

# Ordres et induction

## 1 Ordre

### 1.1 Éléments particuliers

Soit  $x \in X$ . On dit que :

- $x$  est un majorant de  $Y$  ssi  $\forall y \in Y, y \leq x$ .
- $x$  est un minorant de  $Y$  ssi  $\forall y \in Y, x \leq y$ .

Soit  $y \in Y$ . On dit que :

- $y$  est le plus grand élément de  $Y$  ssi c'est un majorant de  $Y$ .
- $y$  est le plus petit élément de  $Y$  ssi c'est un minorant de  $Y$ .
- $y$  est minimal ssi il n'existe pas de  $y'$  dans  $Y$  tel que  $y' \leq y$
- $y$  est maximal ssi il n'existe pas de  $y'$  dans  $Y$  tel que  $y \leq y'$

**Remarque :** Si le plus grand élément et le plus petit élément sont forcément uniques à cause de l'antisymétrie de la relation, les éléments minimaux et maximaux, eux, ne le sont pas toujours !

**Remarque :** Cela dit, si l'ordre est total, il n'y a qu'un seul élément minimal, le plus petit élément (il en va de même pour les élément maximaux).

On note  $\text{Min}(Y)$  l'ensemble des minorants de  $Y$ , et  $\text{Maj}(Y)$  l'ensemble de ses majorants. Le plus grand élément de  $\text{Min}(Y)$ , s'il existe, est appelé borne inférieure de  $Y$ . De la même façon, le plus petit élément de  $\text{Max}(Y)$ , s'il existe, est appelé borne supérieure de  $Y$ .

### 1.2 Ordre bien fondé

On considère ici deux ensembles ordonnés,  $(X, \leq)$  et  $(Y, \preceq)$ .

Soit  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ .

- $f$  est croissante ssi  $\forall (x, x') \in X^2, x \leq x' \Rightarrow f(x) \preceq f(x')$
- $f$  est décroissante ssi  $\forall (x, x') \in X^2, x \leq x' \Rightarrow f(x) \succeq f(x')$
- $f$  est strictement croissante ssi  $\forall (x, x') \in X^2, x < x' \Rightarrow f(x) \prec f(x')$
- $f$  est strictement décroissante ssi  $\forall (x, x') \in X^2, x < x' \Rightarrow f(x) \succ f(x')$

**Remarque :** On étend ces définitions aux suites de  $X^{\mathbb{N}}$ , vues comme des fonctions de  $(\mathbb{N}, \leq)$  dans  $(X, \leq)$ .

**Exemple :** La fonction identité  $\text{Id}$  de  $(\mathbb{N}^*, \leq)$  dans  $(\mathbb{N}^*, |)$  est strictement croissante

**Propriété :** Si  $\leq$  est une relation d'ordre totale sur  $X$  (autrement dit si  $(X, \leq)$  est un ordre total), alors toute fonction strictement croissante de  $(X, \leq)$  dans  $(Y, \preceq)$  est injectif.

- ▷ Soient  $x$  et  $y$  dans  $X$  tels que  $f(x) = f(y)$ . On a donc en particulier  $f(x) \leq f(y)$  et  $f(y) \leq f(x)$ . Le fait que l'ordre sur  $X$  soit total nous permet de conclure en utilisant la contraposée de la définition de la croissance stricte de  $f$  que :

$$\begin{cases} f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y \\ f(y) \leq f(x) \Rightarrow y \leq x \end{cases} \Leftrightarrow (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

Donc  $f$  est injective

**Remarque :** Attention à ce que l'ordre soit bien total. Par exemple, la fonction de  $(\mathbb{N}^*, |)$  dans  $(\mathbb{N}^*, \leq)$  qui associe à un entier naturel son nombre de diviseurs est bien strictement croissante, mais certainement pas injective!

On dit qu'un ordre  $\leq$  sur  $X$  est bien fondé ssi toute partie non vide de  $X$  admet un élément minimal.

**Propriété :** Un ordre est bien fondé ssi il n'existe pas une suite infinie strictement décroissante.

- ▷ Considérons  $(X, \leq)$  un ensemble bien fondé, et supposons par l'absurde l'existence d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  strictement décroissante. On note  $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ .  $A$  est une partie non vide de  $X$ , et admet donc un élément minimal  $a_0$ . Il existe alors par définition de  $A$   $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $a_0 = u_{n_0}$ . Par stricte décroissance de  $(u_n)$ , on aurait alors  $u_{n_0+1} < u_{n_0} = a_0$ , ce qui contredit la minimalité de  $a_0$ . Donc il n'existe pas de suite d'éléments de  $X$  strictement décroissante.
- ▷ Montrons la contraposée. Supposons que  $(X, \leq)$  n'est pas bien fondé. Il existe donc  $A \subset X \neq \emptyset$  n'admettant pas d'élément minimal. Soit  $a_0$  l'un des éléments de  $A$ .  $a_0$  n'est pas minimal dans  $A$ , donc il existe  $a_1 \in A$  tel que  $a_1 < a_0$ . On peut alors construire selon ce procédé une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  infinie d'éléments de  $X$  strictement décroissante.

### 1.3 Ordre produit, ordre lexicographique

Considérons une famille finie  $(X_i, \leq_i)_{i \in [1..n]}$  d'ensembles ordonnés. On note  $Y = \prod_{i=1}^n X_i$ .

**Propriété :** La relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $Y$  par  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \mathcal{R} (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow \forall i \in [1..n], a_i \leq_i b_i$  est une relation d'ordre, appelé ordre produit des  $\leq_i$  et noté  $\leq_1 \times \leq_2 \times \dots \times \leq_n$  ou  $\prod_{i=1}^n \leq_i$ .

- ▷  $\mathcal{R}$  est réflexive car on a bien, pour tout  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  dans  $Y$   $a \mathcal{R} a$  : en effet, comme tous les  $a_i$  sont égaux,  $\forall i \in [1..n], a_i \leq_i a_i$ .
- ▷  $\mathcal{R}$  est transitive : considérons trois éléments  $a, b$  et  $c$  de  $Y$ , tels que  $a \mathcal{R} b$  et  $b \mathcal{R} c$ . Alors pour tout  $i \in [1..n]$ , on a  $a_i \leq_i b_i$  et  $b_i \leq_i c_i$ , donc par transitivité de  $\leq_i$ ,  $a_i \leq_i c_i$ , d'où  $a \mathcal{R} c$ .
- ▷  $\mathcal{R}$  est antisymétrique car si  $a \mathcal{R} b$  et  $b \mathcal{R} a$ , alors pour tout  $i \in [1..n]$ , on a  $a_i \leq_i b_i$  et  $b_i \leq_i a_i$ , c'est à dire  $a_i = b_i$ , donc  $a = b$ .

**Propriété :** La relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $Y$  par  $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a = b$  ou  $\exists j \in [1..n], \forall i \in [1..j], a_i = b_i$  et  $a_j <_j b_j$  est une relation d'ordre, appelé ordre lexicographique sur  $Y$

- ▷  $\mathcal{R}$  est réflexive par définition.
- ▷  $\mathcal{R}$  est transitive : considérons trois éléments  $a, b$  et  $c$  de  $Y$ , tels que  $a \mathcal{R} b$  et  $b \mathcal{R} c$ . Si  $a = b$  ou  $b = c$ , on a bien  $a \mathcal{R} c$ . Considérons maintenant que ce ne soit pas le cas. Comme  $a \mathcal{R} b$ , il existe  $(j, j') \in [1..n]^2$  tel que  $\forall i \in [1..j], a_i = b_i, \forall i \in [1..j'], b_i = c_i$  ainsi que  $a_j <_j b_j$  et  $b_{j'} <_{j'} c_{j'}$ . En prenant  $J = \min(j, j')$ , on a alors, pour tout  $i \in [1..J], a_i = c_i$ , et  $a_J <_J c_J$  (car soit  $a_J < b_J \leq c_J$ , soit  $a_J \leq b_J < c_J$  car  $J = j$  ou  $J = j'$ ). Ainsi  $a \mathcal{R} c$ .
- ▷ Montrons  $\mathcal{R}$  est antisymétrique par l'absurde. Supposons qu'il existe  $(a, b) \in Y^2$  tel que  $a \mathcal{R} b$  et  $b \mathcal{R} a$ , mais  $a \neq b$ . Alors il existe  $(j, j') \in [1..n]^2$  vérifiant  $\forall i \in [1..j] [a_i <_i b_i$  et  $\forall i \in [1..j'] [b_i <_i a_i$ , donc en particulier pour  $i = 1, a_1 < b_1$  et  $a_1 > b_1$  : on arrive à une absurdité. Donc  $\mathcal{R}$  est bien antisymétrique.

On peut étendre cet définition à des  $n$ -uplets de taille différente. Considérons un ensemble  $(\Sigma, \leq)$ . On note  $\Sigma^*$  l'ensemble des  $n$ -uplets d'éléments de  $\Sigma$ .  $\Sigma$  est alors appelé alphabet et  $\Sigma^*$  désigne l'ensemble des mots de  $\Sigma$ . Le mot vide (autrement dit le 0-uplet) est noté  $\epsilon$ . Pour un mot  $u$  de  $\Sigma$ , on note  $|u|$  la taille de ce mot.

**Propriété :** La relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $\Sigma^*$  par  $\forall (u, v) \in (\Sigma^*)^2, u \mathcal{R} v \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} : (\forall i \in [1..j], u_i = v_i \text{ et } j = |u|) \text{ ou } (j < |u| \text{ et } u_j < v_j)$  est une relation d'ordre.

- ▷ Introduisons le caractère nul 0 et l'ensemble  $\mathcal{A} = \Sigma \cup \{0\}$ . On introduit la relation d'ordre  $\preceq$  sur  $\mathcal{A}$ , telle que  $\preceq \cap \Sigma^2 = \leq$ , et que  $\forall a \in \mathcal{A}, 0 \preceq a$ . Considérons alors la fonction  $f_n$  qui à un mot  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$  de  $\Sigma$  de longueur  $m \leq n$  associe le mot  $(u_1, u_2, \dots, u_m, 0, 0, \dots)$  de  $\mathcal{A}^n$ .
- ▷ Montrons que  $u \mathcal{R} v \Rightarrow f(u) \preceq v$  (où  $\preceq$  désigne l'ordre lexicographique) et que  $f$  est injective : Pour le premier point, si  $u \mathcal{R} v$ , alors il existe  $j \in [1..n] : \forall i \in [1..j], u_i = v_i$  et  $j = |u|$ , auquel cas  $\forall i \in$

$[1..n]f_n(u)_i = f_n(v)_i$  et  $f_n(u)_j = 0 \preceq f_n(v)_j$  (ce qui arrive aussi dans l'autre cas) d'où  $f_n(u) \preceq f_n(v)$ . Pour le second point, si  $f_n(u) = f_n(v)$ , alors  $\forall i \in [1..n]$ ,  $f_n(u)_i = f_n(v)_i$ . Il existe alors un  $j$  à partir duquel  $f(u)_i = f(v)_i = 0$ . Alors  $|u| = |v| = j$ , et  $\forall i \in [1..j]$ ,  $u_i = f(u)_i = f(v)_i = v_i$  d'où  $u = v$ . On en déduit par ailleurs que  $u\mathcal{R}v$  et  $u \neq v \Rightarrow f(u) \prec f(v)$

- ▷  $\mathcal{R}$  est alors réflexive : en effet si  $u\mathcal{R}v$  et  $v\mathcal{R}u$ , en notant  $n = \max(|u|, |v|)$ ,  $f(u) \preceq f(v)$  et  $f(v) \preceq f(u)$  d'où  $f(u) = f(v)$  et par injectivité  $u = v$ . Par ailleurs, si  $u\mathcal{R}v$  et  $v\mathcal{R}w$ , alors  $f(u) \preceq f(v) \preceq f(w)$ , d'où  $f(u) \preceq f(w)$ . Alors par contraposée on a bien  $u\mathcal{R}w$ .