Schémas de preuves

1 Raisonnements usuels

1.1 Implications / Équivalences

Le principe est d'utiliser la transitivité de l'implication. Ainsi pour prouver que A implique C, on commencera par supposer A vraie, puis on rappelera que A implique B, et donc que B est vraie. Ensuite, on dira que B implique C, donc comme B est vraie, C l'est aussi.

Le raisonnement par équivalence est le même procédé, sauf que l'on utilise des équivalences à la place des implications.

1.2 Absurde

Le but ici est de montrer que quelque chose est faux. Pour ce faire, on commence par supposer l'assertion à infirmer, et en utilisant certains raisonnements, on en déduit qu'une assertion que l'on sait vraie est fausse, ou réciproquement. On dit alors qu'il y a contradiction, ou absurdité, et on conclut en disant que l'assertion initialement supposée est fausse.

Remarque: C'est un cas particulier du raisonnement par contraposée : si A implique quelque chose de faux, cela signifie que quelque chose de vrai implique non A.

1.3 Récurrence

La récurrence permet de montrer une propriété P dépendant d'un entier naturel n (on note la propriété au rang n $P(n)$ ou P_n) sur une partie de $\mathbb{N}$. Le cas général est la récurrence forte, qui permet de démontrer la propriété sur $\mathbb{N}$. Elle consiste en :

1. Démontrer $P(0)$ (initialisation)
2. Fixer un entier naturel n
3. Supposer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, que $P(k)$ est vraie
4. En déduire que $P(n+1)$ est vraie (hérédité).

Remarque: La récurrence forte est le *cas général*. On utilisera plus souvent la récurrence simple, qui suppose uniquement $P(n)$ et non $P(k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Il existe aussi la récurrence finie (le n pour lequel on suppose $P(n)$ est compris dans un certain intervalle $[\![a, b]\!]$ d'entiers fini, et on prouve $P(a)$ à l'initialisation plutôt que $P(0)$), ainsi que la récurrence descendante (une récurrence finie, mais on prouve $P(b)$ à l'initialisation puis $P(n-1)$ à l'hérédité, jusqu'à $P(a)$).

Remarque: La récurrence peut être encore généralisée à l'induction, qui sera évoquée ultérieurement dans le programme.

1.4 Analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse synthèse permet de trouver toutes les solutions à un problème. On commence par considérer une solution quelconque d'un problème donné. En raisonnant sur les propriétés qu'elle doit alors avoir, on en déduit qu'elle doit avoir une forme donnée : c'est l'**analyse**. Ensuite, on considère un objet ayant cette forme, et on montre qu'alors il est solution : c'est la **synthèse**.

1.5 Disjonction des cas

La disjonction des cas consiste à partitionner l'ensemble des objets vérifiant les hypothèses afin d'en faire émerger de nouvelles. On montre alors la propriété sur chacune des parties.

Remarque: Attention : on parle bien de partition : les objets traités dans chaque cas sont différents, et une fois réunis, il reforment l'ensemble de départ !

Exemple: Montrons que la somme de deux entiers de même parité est paire par disjonction de cas. Soient m et n deux entiers naturels de même parité.

- Soit m et n sont tous les deux pairs, et alors il existe deux entiers p et q tels que $m = 2p$ et $n = 2q$. Alors $m + n = 2p + 2q = 2(p + q)$ est un entier pair.
- Soit m et n sont tous les deux impairs, et alors il existe deux entiers p et q tels que $m = 2p + 1$ et $n = 2q + 1$. Alors $m + n = 2p + 1 + 2q + 1 = 2(p + q + 1)$ est un entier pair.

2 Preuves sur une fonction

2.1 Boucles

2.2 Terminaison d'une fonction

2.3 Correction d'une fonction