Graphes

1 Définitions

1.1 Graphes

Un graphe **non orienté** est la donnée d'un couple $G = (V, E)$, où V est un ensemble fini non vide et $E \subset \{\{x, y\} \mid (x, y) \in V^2\}$. Un graphe **orienté** est la donnée d'un couple $H = (S, A)$, où S est un ensemble fini non vide et $A \in \mathcal{P}(S^2)$.

Les éléments de V et A sont appelés **sommets du graphe**, ceux de E sont ses **arrêtes**, et ceux de A ses **arcs**.

Si $e = \{x\} \in E$ (avec $x \in V$), e est une **boucle** sur x (idem pour $e = (x, x)$ pour $x \in S$). Pour $(x, y) \in V^2$, on dit que x et y sont **voisins** ssi $x, y \in E$. Dans un graphe orienté, $x \in S$ est **successeur (resp. prédecesseur)de** $y \in V$ ssi (y, x) (resp. (x, y)) $\in A$.

On appelle **voisinnage** de $x \in E$ l'ensemble de ses voisins. Le **degré** de x, noté $\deg x$, est le cardinal de ce voisinnage.

Pour les graphes orientés, on distingue le **degré sortant** de x, noté $\deg^+ x$, le nombre de successeurs de x, du **degré entrant** de x, noté $\deg^- x$,le nombre de prédecesseurs de x.

On supposera par la suite que l'on travaille avec des graphes sans boucles

Propriété : *Soit $G = (V, E)$ un graphe. On a $\sum_{x \in V} \deg(x) = 2\text{card }(E)$*

▷ On a :
$$\sum_{x \in V} \deg(x) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} \mathbb{1}_{\{x,y\}} = \sum_{(x,y) \in V^2} \mathbb{1}_{\{x,y\}} = 2 \sum_{\{x,y\} \in V^2} \mathbb{1}_{\{x,y\}} = 2\,\text{card }(E).$$
Car le graphe est sans boucle. Il faudrait sinon ajouter le nombre de boucles présentes dans le graphe.

1.2 Accessibilité, connexité

On fixe $G = (V, E)$ un graphe non orienté, et $H = (A, S)$ un graphe orienté.

Soit $s = (s_i) \in V^{n+1}$. On dit que s est une **chaîne de** G ssi $\forall i \in [\![1, n[\![, \{s_i, s_{i+1}\} \in E$ On dit alors que s est une chaîne de longueur n et qui relie s_0 **et** s_n.

Soit $s = (s_i) \in A^{n+1}$. On dit que s est un **chemin de** G ssi $\forall i \in [\![1, n[\![, \{s_i, s_{i+1}\} \in E$ On dit alors que s est une chaîne de longueur n et qui relie s_0 **à** s_n.

On dit alors que s_n est accessible depuis s_0. Par ailleurs, si $s_n = s_0$, on dit que s est un **cycle** pour un graphe non-orienté, ou un **circuit** dans un graphe orienté.

Si tous les (s_i) sont distincts, on dit que s est **élémentaire**.

Remarque : Il y a toujours un nombre fini de chaînes élémentaires, mais si G (resp. H) a des cycles (resp. des circuits), il y a un nombre infini de chaînes (il suffit de tourner en rond...).

Exercice 1: Définir la relation entre les circuits/chemins d'un graphe, qui met en relation deux circuits/chemins ssi ils relient les mêmes sommets. Est-ce une relation d'équivalence ?

Propriété : *La relation $\mathcal{R}$ définie sur V^2 par $x\mathcal{R}y$ ssi x est accessible depuis y est une relation d'équivalence.*

▷ Soit $x \in V$. On a bien $x\mathcal{R}x$: la chaîne de longueur $n = 0$ $s = (x)$ convient.

▷ Soit $(x, y) \in V^2$, tel que $x\mathcal{R}y$. Alors par définition il existe $s = (s_0, ..., s_n) \in V^{n+1}$ tel que $s_0 = x$ et $s_n = y$, et $\forall i \in [\![0, n[\![$, $\{s_i, s_{i+1}\} \in E$. Considérons $s' = (s_n, s_{n-1}, ..., s_1, s_0)$. s' est une chaîne reliant y et x. En effet, $s'_0 = s_n = y$ et $s'_n = s_0 = x$, et $\forall i \in [\![0, n[\![, \{s'_i, s'_{i+1}\} = \{s_{n-i}, \{n - i - 1\} = \{s_k, s_{k+1}\}\} \in E$ en posant $k = n - i - 1 \in [\![0, n[\![$.

▷ Soit $(x, y, z) \in V^3$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Comme $x\mathcal{R}y$, il existe $s = (s_0, ..., s_n) \in V^{n+1}$ une chaîne avec $s_0 = x$ et $s_n = y$. Comme $y\mathcal{R}x$, il existe $t = (t_0, ..., t_m) \in V^{m+1}$ une chaîne avec $t_0 = y$ et $t_m = z$. Considérons $u = (s_0, ...s_n, t_1, ...t_m)$. u est bien une chaîne car $\forall i \in [\![0, n+m[\![$, soit $i \in [\![0, n[\![$ et dans ce cas on a $\{u_i, u_{i+1}\} = \{s_i, s_{i+1}\} \in A$, soit $i = n$ et on a $\{u_i, u_{i+1}\} = \{t_0, t_1\} \in E$, soit $i \in]\!]n, n+m]\!]$ et $\{u_i, u_{i+1}\} = \{t_{i-n}, t_{i-n+1}\} \in E$. On a par ailleurs $u_0 = x$ et $u_{m+n} = z$, donc $x\mathcal{R}z$

Exercice 2: Définir une relation d'équivalence similaire pour H, où l'on doit avoir un chemin dans chaque sens entre deux points en relation.

Une composante connexe de G est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence définie ci-dessus. Si G n'admet qu'une composante connexe, on dit que G est un graphe connexe. Dans le cas de la relation d'équivalence sur les graphes orientés, on appelle les classes d'équivalences **composante fortement connexe**.

Soit $W \subset V$ avec $W \neq \varnothing$. W est **convexe** ssi $\forall (x, y) \in W^2$, il existe une chaîne reliant x et y.

Propriété : *W est une composante connexe ssi W est connexe minimal, c'est à dire si $\forall W' \subset V \setminus \{W\}, W \subset W'$, W' n'est pas connexe.*

Soit $G' = (V', E')$ un graphe. G' est un **sous-graphe** ssi $V' \subset V$, $E' \subset E$.

Soit $V' \subset V$ Le **graphe induit par G sur V'** est $G' = (V', \{\{x, y\} \in E \,|\, (x, y) \in V^2\})$.