

# Relations

## 1 Généralités

Considérons un ensemble non vide  $X$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle relation  $n$ -aire sur  $X$  toute partie  $\mathcal{R}$  de  $X^n$ .

*On ne s'intéressera dans ce chapitre qu'aux relations binaires*

Pour deux éléments  $x, y$  de  $X$ , on note  $x\mathcal{R}y$  et on dit que  $x$  est en relation avec  $y$  si et seulement si  $(x, y) \in \mathcal{R}$ .

*On considérera désormais que  $X$  est un ensemble non vide et que  $\mathcal{R}$  est une relation binaire sur  $X$*

On dit que  $\mathcal{R}$  est :

- réflexive ssi  $\forall x \in X : x\mathcal{R}x$
- transitive ssi  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- symétrique ssi  $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- antisymétrique ssi  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$

On vérifie aisément que pour toute partie  $Y$  de  $X$ ,  $\mathcal{R} \cap Y^2$  vérifie les mêmes propriétés que  $\mathcal{R}$  sur  $Y$ .

## 2 Composition de relations

Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  deux relations binaires sur  $X$ . On définit la composée de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , notée  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'$  par :

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R}' = \left\{ (x, y) \in X^2 \mid \exists z \in X : x\mathcal{R}z \text{ et } z\mathcal{R}'y \right\}$$

**Propriété**  $\circ$  est associatif et possède pour neutre  $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$

▷ Fastidieux mais sans difficulté...

On définit par récurrence  $\mathcal{R}^n = \underbrace{\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \dots \circ \mathcal{R}}_{n \text{ fois}}$ . On conviendra que  $\mathcal{R}^0 = \Delta_X$ .

**Propriété** Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  deux relations binaires symétriques de  $X$ . On a  $x(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}')y \Leftrightarrow y(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R})x$ .

▷ Soit  $(x, y) \in X^2$  tel que  $x(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}')y$ .

Il existe alors  $z \in X$  tel que  $x\mathcal{R}z$  et  $z\mathcal{R}'y$ . Comme  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}$  est symétrique, on a aussi  $z\mathcal{R}x$  et  $y\mathcal{R}'z$ , d'où  $y(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R})x$

**Remarque** En particulier, si  $\mathcal{R}$  est symétrique,  $\mathcal{R}^n$  l'est aussi pour tout entier naturel  $n$ .

## 3 Fonctions

On dit que  $\mathcal{R}$  définit une fonction ssi  $x\mathcal{R}y$  et  $x\mathcal{R}y' \Rightarrow y = y'$

**Propriété** Si  $\mathcal{R}$  définit une fonction  $f$  et  $\mathcal{R}'$  définit une fonction  $g$ , alors  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'$  définit la fonction  $g \circ f$ .

▷ Soit  $(x, y, y') \in X^3$ , tel que  $x\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'y$  et  $x\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'y'$ .

Par définition, il existe  $z \in X$  tel que  $x\mathcal{R}z$  et  $z\mathcal{R}'y$ , et  $z' \in X$  tel que  $x\mathcal{R}z'$  et  $z'\mathcal{R}'y'$ .

Comme  $x\mathcal{R}z$  et  $\mathcal{R}z'$ , on a  $z = z' = f(x)$  car  $\mathcal{R}$  définit la fonction  $f$ .

Alors on a  $f(x)\mathcal{R}'y$  et  $f(x)\mathcal{R}'y'$  d'où  $y = y' = g \circ f(x)$  car  $\mathcal{R}'$  définit la fonction  $g$ .

## 4 Étude des propriétés de relations binaires

### 4.1 Composition de relations binaires

Comme pour tout couple d'entiers naturels  $(m, n)$ , on a  $\mathcal{R}^n \circ \mathcal{R}^m = \mathcal{R}^m \circ \mathcal{R}^n$  (cela découle simplement de l'associativité de  $\circ$ ), on peut définir la fermeture (ou clôture) transitive de la relation binaire  $\mathcal{R}$  par :

$$\mathcal{R}_{\mathcal{T}} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}^n$$

**Lemme** Soit  $\mathcal{R}'$  une relation binaire transitive sur  $X$  contenant  $\mathcal{R}$ . Alors, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{R}^n \subset \mathcal{R}'$

▷ Par récurrence sur  $n$ . C'est vrai pour  $n = 1$  car  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ . Supposons que ce soit vrai pour  $n \in \mathbb{N}^*$  quelconque. Soit  $(x, y) \in \mathcal{R}^{n+1}$ . Alors il existe  $z \in X$  tel que  $x\mathcal{R}^nz$  et  $z\mathcal{R}^1y$ . Comme par hypothèse  $\mathcal{R}^n \subset \mathcal{R}'$ , on a  $z\mathcal{R}'y$ , et comme  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ ,  $x\mathcal{R}'z$ . Par transitivité, on a  $x\mathcal{R}'y$ , ce qui prouve l'inclusion et donc la proposition au rang  $n + 1$ .

**Propriété**  $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$  est la plus petite (au sens de l'inclusion) relation binaire transitive sur  $X$  contenant  $\mathcal{R}$

▷ Montrons que  $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$  est transitive : Soient  $x, y$  et  $z$  dans  $X$  tels que  $x\mathcal{R}_{\mathcal{T}}y$  et  $y\mathcal{R}_{\mathcal{T}}z$ . Alors il existe  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $x\mathcal{R}^my$  et  $y\mathcal{R}^nz$ . On a donc  $x\mathcal{R}^m \circ \mathcal{R}^nz$  i.e  $x\mathcal{R}^{m+n}z$ , d'où  $x\mathcal{R}_{\mathcal{T}}z$ .

▷ Montrons que  $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$  est minimale : Considérons  $\mathcal{R}'$  une relation binaire transitive contenant  $\mathcal{R}$ . Soit  $(x, y) \in \mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ . Il existe donc  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x\mathcal{R}^ny$ . D'après le lemme,  $\mathcal{R}^n \subset \mathcal{R}'$ , donc  $(x, y) \in \mathcal{R}'$ .

### 4.2 Relations d'équivalence

On dit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $X$  ssi elle est réflexive, transitive et symétrique. On note classe d'équivalence de  $a \in X$  l'ensemble  $\dot{a} = \{x \in X | x\mathcal{R}a\}$ . On dit alors que  $a$  est un représentant de  $\dot{a}$

**Propriété** Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $X$ . Soit  $y \in \dot{x}$  et alors  $\dot{x} = \dot{y}$ , soit  $\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$

▷ On a forcément  $y \in \dot{x}$  ou  $y \notin \dot{x}$ . Dans le premier cas,  $y$  est en relation avec  $x$ , donc par transitivité tout élément en relation avec  $y$  sera en relation avec  $x$ , d'où  $\dot{y} \subset \dot{x}$ . L'autre inclusion découle de la symétrie de  $\mathcal{R}$ . Dans le second cas, si  $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset$ , il existerait  $a \in X$  tel que  $a\mathcal{R}y$  et  $a\mathcal{R}x$ . Par symétrie et transitivité, on aurait alors  $y\mathcal{R}x$ , ce qui contredit  $y \notin \dot{x}$ .

L'ensemble des classes d'équivalences de  $X$  par  $\mathcal{R}$  est appelé ensemble quotient de  $X$  par  $\mathcal{R}$ , et est noté  $X/\mathcal{R}$

**Corrolaire** L'ensemble des classes d'équivalence par  $\mathcal{R}$  forme une partition de  $X$

▷ Notons  $H = \bigcup_{x \in X} \dot{x}$ .  $H \subset X$  en tant qu'union de parties de  $X$ , et  $X \subset H$  car tout élément de  $X$  appartient à sa propre classe d'équivalence. Cela prouve que l'ensemble des classes d'équivalence forme un recouvrement de  $X$ . Prenons alors deux classes d'équivalences  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$ . D'après le lemme, on a soit  $\dot{x} = \dot{y}$ , soit  $\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$ , ce qui prouve que ce recouvrement est bien disjoint.

Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides. Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . On dit que  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$  passe au quotient si elle est constante sur les classes d'équivalence, c'est à dire si  $x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y)$ .

On peut alors définir  $\bar{f} \in \mathcal{F}(X/R, Y)$  qui à une classe d'équivalence  $\dot{x}$  associe l'image d'un de ses représentants par  $f$ .

**Remarque** Quelque part,  $\bar{f}$  "gagne" en injectivité par rapport à  $f$ , puisqu'il y a "moins" d'éléments ayant la même image.

**Remarque** On a  $f(X) = \bar{f}(X/R)$

### 4.3 Relations d'ordre

On dit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $X$  ssi elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

*On notera désormais une telle relations  $\leq$*

Un ensemble  $(X, \leq)$  muni d'une telle relation est dit ordonné. Pour une partie  $Y$  de  $X$ , on note  $(Y, \leq)$  l'ensemble ordonné induit (c'est à dire  $Y$  muni de la relation  $\leq$  restreinte à  $Y$ ).

On dit que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre totale sur  $Y$  si et seulement si pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $Y$ , on a  $x\mathcal{R}y$  ou  $y\mathcal{R}x$ .

On note  $x < y$  ssi  $x \leq y$  et  $x \neq y$ ,  $x \geq y$  ssi  $y \leq x$  et  $x > y$  ssi  $y < x$ .