Logique propositionnelle

Dans ce chapitre, on étudie les outils mathématiques permettant de modéliser les expressions booléeenes, sans entrer dans le détail des sous-expressions non booléennes. On fera bien la distinction entre ce qui relève de la syntaxe des formules, c'est à dire comment une formule est écrite, et ce qui relève de leur sémantique, c'est à dire la valeur qu'on leur donne.

1 Syntaxe de la logique propositionnelle

Pour toute cette partie, on fixe Q un ensemble non vide de symboles, appelées ***variables propositionnelles****.*

1.1 Définition inductive des formules

1.1.1 Avec des règles de construction

L'ensemble des formules de la logique propositionnelle $\mathbb{F}_p(Q)$ est construit par induction à partir des règles suivantes :

- $\mathrm{Var}\big|_Q^0$
- $\top\big|_{\{\_\}}^0$ correspondant à vrai.
- $\bot\big|_{\{\_\}}^0$ correspondant à faux.
- $\neg\big|_{\{\_\}}^1$ correspondant à la négation.
- $\wedge\big|_{\{\_\}}^2$ correspondant à la conjonction (et).
- $\vee\big|_{\{\_\}}^2$ correspondant à la disjonction (ou).
- $\rightarrow\big|_{\{\_\}}^2$ correspondant à l'implication.
- $\leftrightarrow\big|_{\{\_\}}^2$ correspondant à l'équivalence.

Remarque : Cet ensemble de règles de construction n'est pas minimal. On pourrait ne garder que Var, $\top$, $\bot$, $\neg$ et $\vee$.

Remarque : Attention : on note l'implication $\rightarrow$ et non pas $\Rightarrow$. Même si elles représentent la même chose, le but est de distinguer l'implication que l'on note quand on raisonne, et celle au sens des expressions booléennes.

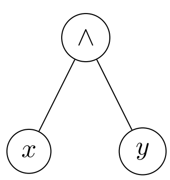
Pour alléger la syntaxe, on notera :

- $\bot$ pour $(\bot, \_)$,
- $\top$ pour $(\top, \_)$,
- $\neg A$ pour $(\neg, A)$,
- q pour (Var, q),
- $A \wedge B$ pour $(\wedge, \_, A, B)$,
- $A \vee B$ pour $(\vee, \_, A, B)$,
- $A \rightarrow B$ pour $(\rightarrow, \_, A, B)$,
- $A \leftrightarrow B$ pour $(\leftrightarrow, \_, A, B)$.

1.2 Représentation sous forme d'arbre

Une formule de $\mathbb{F}_p(Q)$ peut être représentée par un arbre binaire non vide dont les feuilles sont étiquetées par $Q \cup \{\top, \bot\}$, et les noeuds par les autres règles.

Exemple : Pour $Q = \{x, y, z\}$, l'expression $x \wedge y$ peut être représentée ainsi :



Remarque : Une sous formule correspond à un sous-arbre.

La hauteur (resp. la taille) d'une formule est la hauteur (resp. la taille) de l'arbre qui la représente. Plus formellement, on définit la hauteur des formules de $\mathbb{F}_p(Q)$ comme suit :

$$h = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p(Q) & \to & \mathbb{N} \\ \neg A & \mapsto & 1 + h(A) \\ \left.\begin{array}{l} \top \\ \bot \\ q \in Q \end{array}\right\} & \mapsto & 0 \\ \left.\begin{array}{l} A \vee B \\ A \wedge B \\ A \to B \\ A \leftrightarrow B \end{array}\right\} & \mapsto & \max(h(A), h(B)) \end{array}\right) \quad s = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p(Q) & \to & \mathbb{N} \\ \neg A & \mapsto & 1 + s(A) \\ \left.\begin{array}{l} \top \\ \bot \\ q \in Q \end{array}\right\} & \mapsto & 1 \\ \left.\begin{array}{l} A \vee B \\ A \wedge B \\ A \to B \\ A \leftrightarrow B \end{array}\right\} & \mapsto & 1 + s(A) + s(B) \end{array}\right)$$

Exercice 1: Définir de manière similaire la fonction qui à une formule associe l'ensemble de variables apparaissant dans une formule.

1.3 Conjonction et disjonction

Soit $(A_i)_{i \in [1..n]} \in \mathbb{F}_p(Q)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

- On notera $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i$ pour désigner $((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 ...) \wedge A_n = (\bigwedge_{i=1}^{n-1} A_i) \wedge A_n$.
- On notera $\bigvee\limits_{i=1}^{n} A_i$ pour désigner $((A_1 \vee A_2) \vee A_3 ...) \vee A_n = (\bigvee_{i=1}^{n-1} A_i) \vee A_n$.

Formellement, $\bigwedge\limits_{i=1}^{1} A_i = A_1$ et pour $n \geq 2$, $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i = (\bigwedge_{i=1}^{n-1} A_i) \wedge A_n$.

Plus généralement, si $I \neq \varnothing$ est un ensemble ordonné, on s'autorise à écrire $\bigvee\limits_{i \in I} A_i$ et $\bigwedge\limits_{i \in I} A_i$.

Enfin, si $I = \varnothing$, $\bigwedge\limits_{i \in I} A_i$ désigne $\top$, et $\bigvee\limits_{i \in I} A_i$ désigne $\bot$.

1.4 Formes normales

Soit $A \in \mathbb{F}_p(Q)$.

- A est un **littéral** ssi il existe $q \in Q$ tel que $A = q$ ou $A = \neg q$.
- A est une **clause** (disjonctive) ssi c'est une disjonction de littéraux.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\bigvee_{i=1}^{n} A_i$ est une n**-clause** ssi c'est une clause d'exactement n littéraux.
- A est sous **forme normale conjonctive** (abrégée FNC) ssi c'est une conjonction de clauses disjonctives.
- A est sous **forme normale disjonctive** (abrégée FND) ssi c'est une disjonction de conjonctions de littéraux.

Exemple : $(a \vee b) \wedge (a \vee b \vee (\neg c))$ est une forme normale conjonctive.

2 Algèbre booléenne

2.1 Défintion

On note $\mathbb{B}$ l'ensemble $\{V, F\}$. On munit $\mathbb{B}$ des opérations suivantes :

$$+ = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{B} \times \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ (F,F) & \mapsto & F \\ (V,F) & \mapsto & V \\ (F,V) & \mapsto & V \\ (V,V) & \mapsto & V \end{array}\right) \quad \times = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{B} \times \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ (F,F) & \mapsto & F \\ (V,F) & \mapsto & F \\ (F,V) & \mapsto & F \\ (V,V) & \mapsto & V \end{array}\right) \quad \overline{\bullet} = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ V & \mapsto & F \\ F & \mapsto & V \end{array}\right)$$

Le point dans $\overline{\bullet}$ désigne un élément de $\mathbb{B}$ quelconque. En pratique, la notation est la même que pour le conjugué complexe, ou les distances algébriques.

$(\mathbb{B}, +, \times, \overline{\bullet})$ est appelé **algèbre de Boole**.

Propriété : *On a sur $(\mathbb{B}, +, \times, \overline{\bullet})$ les propriétés suivantes :*

1. *$+$ et $\times$ sont commutatives et associatives.*
2. *$\overline{\bullet}$ est involutive.*
3. *$+$ admet F comme élément neutre.*
4. *$\times$ admet V comme élément neutre.*
5. *V est absorbant pour $+$.*
6. *F est absorbant pour $\times$*

▷ L'associativité se montre en étudiant tous les cas possibles. On va les présenter dans un tableau, appelé table de vérité (voir plus loin). Soit $(a, b, c) \in \mathbb{B}^3$. On a :

a	b	c	$a+b$	$b+c$	$a+(b+c)$	$(a+b)+c$
V	V	V	V	V	V	V
		F	V	V	V	V
	F	V	V	V	V	V
		F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
		F	V	V	V	V
	F	V	F	V	V	V
		F	F	F	F	F

a	b	c	$a\times b$	$b\times c$	$a\times(b\times c)$	$(a\times b)\times c$
V	V	V	V	V	V	V
		F	V	F	F	F
	F	V	F	F	F	F
		F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
		F	F	F	F	F
	F	V	F	F	F	F
		F	F	F	F	F

▷ La commutativité se démontre de la même façon. En lisant ces tables de vérités, on prouve aussi 3), 4), 5) et 6). 2) découle simplement des définitions.

Propriété : *Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{B}^2$, on a $\overline{(a+b)} = \overline{a} \times \overline{b}$, et $\overline{a \times b} = \overline{a} + \overline{b}$.*

▷ Avec une table de vérité...

Propriété : *$+$ est distributive par rapport à $\times$ et $\times$ est distributive par rapport à $+$.*

▷ Soient A, B et C trois valeurs de $\mathbb{B}$. Supposons $B = F$. Alors, comme F est le neutre de $+$, et absorbant pour $\times$:
$$A \times (B + C) = A \times C = F + (A \times C) = (A \times B) + (A \times C)$$
Si $B = V$, on a, comme V est le neutre de $\times$ et absorbant pour $+$:
$$A \times (B + C) = A \times V = (A \times B) = (A \times B) + (A \times C)$$

▷ On déduit l'autre distributivité en utilisant la proposition précédente.

2.2 Fonctions booléennes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **fonction booléenne d'arité** n une fonction de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$.

Remarque : Le cardinal de $\mathbb{B}^n$ vaut 2^n. On en déduit que le cardinal de $\mathcal{F}(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}) = \mathbb{B}^{\mathbb{B}^n}$ vaut 2^{2^n}.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{B}^n, \mathbb{B})$. On appelle **table de vérité de** f un tableau T ayant 2^n lignes (indicées de 1 à 2^n) et $n+1$ colonnes, indicées de 1 à $n+1$, à valeurs dans $\mathbb{B}$, qui vérifie :

- $\{(T_{i,j})_{j \in [\![1,n]\!]} \mid j \in [\![1, 2^n]\!]\} = \mathbb{B}^n$
- $\forall i \in [\![1, 2^n]\!], f((T_{i,j})_{j \in [1..n]}) = T_{i,n+1}$

Autrement dit, pour chaque ligne, la dernière colonne indique l'image par f du n-uplet constitué des n premières cases.

Remarque : Il est recommandé d'énumérer les 2^n n-uplets de manière logique (compter en binaire), sinon il sera pénible de tous les lister sans doublons.

Remarque : On s'autorisera à regrouper les tables de vérités de plusieurs fonctions de même arité en ajoutant des colonnes.

3 Sémantique de la logique propositionnelle

On fixe à nouveau Q un ensemble de symboles. On appelle **environnement propositionnel**, **valeurs de vérité** ou **assignation de variable** une fonction de Q dans $\mathbb{B}$.

3.1 Fonction booléenne associée à une formule

Soit ρ un environnement propositionnel. On définit l'interprétation selon ρ des formules de la logique propositionnelle sur Q par :

$$[\bullet]^\rho = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbb{F}_p & \to & \mathbb{B} & \top & \mapsto & V \\ \bot & \mapsto & F & q \in Q & \mapsto & \rho(q) \\ \neg\ \mathrm{A} & \mapsto & \overline{[A]^\rho} & A \vee B & \mapsto & [A]^\rho + [B]^\rho \\ A \wedge B & \mapsto & [A]^\rho \times [B]^\rho & A \to B & \mapsto & \overline{[A]^\rho} + [B]^\rho \\ A \leftrightarrow B & \mapsto & \overline{[A]^\rho \times [B]^p} + ([A]^\rho \times [B]^p) & & & \end{array}\right)$$

Soit $A \in \mathbb{F}_p(Q)$.

- Pour $\rho \in \mathbb{B}^Q$ tel que $[A]^\rho = V$, on dit que ρ **satisfait** A.
- On dit que A est **satisfiable** ssi il existe $\rho \in \mathbb{B}^Q$ tel que ρ satisfait A.
- On dit que A est **valide** ou est une **tautologie** ssi tout $\rho \in \mathbb{B}^Q$ satisfait A.
- On dit que A est **insatisfiable** ou est une **antilogie** ssi tout $\rho \in \mathbb{B}^Q$ ne satisfait pas A.

Exemple : $\top$ et $x \vee (\neg x)$ sont des tautologies, tandis que $\bot$ et $x \wedge (\neg x)$ sont des antilogies.

Soit $A \in \mathbb{F}_p(Q)$. On appelle **fonction booléenne associée** à la formule A la fonction

$$[\![\bullet]\!]^A = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{B}^Q & \to & \mathbb{B} \\ \rho & \to & [A]^\rho \end{array}\right)$$

Remarque : Toute fonction booléenne d'arité $n \in \mathbb{N}^*$ est la fonction booléenne associée d'une formule propositionnelle sur un ensemble de variables propositionnelles de cardinal n, et même d'une formule sous forme normale conjonctive ou forme normale disjonctive (voir section "mise sous forme normale" plus loin).

3.2 Équivalence logique

On définit la relation binaire $\equiv$ sur $\mathbb{F}_{|}(Q)$ par

$$\begin{aligned} \forall (A, B) \in \mathbb{F}_p(Q)^2, A \equiv B &\Leftrightarrow [\![\bullet]\!]^A = [\![\bullet]\!]^B \\ &\Leftrightarrow \forall \rho \in \mathbb{B}^Q, [\![\rho]\!]^A = [\![\rho]\!]^B \\ &\Leftrightarrow \forall \rho \in \mathbb{B}^Q, [A]^\rho = [B]^\rho \end{aligned}$$

Autrement dit, $\{\rho \in \mathbb{B}^Q \mid [A]^\rho = V\} = \{\rho \in \mathbb{B}^Q \mid [B]^\rho = V\}$.

Propriété : *$\equiv$ est une relation d'équivalence.*

▷ Cela découle simplement du fait que $=$ est une relation d'équivalence.

Soit $(A, B) \in \mathbb{F}_p(Q)^2$. On dit que A et B sont **logiquement équivalentes** ssi $A \equiv B$.

Exemple : Pour $(A, B) \in \mathbb{F}_p(Q)^2$, on a $A \vee B \equiv B \vee A$.

▷ En effet, pour tout $\rho \in \mathbb{B}^Q, [A \vee B]^\rho = [A]^\rho + [B]^\rho$ par définition de l'interprétation, ce qui vaut $[B]^\rho + [A]^\rho$ par commutativité de $+$, soit $[B \vee A]^p$ par définition de l'interprétation.

Exercice 2: Soit $(A, B) \in \mathbb{F}_p(Q)^2$. Montrer que :

- $A \wedge B \equiv B \wedge A$

- $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$
- $A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$
- $A \vee (\neg A) \equiv \top$

Soit $(A, B) \in \mathbb{F}_p(Q)$. On dit que B est **conséquence logique de** A, noté $A \vDash B$ ssi tout environnement propositionnel satisfaisant A satisfait aussi B. Formalisé avec des ensembles, on a la définition suivante :

$$A \vDash B \text{ si et seulement si } \{\rho \in \mathbb{B}^Q \mid [A]^\rho = V\} \subset \{\rho \in \mathbb{B}^Q \mid [B]^Q = V\}$$

Propriété : *La relation binaire $\vDash$ est réflexive et transitive, et on a $A \equiv B \Leftrightarrow A \vDash B$ et $B \vDash A$.*

▷ En exercice.

Soit $X \subset \mathbb{F}_p(Q)$. Soit $B \in \mathbb{F}_p(Q)$. On note $X \vDash B$ ssi tout environnement propositionnel satisfaisant **toutes** les formules de X satisfait aussi B. Autrement dit, $\{\rho \in \mathbb{B}^Q \mid \forall A \in X, [A]^\rho = V\} \subset \{\rho \in \mathbb{B}^Q \mid [B]^\rho = V\}$.

Remarque : Attention, ça ne signifie pas que B est conjonction des formules de X, ni équivalente à cette conjonction : X pourrait être de cardinal infini !

Exercice 3: Soit $(A, B) \in \mathbb{F}_p(Q)^2$. Montrer que :

- $\{(A \to B), A\} \vDash B$
- $\{(A \to B), \neg B\} \vDash \neg A$

Propriété : *Soit $A \in \mathbb{F}_p(Q)$.*

- A est une tautologie ssi $A \equiv \top$.
- A est une antilogie ssi $A \equiv \bot$.
- A est une tautologie ssi $\neg A$ est une antilogie.

Propriété : *Soit $(A, B) \in \mathbb{F}_p(Q)^2$.*

- $A \equiv B$ ssi $A \leftrightarrow B \equiv \top$ (i.e $A \leftrightarrow B$ est une tautologie).
- $A \vDash B$ ssi $A \to B \equiv \top$ (i.e $A \to B$ est une tautologie).

▷ En exercice.

3.3 Espace quotient

L'espace des formules logiques quotienté par équivalence, $\mathbb{F}_p(Q)/\equiv$, est en bijection avec $\mathcal{F}(\mathbb{B}^Q, \mathbb{B})$. En effet une classe d'équivalence selon $\equiv$ est caractérisée par la fonction booléenne à laquelle sont associées tous ses éléments. Cela justifie que $[\![\bullet]\!]^A$ soit parfois appelée la **représentation** de A.

3.4 Table de vérité d'une formule

On étend ici la définition de table de vérité aux formules, pour une numérotation des variables fixée : $Q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$ où $n = \text{card } (Q)$. Une table de vérité d'une formule $A \in \mathbb{F}_p(Q)$ est en fait une table de vérité de la fonction associée $[\![\bullet]\!]^A$:

- $\{(T_{i,j})_{j \in [\![1,n]\!]} \mid i \in [\![1, 2^n]\!]\} = \mathbb{B}^Q$.
- Pour tout $i \in [\![1, 2^n]\!]$, $T_{i,n+1}$ vaut $[\![\rho_i]\!]^A$, où $\rho_i \in \mathbb{B}^Q$ est défini par $\forall j \in [\![1, n]\!], \rho_i(q_j) = T_{i,j}$.

3.5 Mise sous forme normale

On fixe dans toute cette partie un entier naturel n et $(T_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,2^n]\!] \times [\![1,n]\!]}$ une table de vérité.

3.5.1 Mise sous FND à partir d'une table de vérité

Pour tout $i \in [\![1, 2]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on note $\ell_{i,j}$ comme étant :

- Le littéral q_j si $T_{i,j} = V$
- Le littéral $\neg q_j$ si $T_{i,j} = F$

Lemme : $\forall i \in [\![1, 2^n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $[\ell_{i,j}]^{\rho_i} = V$

▷ Soit $i \in [\![1, 2^n]\!]$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

- Si $T_{i,j} = V$ alors $\ell_{i,j} = q_j$ donc $[\ell_{i,j}]^{\rho_i} = \rho_i(q_j)$ par définition de l'interprétation d'une variable. Or par définition de ρ_i, $\rho_i(q_j) = T_{i,j}$, donc $[\ell_{i,j}]^{\rho_i} = V$.
- Si $T_{i,j} = F$ alors $\ell_{i,j} = \neg q_j$ donc $[\ell_{i,j}]^{\rho_i} = \overline{\rho_i(q_j)}$ par définition de l'interprétation d'une négation. Or par définition de ρ_i, $\rho_i(q_j) = T_{i,j}$, donc $[\ell_{i,j}]^{\rho_i} = \overline{F} = V$.

On pose ensuite, pour tout $i \in [\![1, 2^n]\!]$, $L_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \ell_{i,j}$.

Lemme : $\forall i \in [\![1, 2^n]\!], [L_i]^{\rho_i} = V$, $\forall k \in [\![1, 2^n]\!]$, si $i \neq k$ alors $[L_i]^{\rho_k} = F$.

▷ Soit $i \in [\![1, 2^n]\!]$. Par définition de l'interprétation d'une conjonction, $[L_i]^{\rho_i} = \prod_{j=1}^{n} [\ell_{i,j}]^{\rho_i} = \prod_{j=1}^{n} V$ d'après le lemme précédent, d'où $[L_i]^{\rho_i} = V$.

▷ Soit $k \in [\![1, 2^n]\!]$ tel que $k \neq i$. Puisque les lignes de T restreintes à leurs n premières colonnes sont deux à deux distinctes, il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $T_{i,j_0} \neq T_{k,j_0}$.

- Si $T_{i,j_0} = V$, alors $\ell_{i,j_0} = q_{j_0}$ et $T_{k,j_0} = F$. Par définition de l'interprétation d'une variable $[\ell_{i,j_0}]^{\rho_k} = \rho_k(q_{j_0})$, or par définition de ρ_k on a $\rho_k(q_{j_0}) = T_{k,j_0} = F$, donc $[\ell_{i,j_0}]^{\rho_k} = F$.
- Si au contraire $T_{i,j_0} = F$, alors $\ell_{i,j_0} = \neg q_{j_0}$ et $T_{k,j_0} = V$. Par définition de l'interprétation de la négation d'une variable, $[\ell_{i,j_0}]^{\rho_k} = \overline{\rho_k(q_{j_0})}$, or par définition de ρ_k, on a $\rho_k(q_{j_0}) = T_{k,j_0} = V$, donc $[\ell_{i,j_0}]^{\rho_k} = \overline{V} = F$.

▷ Dans les deux cas, le terme d'indice j_0 de la somme qu'est l'interprétation de L_i vaut F, et F étant absorbant pour $\times$, on en déduit que $[L_i]^{\rho_k} = F$.

Finalement, on pose $D = \bigvee_{i \in [\![1,2^n]\!] / T_{i,n+1} = V} L_i$.

Propriété : $D \equiv A$.

▷ Soit $\rho \in \mathbb{B}^Q$. On note $I = \{i \in [\![1, 2^n]\!] \mid T_{i,n+1} = V\}$, ainsi $D = \bigvee_{i \in I} L_i$. De plus, par définition de l'interprétation d'une disjonction, $[D]^\rho = \sum_{i \in I} [L_i]^\rho$. Puisque les lignes de T restreintes à leurs premières colonnes couvrent $\mathbb{B}^Q$, il existe $i_0 \in [\![1, 2^n]\!]$ tel que $\rho = \rho_{i_0}$.

- Si $[A]^\rho = V$, on a $V = [\![\rho]\!]^A = [\![\rho_{i_0}]\!]^A = T_{i_0,n+1}$, donc $i_0 \in I$. Ainsi le terme $[L_{i_0}]^\rho$ apparaît dans la somme qu'est $[D]^\rho$, or d'après le lemme précédent, $[L_{i_0}]^\rho = [L_{i_0}]^{\rho_{i_0}} = V$, et V étant absorbant pour la somme, on en déduit que $[D]^\rho = V$, soit $[D]^\rho = [A]^\rho$.
- Si au contraire $[A]^\rho = F$, alors $T_{i_0,n+1} = F$ donc $i_0 \notin I$. Autrement dit $\forall i \in I, i \neq i_0$ donc d'après le lemme prédédent, $[L_i]^{\rho_{i_0}} = F$ soit $[L_i]^\rho = F$. Une somme de F étant F, on en déduit que $[D]^\rho = F$ soit $[D]^\rho = [A]^\rho$.

Exemple : Mise sous FND de la formule $A = (a \vee b) \to (c \wedge a)$: On commence par réaliser la table de vérité de l'expression :

a	b	b	$(a \vee b)$	$(c \wedge a)$	A	
V	V	V	V	V	V	$\to (a \wedge b \wedge c)$
V	V	F	V	F	F	
V	F	V	V	V	V	$\to (a \wedge (\neg b) \wedge c)$
V	F	F	V	F	F	
F	V	V	V	F	F	
F	V	F	V	F	F	
F	F	V	F	F	V	$\to ((\neg a) \wedge (\neg b) \wedge c)$
F	F	F	F	F	V	$\to ((\neg a) \wedge (\neg b) \wedge (\neg c))$

D'où $A = (a \wedge b \wedge c) \vee \underbrace{(a \wedge (\neg b) \wedge c) \vee ((\neg a) \wedge (\neg b) \wedge c)}_{=(\neg b) \wedge c} \vee ((\neg a) \wedge (\neg b) \wedge (\neg c))$, soit

$$\boxed{A = (a \wedge b \wedge c) \vee ((\neg b) \wedge c) \vee ((\neg a) \wedge (\neg b) \wedge (\neg c))}$$

3.5.2 Mise sous FNC à partir d'une table de vérité

Exemple : Mise sous FNC de la formule $A = (a \vee b) \rightarrow (c \wedge a)$: On commence par réaliser la table de vérité de l'expression :

a	b	b	$(a \vee b)$	$(c \wedge a)$	A	
V	V	V	V	V	V	
V	V	F	V	F	F	$\rightarrow ((\neg a) \vee (\neg b) \vee c)$
V	F	V	V	V	V	
V	F	F	V	F	F	$\rightarrow ((\neg a) \wedge b \wedge (\neg c))$
F	V	V	V	F	F	$\rightarrow (a \wedge (\neg b) \wedge (\neg c))$
F	V	F	V	F	F	$\rightarrow (a \wedge (\neg b) \wedge c)$
F	F	V	F	F	V	
F	F	F	F	F	V	

Ainsi :
$$\boxed{A = ((\neg a) \vee (\neg b) \vee c) \wedge ((\neg a) \vee b \vee c) \wedge (a \vee (\neg b) \vee (\neg c)) \wedge (a \vee (\neg b) \vee c)}$$

Soit $A \in \mathbb{F}_p(Q)$ où $Q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$. Soit T une table de vérité suivant cette numérotation de Q. Pour tout $i \in [\![1, 2^n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on note $r_{i,j}$ comme étant

- Le littéral $\neg q_j$ si $T_{i,j} = V$.
- Le littéral q_j sinon.

On pose, pour tout $i \in [\![1, 2^n]\!], R_i = \bigvee_{j=1}^n r_{i,j}$, et $C = \bigwedge_{i \in [\![1,2^n]\!] / T_{i,n+1}=F} = R_i$.

Propriété : *Avec ces notations, on a les propriétés suivantes :*

- $\forall i \in [\![1, 2^n]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], [r_{i,j}]^{\rho_i} = F$.
- $\forall i \in [\![1, 2^n]\!], [R_i]^{\rho_i} = F$ *et* $\forall k \in [\![1, 2^n]\!], k \neq i, [R_i]^{\rho_k} = V$.
- $C \equiv A$.

▷ Pour s'entraîner ; c'est comme pour les FND...

3.5.3 Bilan :

- Certaines formules sont à la fois sous FNC et FND, par exemple $a \wedge b \wedge c$.
- Il y a **existence** de la FNC/FND équivalente à une formule.
- Il n'y a pas **unicité** de la FNC/FND équivalente à une formule (soit à cause de la commutativité, soit à cause de simplifications possibles).
- Attention, **la taille de la forme normale peut exploser** en passant d'une forme à l'autre : Par exemple, $A = \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge b_i)$ est une conjonction de n termes, écrites avec $2n$ littéraux, mais une FND équivalente est une disjonction de 2^n termes étant chacun le produit de n littéraux (pour chaque $i \in [\![1, n]\!], a_i$ ou b_i apparaît) :

$$A \equiv (a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n) \wedge (b_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n) \wedge ... \wedge (b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n)$$

Exercice 4: Donner une formule équivalente, plus simple, aux formules suivantes :

1. $A \wedge (\neg A) \equiv$
2. $A \vee (\neg A) \equiv$
3. $A \wedge \top \equiv$
4. $A \vee \top \equiv$

5. $A \wedge \perp \equiv$
6. $A \vee \perp \equiv$
7. $A \wedge ((\neg A) \vee B) \equiv$
8. $A \vee ((\neg A) \wedge B) \equiv$
9. $(A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee B) \equiv$
10. $(A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge B) \equiv$

Exercice 5: Mettre sous FNC et FND les formules suivantes :

1. $U = (x \wedge y) \vee (z \wedge (\neg z) \wedge q) \vee ((\neg x) \wedge z)$
2. $V = (x \wedge q) \rightarrow ((y \vee (\neg z)) \wedge q)$
3. $W = (x \wedge y) \leftrightarrow ((\neg x) \wedge z)$