Ordres et induction

1 Ordre

1.1 Élements particuliers

Soit $x \in X$. On dit que:

- x est un majorant de Y ssi $\forall y \in Y, y \leq x$.
- x est un minorant de Y ssi $\forall y \in Y, x \leq y$.

Soit $y \in Y$. On dit que:

- y est le plus grand élément de Y ssi c'est un majorant de Y.
- y est le plus petit élément de Y ssi c'est un minorant de Y.
- y est minimal ssi il n'existe pas de y' dans Y tel que $y' \leq y$
- y est maximal ssi il n'existe pas de y' dans Y tel que $y \leq y'$

Remarque Si le plus grand élément et le plus petit élément sont forcément uniques à cause de l'antisymétrie de la relation, les éléments minimaux et maximaux, eux, ne le sont pas toujours !

Remarque Cela dit, si l'ordre est total, il n'y a qu'un seul élément minimal, le plus petit élément (il en va de même pour les élément maximaux).

On note $\mathrm{Min}(Y)$ l'ensemble des minorants de Y, et $\mathrm{Maj}(Y)$ l'ensemble de ses majorants. Le plus grand élément de $\mathrm{Min}(Y)$, s'il existe, est appelé borne inférieure de Y. De la même façon, le plus petit élément de $\mathrm{Max}(Y)$, s'il existe, est appelé borne supérieure de Y.

1.2 Ordre bien fondé

On considère ici deux ensembles ordonnés, $(X, \leq)$ et $(Y, \preceq)$.

Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$.

- f est croissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x \leq x' \Rightarrow f(x) \preceq f(x')$
- f est décroissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x \leq x' \Rightarrow f(x) \succeq f(x')$
- f est strictement croissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x < x' \Rightarrow f(x) \prec f(x')$
- f est strictement décroissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x < x' \Rightarrow f(x) \succ f(x')$

Remarque On étend ces définitions aux suites de $X^{\mathbb{N}}$, vues comme des fonctions de $(\mathbb{N}, \leq)$ dans $(X, \leq)$.

Exemple La fonction identité Id de $(\mathbb{N}^*, \leq)$ dans $(\mathbb{N}^*, |)$ est strictement croissante

Propriété *Si $\leq$ est une relation d'ordre totale sur X (autrement dit si $(X, \leq)$ est un ordre total), alors toute fonction strictement croissante de $(X, \leq)$ dans $(Y, \preceq)$ est injectif.*

▷ Soient x et y dans X tels que $f(x) = f(y)$. On a donc en particulier $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$. Le fait que l'ordre sur X soit total nous permet de conclure en utilisant la contraposée de la définition de la croissance stricte de f que:

$$\begin{cases} f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y \\ f(y) \leq f(x) \Rightarrow y \leq q \end{cases} \Leftrightarrow (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

Donc f est injective

Remarque Attention à ce que l'ordre soit bien total. Par exemple, la fonction de $(\mathbb{N}^*, |)$ dans $(\mathbb{N}^*, \leq)$ qui associe à un entier naturel son nombre de diviseurs est bien strictement croissante, mais certainement pas injective !

On dit qu'un ordre $\leq$ sur X est bien fondé ssi toute partie non vide de X admet un élément minimal.

Propriété *Un ordre est bien fondé ssi il n'existe pas une suite infinie strictement décroissante.*

$\Rightarrow$: Considérons $(X, \leq)$ un ensemble bien fondé, et supposons par l'absurde l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ strictement décroissante. On note $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. A est une partie non vide de X, et admet donc un élément minimal a_0. Il existe alors par définition de A $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_0 = u_{n_0}$. Par stricte décroissance de (u_n), on aurait alors $u_{n_0+1} < u_{n_0} = a_0$, ce qui contredit la minimalité de a_0. Donc il n'existe pas de suite d'élements de X strictement décroissante.

$\Leftarrow$: Montrons la contraposée. Supposons que $(X, \leq)$ n'est pas bien fondé. Il existe donc $A \subset X \neq \varnothing$ n'admettant pas d'élément minimal. Soit a_0 l'un des éléments de A. a_0 n'est pas minimal dans A, donc il existe $a_1 \in A$ tel que $a_1 < a_0$. On peut alors construire selon ce procédé une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinie d'éléments de X strictement décroissante.

1.3 Ordre produit, ordre lexicographique

Considérons une famille finie $(X_i, \leq_i)_{i\in[1..n]}$ d'ensembles ordonnés. On note $Y = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

Propriété *La relation $\mathcal{R}$ définie sur Y par $(a_1, a_2, ..., a_n)\mathcal{R}(b_1, b_2, ..., b_n) \Leftrightarrow \forall i \in [1..n], a_i \leq_i b_i$ est une relation d'ordre, appelé ordre produit des $\leq_i$ et noté $\leq_1 \times \leq_2 \times ... \times \leq_n$ ou $\prod_{i=1}^{n} \leq_i$.*

▷ $\mathcal{R}$ est réflexive car on a bien, pour tout $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ dans Y $a\mathcal{R}a$: en effet, comme tous les a_i sont égaux, $\forall i \in [1..n], a_i \leq a_i$.

▷ $\mathcal{R}$ est transitive: considérons trois éléments a, b et c de Y, tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$. Alors pour tout $i \in [1..n]$, on a $a_i \leq_i b_i$ et $b_i \leq_i c_i$, donc par transitivité de $\leq_i$, $a_i \leq_i c_i$, d'où $a\mathcal{R}c$.

▷ $\mathcal{R}$ est antisymétrique car si $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$, alors pour tout $i \in [1..n]$, on a $a_i \leq_i b_i$ et $b_i \leq_i a_i$, c'est à dire $a_i = b_i$, donc $a = b$.

Propriété *La relation $\mathcal{R}$ définie sur Y par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = b$ ou $\exists j \in [1..n], \forall i \in [1..j[, a_i = b_i$ et $a_j <_j b_j$ est une relation d'ordre, appelé ordre lexicographique sur Y*

▷ $\mathcal{R}$ est réflexive par définition.

- $\mathcal{R}$ est transitive: considérons trois éléments a, b et c de Y, tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$. Si $a = b$ ou $b = c$, on a bien $a\mathcal{R}c$. Considérons maintenant que ce ne soit pas le cas. Comme $a\mathcal{R}b$, il existe$(j, j') \in [1..n]^2$ tel que $\forall i \in [1..j[$, $a_i = b_i$, $\forall i \in [1..j'[$, $b_i = c_i$ ainsi que $a_j <_j b_j$ et $b_{j'} \leq c_{j'}$. En prenant $J = \min(j, j')$, on a alors, pour tout $i \in [1..J[$, $a_i = c_i$, et $a_J <_J c_J$ (car soit $a_J < b_J \leq_J c_J$, soit $a_J \leq b_J < c_J$ car $J = j$ ou $J = j'$). Ainsi $a\mathcal{R}c$

- Montrons $\mathcal{R}$ est antisymétrique par l'absurde. Supposons qu'il existe $(a, b) \in Y^2$ tel que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$, mais $a \neq b$. Alors il existe $(j, j') \in [1..n]^2$ vérifiant $\forall i \in [1..j[a_i <_i b_i$ et $\forall i \in [1..j'[b_i <_i a_i$, donc en particulier pour $i = 1$, $a_1 < b_1$ et $a_1 > b_1$: on arrive à une absurdité. Donc $\mathcal{R}$ est bien antisymétrique.

On peut étendre cet définition à des n-uplets de taille différente. Considérons un ensemble $(\Sigma, \leq)$. On note Σ^* l'ensemble des n-uplets d'éléments de Σ. Σ est alors appelé alphabet et Σ^* désigne l'ensemble des mots de Σ. Le mot vide (autrement dit le 0-uplet) est noté ϵ. Pour un mot u de Σ, on note $|u|$ la taille de ce mot.

Propriété *La relation $\mathcal{R}$ définie sur Σ^* par $\forall (u, v) \in (\Sigma^*)^2$ $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N}$:($\forall i \in [1..j[, u_i = v_i$ et $j = |u|$) ou ($j < |u|$ et $u_j < v_j$) est un relation d'ordre.*

- Introduisons le caractère nul 0 et l'ensemble $\mathcal{A} = \Sigma \cup \{0\}$. On introduit la relation d'ordre $\preceq$ sur $\mathcal{A}$, telle que $\preceq \cap \Sigma^2 = \leq$, et que $\forall a \in \mathcal{A}, 0 \preceq a$. Considérons alors la fonction f_n qui à un mot $(u_1, u_2, ..., u_m)$ de Σ de longueur $m \leq n$ associe le mot $(u_1, u_2, ..., u_m, 0, 0, ...)$ de $\mathcal{A}^n$.

- Montrons que $u\mathcal{R}v \Rightarrow f(u) \preceq v$ (où $\preceq$ désigne l'ordre lexicographique) et que f est injective: Pour le premier point, si $u\mathcal{R}v$, alors il existe $j \in [1..n]$: $\forall i \in [1..j[, u_i = v_i$ et $j = |u|$, auquel cas $\forall i \in [1..n] f_n(u)_i = f_n(v_i)$ et $f_n(u)_j = 0 \preceq f_n(v)_j$ (ce qui arrive aussi dans l'autre cas) d'où $f_n(u) \preceq f_n(v)$. Pour le second point, si $f_n(u) = f_n(v)$, alors $\forall i \in [1..n]$, $f_n(u)_i = f_n(v)_i$. Il existe alors un j à partir duquel $f(u)_i = f(v)_i = 0$. Alors $|u| = |v| = j$, et $\forall i \in [1..j], u_i = f(u)_i = f(v)_i = v_i$ d'où $u = v$. On en déduit par ailleurs que $u\mathcal{R}v$ et $u \neq v \Rightarrow f(u) \prec f(v)$

- $\mathcal{R}$ est alors réflexive: en effet si $u\mathcal{R}v$ et $v\mathcal{R}u$, en notant $n = \max(|u|, |v|)$, $f(u) \preceq f(v)$ et $f(v) \preceq f(u)$ d'où $f(u) = f(v)$ et par injectivité $u = v$. Par ailleurs, si $u\mathcal{R}v$ et $v\mathcal{R}w$, alors $f(u) \preceq f(v) \preceq f(w)$, d'où $f(u) \preceq f(w)$. Alors par contraposée on a bien $u\mathcal{R}w$.