

# Algorithmique du texte

On appelle **texte** une suite finie de caractères (ce que l'on a appelé mot jusqu'à présent). L'algorithmique du texte consiste à résoudre des problèmes sur des textes, qui peuvent en réalité modéliser des informations diverses :

- des textes à proprement parler ;
- une séquence ADN ;
- de la musique ;
- des images...

Par exemple,

- les recherches de similarité, dont notamment :
  - la recherche du plus long sous-mot commun ;
  - la recherche du plus long facteur commun ;
  - la distance d'édition / alignement ;
- la recherche de motif ;
- la compression ;
- l'encodage par facteurs...

## 1 Rappels

On fixe  $\Sigma$  un ensemble, appelé **alphabet**, dont les éléments sont appelés **caractères**. On définit alors l'ensemble  $\Sigma^*$  des textes sur  $\Sigma$  et celui des textes non vides  $\Sigma^+$  par :

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n \quad \Sigma^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Sigma^n$$

On note  $\varepsilon$  le texte vide, c'est à dire le seul 0-uplet de  $\Sigma^*$ . On munit alors  $\Sigma^*$  de la **concaténation** définie ainsi :

$$\forall (u = (u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}, (v_j)_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket}) \in (\Sigma^*)^2, u.v = u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n v_1 v_2 \dots v_{m-1} v_m$$

On vérifie alors que  $(\Sigma^*, .)$  est un monoïde.

On appelle **sous-texte** d'un texte  $u$  de  $\Sigma^*$  toute suite extraite de  $u$ . Par ailleurs, on dit que  $v \in \Sigma^*$  est un **facteur** de  $u = u_1 \dots u_n$  ssi il existe  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $v = u_i \dots u_j$ . Dans le cas où  $i = 1$ , on dit que  $v$  est un **préfixe** de  $u$ . Si  $j = n$ , alors c'est un **suffixe** de  $u$ .

## 2 Plus long facteur commun

### 2.1 Description

Plus long facteur commun	Entrée:	$u \in \Sigma^*$ de longueur $n$ et $v \in \Sigma^*$ de longueur $m$
		$\max\{ f  \mid f \text{ facteur de } u \text{ et de } v\}$ i.e
	Sortie:	$\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, f = (u_k)_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$ ou encore $\exists (p, q) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, f = (v_k)_{k \in \llbracket p, q \rrbracket}$

On abrègera **Plus long facteur commun** en **PLFC**.

### 2.2 Résolution

On pose pour  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket$  :

$$A_{i,j} = \max\{|s| \mid s \text{ est un suffixe de } u_1 \dots u_i, v_1 \dots v_j\} \leq \min(i, j)$$

On a immédiatement, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$  :

- $i = 0$  ou  $j = 0 \rightarrow A_{i,j} = 0$
- $A_{i,j} = A_{i-1,j-1} + 1$  si  $u_i = v_j$ , 0 sinon.

D'où  $\text{PLFC}(u, v) = \max_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket} A_{i,j}$

## 3 Recherche de motif

### 3.1 Définitions

Trouve motif	Entrée:	$t \in \Sigma^*$ un texte de longueur $n$ , $x \in \Sigma^*$ un motif de longueur $m$ (avec $m \leq n$ )
	Sortie:	$\underbrace{\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid (t_{i+k})_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket} = x\}}_{\text{l'ensemble des indices de début des occurrences de } x \text{ dans } t}$

**Exercice 1:** Proposer un algorithme de résolution naïve pour ce problème.

### 3.2 Algorithme de