# Schémas de preuves

## 1 Raisonnements usuels

### 1.1 Implications / Équivalences

Si l'on veut prouver une implication (si $A$, alors $B$), on peut utiliser d'autres implications déjà connues. Ainsi pour prouver que $A$ implique $C$, on commencera par supposer $A$, puis on rappelera que $A$ implique $B$, et donc que $B$ est vraie. Ensuite, on dira que $B$ implique $C$, donc comme $B$ est vraie, $C$ l'est aussi.

### 1.2 Absurde

Le but ici est de montrer que quelque chose est faux. Pour ce faire, on commence par supposer l'assertion à infirmer, et en utilisant certains raisonnements, on en déduit qu'une assertion que l'on sait vraie est fausse, ou réciproquement. On dit alors qu'il y a contradiction, ou absurdité, et on conclut en disant que l'assertion initialement supposée est fausse.

**Remarque:** C'est un cas particulier du raisonnement par contraposée : si $A$ implique quelque chose de faux, cela signifie que quelque chose de vrai implique non $A$.

### 1.3 Récurrence

La récurrence permet de montrer une propriété $P$ dépendant d'un entier naturel $n$ (on note la propriété au rang $n$ $P(n)$ ou $P_n$) sur une partie de $\mathbb{N}$. Le cas général est la récurrence forte, qui permet de démontrer la propriété sur $\mathbb{N}$. Elle consiste en :

1. Démontrer $P(0)$ (initialisation)
2. Fixer un entier naturel $n$
3. Supposer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, que $P(k)$ est vraie
4. En déduire que $P(n+1)$ est vraie (hérédité).

**Remarque:** La récurrence forte est le *cas général*. On utilisera plus souvent la récurrence simple, qui suppose uniquement $P(n)$ et non $P(k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Il existe aussi la récurrence finie (le $n$ pour lequel on suppose $P(n)$ est compris dans un certain intervalle $[\![a, b]\!]$ d'entiers fini, et on prouve $P(a)$ à l'initialisation plutôt que $P(0)$), ainsi que la récurrence descendante (une récurrence finie, mais on prouve $P(b)$ à l'initialisation puis $P(n-1)$ à l'hérédité, jusqu'à $P(a)$).

**Remarque:** La récurrence peut être encore généralisée à l'induction, qui sera évoquée ultérieurement dans le programme.

### 1.4 Analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse synthèse permet de trouver toutes les solutions à un problème. On commence par considérer une solution quelconque d'un problème donné. En raisonnant sur les propriétés qu'elle doit alors avoir, on en déduit qu'elle doit avoir une forme donnée : c'est l'**analyse**. Ensuite, on considère un objet ayant cette forme, et on montre qu'alors il est solution : c'est la **synthèse**.

### 1.5 Disjonction des cas

La disjonction des cas consiste à partitionner l'ensemble des objets vérifiant les hypothèses afin d'en faire émerger de nouvelles. On montre alors la propriété sur chacune des parties.

**Remarque:** Attention : on parle bien de partition : les objets traités dans chaque cas sont différents, et une fois réunis, il reforment l'ensemble de départ !

**Exemple:** Montrons que la somme de deux entiers de même parité est paire par disjonction de cas. Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels de même parité.

- Soit $m$ et $n$ sont tous les deux pairs, et alors il existe deux entiers $p$ et $q$ tels que $m = 2p$ et $n = 2q$. Alors $m + n = 2p + 2q = 2(p + q)$ est un entier pair.
- Soit $m$ et $n$ sont tous les deux impairs, et alors il existe deux entiers $p$ et $q$ tels que $m = 2p + 1$ et $n = 2q + 1$. Alors $m + n = 2p + 1 + 2q + 1 = 2(p + q + 1)$ est un entier pair.

## 2 Preuves sur une fonction

### 2.1 Boucles

### 2.2 Terminaison d'une fonction

### 2.3 Correction d'une fonction