Graphes

1 Définitions

1.1 Graphes

Un graphe **non orienté** est la donnée d'un couple $G = (V, E)$, où V est un ensemble fini non vide et $E \subset \{\{x, y\} \mid (x, y) \in V^2\}$. Un graphe **orienté** est la donnée d'un couple $H = (S, A)$, où S est un ensemble fini non vide et $A \in \mathcal{P}(S^2)$.

Les éléments de V et A sont appelés **sommets du graphe**, On parlera, pour désigner les éléments de E dans un graphe non-orienté d'**arêtes** du graphe, et pour un graphe orienté d'**arcs**.

Si $e = \{x\} \in E$ (avec $x \in V$), e est une **boucle** sur x (idem pour $e = (x, x)$ pour $x \in S$). Pour $(x, y) \in V^2$, on dit que x et y sont **voisins** ssi $\{x, y\} \in E$. Cette notion se précise dans un graphe orienté : on dit que $x \in S$ est un **successeur** (resp. **prédecesseur**) de y ssi $(y, x) \in A$ (resp. $(x, y) \in A$).

On appelle **voisinnage** du sommet x l'ensemble $\mathscr{V}(x)$ de ses voisins. Le **degré** de x, noté $\deg x$, est le cardinal de ce voisinnage.

Pour les graphes orientés, on distingue le **degré sortant** de x, noté $\deg^+ x$, le nombre de successeurs de x, du **degré entrant** de x, noté $\deg^- x$,le nombre de prédecesseurs de x.

On supposera par la suite que l'on travaille avec des graphes sans boucles.

Propriété : *Soit $G = (V, E)$ un graphe. On a $\sum_{x\in V} \deg(x) = 2\, card(E)$*

▷ On a :

$$\sum_{x\in V} \deg(x) = \sum_{x\in V} \sum_{y\in V} \mathbb{1}_{\{x,y\}} = \sum_{(x,y)\in V^2} \mathbb{1}_{\{x,y\}} = 2 \sum_{\{x,y\}\in V^2} \mathbb{1}_{\{x,y\}} = 2\ \mathrm{card}(E).$$

Car le graphe est sans boucle. Il faudrait sinon ajouter le nombre de boucles présentes dans le graphe.

1.2 Accessibilité, connexité

On fixe $G = (V, E)$ un graphe non orienté, et $H = (A, S)$ un graphe orienté.

Soit $s = (s_i) \in V^{n+1}$. On dit que s est une **chaîne de** G ssi $\forall i \in [\![1, n[\![, \{s_i, s_{i+1}\} \in E$ On dit alors que s est une chaîne de longueur n et qui relie s_0 **et** s_n.

Soit $s = (s_i) \in A^{n+1}$. On dit que s est un **chemin de** G ssi $\forall i \in [\![1, n[\![, \{s_i, s_{i+1}\} \in E$ On dit alors que s est une chaîne de longueur n et qui relie s_0 **à** s_n.

On dit alors que s_n est **accessible** depuis s_0. Par ailleurs, si $s_n = s_0$, on dit que s est un **cycle** pour un graphe non-orienté, ou un **circuit** dans un graphe orienté.

Si tous les (s_i) sont distincts, on dit que s est **élémentaire**.

Remarque : Il y a toujours un nombre fini de chaînes élémentaires, mais si G (resp. H) a des cycles (resp. des circuits), il y a un nombre infini de chaînes (il suffit de tourner en rond...).

Exercice 1: Définir la relation entre les circuits/chemins d'un graphe, qui met en relation deux circuits/chemins ssi ils relient les mêmes sommets. Est-ce une relation d'équivalence ?

Propriété : *La relation $\leftrightarrow$ définie sur V^2 par $x \leftrightarrow y$ ssi x est accessible depuis y est une relation d'équivalence.*

- ▷ Soit $x \in V$. On a bien $x \leftrightarrow x$: la chaîne de longueur $n = 0$ $s = (x)$ convient.
- ▷ Soit $(x, y) \in V^2$, tel que $x \leftrightarrow y$. Alors par définition il existe $s = (s_0, ..., s_n) \in V^{n+1}$ tel que $s_0 = x$ et $s_n = y$, et $\forall i \in [\![0, n[\![$, $\{s_i, s_{i+1}\} \in E$. Considérons $s' = (s_n, s_{n-1}, ..., s_1, s_0)$. s' est une chaîne reliant y et x. En effet, $s'_0 = s_n = y$ et $s'_n = s_0 = x$, et $\forall i \in [\![0, n[\![, \{s'_i, s'_{i+1}\} = \{s_{n-i}, \{n - i - 1\} = \{s_k, s_{k+1}\}\} \in E$ en posant $k = n - i - 1 \in [\![0, n[\![$.
- ▷ Soit $(x, y, z) \in V^3$ tel que $x \leftrightarrow y$ et $y \leftrightarrow z$. Comme $x \leftrightarrow y$, il existe $s = (s_0, ..., s_n) \in V^{n+1}$ une chaîne avec $s_0 = x$ et $s_n = y$. Comme $y \leftrightarrow x$, il existe $t = (t_0, ..., t_m) \in V^{m+1}$ une chaîne avec $t_0 = y$ et $t_m = z$. Considérons $u = (s_0, ...s_n, t_1, ...t_m)$. u est bien une chaîne car $\forall i \in [\![0, n + m[\![$, soit $i \in [\![0, n[\![$ et dans ce cas on a $\{u_i, u_{i+1}\} = \{s_i, s_{i+1}\} \in A$, soit $i = n$ et on a $\{u_i, u_{i+1}\} = \{t_0, t_1\} \in E$, soit $i \in]\!]n, n + m]\!]$ et $\{u_i, u_{i+1}\} = \{t_{i-n}, t_{i-n+1}\} \in E$. On a par ailleurs $u_0 = x$ et $u_{m+n} = z$, donc $x \leftrightarrow z$.

Exercice 2: Définir une relation d'équivalence similaire pour H, où l'on doit avoir un chemin dans chaque sens entre deux points en relation.

Une composante connexe de G est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence définie ci-dessus. Si G n'admet qu'une composante connexe, on dit que G est un graphe connexe. Dans le cas de la relation d'équivalence sur les graphes orientés, on appelle les classes d'équivalences **composante fortement connexe**.

Soit $W \subset V$ avec $W \neq \varnothing$. W est **connexe** ssi $\forall (x, y) \in W^2$, il existe une chaîne reliant x et y.

Propriété : *W est une composante connexe ssi W est connexe minimal, c'est à dire si $\forall W' \subset V \backslash \{W\}, W \subset W'$, W' n'est pas connexe.*

Soit $G' = (V', E')$ un graphe. G' est un **sous-graphe** ssi $V' \subset V$, $E' \subset E$.

Soit $V' \subset V$ Le **graphe induit par G sur V'** est $G' = (V', \{\{x, y\} \in E \,|\, (x, y) \in V^2\})$.

Propriété : *Un ensemble de sommets est connexe ssi le graphe qu'il induit est connexe.*

- ▷ En exercice.

1.3 Types de graphes

Un graphe non-orienté (resp. orienté) est dit **acyclique** s'il ne contient aucun cycle élémentaire (resp. aucun circuit).

Un **arbre** est un graphe connexe acyclique. (cf TD pour caractérisation).

Un graphe acyclique décomposé en ses composantes connexes (qui sont donc des arbres), est appelé **forêt**.

Un graphe non-orienté (V, E) est dit **biparti** ssi il existe une partition $\{W_1, W_2\}$ de V telle que toutes les arêtes de E aient une extrémité dans W_1 et l'autre dans W_2.

2 Parcours

2.1 Définitions

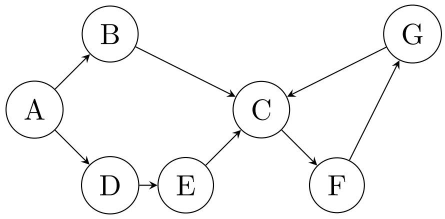
On définit, pour $W \subset V$ la bordure de W par :

$$\mathcal{B}(W) = \{y \in V \setminus W \,|\, \exists x \in W, \{x, y\} \in E\}$$

Dans le cadre d'un graphe orienté, pour $T \subset S$:

$$\mathcal{B}(T) = \{y \in V \setminus T \,|\, \forall x \in T, y \in \mathscr{V}(x)\}$$

On dit que $L \in V^n$ (ou S^n pour un graphe orienté) est un parcours ssi $\forall i \in [\![1, n]\!], L_i \in \mathcal{B}(\{L_j \,|\, j \in [\![1, i[\![\})$ ou $\mathcal{B}(\{L_j \,|\, j \in [\![1, i[\![\})$ est vide.

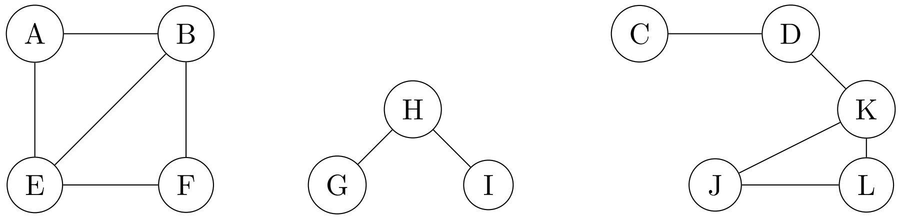


Un parcours du graphe orienté ci-dessus est $L = [F, G, C, E, A, B, D]$

De plus, on dit que L_i est un **point de regénération du parcours** ssi $\mathcal{B}(\{L_j \mid j \in [\![1, i]\!]\}) = \varnothing$.

Enfin, en notant $\mathcal{R}$ l'ensemble des points de régénération de L, on dit que $F = (V, P)$ est une forêt d'arborescences associée au parcours L ssi F respecte les trois propriétés suivantes :

1. $\forall i \in [\![1, n]\!], L_i \in \mathcal{R}$ ou $\exists j \in [\![1, i[\![, L_i \in \mathscr{V}(L_j), (L_j, L_i) \in P$;
2. $\forall u \in V \setminus R, \exists! w \in V, (w, u) \in P$ (on dit alors que w est le **père** de u) ;
3. $F = (V, P)$. P est minimal parmi les ensemble vérifiant 1.



$$L = [\underbrace{A, B, E, F}_{r_1=1}, \underbrace{G, H, I}_{r_2=5}, \underbrace{C, D, K, J, L}_{r_3=8}].$$

Propriété : *Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Soit $W \subset V$. Si $\mathcal{B}(W) = \varnothing$, alors il n'existe aucune chaîne reliant un sommet de W et un sommet de $V \setminus W$.*

- ▷ Par l'absurde, supposons qu'il existe une chaîne γ de lngueur l telle que $\gamma_0 \in W$ et $\gamma_l \in V \setminus W$. On a $\gamma_0 \neq \gamma_l$ donc $l > 0$. On peut alors définir $i_0 = \min\{i \in [\![1, l]\!] \mid \gamma_i \notin W\}$. Par définition de i_0, $\gamma_{i_0 - 1} \in W$. Par définition, une chaîne $\{\gamma_{i_0}, \gamma_{i_0}\} \in E$, autrement dit $\gamma_{i_0} \in \mathscr{V}(\gamma_{i_0-1})$. Donc $\gamma_{i_0} \in \mathcal{B}(W)$: absurde.

Propriété : *Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, et $L = (L_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ un parcours de G. Si l'ensemble des points de regénération s'écrit $R = \{L_{r_k} | k \in [\![1, K]\!]\}$ avec (r_k) croissant, alors G admet K composantes connexes, à savoir les $(C_k)_{k \in [\![1, K]\!]}$ définis par $C_k = \{L_i \mid i \in [\![r_k, r_k + 1[\![\}$ avec $r_{K+1} = n + 1$.*

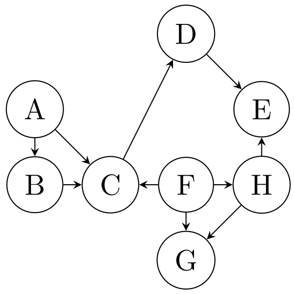
- ▷ Soit $k \in [\![1, K]\!]$. Montrons que C_k est connexe maximal.
- ▷ Si $C_k = V$, il est trivialement connexe. Sinon, soit $u \in V \setminus C_k$. MQ $\hat{C_k} = C_k \cup \{u\}$ n'est pas connexe. Par définition d'un parcours. Il existe $i_u \in [\![1, n]\!]$ tq $u = L_{i_u}$. Comme $u \notin C_k, i_u \notin [\![r_k, r_{k+1}[\![$ Si $i_u < r_k$, on pose $W = \{L_i \mid i \in [\![1, r_k[\![\}$. Ainsi, $Li_u \in W$ et $\mathcal{B} = \varnothing$ car L_{i_k} est point de regénération. D'après le lemme, il n'existe aucun chemin reliant L_{i_u} et $L_{i_k} \notin W$ donc $\hat{C_k}$ n'est pas connexe. Autre cas... Ainsi C_k est maximal.
- ▷ Par l'absurde, on suppose que C_k n'est pas connexe. On peut donc dire qu'il existe $i \in [\![r_k, r_k + 1[\![$ tel que $L_{r_k} \not\leftrightarrow$ On considère alors $i_0 = \min\{j \in [\![r_k, r_{k+1}[\![\mid L_j \not\leftrightarrow L_{r_k}\}$. Par minimalité de i_0, $\forall j \in]\!]r_k, i_0[\![, L_{r_k} \leftrightarrow L_j$. donc $\forall j \in [\![r_k, i_0[\![, L_j \not\leftrightarrow L_{i_0}$ (sinon on aurait $L_{i_0} \leftrightarrow L_j \leftrightarrow L_{r_k}$). De plus, puisque $L_{r_k} \in R, \mathcal{B}(\{L_j \mid j \in [\![1, r_k[\![\}) = \varnothing$ Donc d'après le lemme, $\forall j \in [\![1, r_k[\![, L_{i_0} \not\leftrightarrow L_j$. Donc $L_{i_0} \notin \mathcal{B}(\{L_j \mid j \in [\![1, i_0[\![\})$. Par définition d'un parcours on a nécessairement $\mathcal{B}(...) = \varnothing$ donc $L_{i_0} \in R$: Absurde, car L_{r_k} et $L_{r_{k+1}}$ sont 2 points de régénération consécutifs.

Soit $L = (L_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ un parcours de G. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on appelle **sommet ouvert à l'étape** k (dans L) un sommet de $O_k = \{L_j \mid j \in [\![1, k[\![$ et $\mathscr{V}(L_j) \not\subset \{L_i \mid i \in [\![1, k]\!]\}\}$.

L est un **parcours en largeur** (resp. profondeur) de G ssi $\forall k \in [\![1, n]\!]$, L_k est un point de régénération ou bien $L_k \in \mathscr{V}(L_{i_0})$ où $i_0 = \min\{i \in [\![1, n]\!] \mid L_i \in O_k\}$ (resp. max). Autrement, chaque sommet du parocurs est point de régéreration ou bien voisin du premier (resp.dernier) sommet ouvert.

Remarque : Lorsque l'on s'intéresse à la forêt d'arborescence associée à un parcours en largeur / profondeur, on choisira comme paire d'un sommet L_k le premier / dernier sommet ouvert à l'étape k. Autrement dit, la forêt justifiera que le parcours est en largeur / profondeur.

Exemple : Un parcours en largeur du graphe ci-dessous est $\underline{A}BCDE\underline{F}HG$, et un parcours en profondeur de $\underline{A}CDEB\underline{F}HG$.



3 Algorithmes de parcours

3.1 Détection de composantes connexes.

$G = (V, E)$ avec $V = [\![1, n]\!]$ un graphe non orienté. L'algorithme consiste à associer à chaque sommet du graphe le numéro de la composante connexe associée.

- O contient les éléments de la composante connexe actuelle que l'on est en train de traiter (les éléments "**O**uverts" afin de les étudier) ;
- n_c contient le numéro de la composante connexe que l'on est en train d'explorer ;
- F contient tous les sommets traités (les sommets **F**ermés).
- T_{res} contient les numéros de parties de chaque sommet.

```
n <- nb_sommets(G)
O <- ensemble de sommets, initialement vide
F <- ensemble de sommets, initialement vide
T_res <- tableau indicé par [[1,n]], initialisé à -1.
n_c <- 0
racine <- 1
T_res[racine] <- n_c
O.ajouter(racine)
i <- 0
Invariants:
    - les éléments de F sont dans n_c composantes connexes différentes;
    - il y a i éléments différents de -1 dans T; ce sont les éléments de F;
    - les éléments portant le même numéro dans T sont accessibles entre eux.
Tant que i < n:
    Si O est vide:
        racine <- numéro d'un sommet S tel que T_res[s] = −1
        n_c <- n_c + 1
        O.ajouter(racine)
        T_res[racine] <- n_c
    u <- un sommet extrait de O
    Pour tout v voisin de u
        Si T_res[v] = -1:
            O.ajouter(v)
            T_res[v] <- n_c
    F.ajouter(u)
    i++
Renvoyer T_res
```

3.2 Détection de graphe biparti.

Algorithme pour décider si un graphe est biparti : Considérons un graphe G. On parcourt récursivement (à partir d'un point de régénération, puis ses successeurs...) les composantes connexes graphe en associant à chaque sommet une couleur (ici représentée par 0 ou 1). Si jamais il y a conflit entre deux associations de couleur (un sommet qui s'est vu associer la couleur 0 auquel on essaierait d'associer la couleur 1 par exemple), le graphe n'est pas biparti. Si par contre on arrive à parcourir tout le graphe sans conflit, le graphe est bien biparti.

Dans le cas où $G = (V, E)$ avec $V = [\![1, n]\!]$:

- T est un tableau contenant la couleur du sommet i, -1 si aucune couleur ne lui a été assignée ;
- O désigne l'ensemble des sommets déjà colorés desquels on colorie les voisins.

```
n <- nb_sommets(G)
T <- tableau d'entiers indicé par ⟦1, n⟧ initialisé à -1
O <- {1}
couleur <- 0
T[1] <- couleur
Invariants:
    - le sous graphe induit par G sur V' = {i ∈ ⟦1, n⟧ | T[i] ≠ −1} est biparti;
    - il y a i éléments différents de -1 dans T.
Pour i allant de 1 à n:
    Si O est vide:
        u <- élément de ⟦1, n⟧ tel que T[u] = −1
        T[u] = couleur
    Sinon:
        u <- élément extrait de O
    couleur = 1 - T[u]
    Pour v voisin de u:
        Si T[v] = −1
            T[v] <- couleur
            ajouter v à O
        Sinon:
            Si T[v] ≠ couleur:
                Renvoyer Faux
Renvoyer Vrai
```

3.3 Plus court chemin en nombre d'arcs.

Dans un graphe non-orienté, on appelle **distance entre les sommets a et b**, notée $\operatorname{dist}(a, b)$, la longueur inimale d'une chaîne reliant a et b (et $+\infty$ s'il n'en existe pas). On généralise cette notion aux graphes orientés, mais il se s'agit alors plus vraiment d'une distance : la distance de a à b n'est pas forcément égale à la distance de b à a !

Pour cet algorithme, on considère $G = (S, A)$ graphe orienté avec $S = [\![1, n]\!]$ et $(a, b) \in S^2$. On cherche la distance en nombre d'arcs de a à b. On parcourt récursivement le graphe à partir de a, et dès que l'on rencontre un sommet, on lui assigne sa distance à a - alors minimale - jusqu'à atteindre b. Pour garder une trace du chemin optimal, on stocke pour chaque élément son prédecesseur.

- O_1 représente la liste des sommets à traîter, O_2 la liste de leurs successeurs.
- `prof` est le "numéro de la génération" : le premier sommet dont on part représente la génération 0, ses successeurs la génération 1, et ainsi de suite.
- D contient les distances des différents sommets du graphe par rapport au point a.
- $P[i]$ est le numéro du point précédent le sommet numéro i dans l'éventuel plus court chemin.

- F est l'ensemble des sommets traités par l'algorithme dont les successeurs ont aussi été traités.

```
n <- nb_sommets(G)
O1 <- pile d'entiers initialisée vide
O2 <- pile d'entiers initialisée vide
F <- ensemble initialisé vide
D <- tableau d'entiers indicé par ⟦1, n⟧ initialisé à +∞
P <- tableau d'entiers indicé par ⟦1, n⟧ initialisé à +∞
prof <- 0
O1.ajouter(a)
D[a] <- 0
P[a] <- a

Invariants:
    - pour tout sommet f de F, d(a, f) = D[a] ≤ prof ;
    - F est inclus dans la composante connexe W contenant a;
    - O2 est la bordure de F.
Tant que O1 et O2 ne sont pas vides:
    Si O1 est vide:
        Transvaser O2 dans O1
        prof = prof + 1
    u <- O1.extraire_sommet
    Pour v successeur de u:
        Si D[v] = +∞:
            D[v] <- D[u] + 1
            P[v] <- u
            O2.ajouter(v)
    F.ajouter(u)
Renvoyer D[b]
```

4 Plus court chemin

Pour un graphe orienté $G = (V, E)$, on dit que w est une **pondération des arêtes** ssi $w \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.

On dit alors que G est un **graphe pondéré**.

Soit $H = (S, A, w)$ un graphe orienté. Si $\gamma = (\gamma_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une chaîne ou un chemin de G, sa longueur est $\text{long}(\gamma) = \sum_{i=0}^{n+1} w(\gamma_i, \gamma_{i+1})$.

On définit alors la distance entre deux sommets de S par

$$d(a, b) = \min \{\text{long}(\gamma) \mid \gamma \text{ est un chemin reliant } a \text{ et } b\}$$

Remarque : Ces définition se généralisent naturellement aux graphes non-orientés.

4.1 Algorithme de Dijkstra

Considérons $G = (S, A, w)$ orienté, pondéré **positivement**, où $S = [\![1, n]\!]$, $s \in S$ un sommet de départ.

-

```
n <- nombre de sommets de G
D <- tableau indicé par ⟦1, n⟧, initialisé à +∞
P <- tableau indicé par ⟦1, n⟧, initialisé à -1.
D[S] = 0
```

```
P[S] = s

O <- {0}
F <- ∅
Tant que O est non vide :
    u <- extraire de O l'élément minimisant D          // (u = argmin {D[i] | i ∈ O})
    Pour v ∈ succ(u):
        Si D[v] = +∞:
            O.ajouter(v)
        Si D[u] + w(u,v) < D[v]:
            D[v] <- D[u] + w(u,v)
            P[v] <- u
    F.ajouter(u)
renvoyer D
```

Propriété : *Soit $G = (S, A, w)$ un graphe orienté pondéré positivement. Soit $s \in S$. Le tableau D retourné par l'algorithme ci-dessus est tel que $\forall u \in S, D[u] = d(s, u)$.*

4.2 Démonstration

Pour $X \subset S$, et $(u, v) \in S^2$, on note $C_X(u, v)$ l'ensemble des chemins élémentaires de u à v dans G, dont tous les sommets sauf éventuellement v sont dans X et $d_X(u, v)$ la longueur minimale d'un chemin dans $C_X(u, v)$.

Invariant : *Soit (G, S) une entrée de l'algorithme. On admet que l'appel termine. Soit K le nombre de tours de boucle* `tant que` *effectués. Pour $k \in [\![0, K]\!]$, on note O_k, F_k, D_k l'état des ensembles O et F et le tableau D à la fin du k-ième tour de boucle.*

(a) Pour tout $u \in S$, pour tout $k \in [\![0, K]\!], D_k[u] = d_{D_k} s, u$;

(b) $\forall u \in F_k, D_k[u] = d_(s, u)$;

(c) $O_k \cap F_k \neq \varnothing$ et $O_k \cup F_k = \{i \in [\![1, n]\!] D[i] < +\infty\}$.

- ▷ On procède par récurrence finie :
- ▷ Au rang $k = 0$, on a :
  - $F_0 \neq \varnothing$ donc (b) est vraie ;
  - On a aussi $O_k \cap F_k = \varnothing$. De plus $O_0 = \{s\}$ donc $O_0 \cup F_0 = \{s\}$, or s est le seul sommet i pour lequel $D_0[i] \neq +\infty$, donc on a bien (c).
  - $\forall u \in S$, $C_{F_0}(s, u) = \{(s)\}$ si $u = s$, $\varnothing$ sinon. donc $d_{F_0}(s, u) = 0$ si $u = s$, $+\infty$ sinon On a donc bien (a)
- ▷ Soit $k \in [\![0, K[\![$. On suppose P_k. On veut montrer P_{k+1}. Soit $x \in O_k$ le sommet extrait de O à l'étape $k+1$. On a alors $F_{k+1} = F_k \cup x$. De plus, $D_k[x] = \min\{D_k[i] \,|\, i \in O_k\}$. $D_{k+1}[u] = D_k[u]$ si $u \notin \text{succ}(x)$, $\min\{D_k x + w(x, u), D_k[u]\}$ sinon. $F_k \subset F_{k+1}$, donc $\forall u \in S$, $D_{F_k}(s, u) \geq d_{F_{k+1}}(s, u)$. $O_{k+1} = (O_k \cup \{u \in \text{succ}(x) \,|\, D_k[u] = +_\infty\}) \setminus \{x\}$
  - On remarque que nécessairement $D_k[s] = 0$, $s \in F_k$ (car $F_1 = \{[\}s$ et (F_i) croissante), donc $d_{F_k}(s, s) \leq \text{long}(s) = 0$, soit $d_{F_{k+1}}(s, s) = 0 = D_{k+1}[s]$.
  - Soit $u \in S \setminus s$. Soit $c = (c_i)_{i \in [\![0, l]\!]} \in C_{F_{k+1}}(s, u)$ (nécessairement $c_0 = s$ et $c_l = u$). On note alors $p = c_{l-1}$. Aini $c = \overbrace{s..p}^{\widetilde{c}} u$.

    Cas 1 : $p \neq x$ **:** Alors $p \in F_{k+1} \setminus \{x\} = F_k$. [On remarque que $\forall y \in F_k, d_{F_k}(s, y) = D_k[y] = d(S, y)$. Donc $\forall y \in F_k, \exists c \in C_{F_k}(s, y)$ de longueur (d, x, y).] (θ) Ici en particulier, il existe $\widetilde{b} \in C_{F_k}(s, p)$ de longueur $d(s, p)$. Ainsi, le chemin $d = \widetilde{b}.u \in C_{F_k}(s, u)$, et $\text{long}(b) =$

$\text{long}(\widetilde{b}) + w(p,u) = d(s,p) + w(p,u) \leq \underbrace{\text{long}(\widetilde{c}) + w(p,u)}_{\text{long}(c)}$. donc $d_{F_k}(s,u) \leq \text{long}(b) \leq \text{long}(c)$ d'où $\text{long}(c) \geq D_k[u]$.

Cas 2 : $p = x$ **:** ... $\text{long}(c) \geq D_k[x] + w(x,u)$.