Graphes

1 Définitions

1.1 Graphes

Un graphe **non orienté** est la donnée d'un couple $G = (V, E)$, où V est un ensemble fini non vide et $E \subset \{\{x, y\} \,|\, (x, y) \in V^2\}$. Un graphe **orienté** est la donnée d'un couple $H = (S, A)$, où S est un ensemble fini non vide et $A \in \mathcal{P}(S^2)$.

Les éléments de V et A sont appelés **sommets du graphe**, On parlera, pour désigner les éléments de E dans un graphe non-orienté d'**arrêtes** du graphe, et pour un graphe orienté d'**arcs**.

Si $e = \{x\} \in E$ (avec $x \in V$), e est une **boucle** sur x (idem pour $e = (x, x)$ pour $x \in S$). Pour $(x, y) \in V^2$, on dit que x et y sont **voisins** ssi $\{x, y\} \in E$. Cette notion se précise dans un graphe orienté : on dit que $x \in S$ est un **successeur** (resp. **prédecesseur**) de y ssi $(y, x) \in A$ (resp. $(x, y) \in A$). Les **voisins** de x sont alors ses successeurs et ses prédecesseurs.

On appelle **voisinnage** du sommet x l'ensemble $\mathscr{V}(x)$ de ses voisins. Le **degré** de x, noté $\deg x$, est le cardinal de ce voisinnage.

Pour les graphes orientés, on distingue le **degré sortant** de x, noté $\deg^+ x$, le nombre de successeurs de x, du **degré entrant** de x, noté $\deg^- x$,le nombre de prédecesseurs de x.

On supposera par la suite que l'on travaille avec des graphes sans boucles.

Propriété : *Soit $G = (V, E)$ un graphe. On a $\sum_{x \in V} \deg(x) = 2card(E)$*

▷ On a :

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} \mathbb{1}_{\{x,y\}} = \sum_{(x,y) \in V^2} \mathbb{1}_{\{x,y\}} = 2 \sum_{\{x,y\} \in V^2} \mathbb{1}_{\{x,y\}} = 2\mathrm{card}(E).$$

Car le graphe est sans boucle. Il faudrait sinon ajouter le nombre de boucles présentes dans le graphe.

1.2 Accessibilité, connexité

On fixe $G = (V, E)$ un graphe non orienté, et $H = (A, S)$ un graphe orienté.

Soit $s = (s_i) \in V^{n+1}$. On dit que s est une **chaîne de** G ssi $\forall i \in [\![1, n[\![, \{s_i, s_{i+1}\} \in E$ On dit alors que s est une chaîne de longueur n et qui relie s_0 **et** s_n.

Soit $s = (s_i) \in A^{n+1}$. On dit que s est un **chemin de** G ssi $\forall i \in [\![1, n[\![, \{s_i, s_{i+1}\} \in E$ On dit alors que s est une chaîne de longueur n et qui relie s_0 **à** s_n.

On dit alors que s_n est accessible depuis s_0. Par ailleurs, si $s_n = s_0$, on dit que s est un **cycle** pour un graphe non-orienté, ou un **circuit** dans un graphe orienté.

Si tous les (s_i) sont distincts, on dit que s est **élémentaire**.

Remarque : Il y a toujours un nombre fini de chaînes élémentaires, mais si G (resp. H) a des cycles (resp. des circuits), il y a un nombre infini de chaînes (il suffit de tourner en rond...).

Exercice 1: Définir la relation entre les circuits/chemins d'un graphe, qui met en relation deux circuits/chemins ssi ils relient les mêmes sommets. Est-ce une relation d'équivalence ?

Propriété : *La relation $\mathcal{R}$ définie sur V^2 par $x\mathcal{R}y$ ssi x est accessible depuis y est une relation d'équivalence.*

- ▷ Soit $x \in V$. On a bien $x\mathcal{R}x$: la chaîne de longueur $n = 0$ $s = (x)$ convient.
- ▷ Soit $(x, y) \in V^2$, tel que $x\mathcal{R}y$. Alors par définition il existe $s = (s_0, ..., s_n) \in V^{n+1}$ tel que $s_0 = x$ et $s_n = y$, et $\forall i \in [\![0, n[\![$, $\{s_i, s_{i+1}\} \in E$. Considérons $s' = (s_n, s_{n-1}, ..., s_1, s_0)$. s' est une chaîne reliant y et x. En effet, $s'_0 = s_n = y$ et $s'_n = s_0 = x$, et $\forall i \in [\![0, n[\![, \{s'_i, s'_{i+1}\} = \{s_{n-i}, \{n-i-1\} = \{s_k, s_{k+1}\}\} \in E$ en posant $k = n - i - 1 \in [\![0, n[\![$.
- ▷ Soit $(x, y, z) \in V^3$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Comme $x\mathcal{R}y$, il existe $s = (s_0, ..., s_n) \in V^{n+1}$ une chaîne avec $s_0 = x$ et $s_n = y$. Comme $y\mathcal{R}x$, il existe $t = (t_0, ..., t_m) \in V^{m+1}$ une chaîne avec $t_0 = y$ et $t_m = z$. Considérons $u = (s_0, ...s_n, t_1, ...t_m)$. u est bien une chaîne car $\forall i \in [\![0, n+m[\![$, soit $i \in [\![0, n[\![$ et dans ce cas on a $\{u_i, u_{i+1}\} = \{s_i, s_{i+1}\} \in A$, soit $i = n$ et on a $\{u_i, u_{i+1}\} = \{t_0, t_1\} \in E$, soit $i \in]\!]n, n+m]\!]$ et $\{u_i, u_{i+1}\} = \{t_{i-n}, t_{i-n+1}\} \in E$. On a par ailleurs $u_0 = x$ et $u_{m+n} = z$, donc $x\mathcal{R}z$.

Exercice 2: Définir une relation d'équivalence similaire pour H, où l'on doit avoir un chemin dans chaque sens entre deux points en relation.

Une composante connexe de G est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence définie ci-dessus. Si G n'admet qu'une composante connexe, on dit que G est un graphe connexe. Dans le cas de la relation d'équivalence sur les graphes orientés, on appelle les classes d'équivalences **composante fortement connexe**.

Soit $W \subset V$ avec $W \neq \varnothing$. W est **connexe** ssi $\forall (x, y) \in W^2$, il existe une chaîne reliant x et y.

Propriété : *W est une composante connexe ssi W est connexe minimal, c'est à dire si $\forall W' \subset V \backslash \{W\}, W \subset W'$, W' n'est pas connexe.*

Soit $G' = (V', E')$ un graphe. G' est un **sous-graphe** ssi $V' \subset V$, $E' \subset E$.

Soit $V' \subset V$ Le **graphe induit par G sur V'** est $G' = (V', \{\{x, y\} \in E \,|\, (x, y) \in V^2\})$.

Propriété : *Un ensemble de sommets est connexe ssi le graphe qu'il induit est connexe.*

- ▷ En exercice.

1.3 Types de graphes

Un graphe non-orienté (resp. orienté) est dit **acyclique** s'il ne contient aucun cycle élémentaire (resp. aucun circuit).

Un **arbre** est un graphe connexe acyclique. (cf TD pour caractérisation).

Un graphe acyclique décomposé en ses composantes connexes (qui sont donc des arbres), est appelé **forêt**.

Un graphe non-orienté (V, E) est dit bipartie ssi il existe une partition $\{W_1, W_2\}$ de V telle que toutes les arrêtes de E aient une extrémité dans W_1 et l'autre dans W_2.

Algorithme pour décider si un graphe est bipartie : Il suffit de créer deux ensembles W_1 et W_2. On prend un point au hasard dans le graphe, et on le place dans W_1. On place alors tous les voisins de x dans W_2, puis tous les voisins des voisins de x dans W_1, et ainsi de suite, récursivement. Si jamais il y a conflit (on doit placer un élément dans W_1 alors qu'il est déjà présent dans W_2 par exemple), alors le graphe n'est pas bipartie. Une fois que l'on ne peut plus ajouter d'éléments à un des deux ensembles, si des points du graphe n'ont toujours pas été ajoutés, on recommence le processus sur l'un de ces points, jusqu'à ce que tous les points aient été ajoutés. Si le processus s'est fait sans conflit, le graphe est bipartie.

2 Parcours

2.1 Définitions

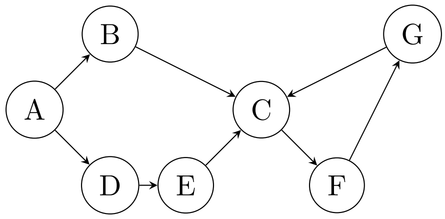
On définit, pour $W \subset V$ la bordure de W par :

$$\mathcal{B}(W) = \{y \in V \setminus W \,|\, \exists x \in W, x, y \in E\}$$

Dans le cadre d'un graphe orienté, pour $T \subset S$:

$$\mathcal{B}(T) = \{y \in V \setminus T \,|\, \forall x \in T, y \in \mathscr{V}(x)\}$$

On dit que $L \in V^n$ (ou S^n pour un graphe orienté) est un parcours ssi $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i \in \mathcal{B}(\{L_j \,|\, j \in \llbracket 1, i \llbracket\})$.

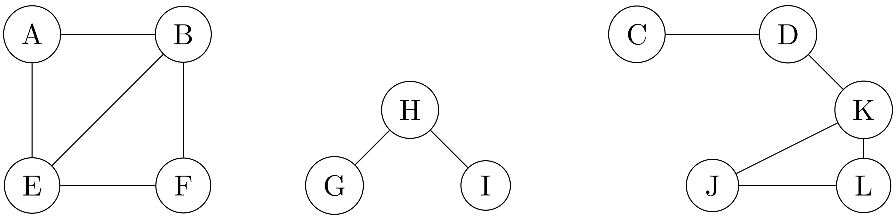


Un parcours du graphe orienté ci-dessus est $L = [F, G, C, E, A, B, D]$

De plus, on dit que L_i est un **point de regénération du parcours** ssi $\mathcal{B}(\{L_j \,|\, j \in \llbracket 1, i \llbracket\}) = \varnothing$. [? ?]

Enfin, en notant $\mathcal{R}$ l'ensemble des points de régénération de L, on dit que $F = (V, P)$ est une forêt d'arborescences associée au parcours L ssi F respecte les trois propriétés suivantes :

1. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i \in \mathcal{R}$ ou $\exists j \in \llbracket 1, i \llbracket, L_i \in \mathscr{V}(L_j), (L_j, L_i) \in P$;
2. $\forall u \in V \setminus R, \exists! w \in V, (w, u) \in P$ (on dit alors que w est le **père** de u) ;
3. $F = (V, P)$. P est minimal parmi les ensemble vérifiant 1.



$$L = [\underbrace{A, B, E, F}_{r_1=1}, \underbrace{G, H, I}_{r_2=5}, \underbrace{C, D, K, J, L}_{r_3=8}].$$

Propriété : *Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Soit $W \subset V$. Si $\mathcal{B}(W) = \varnothing$, alors il n'existe aucune chaîne reliant un sommet de W et un sommet de $V \subset W$.*

- ▷ Par l'absurde, supposons qu'il existe une chaîne γ de lngueur l telle que $\gamma_0 \in W$ et $\gamma_l \in V \setminus W$. On a $\gamma_0 \neq \gamma_l$ donc $l > 0$. On peut alors définir $i_0 = \min\{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \,|\, \gamma_i \notin W\}$. Par définition de i_0, $\gamma_{i_0 - 1} \in W$. Par définition, une chaîne $\{\gamma_{i_0}, \gamma_{i_0}\} \in E$, autrement dit $\gamma_{i_0} \in \mathscr{V}(\gamma_{i_0 - 1})$. Donc $\gamma_{i_0} \in \mathcal{B}(W)$: absurde.

Propriété : *Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, et $L = (L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ un parcours de G. Si l'ensemble des points de regénération s'écrit $\{L_{r_k}\} | k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ avec (r_k) croissant, alors G admet K composantes connexes, à savoir les $(c_k)_{k \in \llbracket 1, K \rrbracket}$ définis par $c_k = \{L_i \,|\, i \in \llbracket r_k, r_k + 1 \llbracket\}$ avec $r_{K+1} = n + 1$.*

- ▷ Soit $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$. Montrons que C_k est connexe maximal.
- ▷ Si $C_k = V$, il est trivialement connexe. Sinon, soit $u \in V \setminus C_k$. MQ $\hat{C_k} = C_k \cup \{u\}$ n'est pas connexe. Par définition d'un parcours. Il existe $i_u \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tq $u = L_{i_u}$. Comme $u \notin C_k$, $i_u \notin \llbracket r_k, r_{k+1} \llbracket$ Si $i_u < r_k$, on pose $W = \{L_i \,|\, i \in \llbracket 1, r_k \llbracket\}$. Ainsi, $Li_u \in W$ et $\mathcal{B} = \varnothing$ car L_{i_k} est point de regénération. D'après le lemme, il n'existe aucun chemin reliant L_{i_u} et $L_{i_k} \notin W$ donc $\hat{C_k}$ n'est pas connexe. Autre cas... Ainsi C_k est maximal.