Maureen Rojas

c. 11-88344

0.1 Cinemática de para pata de 3GDL tipo RRR-Reptil

0.2 Cinemática Directa

La Fig. 1 describe la estructura cinemática de la pata de 3 grados de libertad (3GDL) de un robot hexápodo.

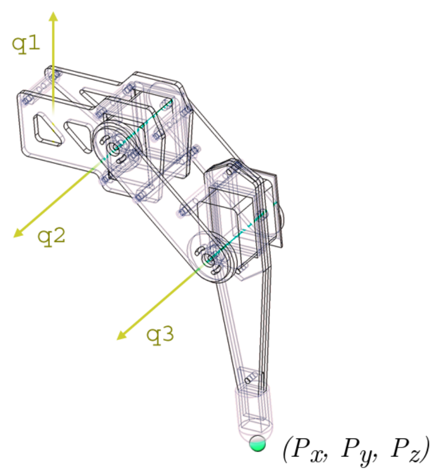

Figure 1: Modelo CAD: Pata 3GDL RRR-Reptil.

La tabla 1 muestra los parámetros de Denavit-Hartenberg obtenidos para esta configuración.

Link	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$q1$	0	L_1	$\pi/2$
2	$q2$	0	L_2	0
3	$q3$	0	L_3	0

Table 1: Parámetros de Denavit-Hartenberg.

Con los valores previos se pueden obtener las matrices de transformación homogéneas parciales para cada articulación.

Nota: Por comodidad se utilizará la notación $cos(x) \rightarrow c_x$ y $sen(x) \rightarrow s_x$

1er GDL

$$A_0^1 \downarrow= \begin{bmatrix} c_{q1} & 0 & S_{q1} & L_1 c_{q1} \\ s_{q1} & 0 & -c_{q1} & L_1 s_{q1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2do GDL

$$A_1^2 \downarrow= \begin{bmatrix} c_{q2} & -s_{q2} & 0 & L_2 c_{q2} \\ s_{q2} & c_{q2} & 0 & L_2 s_{q2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3er GDL

$$A_2^3\downarrow=\begin{bmatrix} c_{q3} & -s_{q3} & 0 & L_3c_{q3} \\ s_{q3} & c_{q3} & 0 & L_3s_{q3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Para obtener la cinemática directa total se multiplican las matrices de manera que $A_0^3\downarrow= A_0^1\downarrow\times A_1^2\downarrow\times A_2^3\downarrow$. Finalmente se obtiene:

$$A_0^3\downarrow=\begin{bmatrix} c_{q1}c_{q2+q3} & -c_{q1}s_{q2+q3} & s_{q1} & c_{q1}\big(L_3(c_{q2}c_{q3}-s_{q2}s_{q3})+L_2c_{q2}+L1\big) \\ s_{q1}c_{q2+q3} & -s_{q1}s_{q2+q3} & -c_{q1} & s_{q1}\big(L_3(c_{q2}c_{q3}-s_{q2}s_{q3})+L_2c_{q2}+L1\big) \\ s_{q2+q3} & c_{q2+q3} & 0 & L_3(s_{q2}c_{q3}+c_{q2}s_{q3})+L_2s_{q2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

0.3 Cinemática inversa

A partir de el resultado obtenido en la sección anterior, se conoce que el extremo de la pata visto desde el marco de referencia origen posee las coordenadas:

$$P_x = c_{q1}(L_1 + L_2c_{q2} + L_3c_{q2+q3})$$

$$P_y = s_{q1}(L_1 + L_2c_{q2} + L_3c_{q2+q3})$$

$$P_z = L_2s_{q2} + L_3s_{q2+q3}$$

La cinemática inversa de la pata se puede obtener con facilidad a partir de intuición geómetrica aplicada en diferentes planos de la pata.. Observando distintos planos como se muestran en las figuras 2 y 3 se pueden definir distintas variables como en la tabla 2.

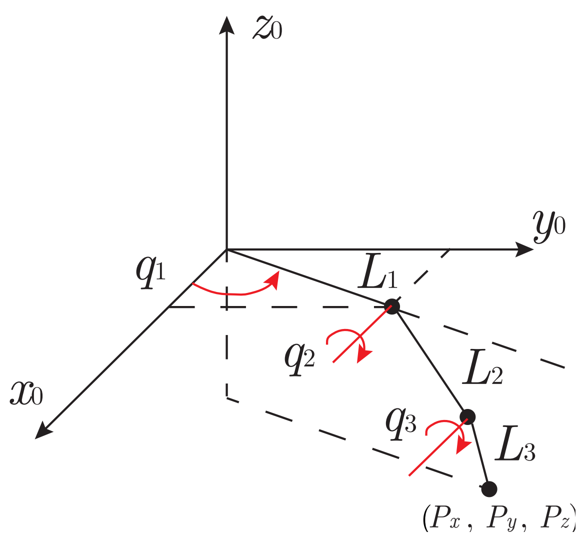

Figure 2: Pata 3GDL RRR-Reptil.

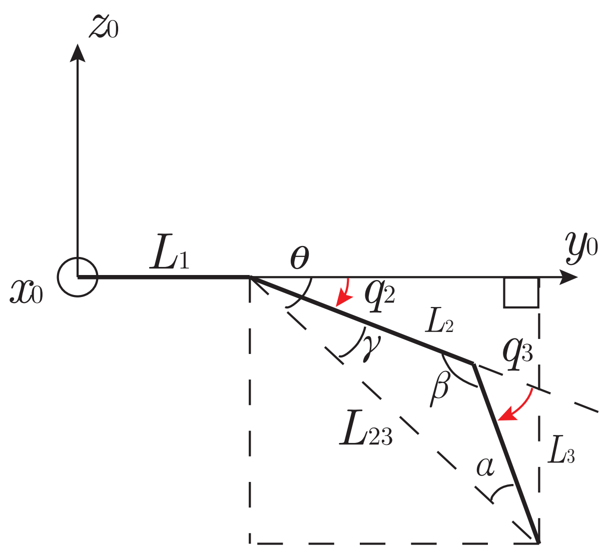

Figure 3: Pata 3GDL RRR-Reptil: Plano Y-Z.

$\beta = \pi - q_3$	$\theta = q_2 + \gamma$
$P_1 = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} - L_1$	$tan\theta = \frac{P_2}{P_1}$
$P_2 = P_z$	$L_{23} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$

Table 2: Definición de variables.

Utilizando las identidades trigonométricas de las ecuaciones (5) y (6):

$$L_{23}^2 = L_2^2 + L_3^2 - 2L_2L_3cos\beta \tag{5}$$

$$\frac{sen\alpha}{L_2} = \frac{sen\beta}{L_{23}} = \frac{sen\gamma}{L_3} \tag{6}$$

Despejando se obtiene que:

$$\beta = \pm acos\left(\frac{L_2^2 + L_3^2 - L_{23}^2}{2L_2L_3}\right)$$

$$\gamma = \pm asen\left(\frac{L_3}{L_{23}}sen\beta\right)$$

$$\theta = \pm atan\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Finalmente,

$$q_2 = \pm atan\left(\frac{P_2}{P_1}\right) - \left[\pm asen\left(\frac{L_3}{L_{23}}sen\beta\right)\right]$$

$$q_3 = \pi - \left[\pm acos\left(\frac{L_2^2 + L_3^2 - L_{23}^2}{2L_2L_3}\right)\right]$$

El primer grado de libertad se puede obtener directamente a partir de las coordenadas P_x y P_y como:

$$q_1 = \pm atan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

0.4 Velocidades y Jacobiano

Debido a que el movimiento de las patas está compuesto por una parte lineal y una parte rotacional, dicho movimiento se verá caracterizdo por velocidades lineales y rotacionales. Existen 2 maneras principales de obtener estas velocidades; una es la manera analítica directa, y la otra es por análisis de la cinemática.

0.4.1 Método analítico

Jacobiano Lineal

El vector de velocidades lineal se puede obtener derivando elemento a elemento el vector de posición lineal de la extremidad. De esta manera se obtiene que:

$$\vec{\dot{x}} = \mathbf{J_L}(\mathbf{q}) \cdot \vec{\dot{q}}$$

En donde $\mathbf{J_L}(\mathbf{q})$ se conoce como la matriz de transformación de velocidades, "Jacobiano lineal".

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(L_1 c_{q1} + L_2 c_{q1} c_{q2} + L_3 c_{q1} c_{q2+q3}\right) \\ \dot{y} = \frac{d}{dt}\left(L_1 s_{q1} + L_2 s_{q1} c_{q2} + L_3 s_{q1} c_{q2+q3}\right) \\ \dot{z} = \frac{d}{dt}\left(L_2 s_{q2} + L_3 s_{q2+q3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -L_1 s_{q1}\dot{q_1} - L_2 s_{q1} c_{q2}\dot{q_1} - L_2 c_{q1} s_{q2}\dot{q_2} - L_3 s_{q1} c_{q2+q3}\dot{q_1} - L_3 c_{q1} s_{q2+q3}\dot{q_2} - L_3 c_{q1} s_{q2+q3}\dot{q_3} \\ \dot{y} = L_1 c_{q1}\dot{q_1} + L_2 c_{q1} c_{q2}\dot{q_1} - L_2 s_{q1} s_{q2}\dot{q_2} + L_3 c_{q1} c_{q2+q3}\dot{q_1} - L_3 s_{q1} s_{q2+q3}\dot{q_2} - L_3 s_{q1} s_{q2+q3}\dot{q_3} \\ \dot{z} = L_2 c_{q2}\dot{q_2} + L_3 c_{q2+q3}\dot{q_2} + L_3 c_{q2+q3}\dot{q_3} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{q1}\left(L_1 + L_2 c_{q2} + L_3 c_{q2+q3}\right) & -c_{q1}\left(L_2 s_{q2} + L_3 s_{q2+q3}\right) & -L_3 c_{q1} s_{q2+q3} \\ c_{q1}\left(L_1 + L_2 c_{q2} + L_3 c_{q2+q3}\right) & -s_{q1}\left(L_2 s_{q2} + L_3 s_{q2+q3}\right) & -L_3 s_{q1} s_{q2+q3} \\ 0 & L_2 c_{q2} + L_3 c_{q2+q3} & L_3 c_{q2+q3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \end{bmatrix}$$

Jacobiano Rotacional

Análogo a la parte lineal, existe una matriz de transformación de velocidades para la parte rotacional del movimiento. El Jacobiano rotacional $\mathbf{J_w}(\mathbf{q})$ se define como:

$$\vec{w_0^3} = \mathbf{J_w}(\mathbf{q})\vec{\dot{q}}$$

$$\vec{w_0^3} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

Por teoría de matrices de rotación se define una *skew-symmetric matrix* como:

$$S(w) = \dot{R_0^n}\left(R_0^n\right)^T$$

En donde $S(w)$ se define como:

$$S(w) = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

En donde R_0^n es la matriz de rotación del cuerpo. Que en este caso está descrita como:

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} c_{q1}c_{q2+q3} & -c_{q1}s_{q2+q3} & s_{q1} \\ s_{q1}c_{q2+q3} & -s_{q1}s_{q2+q3} & -c_{q1} \\ s_{q2+q3} & c_{q2+q3} & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\left(R_0^3\right)^T = \begin{bmatrix} c_{q1}c_{q2+q3} & s_{q1}c_{q2+q3} & s_{q2+q3} \\ -c_{q1}s_{q2+q3} & -s_{q1}s_{q2+q3} & c_{q2+q3} \\ s_{q1} & -c_{q1} & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\dot{R}_0^3 = \begin{bmatrix} -s_{q1}\dot{q}_1c_{q2+q3} - c_{q1}s_{q2+q3}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) & s_{q1}\dot{q}_1s_{q2+q3} - c_{q1}c_{q2+q3}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) & c_{q1}\dot{q}_1 \\ c_{q1}\dot{q}_1c_{q2+q3} - s_{q1}s_{q2+q3}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) & -c_{q1}\dot{q}_1s_{q2+q3} - s_{q1}c_{q2+q3}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) & s_{q1}\dot{q}_1 \\ c_{q2+q3}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) & -s_{q2+q3}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Multiplicando e igualando términos con la matriz *skew-symmetric* se obtiene:

$$S(w) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & -c_{q1}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) \\ \dot{q}_1 & 0 & -s_{q1}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) \\ c_{q1}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) & s_{q1}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\vec{w}_0^3 = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{q1}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) \\ -c_{q1}(\dot{q}_2+\dot{q}_3) \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_x \\ \dot{w}_y \\ \dot{w}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s_{q1} & s_{q1} \\ 0 & -c_{q1} & -c_{q1} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Finalmente, se puede obtener la matriz de velocidades como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{w}_x \\ \dot{w}_y \\ \dot{w}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_L \\ J_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{q1}\left(L_1 + L_2c_{q2} + L_3c_{q2+q3}\right) & -c_{q1}\left(L_2s_{q2} + L_3s_{q2+q3}\right) & -L_3c_{q1}s_{q2+q3} \\ c_{q1}\left(L_1 + L_2c_{q2} + L_3c_{q2+q3}\right) & -s_{q1}\left(L_2s_{q2} + L_3s_{q2+q3}\right) & -L_3s_{q1}s_{q2+q3} \\ 0 & L_2c_{q2} + L_3c_{q2+q3} & L_3c_{q2+q3} \\ 0 & s_{q1} & s_{q1} \\ 0 & -c_{q1} & -c_{q1} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

0.4.2 Método cinemático

Como un método opcional, es posible hacer el estudio de la cinemática de cada articulación, por lo que se supone que existe un Jacobiano (lineal y rotacional) para articulación, y se define su estructura de manera directa.

$$J = [J_1 \mid J_2 \mid J_3]$$

En donde los J_i se definen para cada articulación. En el caso de las articulaciones rotacionales, el jacobiano se define como:

$$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \times (O_3 - O_{i-1}) \\ Z_{i-1} \end{bmatrix} \tag{14}$$

En donde los vectores Z_i y O_i tienen dimensiones 3x1. Y los primeros 3 elementos representan la parte lineal del movimiento, mientras que los últimos tres representan la parte rotacional.

Para realizar esta operación es necesario obtener las matrices de transformación homogéneas parciales, como se presentan:

$$A_0^1\downarrow=\begin{bmatrix} c_{q1} & 0 & s_{q1} & L_1c_{q1}\\ s_{q1} & 0 & -c_{q1} & L_1s_{q1}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\qquad A_0^2\downarrow=\begin{bmatrix} c_{q1}c_{q2} & -c_{q1}s_{q2} & s_{q1} & c_{q1}\left(L_2c_{q2}+L_1\right)\\ s_{q1}c_{q2} & -s_{q1}s_{q2} & -c_{q1} & s_{q1}\left(L_2c_{q2}+L_1\right)\\ s_{q2} & c_{q2} & 0 & L_2s_{q2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$A_0^3\downarrow=\begin{bmatrix} c_{q1}c_{q2+q3} & -c_{q1}s_{q2+q3} & s_{q1} & c_{q1}\big(L_3(c_{q2}c_{q3}-s_{q2}s_{q3})+L_2c_{q2}+L1\big)\\ s_{q1}c_{q2+q3} & -s_{q1}s_{q2+q3} & -c_{q1} & s_{q1}\big(L_3(c_{q2}c_{q3}-s_{q2}s_{q3})+L_2c_{q2}+L1\big)\\ s_{q2+q3} & c_{q2+q3} & 0 & L_3(s_{q2}c_{q3}+c_{q2}s_{q3})+L_2s_{q2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Definiendo: $Z_0=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, es posible obtener el Jacobiano (lineal y rotacional) de manera más directa:

$$J_1=\begin{bmatrix}-s_{q1}\left(L_3c_{q2+q3}+L_2c_{q2}+L_1\right)\\ c_{q1}\left(L_3c_{q2+q3}+L_2c_{q2}+L_1\right)\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\quad J_2=\begin{bmatrix}-c_{q1}\left(L_3s_{q2+q3}+L_2s_{q2}\right)\\ -s_{q1}\left(L_3s_{q2+q3}+L_2s_{q2}\right)\\ L_3c_{q2+q3}+L_2c_{q2}\\ s_{q1}\\ -c_{q1}\\ 0\end{bmatrix}\quad J_2=\begin{bmatrix}-L_3c_{q1}s_{q2+q3}\\ -L_3s_{q1}s_{q2+q3}\\ L_3c_{q2+q3}\\ s_{q1}\\ -c_{q1}\\ 0\end{bmatrix}$$

Comprobando finalmente que los resultados de ambos métodos son iguales.