

Ordres

1 Relations

1.1 En général

- Soit X un ensemble non vide. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. \mathcal{R} est une relation n -aire sur X si et seulement si $\mathcal{R} \subset X^n$. Pour $n = 1$, on parle de relation unaire, pour $n = 2$ de relation binaire, et $n = 3$ de relation ternaire.
- Soit X un ensemble non vide. Soit \mathcal{R} une relation binaire sur X . Pour $(x, y) \in X^2$, on note $x\mathcal{R}y$ pour signifier $(x, y) \in \mathcal{R}$. On dit alors que x est en relation avec y .

1.2 Relations binaires

- Une relation \mathcal{R} binaire sur X est :
 - réflexive si et seulement si $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in X$;
 - transitive si et seulement si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ pour tout $(x, y, z) \in X^3$;
 - symétrique si et seulement si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ pour tout $(x, y) \in X^2$;
 - antisymétrique si et seulement si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ pour tout $(x, y) \in X^2$.

Propriété : Soit X un ensemble non vide. Soit Y un sous-ensemble non vide de X . Si \mathcal{R} est une relation binaire sur X , alors $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap Y^2$ est une relation binaire sur Y qui a les mêmes propriétés de transitivité, réflexivité, symétrie, antisymétrie que \mathcal{R} .

2 Ordre

2.1 Éléments particuliers

Soit $x \in X$. On dit que :

- x est un majorant de Y ssi $\forall y \in Y, y \leq x$.
- x est un minorant de Y ssi $\forall y \in Y, x \leq y$.

Soit $y \in Y$. On dit que :

- y est le plus grand élément de Y ssi c'est un majorant de Y .
- y est le plus petit élément de Y ssi c'est un minorant de Y .
- y est minimal ssi il n'existe pas de y' dans Y tel que $y' < y$
- y est maximal ssi il n'existe pas de y' dans Y tel que $y < y'$

Remarque : Si le plus grand élément et le plus petit élément sont forcément uniques à cause de l'antisymétrie de la relation, les éléments minimaux et maximaux, eux, ne le sont pas toujours !

Remarque : Cela dit, si l'ordre est total, il n'y a qu'un seul élément minimal, le plus petit élément (il en va de même pour les éléments maximaux).

On note $\text{Min}(Y)$ l'ensemble des minorants de Y , et $\text{Maj}(Y)$ l'ensemble de ses majorants. Le plus grand élément de $\text{Min}(Y)$, s'il existe, est appelé borne inférieure de Y . De la même façon, le plus petit élément de $\text{Max}(Y)$, s'il existe, est appelé borne supérieure de Y .

2.2 Ordre bien fondé

On considère ici deux ensembles ordonnés, (X, \leq) et (Y, \preceq) .

Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$.

- f est croissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x \leq x' \Rightarrow f(x) \preceq f(x')$
- f est décroissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x \leq x' \Rightarrow f(x) \succeq f(x')$
- f est strictement croissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x < x' \Rightarrow f(x) \prec f(x')$
- f est strictement décroissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x < x' \Rightarrow f(x) \succ f(x')$

Remarque : On étend ces définitions aux suites de $X^{\mathbb{N}}$, vues comme des fonctions de (\mathbb{N}, \leq) dans (X, \leq) .

Exemple : La fonction identité Id de (\mathbb{N}^*, \leq) dans $(\mathbb{N}^*, |)$ est strictement croissante

Propriété : Si \leq est une relation d'ordre totale sur X (autrement dit si (X, \leq) est un ordre total), alors toute fonction strictement croissante de (X, \leq) dans (Y, \preceq) est injectif.

- ▷ Soient x et y dans X tels que $f(x) = f(y)$. On a donc en particulier $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$. Le fait que l'ordre sur X soit total nous permet de conclure en utilisant la contraposée de la définition de la croissance stricte de f que :

$$\begin{cases} f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y \\ f(y) \leq f(x) \Rightarrow y \leq x \end{cases} \Leftrightarrow (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

Donc f est injective

Remarque : Attention à ce que l'ordre soit bien total. Par exemple, la fonction de $(\mathbb{N}^*, |)$ dans (\mathbb{N}^*, \leq) qui associe à un entier naturel son nombre de diviseurs est bien strictement croissante, mais certainement pas injective !

On dit qu'un ordre \leq sur X est bien fondé ssi toute partie non vide de X admet un élément minimal.

Propriété : Un ordre est bien fondé ssi il n'existe pas une suite infinie strictement décroissante.

- ▷ Considérons (X, \leq) un ensemble bien fondé, et supposons par l'absurde l'existence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ strictement décroissante. On note $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. A est une partie non vide de X , et admet donc un élément minimal a_0 . Il existe alors par définition de A $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_0 = u_{n_0}$. Par stricte décroissance de (u_n) , on aurait alors $u_{n_0+1} < u_{n_0} = a_0$, ce qui contredit la minimalité de a_0 . Donc il n'existe pas de suite d'éléments de X strictement décroissante.
- ▷ Montrons la contraposée. Supposons que (X, \leq) n'est pas bien fondé. Il existe donc $A \subset X \neq \emptyset$ n'admettant pas d'élément minimal. Soit a_0 l'un des éléments de A . a_0 n'est pas minimal dans A , donc il existe $a_1 \in A$ tel que $a_1 < a_0$. On peut alors construire selon ce procédé une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ infinie d'éléments de X strictement décroissante.

2.3 Ordre produit, ordre lexicographique

Considérons une famille finie $(X_i, \leq_i)_{i \in [1..n]}$ d'ensembles ordonnés. On note $Y = \prod_{i=1}^n X_i$.

Propriété : La relation \mathcal{R} définie sur Y par $(a_1, a_2, \dots, a_n) \mathcal{R} (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow \forall i \in [1..n], a_i \leq_i b_i$ est une relation d'ordre, appelé ordre produit des \leq_i et noté $\leq_1 \times \leq_2 \times \dots \times \leq_n$ ou $\prod_{i=1}^n \leq_i$.

- ▷ \mathcal{R} est réflexive car on a bien, pour tout $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dans Y $a \mathcal{R} a$: en effet, comme tous les a_i sont égaux, $\forall i \in [1..n], a_i \leq_i a_i$.
- ▷ \mathcal{R} est transitive : considérons trois éléments a, b et c de Y , tels que $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$. Alors pour tout $i \in [1..n]$, on a $a_i \leq_i b_i$ et $b_i \leq_i c_i$, donc par transitivité de \leq_i , $a_i \leq_i c_i$, d'où $a \mathcal{R} c$.

- ▷ \mathcal{R} est antisymétrique car si $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$, alors pour tout $i \in [1..n]$, on a $a_i \leq_i b_i$ et $b_i \leq_i a_i$, c'est à dire $a_i = b_i$, donc $a = b$.

Propriété : La relation \mathcal{R} définie sur Y par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = b$ ou $\exists j \in [1..n], \forall i \in [1..j], a_i = b_i$ et $a_j <_j b_j$ est une relation d'ordre, appelé ordre lexicographique sur Y

- ▷ \mathcal{R} est réflexive par définition.
- ▷ \mathcal{R} est transitive : considérons trois éléments a, b et c de Y , tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$. Si $a = b$ ou $b = c$, on a bien $a\mathcal{R}c$. Considérons maintenant que ce ne soit pas le cas. Comme $a\mathcal{R}b$, il existe $(j, j') \in [1..n]^2$ tel que $\forall i \in [1..j], a_i = b_i, \forall i \in [1..j'], b_i = c_i$ ainsi que $a_j <_j b_j$ et $b_{j'} \leq c_{j'}$. En prenant $J = \min(j, j')$, on a alors, pour tout $i \in [1..J], a_i = c_i$, et $a_J <_J c_J$ (car soit $a_J < b_J \leq c_J$, soit $a_J \leq b_J < c_J$ car $J = j$ ou $J = j'$). Ainsi $a\mathcal{R}c$
- ▷ Montrons \mathcal{R} est antisymétrique par l'absurde. Supposons qu'il existe $(a, b) \in Y^2$ tel que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$, mais $a \neq b$. Alors il existe $(j, j') \in [1..n]^2$ vérifiant $\forall i \in [1..j] [a_i <_i b_i$ et $\forall i \in [1..j'] [b_i <_i a_i$, donc en particulier pour $i = 1, a_1 < b_1$ et $a_1 > b_1$: on arrive à une absurdité. Donc \mathcal{R} est bien antisymétrique.

On peut étendre cet définition à des n -uplets de taille différente. Considérons un ensemble (Σ, \leq) . On note Σ^* l'ensemble des n -uplets d'éléments de Σ . Σ est alors appelé alphabet et Σ^* désigne l'ensemble des mots de Σ . Le mot vide (autrement dit le 0-uplet) est noté ϵ . Pour un mot u de Σ , on note $|u|$ la taille de ce mot.

Propriété : La relation \mathcal{R} définie sur Σ^* par $\forall (u, v) \in (\Sigma^*)^2, u\mathcal{R}v \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} : (\forall i \in [1..j], u_i = v_i \text{ et } j = |u|) \text{ ou } (j < |u| \text{ et } u_j < v_j)$ est un relation d'ordre.

- ▷ Introduisons le caractère nul 0 et l'ensemble $\mathcal{A} = \Sigma \cup \{0\}$. On introduit la relation d'ordre \preceq sur \mathcal{A} , telle que $\preceq \cap \Sigma^2 = \leq$, et que $\forall a \in \mathcal{A}, 0 \preceq a$. Considérons alors la fonction f_n qui à un mot (u_1, u_2, \dots, u_m) de Σ de longueur $m \leq n$ associe le mot $(u_1, u_2, \dots, u_m, 0, 0, \dots)$ de \mathcal{A}^n .
- ▷ Montrons que $u\mathcal{R}v \Rightarrow f(u) \preceq v$ (où \preceq désigne l'ordre lexicographique) et que f est injective : Pour le premier point, si $u\mathcal{R}v$, alors il existe $j \in [1..n] : \forall i \in [1..j], u_i = v_i$ et $j = |u|$, auquel cas $\forall i \in [1..n] f_n(u)_i = f_n(v)_i$ et $f_n(u)_j = 0 \preceq f_n(v)_j$ (ce qui arrive aussi dans l'autre cas) d'où $f_n(u) \preceq f_n(v)$. Pour le second point, si $f_n(u) = f_n(v)$, alors $\forall i \in [1..n], f_n(u)_i = f_n(v)_i$. Il existe alors un j à partir duquel $f(u)_i = f(v)_i = 0$. Alors $|u| = |v| = j$, et $\forall i \in [1..j], u_i = f(u)_i = f(v)_i = v_i$ d'où $u = v$. On en déduit par ailleurs que $u\mathcal{R}v$ et $u \neq v \Rightarrow f(u) \prec f(v)$
- ▷ \mathcal{R} est alors réflexive : en effet si $u\mathcal{R}v$ et $v\mathcal{R}u$, en notant $n = \max(|u|, |v|)$, $f(u) \preceq f(v)$ et $f(v) \preceq f(u)$ d'où $f(u) = f(v)$ et par injectivité $u = v$. Par ailleurs, si $u\mathcal{R}v$ et $v\mathcal{R}w$, alors $f(u) \preceq f(v) \preceq f(w)$, d'où $f(u) \preceq f(w)$. Alors par contraposée on a bien $u\mathcal{R}w$.