Ordres

1 Relations

1.1 En général

• Soit X un ensemble non vide. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{R}$ est une relation n-aire sur X si et seulement si $\mathcal{R} \subset X^n$. Pour $n = 1$, on parle de relation unaire, pour $n = 2$ de relation binaire, et $n = 3$ de relation ternaire.

• Soit X un ensemble non vide. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur X. Pour $(x, y) \in X^2$, on note $x\mathcal{R}y$ pour signifier $(x, y) \in \mathcal{R}$. On dit alors que x est en relation avec y.

1.2 Relations binaires

• Une relation $\mathcal{R}$ binaire sur X est :

- réflexive si et seulement si $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in \mathcal{R}$;
- transitive si et seulement si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ pour tout $(x, y, z) \in X^3$;
- symétrique si et seulement si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ pour tout $(x, y) \in X^2$;
- antisymétrique si et seulement si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ pour tout $(x, y) \in X^2$.

Propriété : *Soit X un ensemble non vide. Soit Y un sous-ensemble non vide de X. Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur X, alors $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap Y^2$ est une relation binaire sur Y qui a les mêmes propriété de transitivité, réflexivité, symétrie, antisymétrie que $\mathcal{R}$.*

▷ En exercice.

• Pour $\mathcal{R}$ et $\mathcal{G}$ deux relations binaires sur X, on appelle composée de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ la relation binaire $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ sur X définie par

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in X^2 \,|\, \exists y \in X : x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{R}z\}$$

On peut alors définir une "exponentiation" d'une relation binaire : $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^n$. On pose aussi $\mathcal{R}^0 = \{(x, x) \,|\, x \in X\}$. On vérifie facilement que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\mathcal{R}^{n+m} = \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R}^m$.

• On définit la clôture réflexive de $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}_R = \mathcal{R} \cup \{(x, x) \,|\, x \in x\} = \bigcup_{n \leq 1} R^n$.

Propriété : *$\mathcal{R}_R$ est la plus petite relation réflexive contenant $\mathcal{R}$ (au sens de l'inclusion en tant qu'ensemble).*

▷ $\mathcal{R}_R$ est réflexive : en effet si $x \in X$ alors $(x, x) \in \mathcal{R}_R$ par définition d'où $x\mathcal{R}_R x$.

▷ Soit $\mathcal{R}'$ une relation réflexive contenant $\mathcal{R}$. Soit $(x, y) \in \mathcal{R}_R$. Alors soit $(x, y) \in \mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$, soit $(x, y) \in \{(x, x) \,|\, x \in x\}$ et alors $y = x$ et par réflexivité, $x\mathcal{R}'y$ c'est-à-dire $(x, y) \in \mathcal{R}'$, d'où $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$.

Remarque : Une relation $\mathcal{R}$ est incluse dans une autre relation $\mathcal{R}'$ si et seulement si tout couple $(x, y) \in X^2$ vérifiant $x\mathcal{R}y$ vérifie $x\mathcal{R}'y$.

Propriété : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur X. On a $x\mathcal{R}^n y \Leftrightarrow \exists(x_0, ...x_n) \in X^{n+1}$ avec $x_0 = x, x_n = y$, et $\forall k \in [\![0, n[\![$, $x_k\mathcal{R}x_{k+1}$.*

▷ Montrons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. $P(1)$ est vraie par définition de $\mathcal{R}$.

- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Soit $z \in X$. $x\mathcal{R}^{n+1}z$ si et seulement si il existe $y \in X$ tel que $x\mathcal{R}^n y$ et $y\mathcal{R}z$, ce qui est équivalent par $P(n)$ à l'existence d'une suite $(x_1, ...x_{n+1})$ avec $x_1 = x$, $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k\mathcal{R}x_{k+1}$ et $x_{n+1} = y\mathcal{R}z$. En posant $x_{n+2} = z$ cela montre $P(n+1)$.

- On définit la clôture transitive de $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}_T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{R}^n$,

  Propriété : *$\mathcal{R}_T$ est la plus petite relation transitive contenant $\mathcal{R}$.*

  - ▷ $\mathcal{R}_T$ est transitive : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors il existe $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $x\mathcal{R}^n y$ et $y\mathcal{R}^m z$. On a donc $x\mathcal{R}^{n+m}z$ donc $x\mathcal{R}_T z$.
  - ▷ Soit $\mathcal{R}'$ une relation transitive contenant $\mathcal{R}$. Soit $(x, y) \in X^2$ tels que $x\mathcal{R}_T y$. Il existe donc $(x_0, ..., x_n)$ avec $x_0 = x$ et $x_n = y$ vérifiant $\forall k \in [\![0, n[\![$, $x_k\mathcal{R}x_{k+1}$. Par une récurrence immédiate, on a pour tout $k \in [\![0, n]\!], x = x_0\mathcal{R}'x_n$, en particulier $x\mathcal{R}'y$, d'où $\mathcal{R}_T \subset \mathcal{R}'$.

2 Ordre

2.1 Élements particuliers

Soit $x \in X$. On dit que :

- x est un majorant de Y ssi $\forall y \in Y, y \leq x$.
- x est un minorant de Y ssi $\forall y \in Y, x \leq y$.

Soit $y \in Y$. On dit que :

- y est le plus grand élément de Y ssi c'est un majorant de Y.
- y est le plus petit élément de Y ssi c'est un minorant de Y.
- y est minimal ssi il n'existe pas de y' dans Y tel que $y' \leq y$
- y est maximal ssi il n'existe pas de y' dans Y tel que $y \leq y'$

Remarque : Si le plus grand élément et le plus petit élément sont forcément uniques à cause de l'antisymétrie de la relation, les éléments minimaux et maximaux, eux, ne le sont pas toujours !

Remarque : Cela dit, si l'ordre est total, il n'y a qu'un seul élément minimal, le plus petit élément (il en va de même pour les élément maximaux).

On note $\mathrm{Min}(Y)$ l'ensemble des minorants de Y, et $\mathrm{Maj}(Y)$ l'ensemble de ses majorants. Le plus grand élément de $\mathrm{Min}(Y)$, s'il existe, est appelé borne inférieure de Y. De la même façon, le plus petit élément de $\mathrm{Max}(Y)$, s'il existe, est appelé borne supérieure de Y.

2.2 Ordre bien fondé

On considère ici deux ensembles ordonnés, $(X, \leq)$ et $(Y, \preceq)$.

Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$.

- f est croissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x \leq x' \Rightarrow f(x) \preceq f(x')$
- f est décroissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x \leq x' \Rightarrow f(x) \succeq f(x')$
- f est strictement croissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x < x' \Rightarrow f(x) \prec f(x')$
- f est strictement décroissante ssi $\forall (x, x') \in X^2, x < x' \Rightarrow f(x) \succ f(x')$

Remarque : On étend ces définitions aux suites de $X^{\mathbb{N}}$, vues comme des fonctions de $(\mathbb{N}, \leq)$ dans $(X, \leq)$.

Exemple : La fonction identité Id de $(\mathbb{N}^*, \leq)$ dans $(\mathbb{N}^*, |)$ est strictement croissante

Propriété : *Si $\leq$ est une relation d'ordre totale sur X (autrement dit si $(X, \leq)$ est un ordre total), alors toute fonction strictement croissante de $(X, \leq)$ dans $(Y, \preceq)$ est injectif.*

- ▷ Soient x et y dans X tels que $f(x) = f(y)$. On a donc en particulier $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$. Le fait que l'ordre sur X soit total nous permet de conclure en utilisant la contraposée de la définition de la croissance stricte de f que :

$$\begin{cases} f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y \\ f(y) \leq f(x) \Rightarrow y \leq q \end{cases} \Leftrightarrow (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

Donc f est injective

Remarque : Attention à ce que l'ordre soit bien total. Par exemple, la fonction de $(\mathbb{N}^*, |)$ dans $(\mathbb{N}^*, \leq)$ qui associe à un entier naturel son nombre de diviseurs est bien strictement croissante, mais certainement pas injective !

On dit qu'un ordre $\leq$ sur X est bien fondé ssi toute partie non vide de X admet un élément minimal.

Propriété : *Un ordre est bien fondé ssi il n'existe pas une suite infinie strictement décroissante.*

- ▷ Considérons $(X, \leq)$ un ensemble bien fondé, et supposons par l'absurde l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ strictement décroissante. On note $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. A est une partie non vide de X, et admet donc un élément minimal a_0. Il existe alors par définition de A $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_0 = u_{n_0}$. Par stricte décroissance de (u_n), on aurait alors $u_{n_0+1} < u_{n_0} = a_0$, ce qui contredit la minimalité de a_0. Donc il n'existe pas de suite d'élements de X strictement décroissante.
- ▷ Montrons la contraposée. Supposons que $(X, \leq)$ n'est pas bien fondé. Il existe donc $A \subset X \neq \varnothing$ n'admettant pas d'élément minimal. Soit a_0 l'un des éléments de A. a_0 n'est pas minimal dans A, donc il existe $a_1 \in A$ tel que $a_1 < a_0$. On peut alors construire selon ce procédé une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinie d'éléments de X strictement décroissante.

2.3 Ordre produit, ordre lexicographique

Considérons une famille finie $(X_i, \leq_i)_{i\in[1..n]}$ d'ensembles ordonnés. On note $Y = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

Propriété : La relation $\mathcal{R}$ définie sur Y par $(a_1, a_2, ..., a_n)\mathcal{R}(b_1, b_2, ..., b_n) \Leftrightarrow \forall i \in [1..n], a_i \leq_i b_i$ est une relation d'ordre, appelé ordre produit des $\leq_i$ et noté $\leq_1 \times \leq_2 \times ... \times \leq_n$ ou $\prod_{i=1}^{n} \leq_i$.

- ▷ $\mathcal{R}$ est réflexive car on a bien, pour tout $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ dans Y $a\mathcal{R}a$: en effet, comme tous les a_i sont égaux, $\forall i \in [1..n], a_i \leq a_i$.
- ▷ $\mathcal{R}$ est transitive : considérons trois éléments a, b et c de Y, tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$. Alors pour tout $i \in [1..n]$, on a $a_i \leq_i b_i$ et $b_i \leq_i c_i$, donc par transitivité de $\leq_i$, $a_i \leq_i c_i$, d'où $a\mathcal{R}c$.
- ▷ $\mathcal{R}$ est antisymétrique car si $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$, alors pour tout $i \in [1..n]$, on a $a_i \leq_i b_i$ et $b_i \leq_i a_i$, c'est à dire $a_i = b_i$, donc $a = b$.

Propriété : La relation $\mathcal{R}$ définie sur Y par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = b$ ou $\exists j \in [1..n], \forall i \in [1..j[, a_i = b_i$ et $a_j <_j b_j$ est une relation d'ordre, appelé ordre lexicographique sur Y

- ▷ $\mathcal{R}$ est réflexive par définition.
- ▷ $\mathcal{R}$ est transitive : considérons trois éléments a, b et c de Y, tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$. Si $a = b$ ou $b = c$, on a bien $a\mathcal{R}c$. Considérons maintenant que ce ne soit pas le cas. Comme $a\mathcal{R}b$, il existe$(j, j') \in [1..n]^2$ tel que $\forall i \in [1..j[$, $a_i = b_i$, $\forall i \in [1..j'[$, $b_i = c_i$ ainsi que $a_j <_j b_j$ et $b_{j'} \leq c_{j'}$. En prenant $J = \min(j, j')$, on a alors, pour tout $i \in [1..J[$, $a_i = c_i$, et $a_J <_J c_J$ (car soit $a_J < b_J \leq_J c_J$, soit $a_J \leq b_J < c_J$ car $J = j$ ou $J = j'$). Ainsi $a\mathcal{R}c$
- ▷ Montrons $\mathcal{R}$ est antisymétrique par l'absurde. Supposons qu'il existe $(a, b) \in Y^2$ tel que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$, mais $a \neq b$. Alors il existe $(j, j') \in [1..n]^2$ vérifiant $\forall i \in [1..j[a_i <_i b_i$ et $\forall i \in [1..j'[b_i <_i a_i$, donc en particulier pour $i = 1$, $a_1 < b_1$ et $a_1 > b_1$: on arrive à une absurdité. Donc $\mathcal{R}$ est bien antisymétrique.

On peut étendre cet définition à des n-uplets de taille différente. Considérons un ensemble $(\Sigma, \leq)$. On note Σ^* l'ensemble des n-uplets d'éléments de Σ. Σ est alors appelé alphabet et Σ^* désigne l'ensemble des mots de Σ. Le mot vide (autrement dit le 0-uplet) est noté ϵ. Pour un mot u de Σ, on note $|u|$ la taille de ce mot.

Propriété : La relation $\mathcal{R}$ définie sur Σ^* par $\forall (u, v) \in (\Sigma^*)^2$ $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N}$:($\forall i \in [1..j[, u_i = v_i$ et $j = |u|$) ou ($j < |u|$ et $u_j < v_j$) est un relation d'ordre.

- ▷ Introduisons le caractère nul 0 et l'ensemble $\mathcal{A} = \Sigma \cup \{0\}$. On introduit la relation d'ordre $\preceq$ sur $\mathcal{A}$, telle que $\preceq \cap \Sigma^2 = \leq$, et que $\forall a \in \mathcal{A}, 0 \preceq a$. Considérons alors la fonction f_n qui à un mot $(u_1, u_2, ..., u_m)$

de Σ de longueur $m \leq n$ associe le mot $(u_1, u_2, ..., u_m, 0, 0, ...)$ de $\mathcal{A}^n$.

- ▷ Montrons que $u\mathcal{R}v \Rightarrow f(u) \preceq v$ (où $\preceq$ désigne l'ordre lexicographique) et que f est injective : Pour le premier point, si $u\mathcal{R}v$, alors il existe $j \in [1..n]$: $\forall i \in [1..j[, u_i = v_i$ et $j = |u|$, auquel cas $\forall i \in [1..n] f_n(u)_i = f_n(v_i)$ et $f_n(u)_j = 0 \preceq f_n(v)_j$ (ce qui arrive aussi dans l'autre cas) d'où $f_n(u) \preceq f_n(v)$. Pour le second point, si $f_n(u) = f_n(v)$, alors $\forall i \in [1..n]$, $f_n(u)_i = f_n(v)_i$. Il existe alors un j à partir duquel $f(u)_i = f(v)_i = 0$. Alors $|u| = |v| = j$, et $\forall i \in [1..j], u_i = f(u)_i = f(v)_i = v_i$ d'où $u = v$. On en déduit par ailleurs que $u\mathcal{R}v$ et $u \neq v \Rightarrow f(u) \prec f(v)$
- ▷ $\mathcal{R}$ est alors réflexive : en effet si $u\mathcal{R}v$ et $v\mathcal{R}u$, en notant $n = \max(|u|, |v|)$, $f(u) \preceq f(v)$ et $f(v) \preceq f(u)$ d'où $f(u) = f(v)$ et par injectivité $u = v$. Par ailleurs, si $u\mathcal{R}v$ et $v\mathcal{R}w$, alors $f(u) \preceq f(v) \preceq f(w)$, d'où $f(u) \preceq f(w)$. Alors par contraposée on a bien $u\mathcal{R}w$.