

# Schémas de preuves

## 1 Raisonnements usuels

### 1.1 Implications / Équivalences

Le principe est d'utiliser la transitivité de l'implication. Ainsi pour prouver que  $A$  implique  $C$ , on commencera par supposer  $A$  vraie, puis on rappellera que  $A$  implique  $B$ , et donc que  $B$  est vraie. Ensuite, on dira que  $B$  implique  $C$ , donc comme  $B$  est vraie,  $C$  l'est aussi.

Le raisonnement par équivalence est le même procédé, sauf que l'on utilise des équivalences à la place des implications.

### 1.2 Absurde

Le but ici est de montrer que quelque chose est faux. Pour ce faire, on commence par supposer l'assertion à infirmer, et en utilisant certains raisonnements, on en déduit qu'une assertion que l'on sait vraie est fausse, ou réciproquement. On dit alors qu'il y a contradiction, ou absurdité, et on conclut en disant que l'assertion initialement supposée est fausse.

**Remarque :** C'est un cas particulier du raisonnement par contraposée : si  $A$  implique quelque chose de faux, cela signifie que quelque chose de vrai implique non  $A$ .

### 1.3 Récurrence

La récurrence permet de montrer une propriété  $P$  dépendant d'un entier naturel  $n$  (on note la propriété au rang  $n$   $P(n)$  ou  $P_n$ ) sur une partie de  $\mathbb{N}$ . Le cas général est la récurrence forte, qui permet de démontrer la propriété sur  $\mathbb{N}$ . Elle consiste en :

1. Démontrer  $P(0)$  (initialisation)
2. Fixer un entier naturel  $n$
3. Supposer, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , que  $P(k)$  est vraie
4. En déduire que  $P(n+1)$  est vraie (hérédité).

**Remarque :** La récurrence forte est le *cas général*. On utilisera plus souvent la récurrence simple, qui suppose uniquement  $P(n)$  et non  $P(k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Il existe aussi la récurrence finie (le  $n$  pour lequel on suppose  $P(n)$  est compris dans un certain intervalle  $\llbracket a, b \rrbracket$  d'entiers fini, et on prouve  $P(a)$  à l'initialisation plutôt que  $P(0)$ ), ainsi que la récurrence descendante (une récurrence finie, mais on prouve  $P(b)$  à l'initialisation puis  $P(n-1)$  à l'hérédité, jusqu'à  $P(a)$ ).

**Remarque :** La récurrence peut être encore généralisée à l'induction, qui sera évoquée ultérieurement dans le programme.

### 1.4 Analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse permet de trouver toutes les solutions à un problème. On commence par considérer une solution quelconque d'un problème donné. En raisonnant sur les propriétés qu'elle doit

alors avoir, on en déduit qu'elle doit avoir une forme donnée : c'est l'**analyse**. Ensuite, on considère un objet ayant cette forme, et on montre qu'alors il est solution : c'est la **synthèse**.

## 1.5 Disjonction des cas

La disjonction des cas consiste à partitionner l'ensemble des objets vérifiant les hypothèses afin d'en faire émerger de nouvelles. On montre alors la propriété sur chacune des parties.

**Remarque :** Attention : on parle bien de partition : les objets traités dans chaque cas sont différents, et une fois réunis, il reforment l'ensemble de départ !

**Exemple :** Montrons que la somme de deux entiers de même parité est paire par disjonction de cas. Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels de même parité.

- Soit  $m$  et  $n$  sont tous les deux pairs, et alors il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $m = 2p$  et  $n = 2q$ . Alors  $m + n = 2p + 2q = 2(p + q)$  est un entier pair.
- Soit  $m$  et  $n$  sont tous les deux impairs, et alors il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $m = 2p + 1$  et  $n = 2q + 1$ . Alors  $m + n = 2p + 1 + 2q + 1 = 2(p + q + 1)$  est un entier pair.

## 2 Preuves sur une fonction

### 2.1 Boucles

### 2.2 Terminaison d'une fonction

### 2.3 Correction d'une fonction