CÀLCUL DE PROBABILITATS

Índex

- **EXPERIÈNCIA ALEATÒRIA. Resultats. Successos**
- **PROBABILITAT**
  - **Definició i propietats**
  - **Independència**
  - **Probabilitat condicionada.**
  - **Probabilitat a posteriori. Bayes**
  - **Probabilitat condicionada, conjunta i marginal**

EXPERIÈNCIA ALEATÒRIA. Resultats. Esdeveniment

Els fenòmens deterministes porten a uns mateixos resultats a partir d'unes mateixes condicions inicials. No així els fenòmens aleatoris, els quals tenen una certa *incertesa* en el resultat d'una propera realització de l'*experiència aleatòria*.

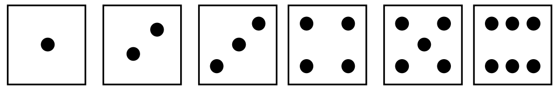
Tota experiència aleatòria té associat un *conjunt de resultats* possibles ($\Omega=\{w_1,w_2,\ldots\}$)

Un *esdeveniment o succés* (A,B,...) és qualsevol agrupació de resultats (els resultats són esdeveniments elementals).
Qualsevol subconjunt de Ω és un esdeveniment.
També són esdeveniments: Ω (segur) o $\emptyset$ (impossible).

Una *partició* és un conjunt d'esdeveniments Ai que són disjunts i la seva unió és Ω.

Com que els esdeveniments són conjunts, totes les operacions dels conjunts (unió, intersecció, complementari) es poden aplicar, i el resultat és un altre esdeveniment.

Exemples clàssics d'experiències amb resultat incert:

- llençar una moneda () (Ω={cara, creu})
- llençar un dau () (Ω={1,2,3,4,5,6})
- extreure una bola d'una urna (○ blanca, ● negra) (Ω={b,n})
- Extreure amb reposició dues boles d'una urna (Ω={bb,bn,nb,nn})

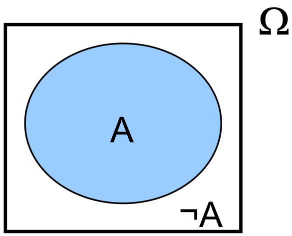
O experiències més complexes:

- segons el resultat del llençament d'una moneda, escollir una urna d'entre dues amb composició diferent, i extreure'n una bola.
- cas servidor i xarxa: possibilitats segons si servidor i/o xarxa funcionen o no
- exemples en algoritmes a Lecture5 a Instructor Resources a http://www.janehorgan.com/

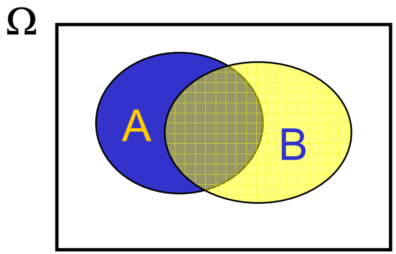
Usem representacions gràfiques per visualitzar millor el procés d’una experiència indeterminista:

Diagrames de conjunts

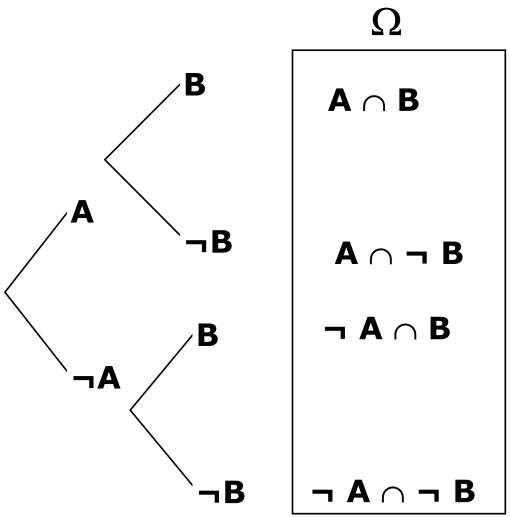
pels esdeveniments



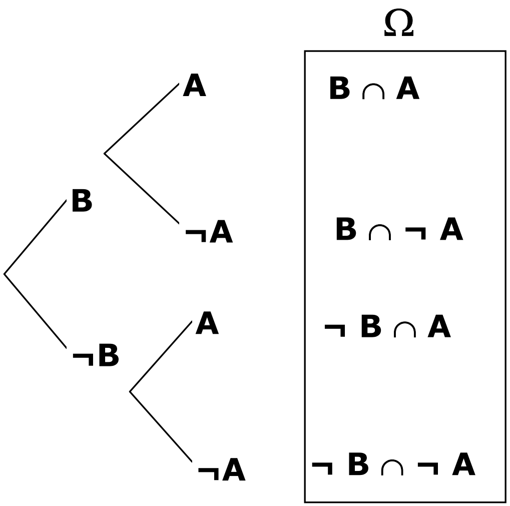
Diagrames de Venn



O, sobretot, arbres on representem particions per nivells:



o bé



Escollirem l’arbre que ens permeti representar millor una quantificació de la incertesa a les branques

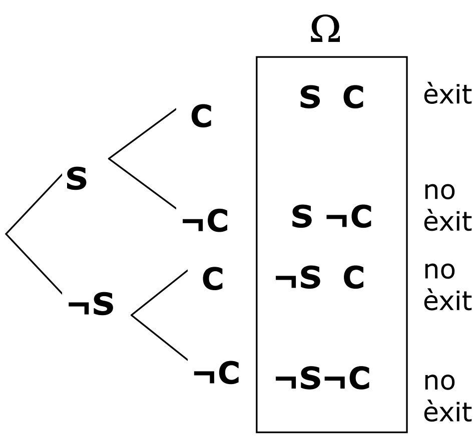
EXEMPLE: servidor i xarxa

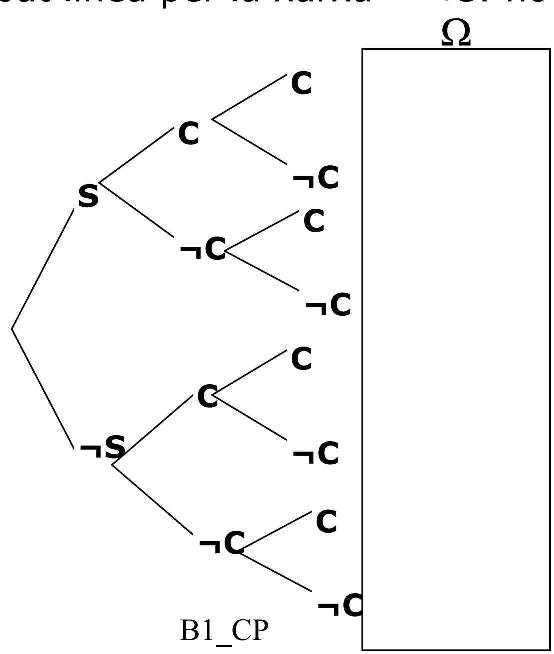
Un client es connecta amb un servidor remot mitjançant una xarxa de comunicacions. El procés consisteix en realitzar n intents de connexió a la xarxa en un període determinat. Tenim èxit de connexió per cada intent si hem trobat un camí per la xarxa fins al servidor i si el servidor està en marxa.

En primer lloc representarem l'experiència pels casos de 1 i de 2 intents:

S:el servidor està en marxa i respon ¬S: no en marxa o no respon

C:la petició del client ha trobat línea per la xarxa ¬C: no línia a la xarxa





(repàs de combinatòria:

Lecture4

a Instructor Resources

a http://

www.janehorgan.com/)

PROBABILITAT. Definició i propietats

Per quantificar la incertesa podem definir una aplicació que a cada succés li fa correspondre un valor entre 0 i 1. L'anomenem *probabilitat*

Per definició ha de cumplir:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ (ser un número entre 0 i 1)
- $P(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_0) + P(A_1) + \ldots + P(A_n)$ si $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$. (probabilitat de la unió disjunta és la suma de les probabilitats respectives)
- $P(\Omega) = 1$ (algún succés elemental ha d'ocórrer)

Així es compliran les següents propietats:

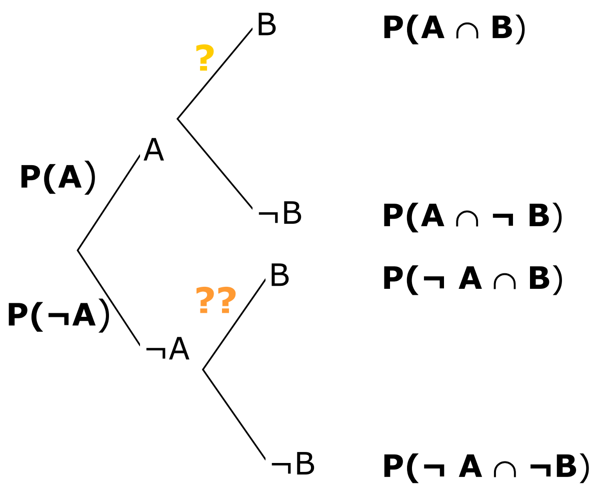
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\neg A) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Habitualment, les probabilitats es concreten en: casos favorables / casos totals a partir d'informació més o menys objectiva de les condicions de l'experiència (*ex. si una moneda és equilibrada 1 de cada 2 llençaments serà cara: prob. 0.5*), o la quantificació freqüentista si l'experiència és repetible (*ex. tenim dades de 100 llençaments d'una moneda i surten 55 cares: prob. 0.55*)

Independència

El concepte d'independència aplicat a dos (o més) esdeveniments implica:

- si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ diem que A i B són independients
- O bé, si A i B són independients, llavors $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



si A i B són independents,

podem establir a l'arbre:

"?" és P(B) i

"??" és P(B)

EXEMPLE: servidor i xarxa (cont.)

Si en aquest exemple podem suposar:

- en *n* intents, el servidor no canvia d'estat
- els estats del servidor i de la xarxa són independents
- els *n* intents de connexió són independents uns d'altres
- el servidor falla, a l'atzar, 1 de cada 10 vegades: $P(\neg S)=p1=1/10$
  i la xarxa una de cada 5 vegades $P(\neg C)=p2=1/5$

Podem calcular la probabilitat d'èxit, és a dir de contactar i poder treballar amb el servidor, si només es realitza un intent fent:

$$P(\text{el servidor funciona} \cap \text{la xarxa funciona}) = P(S \cap C) =$$

Si definim Ti com la probabilitat d'obtenir èxit en algun dels i intents, llavors podem calcular la probabilitat d'èxit si

a) només es realitza un intent

$$P(T_1) = P(S \cap C) = P(S) \cdot P(C) = (1 - p1) \cdot (1 - p2)$$

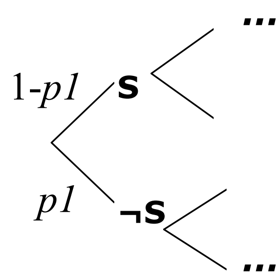
b) es realitzen dos intents (1-Prob("no_èxit en 2 intents"))

$$P(T_2) = 1 - P(\overline{T_2}) = 1 - (p1 + (1 - p1) \cdot (p2)^2)$$

$$P(\overline{T_2}) = P(\overline{S}) + P(S \cap \overline{C} \cap \overline{C}) = p1 + (1 - p1) \cdot (p2)^2$$

c) es realitzen n intents (1-Prob("no_èxit en n intents"))

$$P(T_n) = 1 - P(\overline{T_n}) = 1 - (p1 + (1 - p1) \cdot (p2)^n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 1 - p1$$



Si *n* augmenta, la probabilitat d'èxit tendeix a *1-p1*

(tendeix a P(S), la probabilitat que el servidor funcioni, ja que si n és gran la probabilitat que en algun intent la xarxa no falli tendeix a 1)

EXERCICI: moneda

Estudiarem l'experiència aleatòria de **llençar una moneda equilibrada <u>tres</u> vegades.**

Per una part, abans de fer cap realització i coneixent les característiques de l'experiència, calcularem:
a) la probabilitat d'**obtenir 2 cares**, i
b) la probabilitat d'**obtenir al menys dues cares**.

(al bloc 2 es calcularan les probabilitats a partir de definir una variable aleatòria)

Per altra part, podem estudiar les característiques d'unes dades mostrals recollides al realitzar repetidament l'experiència aleatòria (mitjançant les eines d'Estadística Descriptiva que es treballaran a laboratori):

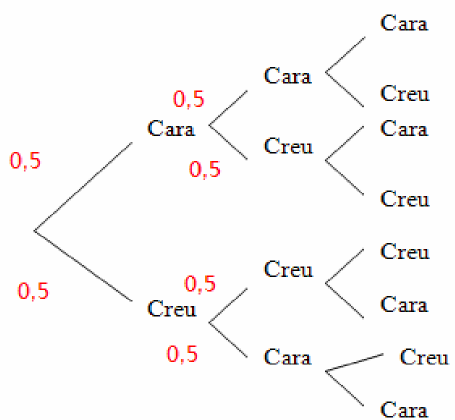
Per exemple si recollim 8 realitzacions en dos estudiants (8 vegades llencen tres vegades la moneda i apunten el nombre de cares) i obtenim

estudiant1: 1 2 0 1 0 1 3 1 (en R: `mean(c(1,2,0,1,0,1,3,1))` és **1.125**)

estudiant2: 1 3 1 1 2 3 0 1 (en R: `mean(c(1,3,1,1,2,3,0,1))` és **1.5**)

Llavors, un indicador de tendència central com la MITJANA dóna un valor de 1.5 en el segon cas, que es correspon amb el que esperaríem pel nombre de cares al llençar 3 vegades una moneda equilibrada.

Abans de cap realització, l’experiència aleatòria es pot representar en arbre:



(Cara,Cara,Cara) = w1	P(w1) = 1/8
(Cara,Cara,Creu) = w2	P(w2) = 1/8
(Cara,Creu,Cara) = w3	P(w3) = 1/8
(Cara,Creu,Creu) = w4	P(w4) = 1/8
(Creu,Cara,Cara) = w5	P(w5) = 1/8
(Creu,Cara,Creu) = w6	P(w6) = 1/8
(Creu,Creu,Cara) = w7	P(w7) = 1/8
(Creu,Creu,Creu) = w8	P(w8) = 1/8

a) Probabilitat de dues Cares (A és “sortir dues cares”):

P(A) =

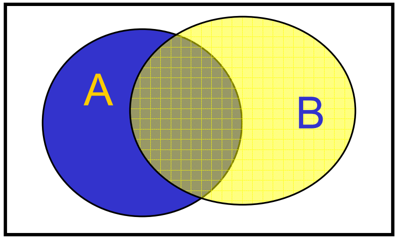
b) Probabilitat almenys dues cares (B és “sortir almenys dues cares”)

P(B)=

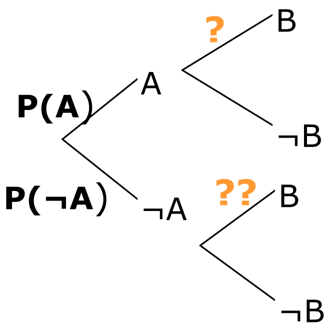
PROBABILITAT condicionada

Quan un esdeveniment afecta a l'expectativa d'un altre parlem de probabilitat condicionada: $P(A|B)$
que es llegeix com a "probabilitat d'observar A tenint en compte que s'ha realizat B" (o senzillament, "probabilitat de A condicionada per B")

Es defineix $P(A|B)$, si $P(B)>0$: $\boxed{P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$



A la pràctica, condicionar per un succés B significa que reduïm a B el conjunt fonamental, i les probabilitats han de recalcularse respecte P(B).



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot ? = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap \neg B) = P(A)P(\neg B|A)$$

$$P(\neg A \cap B) = P(\neg A) \cdot ?? = P(\neg A)P(B|\neg A)$$

$$P(\neg A \cap \neg B) = P(\neg A)P(\neg B|\neg A)$$

"?" és $P(B|A)$

i "??" és $P(B|\neg A)$

(si A i B són independients, llavors $P(B|A)=P(B|\neg A)=P(B)$)

Independència i Probabilitat Condicionada

La probabilitat condicionada permet una altra visió més intuitiva del concepte d'independència.

La idea d'esdeveniments independents està lligada a la de la informació que un aporta sobre l'altre: A i B són independents quan la probabilitat d'A és la mateixa indiferentment del que passi amb B

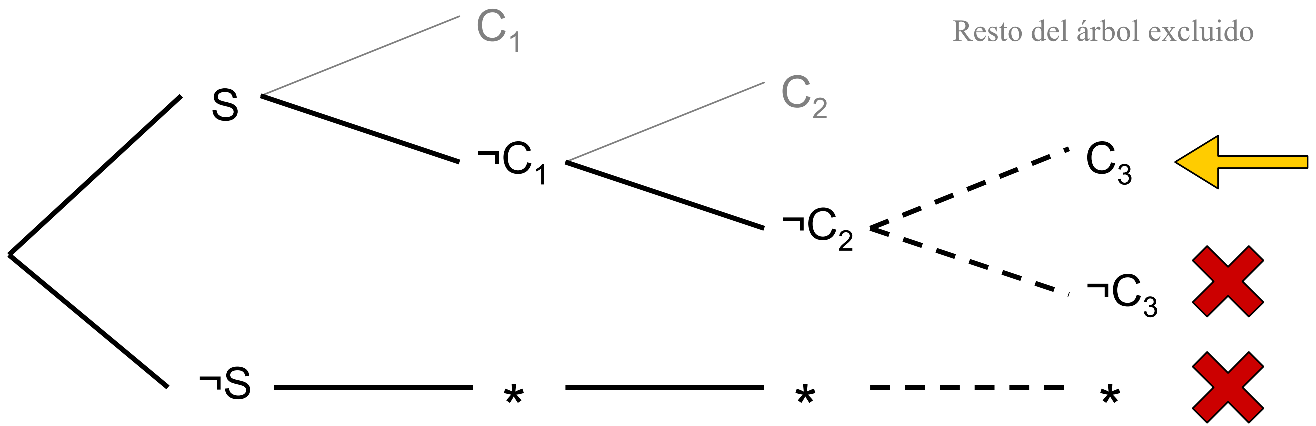
Si A i B són independients, llavors $P(A|B)=P(A|\neg B)=P(A)$

I viceversa: que passi A no canvia l'expectativa de B:

Si A i B són independients, llavors $P(B|A)=P(B|\neg A)=P(B)$

EXEMPLE: servidor i xarxa (cont.)

Ara suposem que s’han realitzat dos intents de connexió sense èxit (no sabem si per causa de la xarxa o del servidor).
¿Quina és la probabilitat de connectar en un tercer intent?



Sabent que teníem definit Ti com la probabilitat d’obtenir èxit en algun dels i intents, llavors $\neg T_2$ serà la de no tenir èxit en 2 intents. Així, cal calcular:

$$P(S \cap C_3 \mid \neg T_2) = \frac{P(S \cap C_3 \cap \neg T_2)}{P(\neg T_2)}$$

En primer lloc calculem la probabilitat del numerador:

com que $S \cap C_3 \cap \neg T_2 = S \cap C_3 \cap [\neg S \cup (S \cap \neg C_1 \cap \neg C_2)] = S \cap \neg C_1 \cap \neg C_2 \cap C_3$

llavors la seva probabilitat és $P(S \cap C_3 \cap \neg T_2) = 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.0288$

I així, la probabilitat que busquem es compensa quan es compara amb el succés que condiciona ($\neg T_2$ que tampoc és molt freqüent) :

$$P(S \cap C_3 \mid \neg T_2) = \frac{P(S \cap C_3 \cap \neg T_2)}{P(\neg T_2)} = \frac{0.0288}{0.136} = 0.2118$$

Fallar en dos intents i tenir èxit en el tercer (amb el servidor en marxa) és un succés amb poques "possibilitats" (menys del 3%).

També podem comparar aquesta probabilitat amb la de connectar en un tercer intent sense tenir cap informació prèvia (la probabilitat "bruta" de connectar en el tercer intent és $P(S \cap C3)=0.72$ Per tant:

no connectar en els dos intents previs és una mala senyal: ¡les possibilitats baixen del 72% a un 21%!

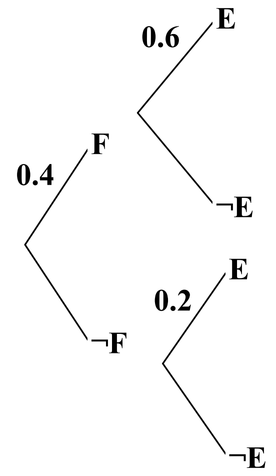
EXERCICI: Aeroport (e-status)

Per estudiar l'eficiència en un aeroport, una primera aproximació ens porta a estudiar les probabilitats d'haver-se d'esperar a l'hora de facturar i a l'hora d'embarcar. Considerem el cas d'un aeroport on s'ha comprovat que per a un viatger que arriba, la probabilitat de trobar cua a facturació és 0.4; i de trobar cua a l'embarcament és 0.6 si va trobar cua a facturació ,i 0.2 si no en va trobar.

Calculeu:

a) la probabilitat de trobar cua a facturació i a embarcament
b) la probabilitat de trobar cua a embarcament
c) la probabilitat de trobar cua a embarcament si ha trobat cua a facturació
d) la probabilitat d'haver trobat cua a facturació si no ha trobat cua a embarcament

F és "trobar cua a facturació"
¬F és "no trobar cua a facturació"
E és "trobar cua a embarcament"
¬E és "no trobar cua a embarcament"



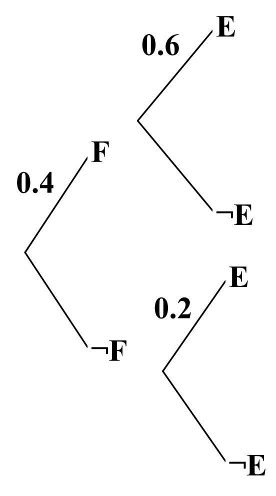
a) la probabilitat de trobar cua a facturació i a embarcament

P(F i E) =

b) la probabilitat de trobar cua a embarcament

P(E) =

F és "trobar cua a facturació"
¬F és "no trobar cua a facturació"
E és "trobar cua a embarcament"
¬E és "no trobar cua a embarcament"



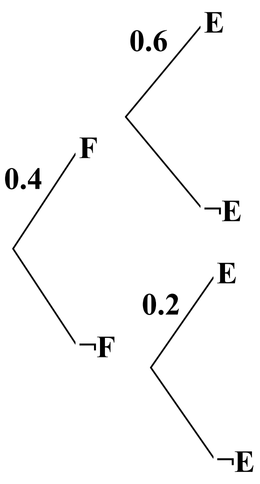
c) la probabilitat de trobar cua a embarcament si ha trobat cua a facturació

$P(E|F) =$

d) la probabilitat d'haver trobat cua a facturació si no ha trobat cua a embarcament

$P(F|\neg E) =$

F és "trobar cua a facturació"
¬F és "no trobar cua a facturació"
E és "trobar cua a embarcament"
¬E és "no trobar cua a embarcament"



PROBABILIDAD a posteriori. Bayes

A partir de la definició de probabilitat condicionada $\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$

i de la probabilitat de la intersecció aïllada de la condicionada

complementària: $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ → $P(B\cap A)=P(A\cap B)=(P(B|A)\cdot P(A)$

es dedueix la Fórmula de Bayes:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}}$$

que, coneixent P(A) i P(B), permet passar de P(A|B) a P(B|A) i viceversa (usualment en l'enunciat del cas, les probabilitats condicionades en un sentit són conegudes i interessa calcular les condicionades complementàries)

Anècdota clàssica:

L'abat Bayes pretenia demostrar l'existència de Deu (D) a partir del coneixement de que l'Home (H) existeix.

$P(D|H)$???

Partia de que: $P(H) = 1$

I que (por definició) $P(H|D) = 1$

$$\boxed{P(D\,|\,H) = \frac{P(H\,|\,D)\cdot P(D)}{P(H)} = \frac{1\cdot P(D)}{1} = P(D) = ?}$$

L'anècdota és que, com que va observar que saber que l'home existia no li aportava informació sobre l'existència de Deu, no va compartir els seus resultats (desvetllats per un successor seu).

Podem calcular la probabilitat d'un succés B_k a partir de les probabilitats de les interseccions d'aquest amb una partició $A_1, A_2, \ldots A_j$ de Ω:

$$P(B_k) = P(B_k \cap A_1) + P(B_k \cap A_2) + \ldots + P(B_k \cap A_j) =$$

$$= P(B_k|A_1) \cdot P(A_1) + P(B_k|A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B_k|A_2) \cdot P(A_2)$$

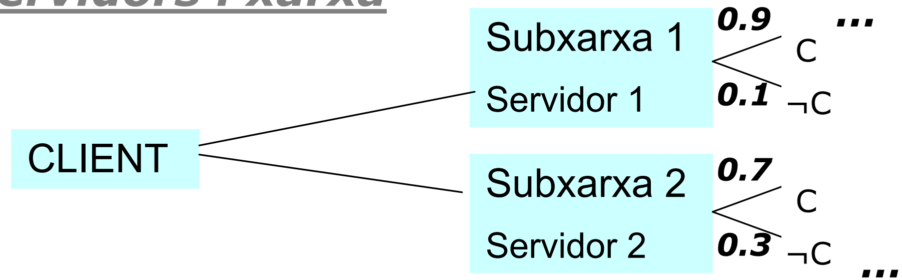
(Llei de probabilitats totals)

S'aplica quan disposem d'una partició, i la probabilidad del succés d'interès és senzilla d'obtenir si està condicionat per un element qualsevol de la partició

Combinant la fórmula de Bayes amb la llei de probabilitats totals (i una partició $\{A_j\}$ adequada) s'obté el teorema de Bayes:

$$\boxed{P(A_i|B_k) = \frac{P(B_k|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_j P(B_k|A_j) \cdot P(A_j)}}$$

EXEMPLE: 2 servidors i xarxa



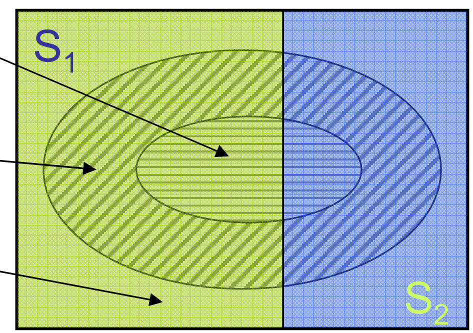
Ara considerem que tenim dues subxarxes amb dos servidors i en triem una o altra a l'atzar (50%). I llavors fem els intents sempre sobre la mateixa xarxa (en la primera falla la connexió 1 de cada 10 cops, i en la segona 3 de cada 10)

Per a *n*=2. ¿Com calcular la probabilitat d'obtenir 0, 1, 2 connexions?

conjunt de resultats associat a "**2 connexions**" (X_2)

conjunt de resultats associat a "**1 connexió**" (X_1)

conjunt de resultats associat a "**0 connexions**" (X_0)



En aquest cas podem calcular fàcilment les probabilitats de X_0, X_1 o X_2 condicionades pel servidor:

$P(X_0 \mid S_1)=$
$P(X_0 \mid S_2)=$
$P(X_1 \mid S_1)=$
$P(X_1 \mid S_2)=$
$P(X_2 \mid S_1)=$
$P(X_2 \mid S_2)=$

I com que X_0, X_1 o X_2 poden ser expressats com a unió de conjunts disjunts (ja que $\{S_1, S_2\}$ és una *partició*):

$$X_i = (X_i \cap S_1) \cup (X_i \cap S_2); \quad \Rightarrow$$

$$P(X_i) = P(X_i \cap S_1) + P(X_i \cap S_2) = P(X_i \mid S_1) \cdot P(S_1) + P(X_i \mid S_2) \cdot P(S_2)$$

$P(X_0) =$

$P(X_1) =$

$P(X_2) =$

I ara suposant que s'han aconseguit *k* connexions, amb quina probabilitat hem estat atesos pel servidor *i* ?

Agafant el nombre de connexions com una partició i els dos servidors com una altra partició podem aplicar

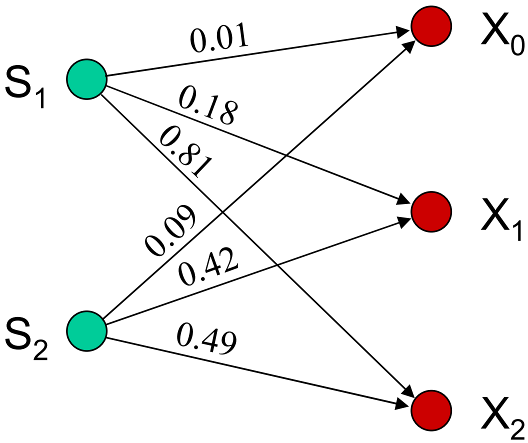
$$\boxed{P(A_i | B_k) = \frac{P(B_k | A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_j P(B_k | A_j) \cdot P(A_j)}}$$

Càlculs:	*i=1*	*i=2*	**P(Xk)**			*i=1*	*i=2*
P(X0 | Si)	0,01	0,09	0,05		**P(Si | X0)**	0,10	0,90
P(X1 | Si)	0,18	0,42	0,30		**P(Si | X1)**	0,30	0,70
P(X2 | Si)	0,81	0,49	0,65		**P(Si | X2)**	0,62	0,38
P(Si)	0,5	0,5					

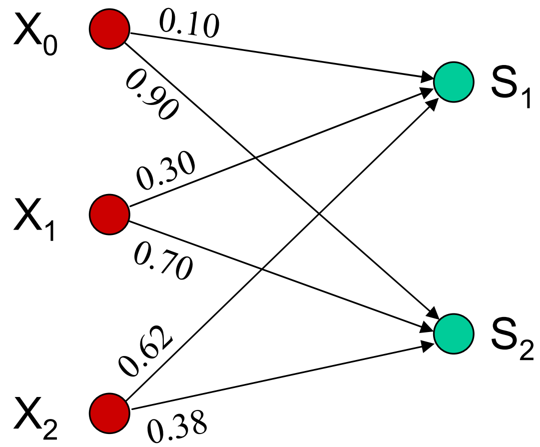
Si s'han aconseguit dues connexions, creiem que hem utilitzat el primer servidor amb probabilitat **.....**

El teorema de Bayes transforma unes probabilitats condicionades en unes altres

$P(X_k \mid S_i)$



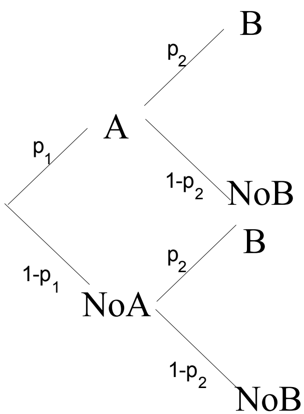
$P(S_i \mid X_k)$



Coneixent el servidor utilitzat, calculem la probabilidad d'obtenir un número determinat de conexions.

Sabent el número de conexions aconseguides, calculem la probabilitat d'haver utilitzat determinat servidor.

PROBABILITAT condicionada, conjunta i marginal (quan hi ha independència)



	B	$\neg$B	
A	$A \cap B$	$A \cap \neg B$	p_1
$\neg$A	$\neg A \cap B$	$\neg A \cap \neg B$	$1-p_1$
	p_2	$1-p_2$	

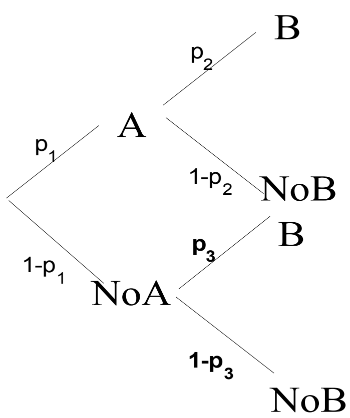
$P(B|A)= P(B|NoA)= P(B) = p_2$

$P(NoB|A)= P(NoB|NoA)= P(NoB) = 1-p_2$

$P(A \text{ y } B)= P(A) * P(B) = p_1 * p_2$

A i B són independents

PROBABILITAT condicionada, conjunta i marginal (quan NO hi ha independència)



	B	¬B	
A	A∩B	A∩¬B	p_1
¬A	¬A∩B	¬A∩¬B	$1-p_1$

$P(B|A)=p_2$ <> $P(B|NoA)=p_3$ <> $P(B)$

$P(NoB|A)=1-p_2$ <> $P(NoB|NoA)=1-p_3$ <> $P(NoB)$

$P(A \text{ y } B)$ <> $P(A) * P(B)$

A i B **NO** són independents

EXEMPLE: Indep. i no indep. amb probabilitats

Si les probabilitats conjuntes són:

	A	NoA	
B	0.06	0.54	0.60
No B	0.04	0.36	0.40
	0.10	0.90	

les condicionades per columnes són:

	A	NoA
B	0,6	0,6
No B	0,4	0,4
	1	1

SI independència

Si les probabilitats conjuntes són:

	A	NoA	
Petit	0.05	0.55	0.60
NoPetit	0.05	0.35	0.40
	0.10	0.90	

les condicionades per columnes són:

	A	NoA
B	0,5	0,61
No B	0,5	0,39
	1	1

NO independència

EXEMPLE: Indep. i no indep. amb freqüències

2 mostres (100 obs.), gènere i edat en 3 categories

	1	2	3	
masc.	6	24	30	60
fem.	4	16	20	40
	10	40	50	

	1	2	3
masc.	0,6	0,6	0,6
fem.	0,4	0,4	0,4
	1	1	1

SI independència

	1	2	3	
masc.	5	30	25	60
fem.	5	10	25	40
	10	40	50	

	1	2	3
masc.	0,5	0,75	0,5
fem.	0,5	0,25	0,5
	1	1	1

NO independència

APLICACIONS:

SOME APPLICATIONS OF BAYES

(Lecture7 a Instructor Resources a http://www.janehorgan.com/)

- Hardware Fault Diagnosis

Extreient d'una Base de Dades les probabilitats de certs *problemes* ($P(A_i)$),
i coneixent també la probabilitat de *fallada* segons el problemes ($P(F|A_i)$),
es pot calcular quin problema és més probable quan es dóna una fallada ($\max(P(A_i|F))$

- Machine Learning

(cas d'algoritmes de classificació d'aprenentatge supervisat)
Coneixent a priori les probabilitats de pertanyer a unes certes *classes* ($P(A_i)$),
i coneixent també la probabilitat de certa *característica* segons la classe ($P(F|A_i)$),
es pot calcular quina classe és més probable quan es dóna certa característica ($\max(P(A_i|F))$

RELIABILITY. System reliability

(Lecture8 a Instructor Resources a http://www.janehorgan.com/)

- Series System (la probabilitat de funcionar el sistema és el producte de les probabilitats de funcionar dels components)
- Parallel Systems (la probabilitat de funcionar el sistema és 1 menys la probabilitat de que fallin tots (que és el producte de les probabilitats de fallar dels components))

EXERCICI: Aeroport77 (e-status)

Per estudiar l'eficiència en un aeroport, una primera aproximació ens porta a estudiar les probabilitats d'haver-se d'esperar a l'hora de facturar i al control de passaports (CP). Considerem el cas d'un aeroport on s'ha comprovat que per a un viatger que arriba, la probabilitat de trobar cua a facturació és 0.64. Posteriorment s'ha comprovat que les probabilitats d'esperar o no per el CP depenen del fet d'haver esperat al moment de facturar, com mostra la següent taula:

	si per facturar s'ha hagut d'esperar	si per facturar no s'ha hagut d'esperar
no espera	0.187	0.238
espera el primer a la cua	0.687	0.461
espera perque ja hi ha una cua	0.126	0.301

1. la probabilitat de no esperar a facturació ni a CP.
2. la probabilitat de ser atés immediatament al CP (és a dir, no hi ha ningú passant el control).
3. la probabilitat de tenir que esperar a facturació o a CP.
4. la probabilitat de tenir que esperar a un dels llocs (però només a un).
5. Si un viatger arriba al CP i ha d'esperar perquè hi ha una persona passant el control, i cap més: ¿quina és la probabilitat de haver esperat a facturació?
6. Els passatgers A i B arriben a l'aeroport en dos moments independents per agafar els seus vols. Trobeu la probabilitat de que els dos hagin de posar-s'hi a la cua al CP.

F és "trobar cua a facturació"
¬F és "no trobar cua a facturació"

CP0 és "no trobar cua a control passaport"
CP1 és "una persona a cua de control passaport"
CP+ és "més d'una persona a cua de control passaport"

	CP0	CP1	CP+	
F	0.187	0.687	0.126	1
¬F	0.238	0.461	0.301	1

Com que sabem que
P(F) = **0.64**
i per tant P(¬F) = **0.36**,
doncs llavors podem calcular
les probabilitats conjuntes:

	CP0	CP1	CP+	
F				**0.64**
¬F				**0.36**

1.- La probabilitat de no esperar a facturació ni a CP.

$P(\neg F \text{ i } CP0) =$

2. la probabilitat de ser atés immediatament al CP (és a dir, no hi ha ningú passant el control).

$P(CP0) =$

3. la probabilitat de tenir que esperar a facturació o a CP.

$P(F \text{ o } \neg CP0) =$

4. la probabilitat de tenir que esperar a un dels llocs (però només a un).

5. Si un viatger arriba al CP i ha d'esperar perquè hi ha una persona passant el control, i cap més: ¿quina és la probabilitat de haver esperat a facturació?

$P(F|CP1) =$

6. Els passatgers A i B arriben a l'aeroport en dos moments independents per agafar els seus vols. Trobeu la probabilitat de que els dos hagin de posar-s'hi a la cua al CP.

Cua_A: $P(\neg CP0) =$

Cua_B: $P(\neg CP0) =$

$P(\text{Cua\_A i Cua\_B}) =$