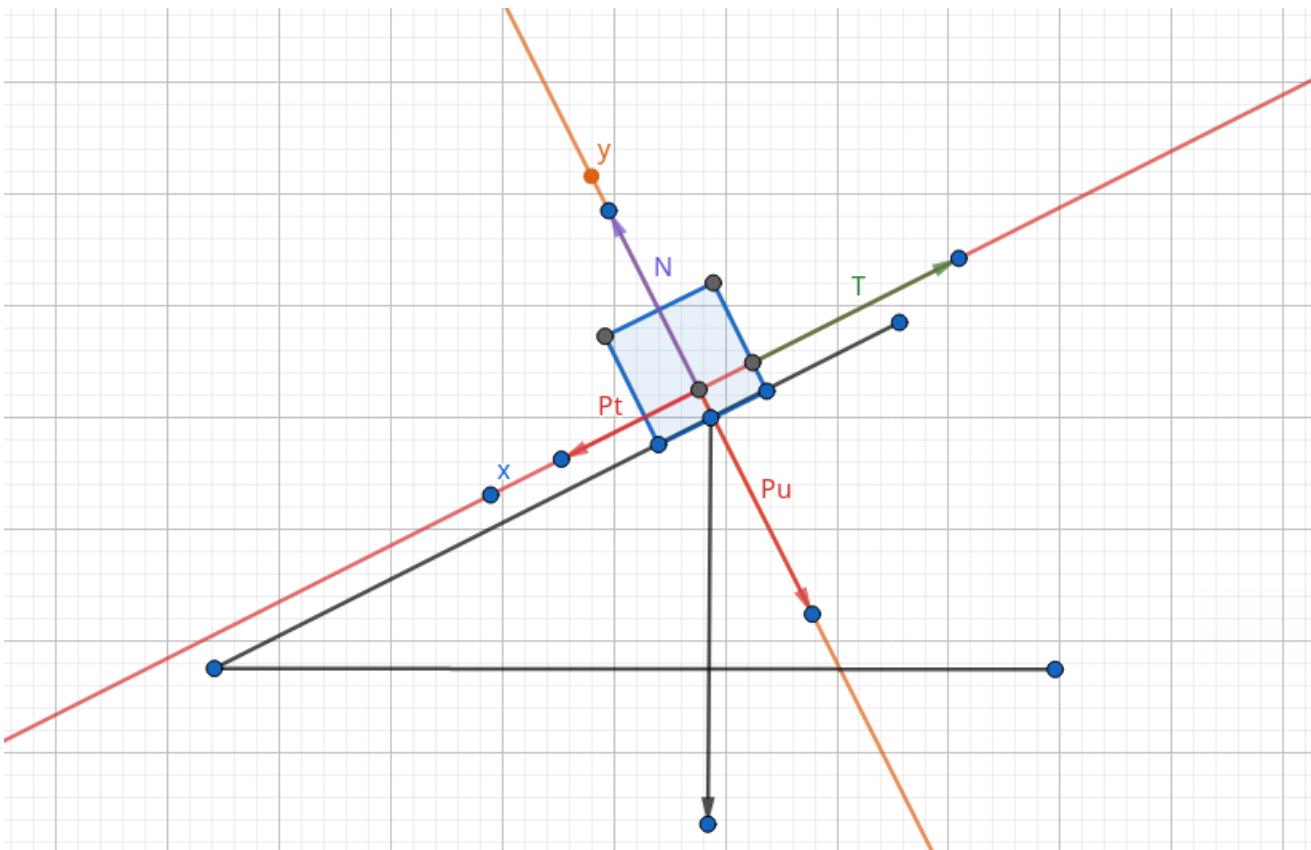
$$P_{parall} = P \sin \alpha$$

$$P_{perp} = P \cos \alpha$$

$$\begin{cases} t : ma_t = F_t = mg \sin \alpha \\ n : ma_n = F_n = 0 \end{cases}$$

da questo ottengo $a_t = g \sin \alpha$

Se aggiungo una fune



ottengo che ho una forza T che sommata a P_t è $= 0$

quindi ottengo

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$$

Importante:

$$\vec{F}_c = m\vec{a}_c \neq \vec{0}$$

Con la forza centripeta, posso immaginarmi come una fune che è collegata al centro della circonferenza.

Dunque il carico di rottura sale quadraticamente:

$$F_c = -m\omega^2 R = -G \frac{mM}{R^2}$$

otteniamo che

Terza legge di Keplero

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3} \implies \omega = \frac{2\pi}{T^2} \cdot \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2 R^3} \text{ dove questa è costante.}$$

Forza di attrito

#

Forza di reazione vincolare.

$$\vec{F}_a | \vec{F}_t + \vec{F}_A = \vec{0}$$

L'attrito statico

dipende da quanto l'oggetto "preme". Ovviamente dipende dalla forza peso, che è uguale e opposta a N . Quindi uso N

Nota bene che:

$$\vec{F}_a \leq \vec{F}_{a,max} = \mu_s |\vec{N}| \hat{t}$$

Questo esiste sempre. μ_s è il **coefficiente di attrito statico**.

Attrito dinamico

$$\vec{F}_{AD} = \mu_c |\vec{N}| \hat{t} \longrightarrow \vec{F}_{AD} = -\mu_c |\vec{N}| \hat{v}$$

Disco rotante:

Velocità ω , ho la corona inglese sopra, forza di attrito $\mu_s = 0,3$ qual è il massimo a cui posso far girare prima che se ne vada?

04/03/2019

spiegazione disco rotante che ho perso

Esercizio: Macchina che frena(senza ABS)

Ho una macchina che frena

t_f =tempo frenata=?

s_f =spazio frenata=?

μ_s

$$\vec{F} = -\vec{F}_a = m\vec{a}$$

$$-\mu_c N = m \frac{dv}{dt}$$

$$-\mu_c N(t - t_0) = m(v(t) - v_0)$$

$$-\mu_c N(t_f - t_0) = m(v_t - v_0) \text{ dove } mg = N \text{ e } v_t = 0$$

ottengo:

$$\mu_c g t_f = v_0$$

Concludendo

$$t_f = \frac{v_0}{\mu_c g} \implies s_f = \frac{1}{2} a t_f^2 = \frac{1}{2} (-\mu_c g) \frac{v_0^2}{(\mu_c g)^2} = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu_c g}$$

la posso calcolare integrando

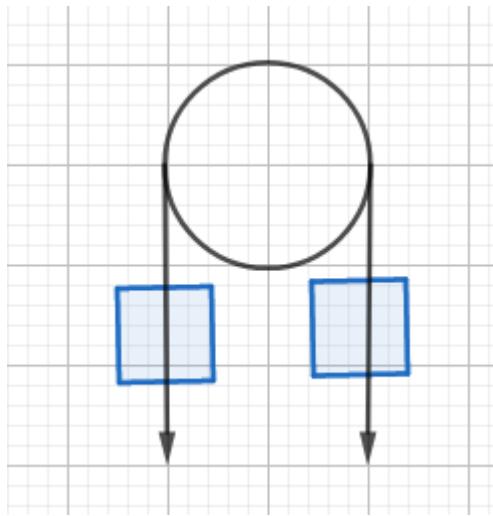
$$-\mu_c N \frac{(t-t_0)^2}{2} = m[(s(t) - s_0) - v_0(t - t_0)]$$

ottenendo

$$-\mu g \frac{t_f^2}{2} = s_f - v_0 t_f$$

Esempio della carrucola

#



Ho due carrucole, attaccate ad una ruota.

Supponendo che la corda **non si estende**:

1. Si muovono a velocità uguali;
2. Le variazioni di velocità sono uguali.

Posso dunque supporre che $\vec{a} = \vec{a}_1 = \vec{a}_2$

$$\begin{cases} m_1 \vec{a} = \vec{P}_1 + T \\ m_2 \vec{a} = \vec{P}_2 + T \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 \vec{a} = \vec{P}_1 - T \\ m_2 (-\vec{a}) = \vec{P}_2 - T \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 \vec{a} = m_1 g - T \\ m_2 \vec{a} = T - m_2 g \end{cases}$$

Ottieniamo:

$$(m_1 + m_2) \vec{a} = (m_1 - m_2) g \implies \vec{a} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Osservo che

Se le due masse sono uguali, $m_1 - m_2 = 0$ non si muovono! l'accelerazione è nulla!

Se una delle due forze è zero otteniamo "g", quindi ottengo $\vec{a} = \pm g$ cioè uno dei due cade.

Ad una massa, tipo un treno che va per dei binari:

1. Applico forza parallela **concorde**, posso affermare che sono **avvantaggiato dal moto**;
2. Applico forza parallela **discorde** (che ha il senso opposto). Posso affermare che sono **svantaggiato dal moto**.
3. Forza perpendicolare (applicata ad esempio in "giù") non sono avvantaggiato ne svantaggiato dal moto.

Voglio dunque ottenere una forza che dipende da:

1. Per quanto tempo la applico;
2. Come la applico(1,2,3)

Lavoro: Prodotto scalare forza con spostamento.

$$w = \vec{F} \Delta \vec{s} = \cos(\Theta_{F_1 \Delta s})$$

cioè

$$[w] = [FL] = M \frac{L}{T^2} L = [m \frac{L^2}{T^2}]$$

Con **unità di misura** pari a $1N \cdot 1m$

La formula di prima **VALE SOLO SE UNIFORME SU $\Delta \vec{s}$**

Esempio: Lancio sasso in aria

Lancio in aria

$$w_{grav} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} =$$

$$\begin{cases} \vec{F} = -mg \cdot \hat{z} \\ \Delta \vec{s} = h \hat{z} \end{cases} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = -mgh$$

$$w_{grav} = -mgh$$

cioè la gravità oppone.

Il sasso torna giù

$$w_{grav} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} =$$

$$\vec{F} = -mg \hat{z}$$

$$\Delta \vec{s} = -h \hat{z}$$

ottengo

$$w_{grav} = mgh$$

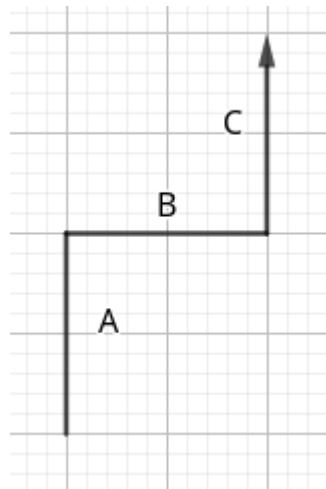
cioè la gravità aiuta.

Caso dove il sasso viene lanciato+ il sasso torna giù

$$\vec{F} = -mg$$

$$\Delta \vec{s} = \vec{0} \text{ quindi zero.}$$

Caso dove fa dei giri strani



In questo caso

$$\begin{cases} w_a = -mg\frac{h}{3} \\ w_c = -mg\frac{2}{3}h \\ w_b = 0 \end{cases}$$

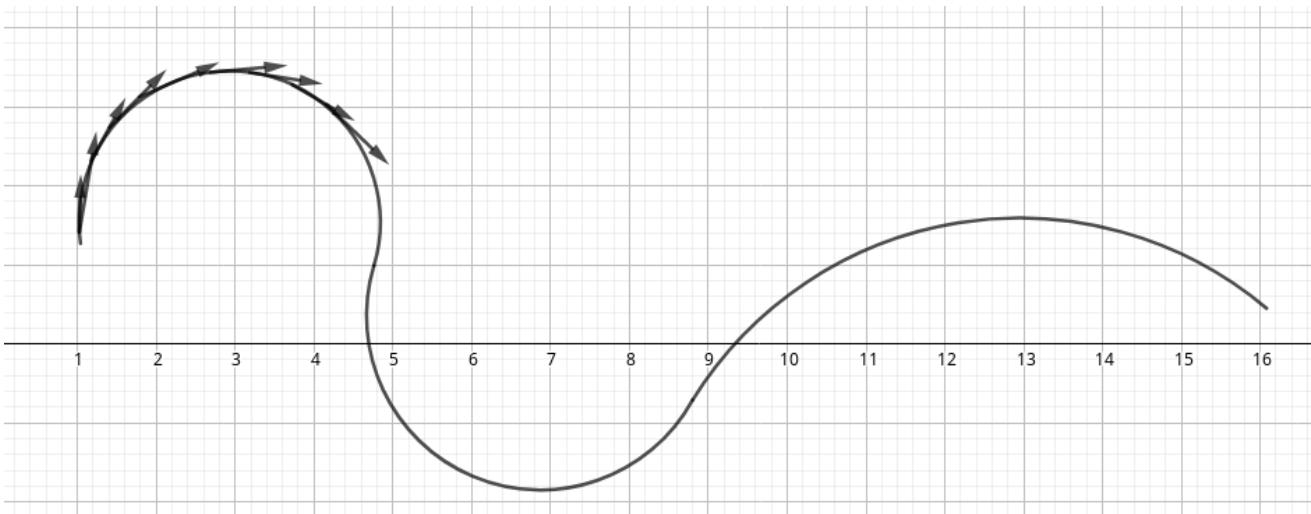
$$w_b = 0 \text{ perchè ho } \Delta \vec{s} = 0$$

ottengo che alla fine, sommandoli è $= -mgh$.

Questo ci fa capire che la formula rimane la stessa!

Con Forza non costante:

Cosa succede se la **forza non è costante?**



dunque questo grafico, con curva che chiameremo AB

$$\overrightarrow{AB} = \sum_{i=1}^N d\vec{s}_n \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Quindi la vera definizione di lavoro è:

Lavoro: $W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Potenza

#

Potenza istantanea

Lavoro che compie nel tempo: $\frac{dw}{dt}$

Potenza media

Totale del lavoro nell'intervallo di tempo: $\frac{w_{tot}}{\Delta t}$

08/03/2019

Forza conservativa

#

$$W_{a \rightarrow a} = 0$$

Cioè $\oint = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Teorema: $\oint_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ non dipende dal percorso $A \rightarrow B$

Dimostrazione:

Ho due semimetà I e II

$$\oint_{II} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$I \oint_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + II \oint_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$I \oint_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -II \oint_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = II \oint_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} \implies wI_{a \rightarrow b} = wII_{a \rightarrow b}$$

■.

Forza Non conservativa

#

Una forza non conservativa è la **forza di attrito**.

Esempio:

Ho un oggetto sul quale ho una forza esercitata

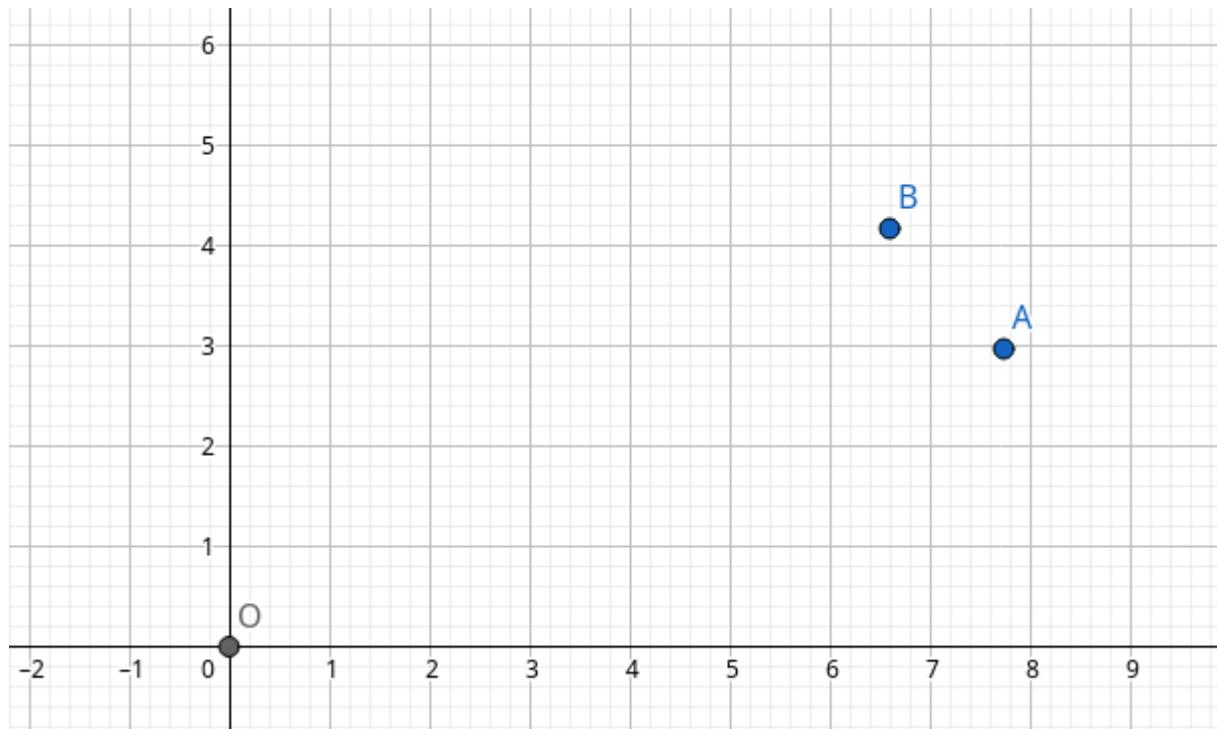
per andare da A a B quanto lavoro applica la forza d'attrito?

$$W_{A \rightarrow B}^{(A)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F}_A \cdot \int_A^B d\vec{s} = F_a \times \bar{AB} \cos \alpha_{\vec{F}_A, \bar{AB}}$$

Otteniamo che questa formula è $= -\mu_d mgd = W_{B \rightarrow A}^{(A)}$

ci permette di dire che $\implies W_{A \rightarrow A}^{(A)} = -2\mu_d mgd$ dove $A \rightarrow A$ mi significa qualcosa che va da un punto, fa un percorso non nullo e torna dove era.

Scelta origine del sistema di riferimento



Ho un asse cartesiano.

$$W_{O \rightarrow B} = \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\vec{B})$$

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow O} + W_{O \rightarrow B} = -W_{O \rightarrow A} + W_{O \rightarrow B}$$

che è uguale a

$$W_{A \rightarrow B} = f(\vec{B}) - f(\vec{A})$$

Ma allora facendo così ottengo che

Il valore di f è arbitrario, dipende dalla posizione di O , mentre le differenze di f sono non arbitrarie cioè non dipendono da O , posso avere un'origine qualsiasi.

Energia Potenziale

#

$$\int_O^B \vec{F} d\vec{s} = W_{A \rightarrow B} = \overset{\text{def}}{=} -(E_p(\vec{B}) - E_p(\vec{A}))$$

$$\text{dove } (E_p(\vec{B}) - E_p(\vec{A})) = \Delta E_p = \overset{\text{def}}{=} -W$$

Energia Potenziale: $\Delta E_p = \overset{\text{def}}{=} -W$

tutto questo è possibile solo perchè il Δ **non è arbitrario**.

mentre l'energia potenziale è definita a meno di costante arbitraria.

Energia Cinetica

#

$$W_{(W>0)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \text{caso speciale} = \int_A^B mv dv$$

Per fare questa cosa ho dovuto fare un trick brutalmente poco matematico: passare il dt sotto al ds

$$= [m \frac{v^2}{2}]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Ottengo dunque che energia cinetica

- non richiede lavoro;
- non dipende da forze esterne;
- $W = \Delta E_K$ vale sempre;
- se c'è energia cinetica, qualcosa , una forza ci ha lavorato su.

Energia Cinetica: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Bilancio energetico

#

Avendo

$$A \rightarrow B$$

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(Con)} + \sum_k \vec{F}_k^{(n.c.)}$$

$$W_{TOT} = \int_A^B \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{s} = W^{(cons)} + W^{(n.cons)} = \Delta E_k$$

$$\text{con } W^{(cons)} = -\Delta E_p$$

dove ho che *con* è forza **conservativa**

mentre n.c. è forza **non conservativa**.

$$\text{ottengo che } -\Delta E_p + W^{n.cons.} = \Delta E_k$$

Ottenendo il **Teorema generale del bilanciamento energetico**

$$\Delta E_p + \Delta E_k = W^{n.cons.}$$

Alla fine gli integrali li devo usare solo con forze non conservative.

Varie casistiche

1. Caso: Non ho forze non conservative

$$\Delta E_p + \Delta E_k = 0$$

$$(E_p^f - E_p^i) + (E_k^f - E_k^i) = 0$$

$$(E_p^f + E_k^f) + (E_k^i + E_p^i) = 0$$

Quindi abbiamo

$$E = E_p + E_k$$

è energia meccanica!

$$\Delta E = W^{n.cons.}$$

2. Ci sono forze non conservative

$$W^{n.cons} = \Delta E \neq 0$$

Energia Meccanica

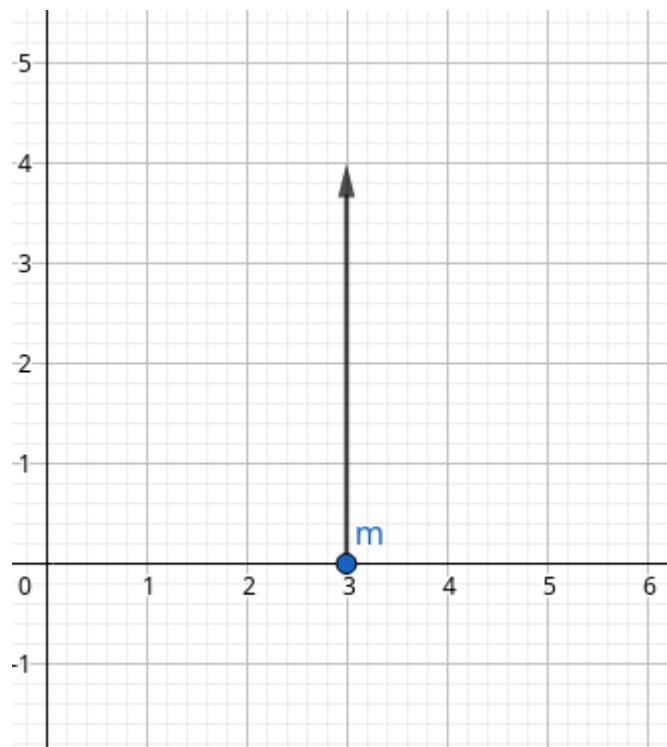
#

$$E = E_p + E_k$$

Esercizi:

#

Lancio massa m in aria, a che altezza arriva?



$$E = \cos t$$

$$E^i = E_p^i + E_k^i = \frac{\sqrt{\pi}}{e} + \frac{1}{2}mv^i_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$E^t = E_p^t + E_k^t = \frac{\sqrt{\pi}}{e} + mgh + 0 = mgh$$

dall'insieme di queste due otteniamo

$$\cancel{\frac{\sqrt{\pi}}{e}} + gh = \frac{v_0^2}{2} + \cancel{\frac{\sqrt{\pi}}{e}}$$

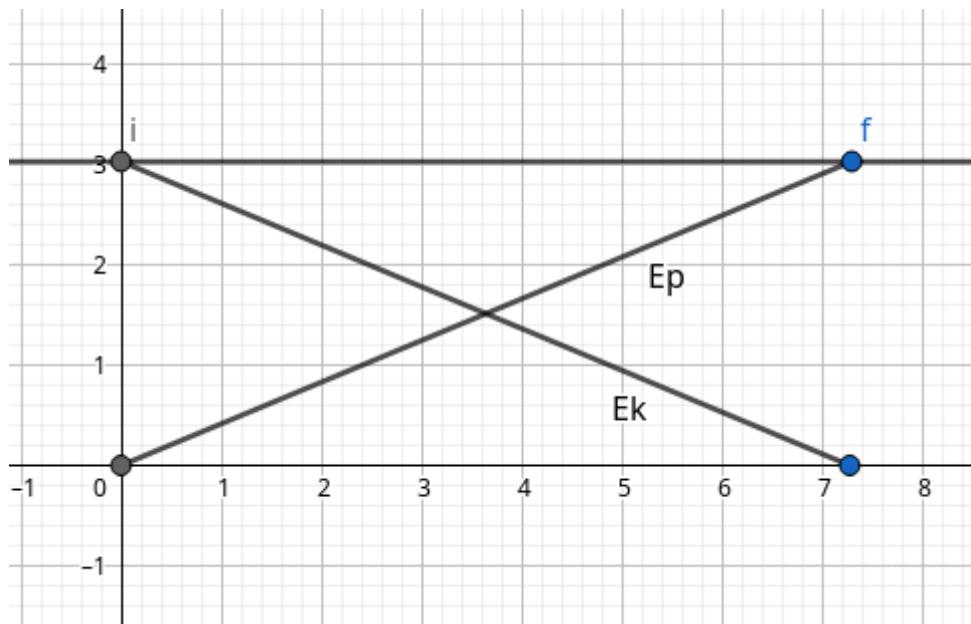
$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\Delta E = 0$$

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

cose che non ho fatto in tempo a ricopiare

Poiché le energie sono lineari, alla metà del grafico ho esattamente un'uguaglianza tra $E_P = E_k$



Per casa

Problema del pendolo semplice: Filo di lunghezza l , viene lasciato il pendolo.

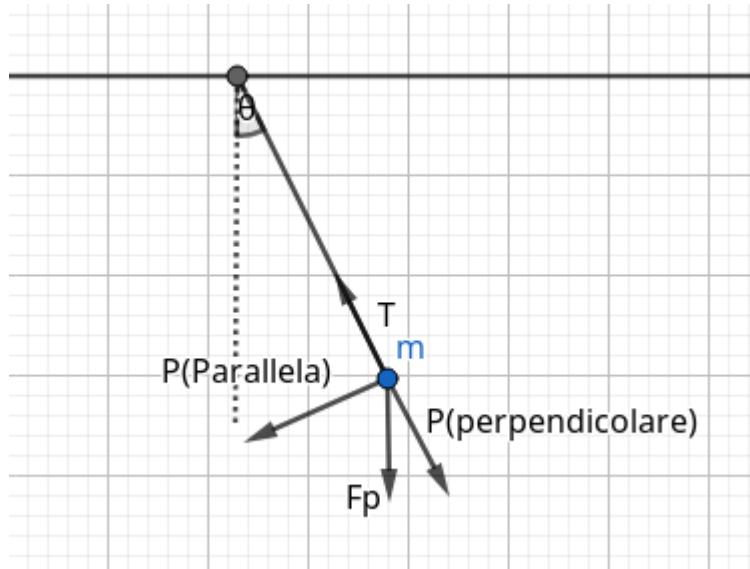
$$\theta \ll 1$$

1. Analisi delle forze
2. $\theta = \theta(t)$
3. scegliere c_1, c_2 (Sistema di coordinate a piacere)
 1. $c_1 = c_1(t), \frac{d_{c_1}}{dt}, v_1, a_1$
 2. $c_2 = c_2(t), \frac{d_{c_2}}{dt}, v_2, a_2$

Moto armonico

#

Problema del pendolo: soluzione



$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ y = -l \cos \theta \end{cases}$$

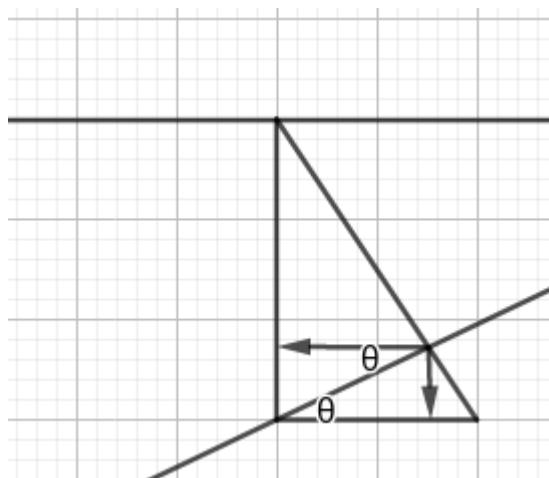
Dove l è la lunghezza del filo.

Derivando in $\frac{d}{dt}$ ottengo

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = l \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} = l \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \quad \text{riderivo in } \frac{d}{dt} \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = l[-\sin \theta (\frac{d\theta}{dt})^2 + \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}] \\ \frac{d^2y}{dt^2} = l[\cos \theta (\frac{d\theta}{dt})^2 + \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}] \end{cases}$$

nota bene che $\frac{d^2x}{dt^2} \neq (\frac{d\theta}{dt})^2$

Ora per aiutarmi disegno un triangolo



noto che formo due angoli θ coniugati interni!

Dunque ora, mettendo $\vec{R} = \vec{P}_{parallela}$ e $\vec{P} = \vec{F}_p$

$$\begin{cases} R_x = -R \cos \theta = -P \sin \theta \cos \theta \\ R_y = -R \sin \theta = -P \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \Rightarrow \begin{cases} R_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ R_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} \end{cases}$$

Proseguendo:

$$\begin{cases} \cancel{\cancel{m}} \cdot (-g) \sin \theta \cos \theta = \cancel{\cancel{m}} \cdot l [-\sin \theta (\frac{d\theta}{dt})^2 + \cos \frac{d^2 \theta}{dt^2}] \\ \cancel{\cancel{m}} \cdot (-g) \sin^2 \theta = \cancel{\cancel{m}} \cdot l [\cos \theta (\frac{d\theta}{dt})^2 + \sin \frac{d^2 \theta}{dt^2}] \end{cases}$$

Ora divido per l e sposto tutto a sinistra

$$\begin{cases} \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \sin \theta (\frac{d\theta}{dt})^2 + \frac{g}{l} \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \cos \theta (\frac{d\theta}{dt})^2 + \frac{g}{l} \sin^2 \theta = 0 \end{cases}$$

Ricordando le *serie di taylor mcLaureen*

$$\sin \epsilon \simeq \epsilon \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$\cos \epsilon \simeq 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$(1 + \epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha \epsilon \quad \epsilon \rightarrow 0$$

Continuamo con

$$\begin{cases} \theta'' - \theta(\theta')^2 + \frac{g}{l} \theta = 0 \\ \theta \theta'' + (\theta')^2 + \frac{g}{l} \theta^2 = 0 \end{cases} \text{ ora moltiplico la seconda equazione per } \theta \text{ e ottengo} \quad \begin{cases} \theta'' - \theta(\theta')^2 + \frac{g}{l} \theta = 0 \\ \theta^2 \theta'' + (\theta')^2 \theta + \frac{g}{l} \theta^3 = 0 \end{cases}$$

Effettuo una somma della prima equazione con la seconda ottenendo:

$$(1 + \theta^2) \theta'' (1 + \theta^2) \frac{g}{l} \theta = 0$$

$\theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0$ ma questa è una **differenziale!**

Equazione differenziale armonica

$$x'' + cx = 0 \text{ con } c > 0$$

dove a è la **pulsazione al quadrato** del moto armonico. Ottengo la

$$\text{Pulsazione: } \omega = \sqrt{c}$$

Come soluzioni abbiamo

$$\begin{cases} \theta(t) = A \sin(\sqrt(c)t + B) \\ \theta'' = -A \sin(\sqrt(c)t + B)c \end{cases}$$

nell'esempio di prima otteniamo

$$\begin{cases} \theta(t) = A \sin \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)} t + B \\ \theta'' = -A \sin(\sqrt{\frac{g}{l}} t + B) \frac{g}{l} \end{cases}$$

Ora trovo A e B:

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \text{ (angolo iniziale)} \\ B = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

quindi la soluzione è $\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \frac{\pi}{2}\right) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$.

■

Da questo esercizio possiamo capire come la pulsazione fosse

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

La maggior parte delle volte c della equazione precedente sarà uguale a qualcosa tipo $\frac{\alpha}{\beta^2}$

Abbiamo inoltre ottenuto che il **moto armonico è periodico**.

Avendo che

Periodo: $T|\omega T = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega}$

Tempo tra due riproposizioni nello stesso atto di moto, cioè stesso spazio con la stessa velocità.

più pulsazioni ho più il periodo è **corto**.

Da notare che nell'esercizio del pendolo precedente **non ho considerato l'attrito, quindi ho continue oscillazioni**. Cioè il pendolo non si ferma.

Isocronia delle piccole oscillazioni: Per angoli piccoli, maggiore spostamento **non significa** maggiore periodo.

Forza Elastica

#

Forza di richiamo(o Elastica): $\vec{F} = -k\vec{x}$

Esercizio: Calcolo molla con piccole contrazioni

$$m = 10kg$$

$$k = 10^3 N/m$$

$$T = ?$$

$$F = ma$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ottengo

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

che è l'equazione armonica!

quindi ora ottengo la pulsazione $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,635$$

Periodo

$$W_{AB} = \int_x^0 -ky(-dy) = -\frac{1}{2}kx^2$$

Il meno è presente perchè vado da x a zero.

Noto che questo integrale è $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2 = -Ep$

Esercizio: Ciclista

Un ciclista va a 25 km/h

La potenza che produce è $P = 150w$

Attrito =? (Calcola l'attrito che colpisce il ciclista)

$v = 25 \text{ km/h} = \frac{25}{3,6} \text{ m/s} = 6,9 \text{ m/s}$ $P = \frac{dw}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{s}}{dt}$ Qui ho dovuto fare un trick poco matematico, **spostando il dt sotto il $d\vec{s}$** $P_a = \vec{F}_a \cdot \vec{v} = -Av$

Sappiamo che $P_c = -P_a$

Abbiamo dunque che

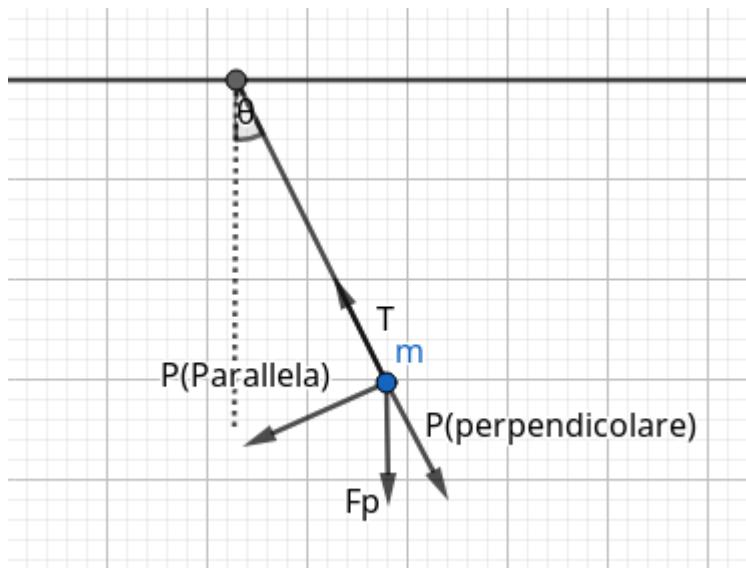
$$P_c = Av$$

$$A = \frac{P_c}{v} = 21,6 \text{ N} \simeq 2 \text{ Kg}$$

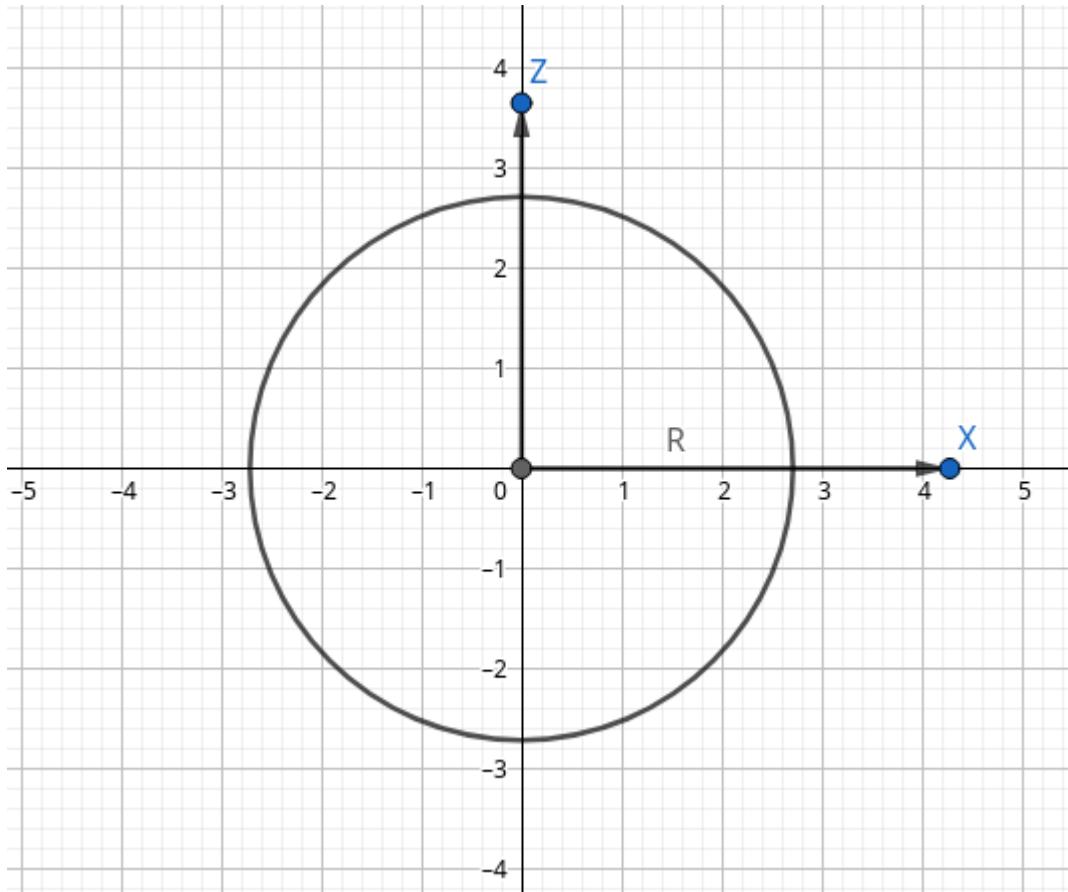
12/03/2019

Esercizio: Massa puntiforme che fa un cerchio

$$m = 50g = 50 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$
 $\theta = ?$
 $tensione filo = ?$
 $l = 0,5 \text{ m}$
 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4} \text{ s}^{-1}$
 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{2} \text{ rad/s}$



L'asse z entra nella lavagna.



$$m\omega^2 R = F_c \frac{R}{l} = \sin \theta \quad \theta = \arcsin\left(\frac{R}{l}\right) \quad \omega^2 l \sin \theta = g \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right) = \arccos\left(\frac{0.8}{\frac{1}{4}}\right)$$

La velocità angolare è troppo bassa per permettere all'oggetto di muoversi, quindi non ho un θ

$$0 \leq \frac{g}{\omega^2 l} \leq 1 \quad \omega^2 \leq \frac{g}{l} \quad |\omega| \geq 4.5 \text{ rad/s}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \theta(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

Per far arrivare $\frac{g}{\omega^2 l}$ a zero, avendo g ed l che sono costanti, posso solo lavorare con ω . Quindi per far sì che sia zero, devo applicare il limite qui sopra con omega che va ad infinito.

Esercizio: Giro della morte

non leggo i dati alla lavagna

Esercizio: Terra

Ho la terra, con un raggio R , una forza gravitazionale g e θ è l'angolo che voglio calcolare per capire qual è il punto di distacco (e optionalmente il punto di landing.)

Atomi: Costituenti minimi della materia che conosciamo, sistemi aggregati composti da un nucleo e sistemi orbitali(elettroni) che gravitano attorno questo nucleo.

Gli atomi sono a **carica neutra**, quindi se gli elettroni hanno carica **negativa**, i protoni la hanno **positiva** e contraria agli elettroni(somma =0). **Raggio nucleo** è dell'ordine alla $10^{-15} m$ **atomo**= $10^{-10} m$ **molecole**= $10^{-8} m$ **Nucleo**= Composto di nucleoni **Elettroni**: non riusciamo a calcolarne il raggio, troppo piccolo.

Costante di avogadro: $N_a = 6,022 \cdot 10^{23}$

Quanti atomi ho?

MOLE: Quantità di sostanza che contiene esattamente un numero di avogadro di componenti. misurarsi in *mol*.

1mol = quantità di sostanza contenuta in $m = A$ grammi dell'elemento, dove A è il **peso atomico**.

Esempio: Avendo un Idrogeno, ho una $A=1$, cioè una mole di 1H è la quantità di quanta sostanza in 1g di H mentre Avendo un Carbonio, ho una $A=12$, cioè una mole di ^{12}C è la quantità di quanta sostanza in 12g di C

Avendo H_2O , ho una $A_{effettiva} = 18$ cioè 1mol di H_2O è la quantità di sostanza in 18g di H_2O

Stati della materia:

- **Solido:** Conservo volume e massa;
- **Liquido:** Ho un volume proprio ma non ho forma, assume quella del recipiente;
- **Gassoso:** Non ho un volume, non ho una forma, si espande prendendo tutto lo spazio disponibile.

Energia interna

In un sistema gassoso, le molecole sono in costante movimento, avendo energia cinetica. Grazie a questa presenza di l'energia cinetica possiamo dire che il sistema ha una **energia interna** $E_{interna} = U$

Gas Ideale

Un gas che ha :

- Le molecole che non interagiscono tra di loro;
- Le particelle non sono interagenti anche con il recipiente;
- Il moto delle particelle è assolutamente casuale.

è definito **gas ideale**.

Q:Cosa succede quando una particella tocca la parte del contenitore? *A: Rimbalza* Il rimbalzo è calcolabile : $i=$ iniziale; $f=\text{finale}$. $\vec{p}_i = p_x \hat{x} + p_y \hat{y}$ $\vec{p}_f = -p_x \hat{x} + p_y \hat{y}$ $\Delta \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = -2p_i \hat{x}$

Ma con il rimbalzo, non perdo energia? No perchè è **perfettamente elastico** quindi non ho una perdita di energia, mentre in una pallina elastica ho una componente NON elastica che assorbe.

Q: Quante particelle ho in una zona gassosa che urtano il contenitore? *A: $N? N_u$ numero di urti nel tempo Δt*

$\mathcal{N}_u = N$ Attenzione, questo \mathcal{N}_u vuol dire la quantità di urti in un determinato istante di tempo! Quindi è uguale al numero di particelle nel volume. tutto ciò che ho dentro a quel contenitore sta urtando la parete in velocità v_x . Se il gas è perfetto ed ideale, le particelle che urtano sono N . $N = v \cdot n$ dove n è la **densità di volumica** ($[n] = [\frac{1}{L^3}]$). Quindi otteniamo che $\frac{N}{\Delta t} = \frac{nSL}{\Delta t} = \frac{nSv_x \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = nSv_x$ $nSv_x \Delta t$ è il numero di urti che ho. In Δt , ottengo che il numero di urti nella quantità di tempo è nSv_x .

Avendo tutte la stessa velocità v_x abbiamo che tutte andranno ad urtare la parete allo stesso momento, quindi ottengo la formula qui sopra. Tutte urtano l'oggetto perché il nostro è un esperimento deterministico, muovendosi orizzontalmente, tutte che partono dalla stessa linea toccano allo stesso momento. **Se ho particelle molto veloci, avrò più urti nel tempo.**

Q:**Ognuna di queste particelle, che impulso trasferisce alla parete?** A: $\Delta \mathcal{P}_x = \mathcal{N}_y \Delta p = nSv_x \Delta t (-2mv_x)$

dove l'ultima parte equivale a $-2nS\Delta tmv_x^2$ Ora noto che ho $F_x = \frac{\Delta \mathcal{P}_x}{\Delta t} = 2nSmv_x^2$ **Osservo che:** Per ognuna delle pareti che considero, devo considerare tutte le particelle che hanno il rispettivo v_x ma che vanno nella direzione giusta (con il segno giusto). **Osservo che:** Posso considerare la velocità globale della particella, non ho la v_x e v_y . Da v_x devo passare a v . **Osservo che:** v_x è il valor medio delle v , cioè ammetto che ho delle variazioni.

Quindi passo da $v_x^2 \rightarrow v^2$ attraverso il valor medio di v cioè $\langle v_x^2 \rangle$ Ottengo che $v^2 = -nSm \langle v_x^2 \rangle < v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \dots$ Poichè ho scelto io il sistema di riferimento: $mv_x^2 = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$

$$F_x = \frac{\Delta \mathcal{P}_x}{\Delta t} = 2nSmv_x^2 = -\frac{N}{V} S \frac{1}{3} \langle mv^2 \rangle$$

Ottenendo la formula della **pressione**: $P = \frac{F}{S} = +\frac{N}{V} \frac{1}{3} \langle mv^2 \rangle$

Quindi la pressione P nel nostro volume V è $PV = N \frac{2}{3} \langle \frac{1}{2} mv^2 \rangle$ dove $\langle \frac{1}{2} mv^2 \rangle$ è **energia cinetica media**.

22/03/2019

Pressione

$[P] = [\frac{F}{S}]$ dove **F** è **forza** e **S** è **superf.** misurata in **1Pa** cioè **Pascal** Quindi la definizione è

$$P = \frac{dF}{dS}$$

Sotto ad un determinato valore, le variazioni di superficie sono nulle.

Abbiamo che:

$1bar = 10^5 Pa$ $1atm = 1,015 bar = 1,015 \cdot 10^5 Pa$ In millimetri di mercurio $1mmHg | 1atm = 760mmHg$ Facendo un po' di esperimenti ottieniamo che

$PV = costante T$ questo vale solo per gas molto rarefatti e poco reagenti(gas **ideali**) con **T misurata in Kelvin**. Se misurata in C o F non vale.

costante = Rn dove R è **indipendente dal gas considerato** e n è **il numero di moli, la quantità di gas**.

Ricordando che $PV = nRT$ $[R] = [\frac{PV}{nT_e}] = [\frac{F_{L^2} \cdot L^3}{QTe}] = [\frac{F \cdot L}{QTe}] = [\frac{E}{QTe}]$

Esempio:

Ho 13 moli di azoto liquido, a quanti atomi ho?

Che sia liquido o meno poco ci interessa. $N = n \cdot N_a$ dove N_a è il numero di avogadro e n è il numero di moli. otteniamo $nR = N \frac{R}{N_a} = NK_b$ dove K_b è la costante di boltzman.

Costante di Boltzman

$$K_b = \frac{R}{N_a} = \frac{8,314 J/\cancel{mol} K}{6,022 \cdot 10^{23} \cancel{K}/\cancel{mol}} = 1,38 \cdot 10^{-23} J/K$$

ottenendo che

Equazione di stato di gas perfetti

$$PV = nRT \longrightarrow PV = NK_b T$$

Noto che la prima equazione la ottengo **sperimentalmente** mentre la seconda la ottengo **misurando**.

ora noto che $\begin{cases} PV = \frac{2}{3} N \langle E_k \rangle \\ PV = NK_b T \end{cases} \rightarrow K_b T = \frac{2}{3} \langle E_k \rangle \text{ e } \langle E_k \rangle = \frac{3}{2} K_b T = 3 \cdot \frac{1}{2} K_b T$

Il singolo componente del mio gas ha tre gradi di libertà in questo caso. Ora ottengo che

Energia interna media in un gas perfetto monoatomico

$U = E_i =_{monoatomico} N \langle E_k \rangle$ con

$$u = \frac{U}{N} =^{n.a.} \langle E_k \rangle$$

Equipartizione dell'energia cinetica

$$u = L \frac{K_b T}{2}$$
 dove L è il numero di gradi di libertà.

Vediamo dunque che dipende solo da T temperatura e dal numero di gradi di libertà.

Esercizio moli

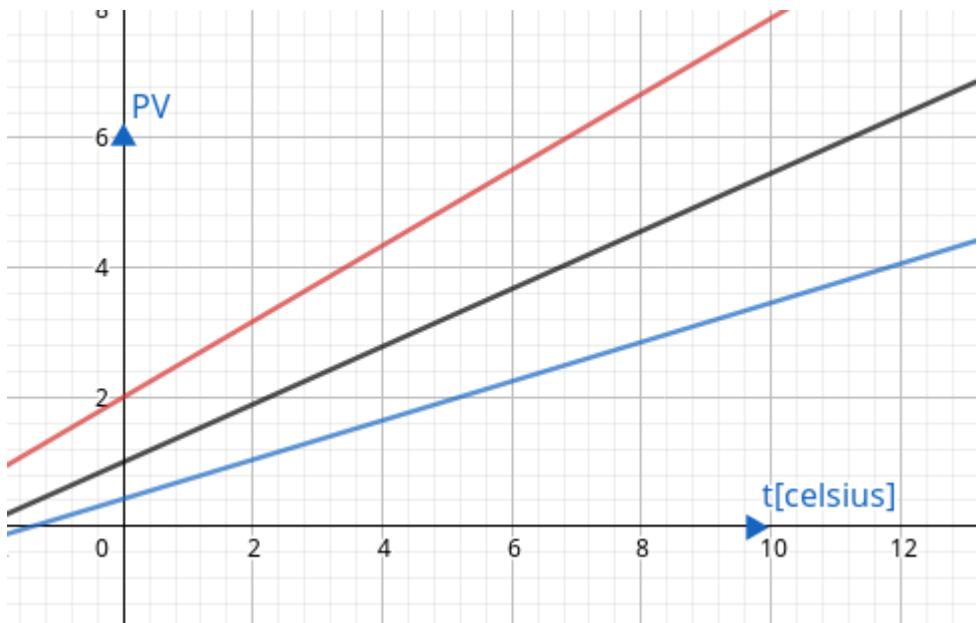
$L = 3$ $n = 3\text{mol}$ $V_i = 831,4\text{l}$ $P = 3\text{atm}$ Trasformazione isobarica $V_f = 2V_i$ $T_i, T_f, U_i, U_f = ?$

$$PV = nRT \quad T = \frac{PV}{nR} \rightarrow T_i = \frac{P_i V_i}{nR} = \frac{3 \cdot 1,015 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 8,314 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{3\text{mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}} = 10150 \text{ K}$$

$P = \frac{nRT}{V} \rightarrow \frac{\cancel{RT}_i}{V_i} = \frac{\cancel{RT}_f}{V_f} \rightarrow \frac{T_i}{V_i} = \frac{T_f}{2V_i} \rightarrow T_f = 2T_i = 20300 \text{ K}$ Calcolando $U = \frac{3}{2} nRT$ $U_f = 2U_i$ ed U_i me lo calcolo.

Esercizio

$$PV = \text{cost } t + A$$

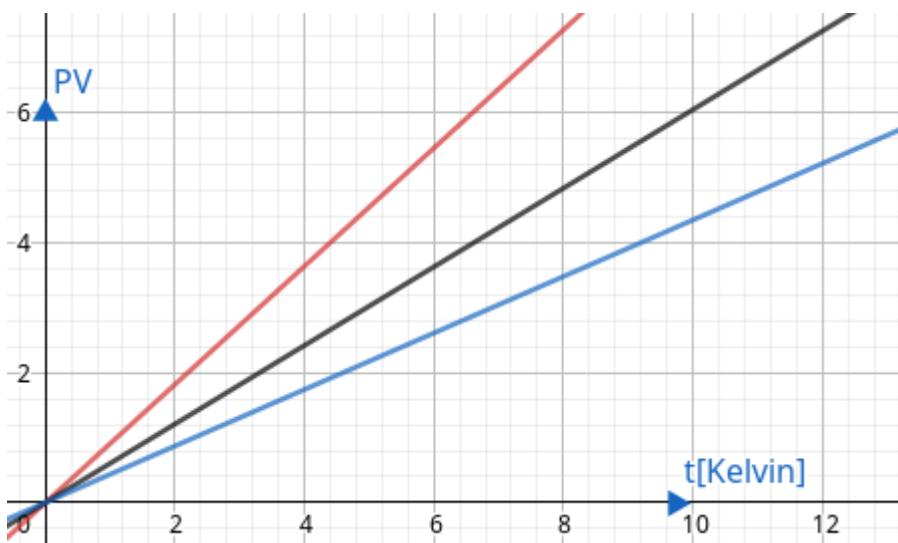


Noto che la temperatura minima possibile non dipende dal gas.

Adatto una scala diversa, spostando la y dove ho lo **zero assoluto**

Zero assoluto: Zero kelvin sotto il quale non ha più senso parlare di termodinamica.

$$0K = -273,16 \text{ celsius}$$



Principi della termodinamica

Ho un ambiente che chiamo universo e un sistema con un energia interna U . Come avviene lo scambio di energia?

Ricordiamo che quando si scalda, aumenta l'**energia interna**. Posso avere degli scambi di:

1. W Lavoro:
 1. Ordinato;
 2. Coerente;
 3. Organizzato.
2. Q Calore
 1. Disordinato;

2. Incoerente;
3. Disorganizzato.

Esempio dei pistoni

Ho un pistone, con dentro un gas, ha una forza esterna che spinge dentro e fuori il pistone. *Man mano che spingo, la pressione sarà maggiore, quindi la forza da applicare è maggiore. Questo aspetto lo trascuriamo, la forza applicata è sempre la stessa.* $W = \vec{F}_{ext} \cdot \Delta \vec{x} = F\Delta x > 0$ Posso assumere che il lavoro esterno si tramuti tutto in variazione di energia interna: $W_{ext} = \Delta U$ cioè $U_i \rightarrow_{W_{ext}} U_f \Delta U = U_f - U_i = W_{ext}$ Questo funziona perché non ho altri scambi di energia di questo gas con l'esterno.

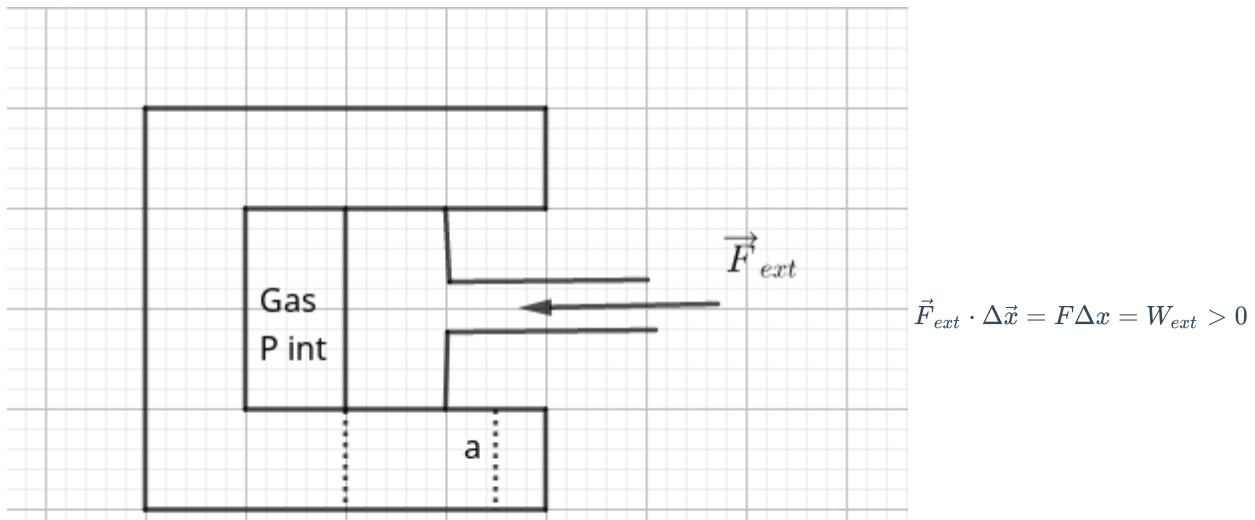
Calore

Se metto un oggetto al sole si "scalda". Ma non ho lavoro, perché **non ho spostamento**. Quindi ho un trasferimento di energia **senza lavoro**. Questo è chiamato **CALORE**.

25/03/2019

Esercizio pistone

$$\vec{F}_{tot} = \vec{0} \quad \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} = \vec{0} \quad \frac{\vec{F}_{ext}}{A} = \frac{\vec{F}_{int}}{A} \Rightarrow P_{ext} = P_{int}$$



$W_{ext} = \Delta U = U_1 - U_i > 0$ La forza esterna va sempre pensata come la forza che **comprime/tenta di comprimere il gas**. Il volume si espande per un Δx , lentamente, la forza esterna prova a contrastarlo. Il lavoro esterno, per questo motivo, sarà dunque **negativo**. $\vec{F}_{ext} \cdot \Delta \vec{x} = -F\Delta x = W_{ext} < 0$ $W_{ext} = \Delta U = U_f - U_i < 0$ Assumiamo sempre che le due forze siano uguali e opposte $W_{ext} = -W_{gas}$ Ottengo che

$$\Delta U_{gas} = -W_{gas}$$

La variazione dell'energia interna è **uguale al lavoro COMPIUTO dal sistema!** cioè più generale

$\Delta U = -W$ Convenzionalmente diciamo che:

- $W > 0$ componente del sistema, sistema che fornisce la variazione;
- $W < 0$ Sistema che si **oppone** alla variazione.

Ricordiamo che U_{int} è *qualcosa che non ha capito* della temperatura. I componenti sono Na · molecole. Quando definisco devo avere il grado di **disordine**.

Esercizio ruota bicicletta

$r_{ext} = 25\text{cm}$ $r_{int} = 23\text{cm}$ Tubolare Ho un uomo con $m = 100\text{kg}$

1. Calcolare il volume del tubo
2. Calcolare pressione all'interno quando l'uomo sale
3. Assumo che per gonfiare la ruota ho fatto 100 colpi di pompa dove, ad ogni colpo, mette $V^{20*C} = 240\text{cm}^3$, a che temperatura ho la ruota quando sale?
4. Calcolare il lavoro per gonfiare la gomma.

Scatola con gas dentro

Ho una scatola con gas dentro

- Espongo la scatola al sole, ho **radiazione luminosa**.
- **Non** conto una ipotetica riflessione.
- Fornisco energia all'oggetto, il volume non cambia.
- Ho T_{gas} e T_{ext} (temperatura recipiente) Se aspetto abbastanza ho un trasferimento di energia tra T_{ext} e T_{gas} tale che

$$\Delta T + T_{ext} = T_{gas}$$

Dove ΔT è la variazione di temperatura provocata dalle radiazioni.

Ho un trasferimento di energia senza **lavoro meccanico**.

Calore

Calore: $\Delta U = Q$ Variazione di energia **senza lavoro meccanico**. con:

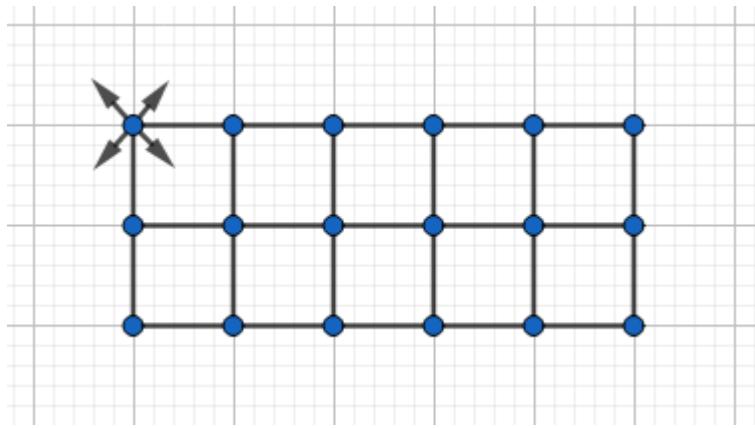
- $Q > 0$ se è ricevuto dal sistema
- $Q < 0$ se è sottratto dal sistema.

Ricordiamo che noi trattiamo **sistemi in equilibrio**, quindi il contenitore e il gas all'interno raggiungono la stessa temperatura (aspettando abbastanza).

Primo principio della termodinamica

$$\Delta U = Q - W \text{ Variazione di energia interna= Calore - Lavoro}$$

Conduzione



Atomi che "vibrano", percepibile da tutti gli atomi vicini. Aumentando la vibrazione avrà un aumento della vibrazione indotta. Per conduzione: Sposto energia con calore. La sua vibrazione è l'**energia media**, crea un'onda di calore. La vibrazione viene trasmessa agli atomi vicini in modo "ammortizzato", cioè più debole, che a loro volta trasmetteranno ai loro vicini in modo più debole ancora, fino a quando sarà impercettibile. Questa vibrazione è il calore.

Convezione

Ho un fluido, con una zona del fluido più calda, spostandolo ad una zona più fredda il calore si "dissipa". Per esempio: in un sistema di raffreddamento a liquido, il liquido passa da freddo a caldo perché viene fatto passare in zone dove il motore ha bisogno di rilasciare calore. Il calore viene passato al liquido, che viene fatto circolare fino a raggiungere una zona aperta all'ambiente, nel quale disperde il calore che aveva ottenuto tornando freddo.

Irraggiamento

A colpire il mio sistema è la **radiazione elettromagnetica**, cioè **energia pura**. L'energia non viene "riflessa", viene assorbita facendo in modo che l'oggetto vibri e si scaldi.

Riflessione: Un fotone entra, l'atomo si eccita e si diseccita subito, rispedendo lo stesso fotone (dove in realtà è viverso ma potente uguale).

Curiosità: Un corpo nero ha temperatura costante ($\approx 2.7K$).

Sistema Isolato

Sistema che non scambia **calore**, ne **lavoro** con il sistema esterno. Il sistema è definito **chiuso** se ho inoltre una assenza di scambio di materia.

Esempio sistema isolato

Ho un sistema isolato con un pendolo dentro.

Se torno dopo anni avendo dato una spinta al pendolo e ho del gas dentro, il pendolo sarà fermo (attrito). avendo U_i come energia interna iniziale e U_f energia interna finale: $\begin{cases} Q = 0 \\ W = 0 \end{cases} \Delta U = 0 \implies U_f = U_i$ ma quindi otteniamo che $\begin{cases} U_i = U_i^{\text{pendolo}} + U_i^{\text{gas}} \\ U_f = \cancel{U_f^{\text{pendolo}}} + U_f^{\text{gas}} \end{cases}$ abbiamo che $\cancel{U_f^{\text{pendolo}}}$ perché $U_f^{\text{pendolo}} = 0$ visto che il pendolo è **fermo** a fine esperimento. Otteniamo dunque:

$$U_f^{\text{gas}} = U_i^{\text{pendolo}} + U_i^{\text{gas}} \quad U_f^{\text{gas}} - U_i^{\text{gas}} = \Delta U^{\text{gas}} = U_i^{\text{pendolo}} \quad \text{Con } \Delta T^{\text{gas}} > 0 \text{ e } T_f^{\text{gas}} > T_i^{\text{gas}}$$

Ottengo delle osservazioni importanti:

1. U finale del gas è la U iniziale del pendolo + la U finale del gas.
2. U del pendolo iniziale è dunque ΔU_{gas} .
3. *Se varia la temperatura il pendolo non si muove, perché il gas si scalda in modo disordinato, non solo da un lato.*
4. Il disordine è presente.

Trasformazioni

Trasformazione isocora

$\Delta V = 0 \Rightarrow W = 0$ (volume non varia, non ho un lavoro che ci agisce) $\Delta U = Q$

Trasformazione adiabatica

$Q = 0$ (calore non varia) $\Delta U = -W$

Trasformazione isotermica

$\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 \iff Q = W$ con $Q > 0, W > 0$ (temperatura non cambia)

Capacità termica

Avendo un gas

$$\Delta Q = c \Delta T \implies c = \frac{dQ}{dT} \text{ Capacità termica}$$

Quindi La capacità termica è il variare del calore in relazione alla variazione di temperatura ($c = \frac{dQ}{dT}$)

Come unità di misura ha $c = \frac{1J}{1K}$ Un buon piumino ha una **alta capacità termica**, mentre un fondo di pentola ha una **bassa capacità termica**.

Affermiamo anche che

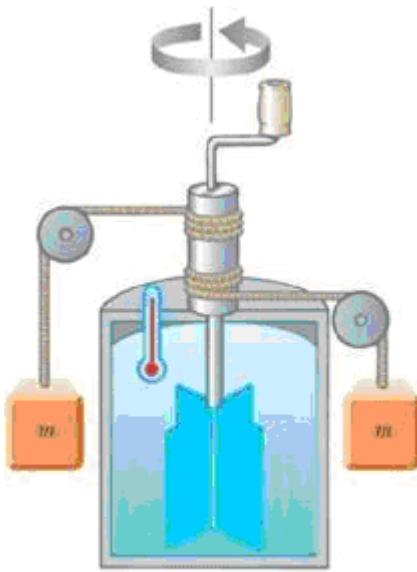
Più massa = Maggiore capacità termica.

Calore specifico

Di due tipi:

1. **Calore specifico (per quantità di massa)** = $c = \frac{c}{m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}$ Unità di misura = $\frac{J}{kg \cdot K}$
2. **Calore specifico (Molare)** = $c = \frac{c}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{dQ}{dT}$ Unità di misura = $\frac{J}{mol \cdot K}$

Esperimento di Joule



Mulinello di Joule

$W = mgh$ $W_{H_2O} = 0$ $\Delta U = Q$ (1 principio termodinamica) $p = 1atm$ $14,5^\circ c \rightarrow 15,5^\circ c$ Devo applicare un lavoro $W_G = 4,186KJ$ Otteniamo dunque il valore di una **kilocaloria (Kcal)** che

$$1cal = 4,186J$$

$$C_{H_2O} \text{ liquido} = \frac{1Kcal}{1Kg \cdot 1K} = 4,186 \frac{KJ}{KgK}$$

Ricordiamo che $\Delta T = 1K = \Delta T = 1^\circ c$

Esempio pozzanghera

Ho una pozzanghera quadrata con uno strato di nylon sopra(ininfluente, serve solo per evitare l'evaporazione) sappiamo che $W_{sole} = 700W/m^2$ La pozzanghera è lunga e larga $50cm$ e profonda $1cm$ $T_i = 20^\circ c$ $\Delta U = Q = ?$ (Non ho variazioni di volume, trasformazione isocora) $\Delta t = 8hr$ $T_f = ?$ Quale sarà la temperatura finale della pozzanghera se il sole apparisse istantaneamente(e non lentamente) per 8 ore?

$W_{sole} \Delta t = Q = mc \cdot \Delta T$ cioè il calore immesso dal sole per irraggiamento nel tempo.

$SW_{sole} \Delta t = mc \Delta T$ è importante ricordare che devo considerare la superficie, anche se vedremo che sarà ininfluente.

$$\Delta T = \frac{SW_{sole} \Delta t S}{mc} = \frac{W_{sole} \Delta t S}{\rho V c} = \frac{W_{sole} \Delta t \cancel{L^2}}{\rho \cancel{L^2} hc}$$

Ora abbiamo dunque $\frac{7 \cdot 10^2 \cdot 2,9 \cdot 10^4}{10^3 \cdot 10^{-2} \cdot 4,19 \cdot 10^3} K = 5 \cdot 10^2 = 500K$

è dunque aumentata di 500 gradi kelvin .

Questo avviene perchè non ho considerato il **calore latente**.

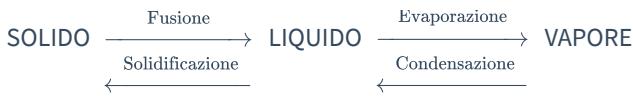
Calore latente

$$Q = \lambda m$$

$$\lambda = \text{Calore latente.}$$

Si misura in J/Kg . $\Delta T_{\text{Cambio di stato}} = 0$ è un calore che si verifica quando abbiamo una coesistenza tra vapore e liquido, una coesistenza di due stati.

Stati della materia



$\lambda_{SL} = 3,3 \cdot 10^5 \text{ J/Kg}$ dove *SL* sta per *Solido Liquido* . $\lambda_{LV} = 2,7 \cdot 10^7 \text{ J/Kg}$ dove *LV* sta per *Liquido Vapore* .

Per casa

1. Ripetere esercizio precedente(della pozzanghera) rimuovendo lo strato di nylon.
 2. Ho 2kg di ghiaccio a -10°C
 3. Disegnare il grafico Temperatura/Calore (Temperatura asse y , Calore asse x)
 4. Disegnare il grafico Temperatura/ tempo (Temperatura asse y , tempo asse x) Aggiungendo che $\frac{dQ}{dT} = 100\text{cal/hr.}$

29/03/2019

Ho un sistema e due corpi: m_1, c_1, T_1 m_2, c_2, T_2 (c è la capacità termica) Quando i due corpi sono a contatto ho uno **scambio di calore**. $Q_1 + Q_2 = 0$ perchè il calore che scambia con l'esterno è zero! $Q_{tot} = 0$ Per la definizione di calore specifico, $Q_1 = m_1 c_1 (T_f - T_1)$

$$Q_2 = m_2 c_2 (T_f - T_2)$$

Sommandoli, ottengo

$$Q_1 + Q_2 = m_1 c_1 (T_f - T_1) + m_2 c_2 (T_f - T_2)$$

$$0 \quad \quad \quad = (m_1 c_1 + m_2 c_2) T_f - (m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2)$$

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

In generale

$$T_f = \frac{c_1 T_1 + c_2 T_2}{c_1 + c_2}$$

Vuoto: Non ho molecole.

Esercizio

$$m_1 = 30g \quad t_1 = -15^\circ C \quad m_2 = 50g \quad t_2 = 60^\circ C \quad T_e = ? \text{ traduciamo i dati in una forma utilizzabile} \quad t_{1_k} = T_1 = 258K \\ t_{2_k} = T_2 = 333K \quad \lambda_{H_2O} = 3,3 \cdot 10^5 J/Kg \quad c_{H_2O} = \frac{1kcal}{Kg \cdot K} = 4,19KJ/Kg \cdot K \quad Q_1 = m_1 c_1 \cdot (T_f - T_1) \text{ sommandoli} \\ Q_2 = m_2 c_2 \cdot (T_f - T_2)$$

$$Q_1 + Q_2 = (m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) \cdot T_f - (m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2) T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

$$Q_{fus} = \lambda_{H_2O} \cdot m_1 = 10^4 J \quad Q_{ghiaccio} = m_1 \cdot c_1 \cdot (T_{fus} - T_1) = 900 J \quad Q_{Acqua}^{(max)} = m_2 \cdot c_2 \cdot (T_{fus} - T_2) = -1,26 \cdot 10^4 J$$

Il resto è un tentativo di uno studente. Trovo il calore dell'acqua dopo che il ghiaccio si è sciolto $Q_{H_2O}^{res} = 1,7 \cdot 10^3 J$
 $Q_{H_2O}^{res} = m_2 \cdot c_2 (T_* - T_{fus} = 1,7 \cdot 10^3 J = 30g \cdot 4,19 KJ/Kg \cdot K \cdot (t_* - 0^\circ C)$

$$\frac{1,7 \cdot 10^3 \text{J} \text{kg}^\circ\text{C}}{50a \cdot 14 \text{KJ}} = t_* = 0,85 \cdot 10^\circ\text{C} = 8,5^\circ\text{C}$$

$$Teq = \frac{m_1 \cdot c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = \frac{30g \cdot 273K + 50g + 281,5K}{80g} = 278,3K = 5^\circ\text{C}$$

01/04/2019

$\vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_t}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_{tot} = \overrightarrow{const} \Rightarrow \vec{P}_{tot}$ ottenendo $\vec{P}_{tot}^{iniziale} = \vec{P}_{tot}^{finale}$ Quindi otteniamo che

Se niente perturba il moto del sistema, la quantità di moto totale si conserva.\

In altre parole $\sum_{i=1}^N \vec{P}_i(\text{iniziale}) = \sum_{j=1}^M \vec{P}_i(\text{finale})$ Noto che N e M non sono necessariamente uguali(non necessariamente stesso numero), vale anche per i e j (non necessariamente stesso corpo).

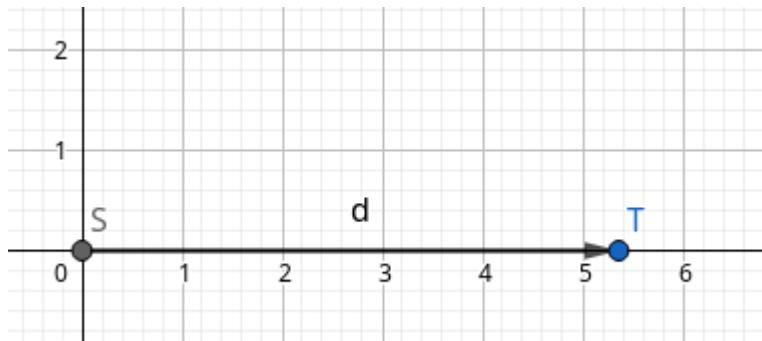
Centro di massa

#

$\vec{x}_{CM} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$ Punto che meglio approssima l'equilibrio del sistema.

In una dimensione, tolgo semplicemente i vettori.

Esempio Sole Terra



Ho il Sole, che indicheremo con $_s$ e terra che indicheremo con $_T$ $m_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$ $m_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$ $d = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ cioè la distanza tra la terra e il sole.

Calcolo r : $r_{CM} = \frac{M_s x_s + m_T x_T}{m_s + m_T} = \frac{m_T}{m_s c_1 + \frac{m_T}{m_s}}$ Dove $\frac{m_T}{m_s} = \epsilon \simeq 10^{-6}$

$x_T = \frac{m_T}{m_s} (1 - \frac{m_T}{m_s})$ ottenendo $r_{CM} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} = 4,5 \cdot 10^5 \text{ m} = 450 \text{ km}$

Esempio raggio sole

Avendo il raggio della terra $R_T \simeq 6,4 \cdot 10^3 \text{ m}$ quanto sarà il raggio del sole? $R_s = ?$ Lo ottengo. Il sole è circa $0,5^\circ$ di inclinazione rispetto alla terra, cioè $8,5 \text{ millirad}$, ($1^\circ = 17 \text{ millirad}$)

$d \tan \frac{\phi}{2} = R d \cdot 4,2 \cdot 10^{-3} = R 1,5 \cdot 10^{11} \cdot 4,2 \cdot 10^{-3} = R 6,3 \cdot 10^8 \text{ m} = R R = 630000 \text{ km}$ Raggio del sole.

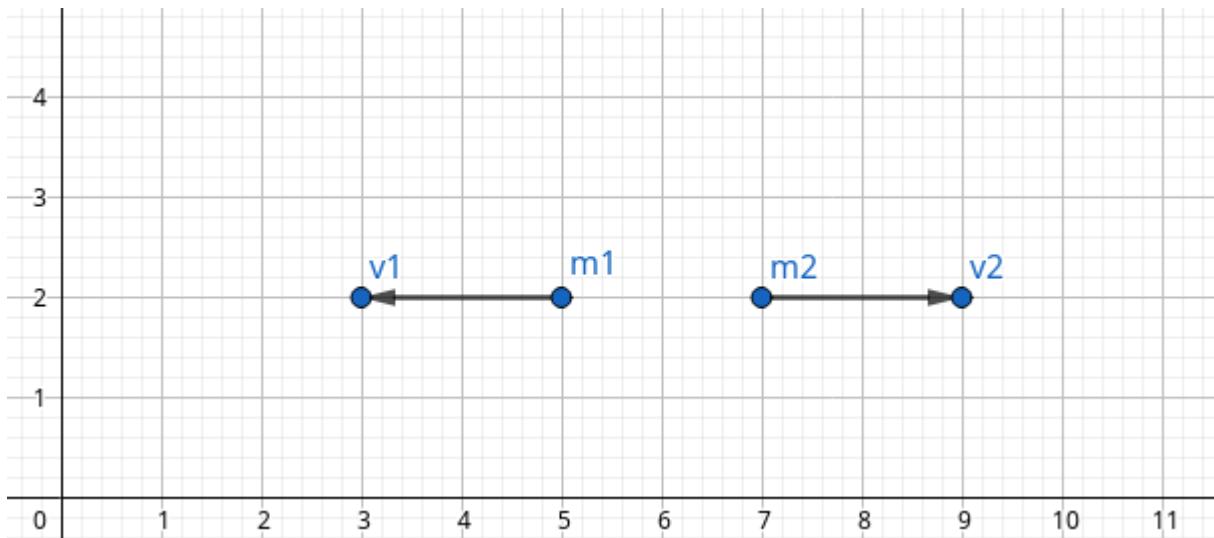
Utili da sapere per esame

Se $\epsilon \ll$ (molto piccolo) allora vale

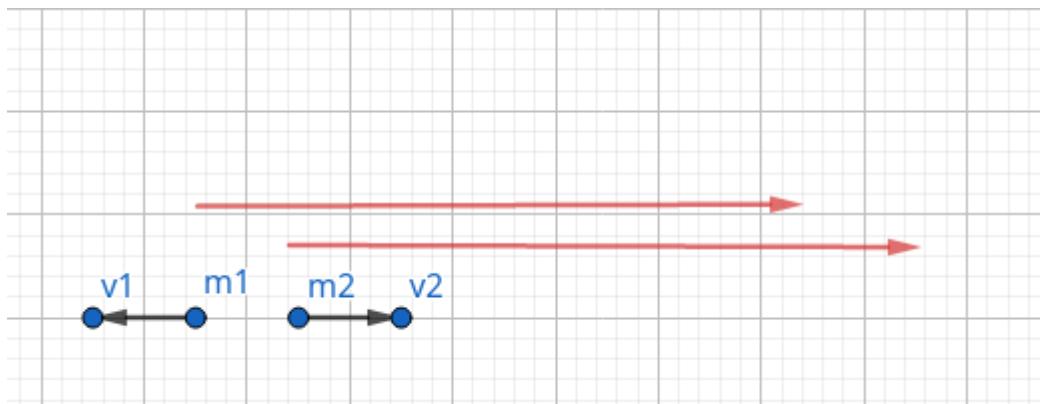
- $1 + \epsilon^\alpha = 1 + \alpha\epsilon$
- $\tan \epsilon = \sin \epsilon = \epsilon$
- $\cos \epsilon = 1 - \frac{\epsilon^2}{2}$
- $\ln(1 + \epsilon) = \epsilon$
- $e^\epsilon = 1 + \epsilon$ Praticamente limiti che tendono a zero.

Esempio su Aereo

Ho un aereo privato



Definiamo $v_2 - v_1$ come la differenza tra le due frecce. Posso affermare che la lunghezza nella prossima immagine sarebbe equivalente se non fosse per v_1 che si oppone al nostro "aereo".



Ora avendo i che varia tra 1 e 2 ottengo $\vec{v}_i' = \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{x}_i - \vec{x}_{CM}) = \frac{d\vec{x}_i}{dt} - \frac{d\vec{x}_{CM}}{dt}$ dove $\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i$ e $\frac{d\vec{x}_{CM}}{dt} = \vec{v}_{CM}$

Ma noto che tutto ciò è **energia cinetica**

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \quad E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{CM})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i^2 + \vec{v}_{CM}^2 - 2 \cdot \vec{v}_i \cdot \vec{v}_{CM}) = \\ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 - (\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i) \vec{v}_{CM}$$

Ottenendo $\begin{cases} E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \\ E'_k = E_k \frac{1}{2} M v_{CM}^2 - \vec{v}_{CM} \cdot \sum m_i \cdot \vec{v}_i \end{cases}$

Cioè che possiamo** cambiare il sistema di riferimento senza variare il risultato** (anche se l'energia cinetica varia!)

La quantità di moto si conserva

$\vec{x}_{CM} = \vec{0} \quad m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$ Ora derivo in base al tempo $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$ cioè $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$ Ottengo

$\Delta \vec{P}_{tot} = \vec{0}$, cioè la **quantità di moto** si conserva nell'urto!

Esperimento barra

ho una barra, con due masse sopra all'estremità. La barra è su un materiale che non ha attrito.



Immaginiamo che la barra "scorra" verso una direzione, facendo impattare le due masse.

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{d}{2} (m_1 + m_2) \frac{d x_{CM}}{dt} = m_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{m_2 x_2}{dt} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = P_1 + P_2 = P_{tot} = 0$$

ottengo che

Se due masse impattano, **non avendo forze esterne**, il centro di massa **rimane nello stesso punto**. In questo caso, il centro di massa rimane a metà della barra.

$$x_1^{Finale} - x_2^{Finale} = \frac{d}{2}$$

$$x_{CM}^{Finale} = \frac{m_1 x_1^{Finale} + m_2 x_2^{Finale}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1^{Finale} + m_2 (x_1^{Finale} - \frac{d}{2})}{m_1 + m_2} = x_{CM}^{Iniziale} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{d}{2}$$

$$\text{Concludendo } (m_1 + m_2) x_1^{Finale} = m_2 \cdot d \quad x_1^{Finale} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot d$$

Urto perfettamente anaelastico

Definisco **urto perfettamente anaelastico** quando due masse, in un urto si "attaccano".

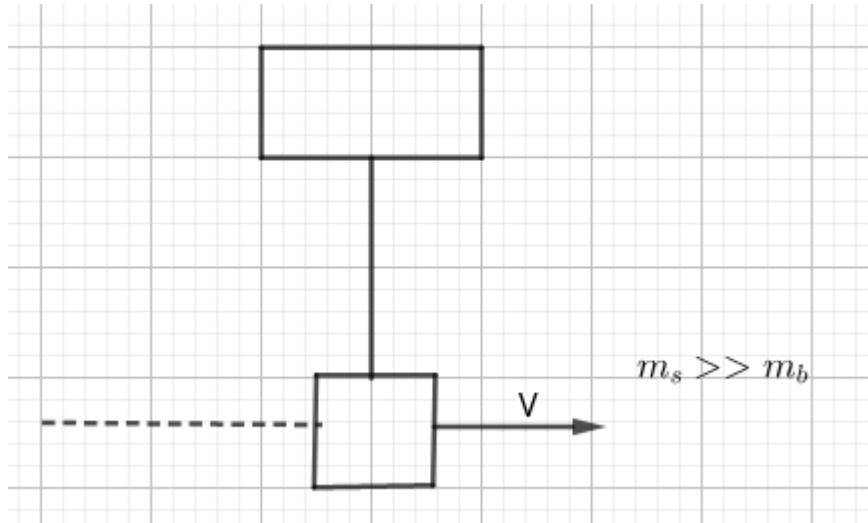
Esercizio Avendo un pendolo balistico $\Delta \vec{P}_{tot} = 0$

$$\vec{P}_{iniziale} = \vec{P}_{finale}$$

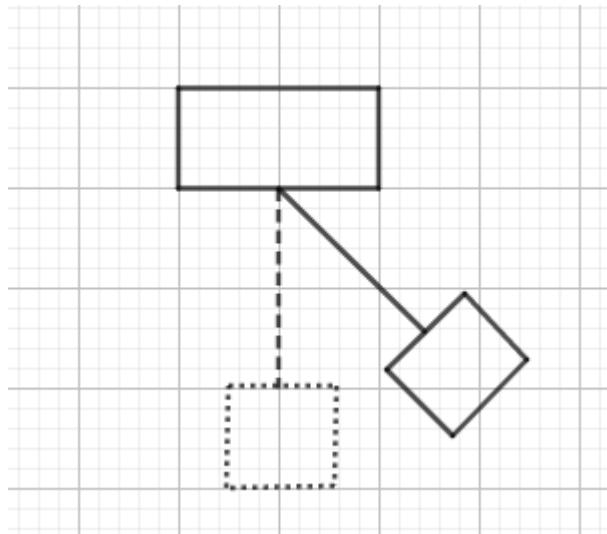
$$m_1 \vec{v}_1^{iniziale} + m_2 \vec{v}_2^{iniziale} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}^{finale}$$

$$\vec{v}^{finale} = \frac{m_1 \vec{v}_1^{iniziale} + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \xrightarrow[m_b]{v_b} \text{Più in specifico}$$

Ho un proiettile sparato verso un sacco di sabbia. Si comporterà come un pendolo.



Il movimento sarà

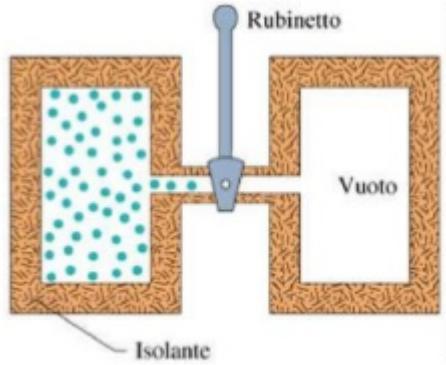


$M = m_s + m_b$ ~~$m_b V_b + m_s V_s = MV$~~ Il sacco essendo fermo all'inizio abbiamo $V_s = 0$ ottengo $h = l - l \cos \phi$ dove l è la lunghezza del cavo. $Mgh = \frac{1}{2} M V^2 \iff V = \sqrt{2gh}$ $V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl} 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} = 2 \sin \frac{\phi}{2} \sqrt{gl}$ Utilizzando la formula di bisezione $\sin \frac{\phi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \phi}{2}}$ Ottengo dunque $V_b = \frac{m_b+m_s}{m_b} 2 \sin \frac{\phi}{2} \sqrt{gl} = \frac{m_b+m_s}{m_b} \phi \sqrt{gl} = \frac{m_s}{m_b} \phi \sqrt{gl}$

Esperienza di Joule (Espansione Libera)

Ho un contenitore:

- Pareti rigide e adiabatiche (non ho scambio di calore con l'esterno);
- Quantità di gas (moli) all'interno di un gas ideale all'interno di un comparto;
- Ho setto apribile e chiudibile tipo rubinetto.



Otteniamo che il gas si espande (espansione libera) e **non fa ne subisce lavoro!** Non ho scambio di calore con l'esterno!

L'energia interna del sistema non cambia per il primo principio della termodinamica.

$$\begin{cases} dW = 0 \\ dQ = 0 \end{cases} \quad dV = 0, dT = 0 = U = U(t)$$

Dove $dt = 0$ è stato ottenuto **sperimentalmente**.

A Volume costante(isocora): $dV = 0$ $dW = pdV = 0$ $dQ = nc_vdT$ con c_v calore specifico; $dQ = dV$ ottengo

$$dU = nc_vdT \Leftarrow \text{Vale sempre. } \Delta U = nc_v\Delta T$$

La temperatura del gas non cambia! Quindi:

U dipende **solo** da T .

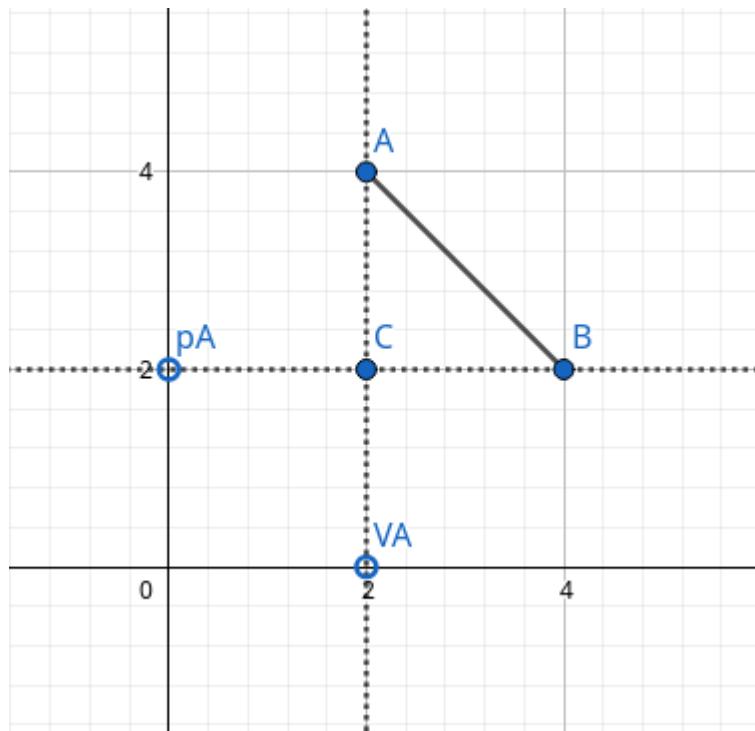
05/04/2019

Sospensione lezioni per prove intermedie

08/04/2019

Calore Specifico in base al processo

Abbiamo un grafico che descrive andamento di 3 gas.



$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \Delta T = 0 \end{cases} \Rightarrow U = U(T)$ $pV = mRT$ perchè ho un gas ideale. Il punto A è composto da p_A, V_A, T_A . Il punto B è composto da p_B, V_B, T_B . Il punto C è composto da p_C, V_C, T_C . $\frac{p_A V_A}{nR} = T_A$ $p_A V_A = nRT_A$ dove R e T_A sono costanti. $\Delta U = U_C - U_A = ?$ Riprendo il calore specifico molare: $c = \frac{1}{n} \frac{dq}{dT}$,

ho un calore specifico che dipende dal processo considerato: $c_{proc} = \frac{1}{n} \left[\frac{dq}{dT} \right]_{proc}$

Ciò significa che una espansione **isoterma** crea un differente c_{proc} di una espansione **isocora**.

$\Delta U = U_B - U_A = (U_B - U_C) + (U_C - U_A) = \Delta U_{BC} - \Delta U_{CA}$ $A \rightarrow C : dU = dQ - \cancel{dW} - \cancel{dW}$ perchè isocora). Quindi: $dV = dQ = nC_V dT$ Uso V perchè ho il **volume costante**. Ottengo $dQ_{p_R} = nC_{p_R} dT$.

Riprendendo: $nC_V dT \xrightarrow[c_V=\text{costante}]{} \Delta U_{CA} = nC_V \Delta T = nC_V (T_C - T_A)$

$C \rightarrow B :_{\text{Isoterma}} dU = \cancel{dQ} - dW$ ma posso affermare che $\rightarrow \Delta U_{CB} = U(T_B) - U(T_C) = 0$ con T_B temperatura finale e T_C temperatura iniziale.

$$\Delta U = \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = nC_V \Delta T$$

$$nC_V (T_C - T_A)$$

dunque ottengo che con i gas ideali possiamo usare ciò.

ΔU è proporzionale a C_V e **non** dipende dalle trasformazioni, **vale sempre**.

Relazione di Mayer

ho una isobara (p costante) $dV = dQ - dW$ $pV = nRT$
 $nC_V dT = nC_V dT - pdV$

$d[pV] = d[nRT]$ otteniamo

Differenziazione equazione di stato di gas perfetti: $Vdp + pdV = nRdT$

Tornando a $pV = nRT$ $nRdT - \cancel{Vdp} (\cancel{Vdp}$ perchè la pressione è costante!) $= n(c_P - c_V)dT$ cioè

Relazione di mayer: $c_P - c_V = R$

Continuando abbiamo che

$$R > 0 \iff c_P - c_V > 0 \iff c_P > c_V$$

Per i diversi tipi di gas abbiamo:

1. **Gas Monoatomici** $c_V = \frac{3}{2}R \Rightarrow c_P = \frac{5}{2}R$
2. **Gas Biatomici** $c_V = \frac{5}{2}R \Rightarrow c_P = \frac{7}{2}R$
3. **Gas Poliatomici** $c_p/R = a + bT + cT^2$

Grafici p V

Ricordiamo che una *adiabatica non ha scambio di calore con l'esterno*. $Q = 0$ Per il primo principio della termodinamica abbiamo che: $dV = \cancel{dQ} - dW nc_vdT = -pdV$ Ricapitolando:

- **Isocora** $V = \text{Costante}$
- **Isobara** $p = \text{Costante}$
- **Isoterma** $T = \text{Costante}$

ed una adiabatica come si comporta ?

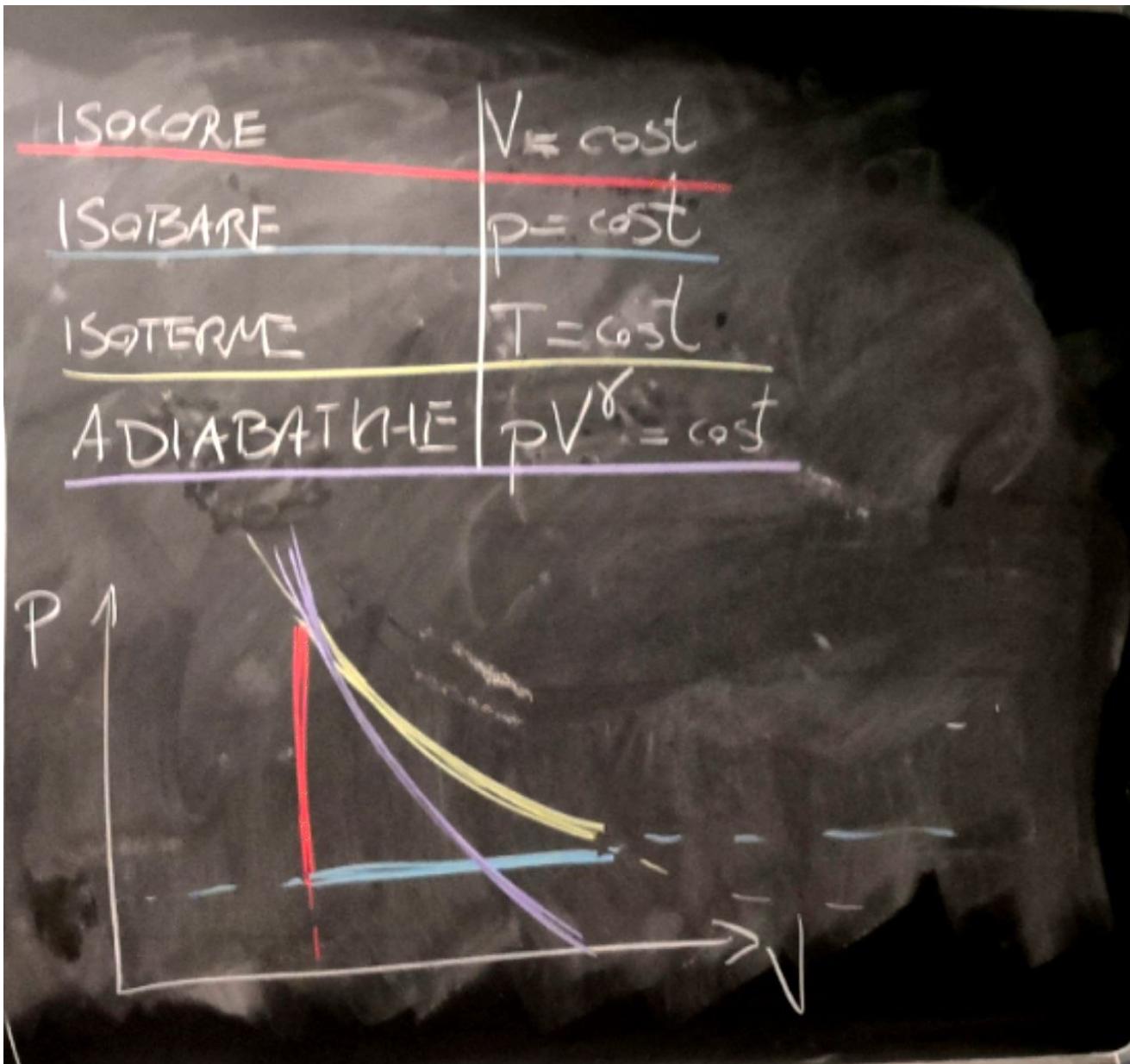
$$n(c_P - R)dT = -pdV nc_PdT = nRdT - pdV nRdT = pdV + Vdp - Vdp = pdV - nRdT nc_PdT = Vdp$$

Ora unisco $nc_PdT = Vdp$ con $nc_vdT = -pdV$ ottenendo (il primo sopra il secondo sotto frazione) $\frac{nc_PdT}{nc_vdT} = -\frac{Vdp}{pdV}$

ho dunque ottenuto $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{dp/p}{dV/V} > 1$ cioè $-\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{dV}{V} \Rightarrow \int -\frac{1}{\gamma} d[\ln p] = \int d[\ln V]$

ottengo $-\frac{1}{\gamma} \ln\left[\frac{p_{finale}}{p_{iniziale}}\right] - \ln\left[\frac{V_{finale}}{V_{iniziale}}\right]$

$$pV_{iniziale}\gamma = p_{finale}V_{finale}\gamma \rightarrow pV^{\gamma-1} = \text{costante} Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{costante}$$



abbiamo dunque che

- **Isocora** $V = \text{Costante}$
- **Isobara** $p = \text{Costante}$
- **Isotermia** $T = \text{Costante}$
- **Adiabatica** $pV^\gamma = \text{Costante}$

In tabella otteniamo

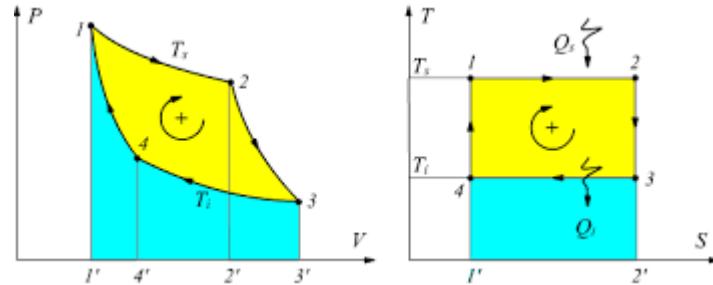
Tipologia	dU	dQ	dW
Isocore	$nc_V dT$	$nc_V dT$	\emptyset
Isobare	$nc_V dT$	$nc_p dT$	$-nRdT$
Isotermia	\emptyset	pdV	pdV
Adiabatiche	$nc_V dT$	\emptyset	$-nc_V dT$

Cicli Termodinamici

#

Un Ciclo Termodinamico avviene quando lo stato **iniziale** coincide con lo stato **finale**.

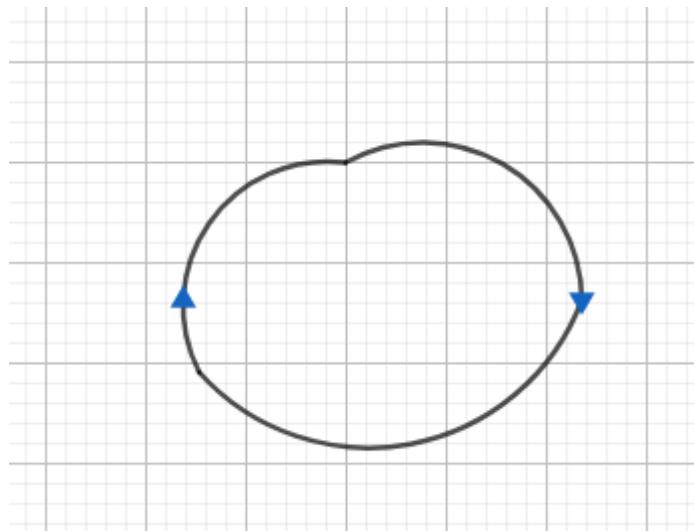
Possiamo anche dire che (*i* per iniziale e *f* per finale) $U_i = U_f \Rightarrow \Delta U = 0$ $p_i = p_f$ $V_i = V_f$ $T_i = T_f$



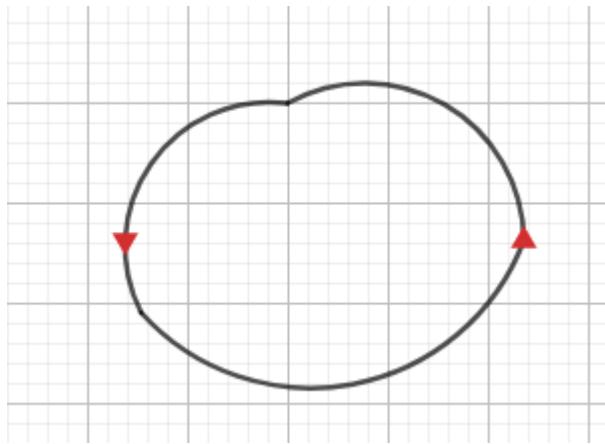
In questo esempio abbiamo l'area sottostante di colore azzurro, mentre l'area sovrastante in colore giallo. Noi consideriamo $W_{superiore}$ come l'area sottesa della zona superiore, quindi area azzurra+area gialla. Consideriamo $W_{inferiore}$ come l'area sottesa alla parte inferiore, quindi l'area azzurrina. $W_{superiore} + W_{inferiore} = W$

Per determinare il **segno di w**, ho bisogno dei segni di $W_{superiore}$ e di $W_{inferiore}$. Per vedere se è **compiuto o subito** ho bisogno del **verso di percorrenza**.

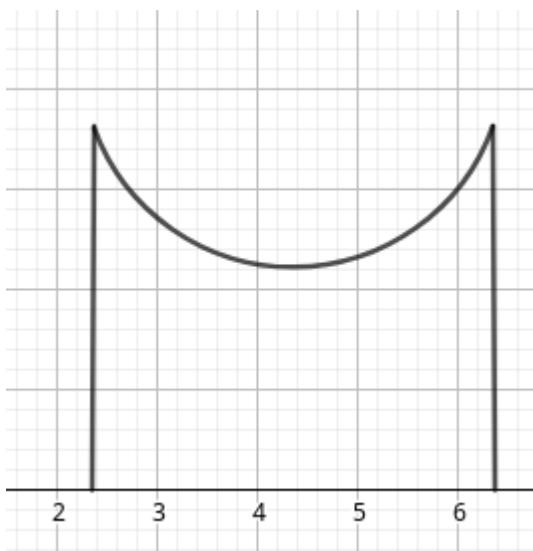
Affermiamo che $|W_{superiore}| > |W_{Inferiore}|$ $\begin{cases} W_{superiore} > 0 \\ W_{inferiore} < 0 \end{cases}$ allora $W > 0$, senso **orario**.



$\begin{cases} W_{superiore} < 0 \\ W_{inferiore} > 0 \end{cases}$ allora $W < 0$, senso **antiorario**.



Un ciclo non compie lavoro quando ha una linea unica senza area all'interno.



$$\Delta U = Q - W \quad Q = W$$

Tutto il lavoro che fa la da come **calore**.

Ciclo termico/Macchina termica

$$W > 0 \Rightarrow Q > 0$$

Ciclo frigorifero/Macchina frigorifera

$$W < 0 \Rightarrow Q < 0$$

Calore ceduto e calore assorbito

Q_A = Somma di tutti i calori assorbiti, quindi $Q_A > 0$. Q_C = Somma di tutti i calori ceduti, quindi $Q_C < 0$.

Lavoro subito e lavoro effettuato

W_F = Somma di tutti i lavori effettuati, quindi $W_F > 0$. W_S = Somma di tutti i lavori subiti, quindi $W_S < 0$.

Ciò mi porta a

$$Q = Q_A + Q_C \quad Q = W \quad Q_A + Q_C = W_F + W_S \quad W = W_F + W_S$$

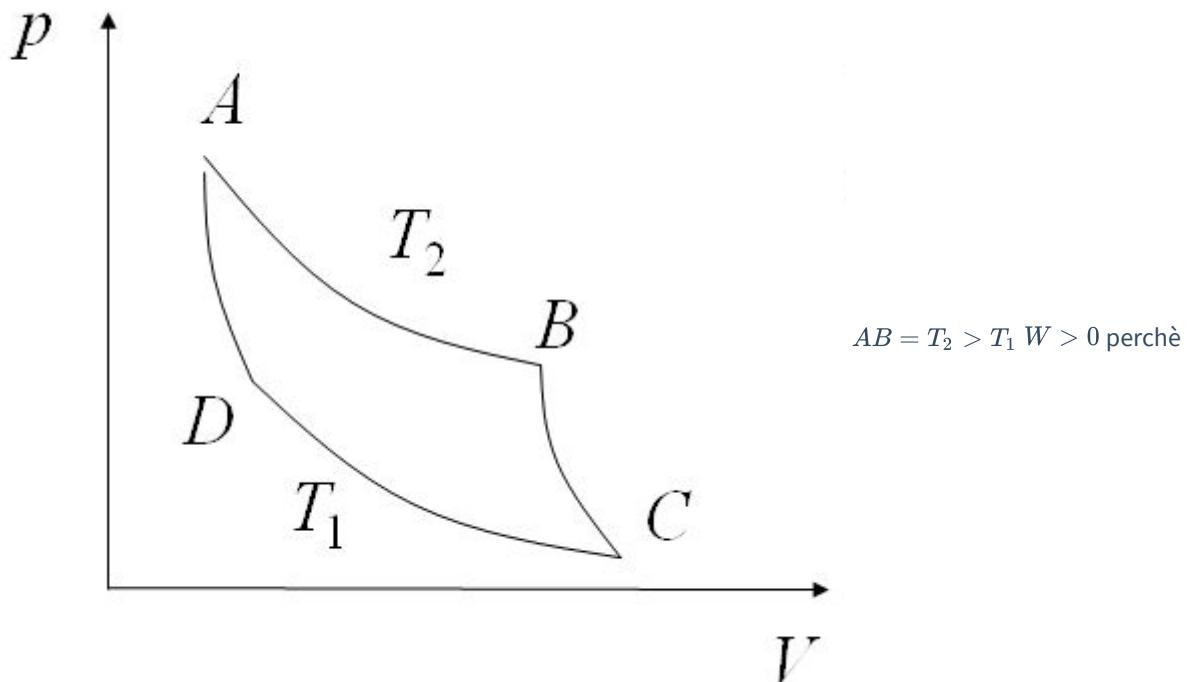
Rendimento di una macchina termica

Il lavoro/Calore assorbito = $\frac{W}{c_A} = \eta = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$ e ciò vale per tutte le macchine termiche.

Reversibilità di una trasformazione

Una trasformazione è reversibile se, qualsiasi sia il dettaglio, vedo una serie di **stati di equilibrio**. Uno stato di equilibrio di esempio, per un gas ideale: $pVnRT$ per ogni punto.

Ciclo di Carnot



orario.

Avendo il seguente ciclo possiamo affermare che:

- AB è una **espansione reversibile isoterma**;
- BC è una **espansione reversibile adiabatica**;
- CD è una **compressione reversibile isoterma**;
- DA è una **compressione reversibile adiabatica**.

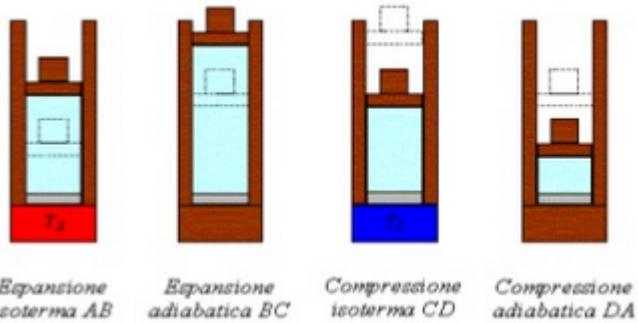
Sperimentalmente notiamo che $0 \leq \eta < 1$

12/04/2019

Ho due sorgenti a temperature T_2 e T_1

Potrei connetterle con delle isocore, ma non lo faccio perchè avrei **scambio di calore**. Voglio che ci sia scambio di calore **nullo**, quindi utilizzo delle **adiabatiche** per collegare le due sorgenti.

Immagino di avere un pistone, rappresentato come punto A che deve arrivare ad uno stato B



Ho che

$A \xrightarrow{\Delta U=0, Q=W} B \xrightarrow{\Delta U=-W, Q=0} C \xrightarrow{\Delta U=0, Q=W} D$ Nel passo A abbiamo calore Q_I ceduto dalla sorgente T_2 Nel passo B abbiamo lavoro W_1 compiuto. Nel passo C abbiamo calore Q_1 ceduto alla sorgente T_1 Nel passo D abbiamo lavoro W_{II} subito.

Abbiamo che $Q_2 = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ (questo è così perchè $Q_2 = W_2 = \int_A^B pdV$) $T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$
 $W_I = -\Delta U_{BC} = nc_V(T_2 - T_1) T_2 V_B^{\gamma-1}$ è associabile a B mentre $T_1 V_C^{\gamma-1}$ è associabile a C

$Q_1 = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}$ $W_{II} = -\Delta U_{DA} = nc_V(T_1 - T_2) T_1 V_D^{\gamma-1}$ è associabile a D mentre $T_2 V_A^{\gamma-1}$ è associabile a A

Mi calcolo il rendimento $\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$ con un po' di calcoli noto che i due logaritmi sono uguali. Quindi

$$= 1 - \frac{nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{\cancel{nR} \cancel{T_1} \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{\cancel{nR} \cancel{T_2} \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

dove abbiamo che l'inefficienza $= \frac{T_1}{T_2}$

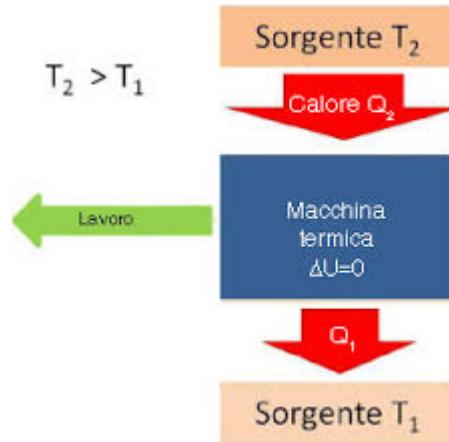
Di conseguenza abbiamo un'altra importante equazione

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \Rightarrow \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Rappresentazione macchina termica

Con La macchina Termica reversibile.

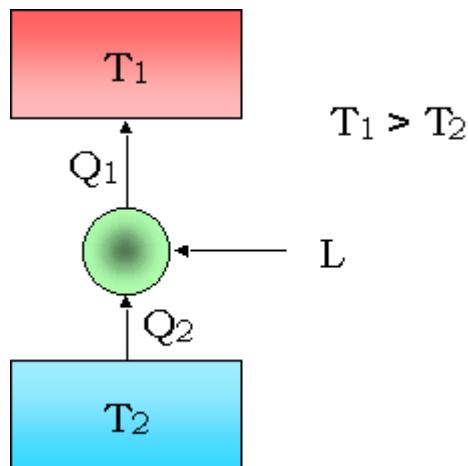
Il segno $W = Q_2 - Q_1$ quindi lavoro ceduto, negativo.



Rappresentazione macchina frigorifera

Con La macchina Frigorifera reversibile.

Il segno $W = Q_1 - Q_2$ quindi lavoro ottenuto, positivo.



Coefficiente di prestazione di macchina frigorifera(COP): $\xi = \frac{Q_A}{|W|}$

Secondo principio della termodinamica

Formulazione di Clausius: Non posso avere un processo il cui unico risultato sia trasferire calore da temperatura T ad una temperatura più calda di T .

Formulazione di Kelvin-Plank è impossibile realizzare un processo il cui unico risultato sia trasformare il calore in lavoro.

Le due formulazioni sono equivalenti. Questo principio è legato allo stesso concetto del tempo.

Dimostrazione per assurdo

Ho macchina ηX generico e R reversibile.

$W = Q'_2 - Q'_1$ $W = Q_2 - Q_1 - W = -Q_2 + Q_1$ Ottengo una nuova macchina $q_1 = Q'_2 - Q'_1 = Q_2 - Q_1$
 $q_2 = Q'_2 - Q_2 = +(Q'_1 - Q_1)$

Il calore che assorbo da una, è il calore che cedo dall'altra Suppongo che questa macchina $\eta_x > \eta_R$ $\frac{W}{Q'_2} > \frac{W}{Q_2}$
 $Q'2 < Q_2$ $q_2 = Q'_2 - Q_2 < 0$ Ma allora sto trasferimendo calore da una sorgente più fredda ad una più calda! Viola il secondo principio nella formulazione di Clausius! **per assurdo** $\eta_x > \eta_R$ è falsa.

Quindi in teoria l'opposto è

Teorema di Carnot

$\eta_X \leq \eta_R$ dove Il minore vale se la macchina X è **irreversibile**, $(\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2})$ L'uguale vale se la macchina X è **reversibile**. $(\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2})$ (**importante tenere le temperature in KELVIN**)

Corollario 1 Tutte le macchine reversibili hanno lo stesso rendimento $1 - \frac{T_1}{T_2}$ se lavorano tra le stesse temperature.

Corollario 2 Tutte le macchine irreversibili hanno un rendimento inferiore a $1 - \frac{T_1}{T_2}$.

è importante ricordare che un rendipento può essere $0 \leq \eta < 1$.