Sobre cómo resolver algunos problemas de la Lección 7

Marcos Bujosa

September 22, 2023

Pregunta sobre Contraste de la t de Student - Toma de decisión

Regla de decisión

Se rechaza H_0 si *p-valor*$\leq$ nivel de significación. NO se rechaza en caso contrario; es decir

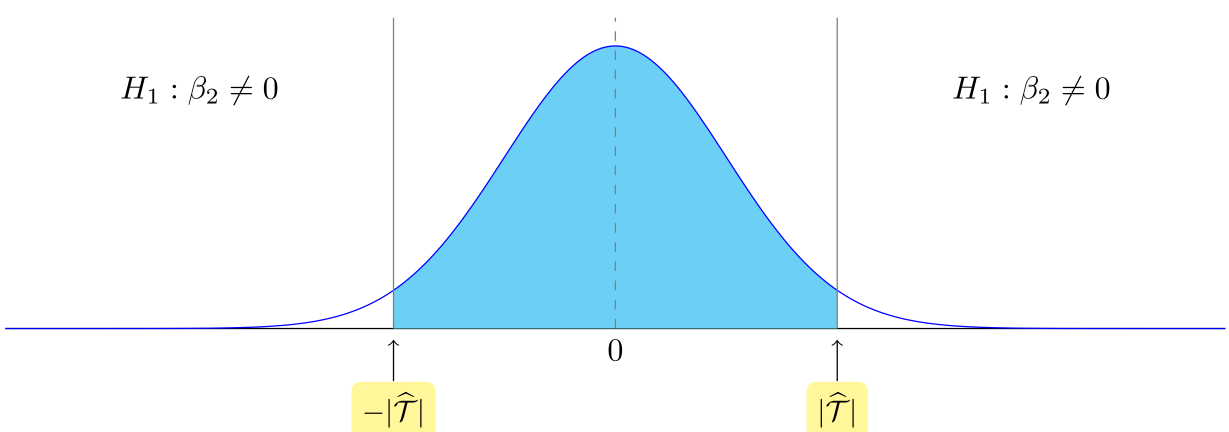
- ☐ H_0 se rechaza tanto al 10 como al 5 por ciento. (*p-valor* ≤ 5).
- ☐ H_0 debe rechazarse al 10 pero no al 5 por ciento. ($5 <$ *p-valor* ≤ 10).
- ☐ H_0 no puede rechazarse ni al 5 ni al 10 por ciento. ($10 <$ *p-valor*).

Bilateral

Si el modelo $Y = \beta_1 \mathbb{1} + \beta_2 X + U$ cumple todas las hipótesis clásicas y se desea contrastar $H_0 : \beta_2 = 0$ frente a $\underline{H_1 : \beta_2 \neq 0}$ utilizando el estadístico $\mathcal{T}$ cuyo valor calculado (con muestra de tamaño N) es $\widehat{\mathcal{T}}$ y

$$Prob\Big(-|\widehat{\mathcal{T}}| \leq t_{N-2} \leq |\widehat{\mathcal{T}}|\Big) = X$$

Distribución t con $(N-k)$ grados de libertad



entonces… aplíquese la Regla de decisión, donde el **Cálculo del *p-valor*** es:

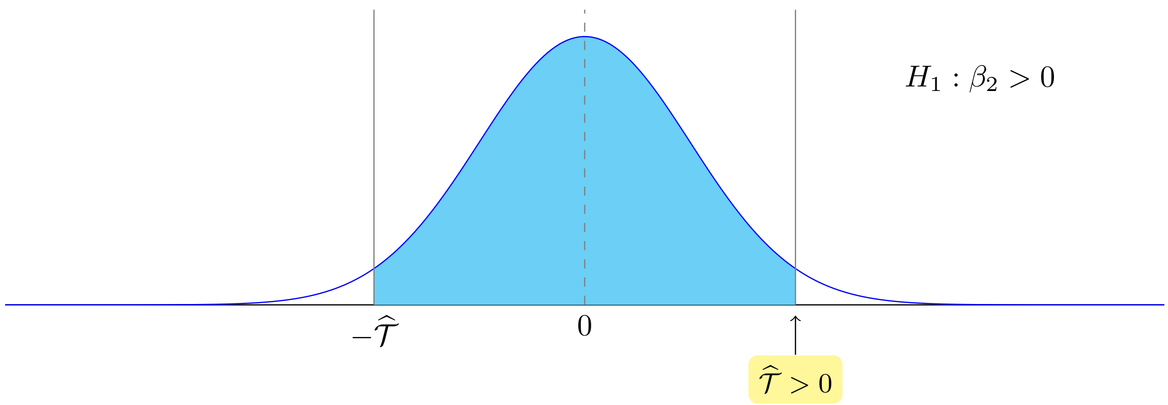
> Como $Prob\Big(-|\widehat{\mathcal{T}}| \leq t_{N-2} \leq |\widehat{\mathcal{T}}|\Big) = X$, y como el contraste es <u>bilateral</u>; el *p-valor* del contraste es la probabilidad fuera del intervalo es decir: ***p-valor*** $= 1 - X$

Cola derecha

- $\widehat{\mathcal{T}} > 0$: Si el modelo $Y = \beta_1 \mathbb{1} + \beta_2 X + U$ cumple todas las hipótesis clásicas y se desea contrastar $H_0 : \beta_2 = 0$ frente a $\underline{H_1 : \beta_2 > 0}$ utilizando el estadístico t cuyo valor calculado (con muestra de tamaño N) es $\underline{\widehat{\mathcal{T}} > 0}$, y

$$Prob\Big(-|\widehat{\mathcal{T}}| \leq t_{N-2} \leq |\widehat{\mathcal{T}}| \Big) = X$$

Distribución t con $(N-k)$ grados de libertad



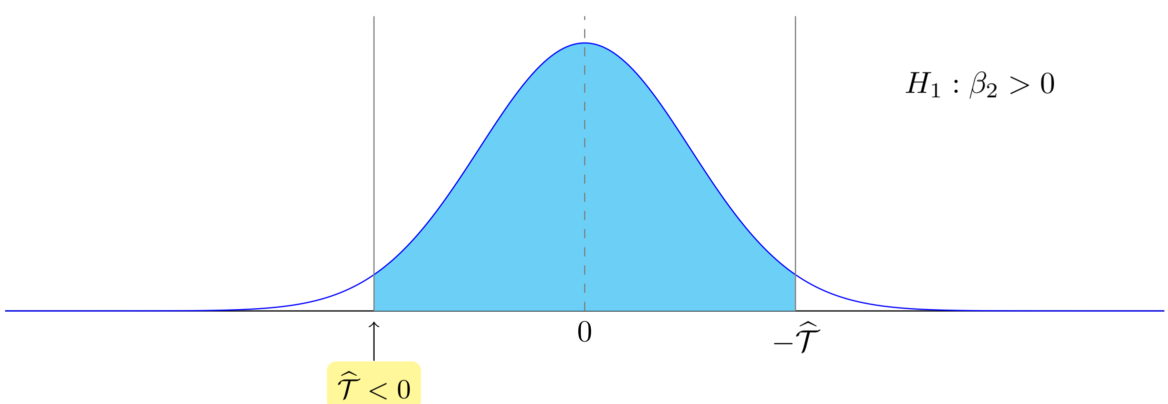
entonces… aplíquese la Regla de decisión, donde el **Cálculo del *p-valor*** es:

> Como $Prob\Big(-|\widehat{\mathcal{T}}| \leq t_{N-2} \leq |\widehat{\mathcal{T}}| \Big) = X$, y como el contraste es de la cola derecha, el *p-valor* del contraste es la probabilidad a la derecha de $\widehat{\mathcal{T}}$, es decir: ***p-valor*** $= \frac{1-X}{2}$.

- $\widehat{\mathcal{T}} < 0$: Si el modelo $Y = \beta_1 \mathbb{1} + \beta_2 X + U$ cumple todas las hipótesis clásicas y se desea contrastar $H_0 : \beta_2 = 0$ frente a $\underline{H_1 : \beta_2 > 0}$ utilizando el estadístico t cuyo valor calculado (con muestra de tamaño N) es $\underline{\widehat{\mathcal{T}} < 0}$, y

$$Prob\Big(-|\widehat{\mathcal{T}}| \leq t_{N-2} \leq |\widehat{\mathcal{T}}| \Big) = X$$

Distribución t con $(N-k)$ grados de libertad



entonces… aplíquese la Regla de decisión, donde el **Cálculo del *p-valor*** es:

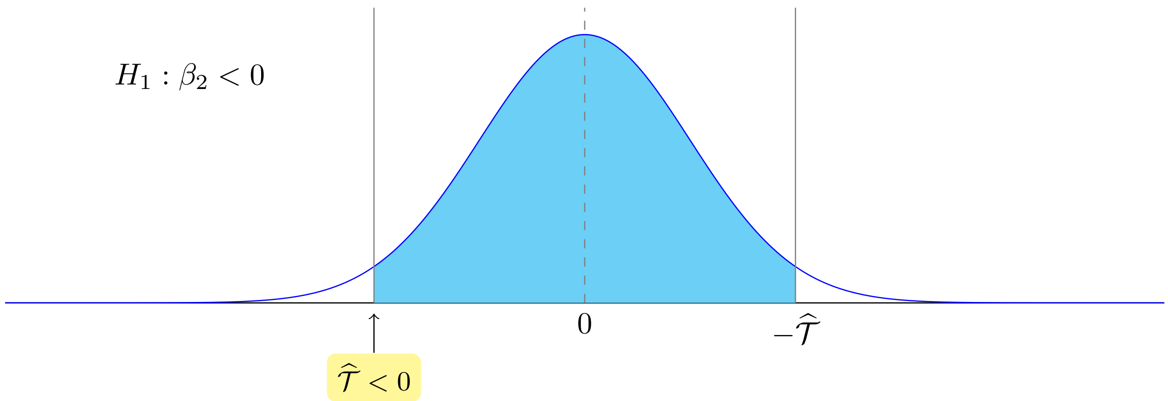
> Como $Prob\Big(-|\widehat{\mathcal{T}}| \leq t_{N-2} \leq |\widehat{\mathcal{T}}| \Big) = X$, y como el contraste es de la cola derecha, el *p-valor* del contraste es la probabilidad a la derecha de $\widehat{\mathcal{T}}$, es decir: ***p-valor*** $= X + \frac{1-X}{2}$.

Cola izquierda

- $\widehat{\mathcal{T}} < 0$: Si el modelo $Y = \beta_1 \mathbb{1} + \beta_2 X + U$ cumple todas las hipótesis clásicas y se desea contrastar $H_0 : \beta_2 = 0$ frente a $\underline{H_1 : \beta_2 < 0}$ utilizando el estadístico t cuyo valor calculado (con muestra de tamaño N) es $\underline{\widehat{\mathcal{T}} < 0}$, y

$$Prob\Big(-|\widehat{\mathcal{T}}| \leq t_{N-2} \leq |\widehat{\mathcal{T}}| \Big) = X$$

Distribución t con $(N-k)$ grados de libertad



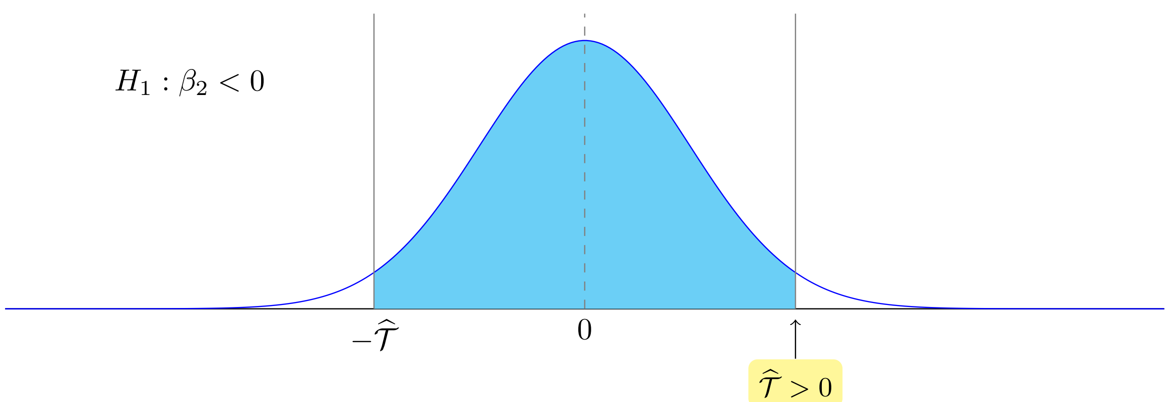
entonces... aplíquese la Regla de decisión, donde el **Cálculo del *p-valor*** es:

> Como $Prob\Big(-|\widehat{\mathcal{T}}| \leq t_{N-2} \leq |\widehat{\mathcal{T}}| \Big) = X$, y como el contraste es de la cola izquierda, el *p-valor* del contraste es la probabilidad a la izquierda de $\widehat{\mathcal{T}}$, es decir: ***p-valor*** $= \frac{1-X}{2}$.

- $\widehat{\mathcal{T}} > 0$: Si el modelo $Y = \beta_1 \mathbb{1} + \beta_2 X + U$ cumple todas las hipótesis clásicas y se desea contrastar $H_0 : \beta_2 = 0$ frente a $\underline{H_1 : \beta_2 < 0}$ utilizando el estadístico t cuyo valor calculado (con muestra de tamaño N) es $\underline{\widehat{\mathcal{T}} > 0}$, y

$$Prob\Big(-|\widehat{\mathcal{T}}| \leq t_{N-2} \leq |\widehat{\mathcal{T}}| \Big) = X$$

Distribución t con $(N-k)$ grados de libertad



entonces... aplíquese la Regla de decisión, donde el **Cálculo del *p-valor*** es:

> Como $Prob\Big(-|\widehat{\mathcal{T}}| \leq t_{N-2} \leq |\widehat{\mathcal{T}}| \Big) = X$, y como el contraste es de la cola izquierda, el *p-valor* del contraste es la probabilidad a la izquierda de $\widehat{\mathcal{T}}$, es decir: ***p-valor*** $= X + \frac{1-X}{2}$.

Contraste de la t de Student - Calculo de una probabilidad usando intervalo de confianza

Con una muestra de tamaño 28 estimamos por MCO el modelo de 4 regresores, $Y = \mathsf{X}\boldsymbol{\beta} + U$, que cumple las hipótesis clásicas. El intervalo de confianza del 60% estimado para β_3 es [4, 16]. Si $Prob(t_{24} \leq \frac{6}{7}) = 0.8$, la probabilidad estimada de que el estimador de β_3 sea mayor o igual a 28 es igual a la siguiente probabilidad:

$$Prob\Big(\, t_{24} \geq \frac{18}{7}\Big).$$

Explicación

- El intervalo [4, 16] es el resultado del siguiente cálculo: $\left[\widehat{\beta_3} - v \cdot \widehat{\text{Dt}}\big(\widehat{\beta_3}\big),\ \widehat{\beta_3} + v \cdot \widehat{\text{Dt}}\big(\widehat{\beta_3}\big)\right]$
- Por tanto, el punto medio del intervalo es la predicción puntual de β_3, es decir, $\widehat{\beta_3} = 4 + \frac{16-4}{2} = 4 + 6 = 10$.
- El intervalo es $\widehat{\beta_3} \pm v \cdot \widehat{\text{Dt}}\big(\widehat{\beta_3}\big)$; donde v es el valor de las tablas utilizado para que la confianza sea del 60%, por tanto $v = 6/7 = t_{24}^{\langle 0.8 \rangle}$.
- Como la distancia del centro del intervalo a los extremos es $\frac{16-4}{2} = 6$, tenemos que $6 = v \cdot \widehat{\text{Dt}}\big(\widehat{\beta_3}\big) = \frac{6}{7} \cdot \widehat{\text{Dt}}\big(\widehat{\beta_3}\big)$, se concluye que $\widehat{\text{Dt}}\big(\widehat{\beta_3}\big) = 7$.

Ahora ya conocemos todo lo necesario para contestar:

Bajo las hipótesis clásicas $\widehat{\beta_3} \sim N\left(\beta_3,\, \text{Dt}\left(\widehat{\beta_3}\right)\right)$, y bajo la H_0 de que $\beta_3 = 10$ tenemos que $\frac{\widehat{\beta_3} - 10(\mathbb{1})}{\widehat{\text{Dt}}\left(\widehat{\beta_3}\right)} \sim t_{24}$, por tanto la estimación de $Prob\left(\widehat{\beta_3} \geq 28\right)$ es (realizando las mismas operaciones a izquierda y derecha de la desigualdad):

$$Prob\left(\frac{\widehat{\beta_3} - 10}{7} \geq \frac{28 - 10}{7}\right) = Prob\left(t_{24} \geq \frac{18}{7}\right).$$