VARIABLE ALEATÒRIA (VA)

- **VA: definició, funció de probabilitat i funció de distribució**
- **Exemples de VA discreta (VAD) i contínua (VAC)**
- **INDICADORS: esperança i variància**
- **PROBABILITATS ACUMULADES: “quantils”**
- **PARELL DE VARIABLES**
- **INDICADORS: covariància i correlació**
- **PROPIETATS DELS INDICADORS**
- **MODELS TEÒRICS DE DISTRIBUCIONS de VA**

VA: definició

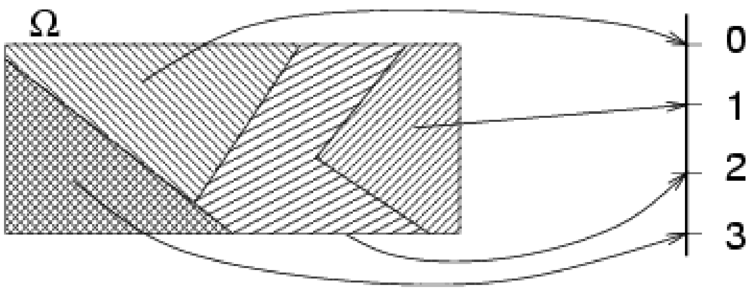
La majoria d'experiències aleatòries porten a resultats interpretables com un número. Ens interessa l'estudi de l'experiment des del punt de vista numèric.

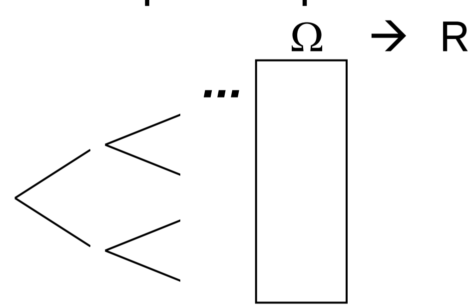
Una variable aleatòria X és una aplicació entre el conjunt Ω i la recta real:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

(les anomenarem amb un símbol tal com *X*, *Y*, *Z*, …(lletra llatina majúscula))

Una variable indueix una partició de Ω amb els valors que adopta:





Les probabilitats definides en Ω es transfereixen als valors de la VA X, definint unes funcions de probabilitat (o de densitat) i de distribució de probabilitat :

$$\boxed{\Omega \xrightarrow{X} \mathbf{R} \xrightarrow{\text{prob.}} [0,1]}$$

Funció de probabilitat i funció de distribució

La funció de probabilitat i la funció de distribució de probabilitat es defineixen i es caracteritzen segons els valors que agafa la VA en **R.**

Així, distingim dos tipus de VA:

- si el conjunt de valors que poden agafar és enumerable (ex. un interval de valors enters (0..n), o el conjunt dels naturals **N)** la VA és discreta (VAD).

Ex: en l'experiència de llençar una moneda 3 vegades:

VAD cara o creu en l'últim llançament (possibles valors: 0,1; probabilitats: ½, ½)

VAD número de cares (possibles valors: 0,1,2,3; probabilitats: ?)

Ex: VAD número de caigudes del sistema (possibles valors: 0,1,2,3,4,5,6,…; probabilitats:?)

- si agafa valors d'un conjunt no discret (normalment la recta real o un segment d'ella) la VA és contínua (VAC)

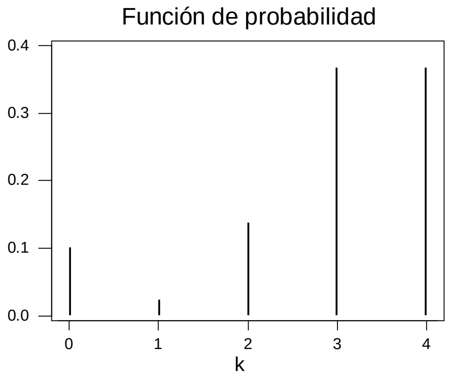
Ex. VAC temps entre caigudes del sistema (possibles valors: $\mathbf{R}^+$)

En general, les VAC són mesures físiques de temps, longituds, …

La funció de probabilitat en una VA DISCRETA (p_X) defineix la probabilitat puntual de cada un dels possibles valors k

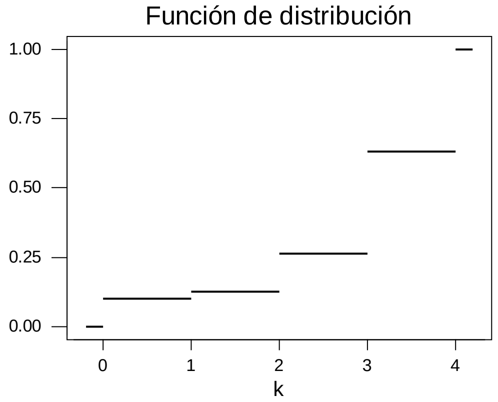
$$p_X(k) = P(X=k)$$ ({X=k} és una abreviació de {w | X(w)=k})

complint $\Sigma_{\forall k}\, p_X(k)=1$



La funció de distribució de probabilitat en una VA DISCRETA (F_X) defineix la probabilitat acumulada, és a dir

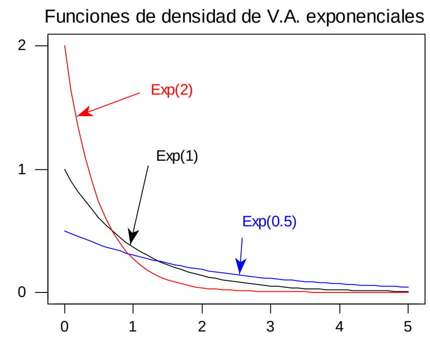
$$F_X(k) = P(X \le k) = \Sigma_{j\le k}\, p_X(j$$



La funció de densitat de probabilitat en una VA CONTINUA (f_X) és la funció que recobreix l'àrea on està definida la variable ($f_X(k)$ és el valor de la funció en k, però no és una probabilitat puntual)

$f_x(k)$ <> $P(X=k)$ (P(X=k)=0 per definició)

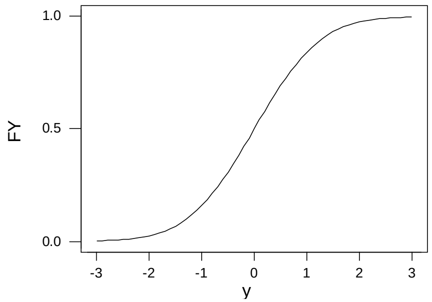
complint $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$



La funció de distribució de probabilitat en una VA CONTINUA (F_X) defineix la probabilitat acumulada, és a dir

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \int_{-\infty}^{k} f_X(x)dx$$

(o bé $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$)



Conegudes les funcions d'una VA, calcularem les seves probabilitats:

- En VAD

$P(X{=}k) \;=\; p_X(k)$

$P(X \leq k) = F_X(k) = \Sigma_{j\leq k}\, p_X(j)$

$P(X<k) = P(X \leq k\text{-}1) = F_X(k\text{-}1)$

$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) – P(X \leq a) = F_X(b) − F_X(a)$

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) – P(X < a) = F_X(b) − F_X(a\text{-}1)$

$P(a < X < b) = P(X < b) – P(X \leq a) = FX(b\text{-}1) − FX(a)$

- En VAC

$P(X{=}k) \;=\; 0$

$P(X \leq k) = F_X(k)$

$P(X<k) = P(X \leq k) = F_X(k)$

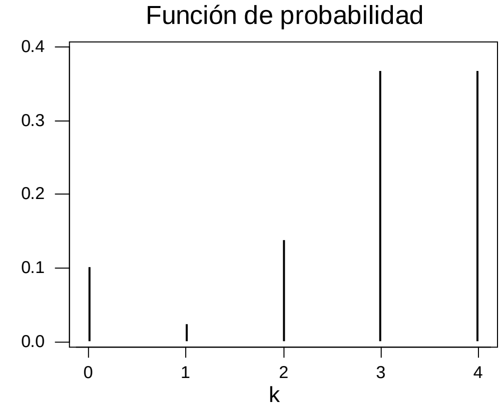
$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) − F_X(a)$ (= $P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$)

Exemple de VA discreta (VAD)

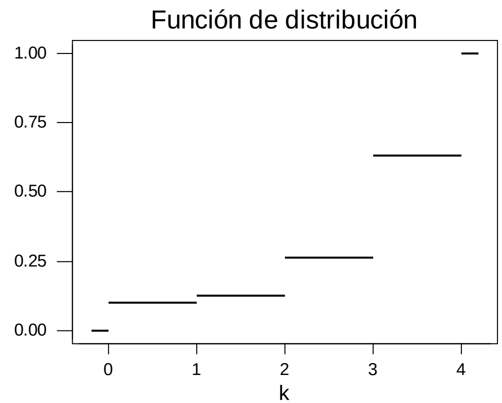
Reprenem l'exemple anterior del servidor i la xarxa. Ara amb 4 intents de connexió, probabilitat de funcionar el servidor p_1=0.9 i probabilitat de funcionar la xarxa p_2= 0.8.
Definim la VAD *X*: "nº de connexions aconseguides"

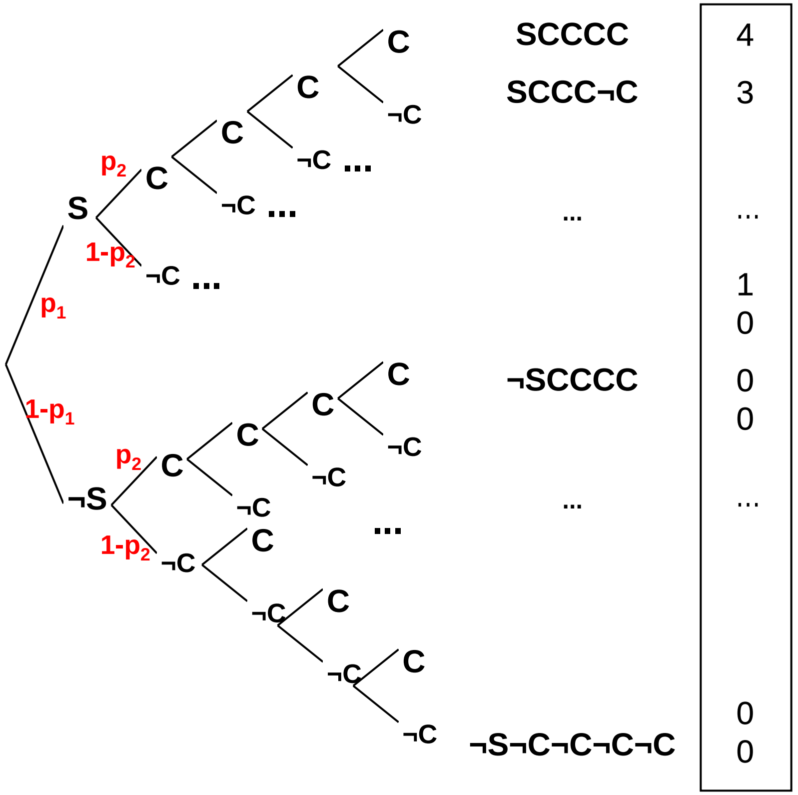
$P(X=0)= 1- p_1+ p_1\cdot(1- p_2)^4 \qquad P(X=k)= p_1\cdot p_2^k\cdot(1- p_2)^{4-k}\binom{4}{k} \qquad k>0$

k	$P_X(k)$
0	0.10144
1	0.02304
2	0.13824
3	0.36864
4	0.36864



k	$F_X(k)$
$(-\infty,0)$	0.00000
[0,1)	0.10144
[1,2)	0.12448
[2,3)	0.26272
[3,4)	0.63136
$[4,+\infty)$	1.00000

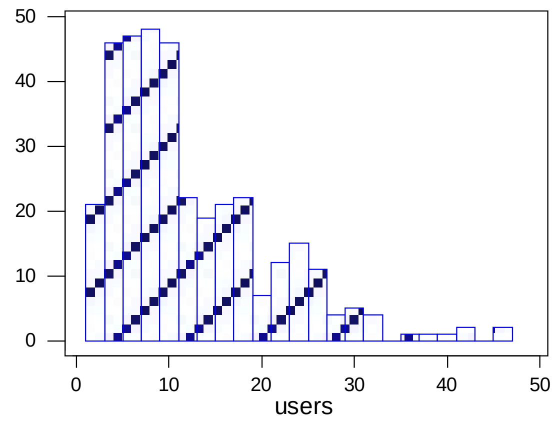


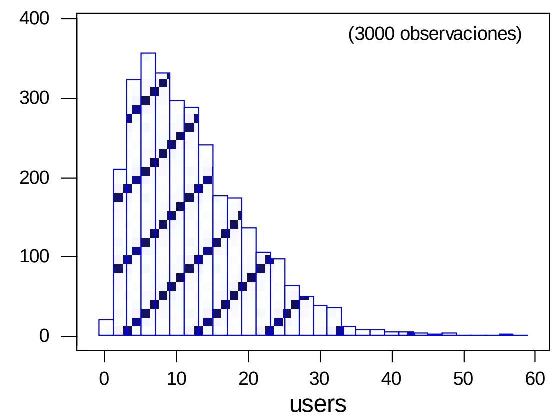


Exemples de VA discreta (VAD) mostral

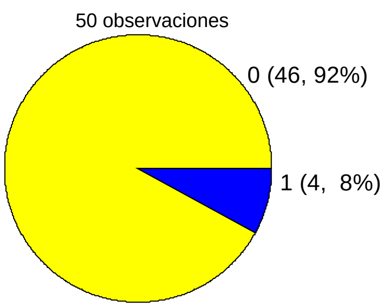
La repetició d'una experiència (en condicions *estables*) posa de manifest la variabilitat dels resultats. No es poden esperar sempre els mateixos resultats, l'aparença de la distribució dels valors serà diferent, però amb un número suficientment gran d'observacions serà *semblant* a la situació "teòrica".

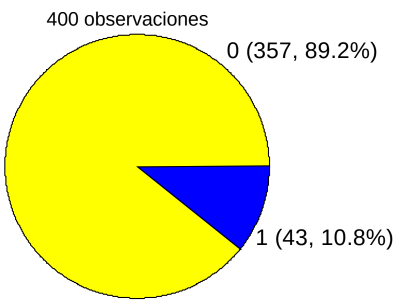
Per exemple, si un tècnic de sistemes recull informació del número d'usuaris, tindrà una aproximació a la VA teòrica del número d'usuaris:





I si recull informació sobre si la paginació és normal (0) o elevada (1) :

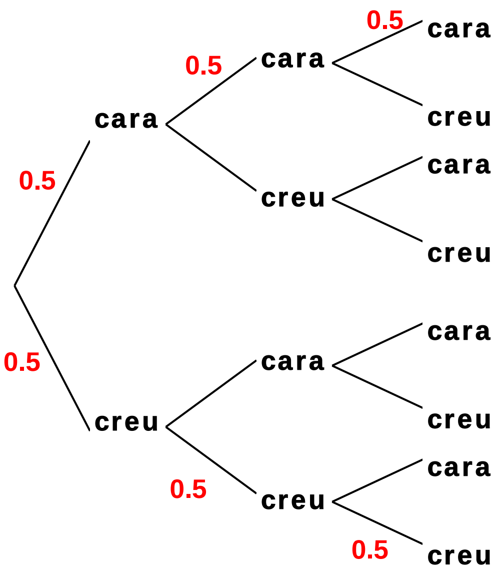




EXERCICI: moneda

Estudiarem l'experiència aleatòria de **llençar una moneda equilibrada <u>tres</u> cops**
Calcularem:
a) la probabilitat d'**obtenir 2 cares**, i
b) la probabilitat d'**obtenir al menys dues cares**.
(al bloc 1 s'han calculat les probabilitats a partir de l'arbre i dels successos)
Ara ho calcularem definint la variable aleatòria "número de cares"

X = número de "o" (cares)



(o,o,o) = w1	P(w1) = 1/8	w1 ⟶...
(o,o,+) = w2	P(w2) = 1/8	w2 ⟶...
(o,+,o) = w3	P(w3) = 1/8	w3 ⟶...
(o,+,+) = w4	P(w4) = 1/8	w4 ⟶...
(+,o,o) = w5	P(w5) = 1/8	w5 ⟶...
(+,o,+) = w6	P(w6) = 1/8	w6 ⟶...
(+,+,o) = w7	P(w7) = 1/8	w7 ⟶...
(+,+,+) = w8	P(w8) = 1/8	w8 ⟶...

a) P(X=2) =...

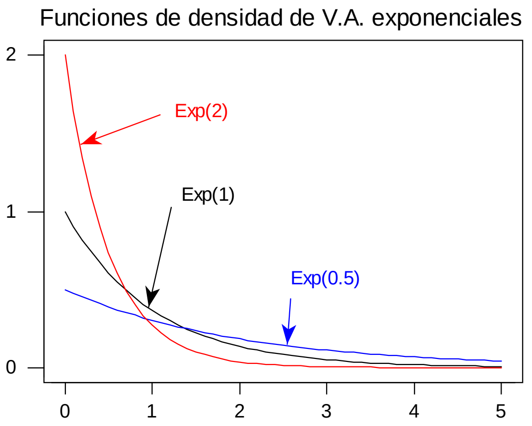
b) P(X>=2) =...

k	$p_X(k)$
0	...
1	...
2	...
3	...

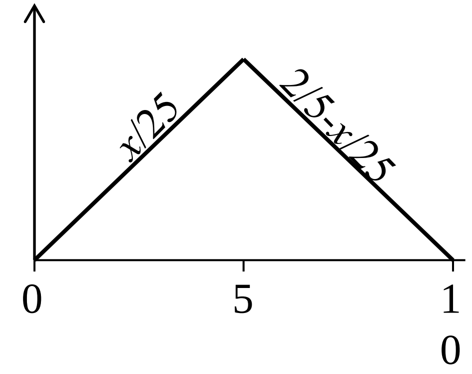
k	$F_X(k)$
0	...
1	...
2	...
3	...

Exemples de VA contínua (VAC)

Exemple 1. La vida útil d'un transistor en anys segueix una distribució que decreix exponencialment.

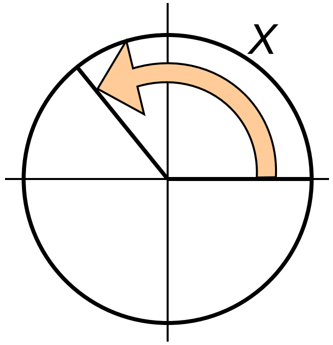


Exemple 2. L'esforç requerit per desenvolupar un projecte es pot mesurar en homes/mes, per exemple segons la figura.



Exemple 3. L'angle X senyalat per la agulla d'una ruleta al parar-se, $0 \le X \le 2\pi$.

$F_X(k) = P(X \le k) = k/(2\pi)$.



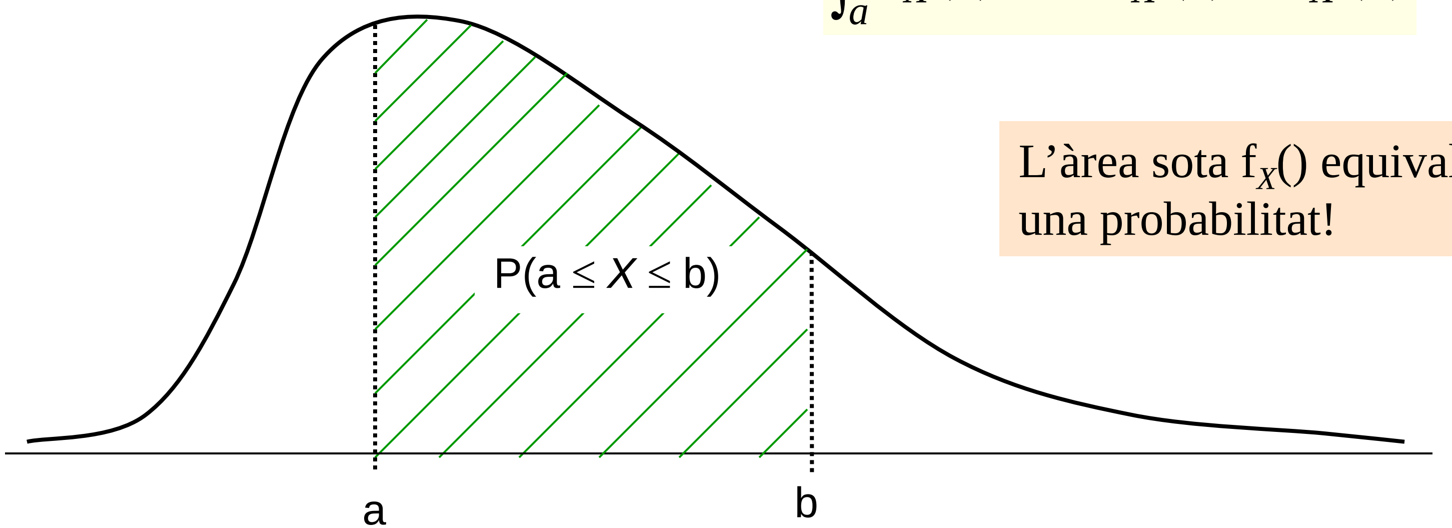
Exemples de VA contínua (VAC)

Qualsevol funció positiva, $f_X(x) \geq 0$, que compleix $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$ és una <u>funció de densitat</u> vàlida, és a dir, caracteritza una V.A contínua.

La <u>funció de distribució</u> s'obté amb $F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx$

Tota l'àrea sota la funció de densitat és sempre igual a 1. I l'àrea que hi ha sota la funció de densitat entre els límits *a* per l'esquerra i *b* per la dreta és:

$$\int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$



L'àrea sota $f_X()$ equival a una probabilitat!

INDICADORS de VA: esperança i variància

Una mostra de valors expressa amb *n* observacions la variabilitat d'una experiència: si volem resumir aquestes dades utilitzarem la mitjana mostral $\bar{x}$ i la desviació estàndard mostral s_x (tal com es veu a EDUnivariant a laboratori)

Una variable aleatòria *X* no representa una determinada mostra, i per això ha d'utilitzar la distribució de probabilitat dels valors que pot agafar:

-com indicador central agafem el valor esperat o esperança E(X) (o μ_X)

-com mesura de dispersió la variància V(X) (σ^2_X) o la desviació estàndard (σ_X)

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{V(X)}$$

Esperança de *X*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \sum_{\forall k} k \cdot p_X(k) \quad \text{en VAD}$$

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \mathrm{f}_X(x)dx \quad \text{en VAC}$$

Variància de *X*

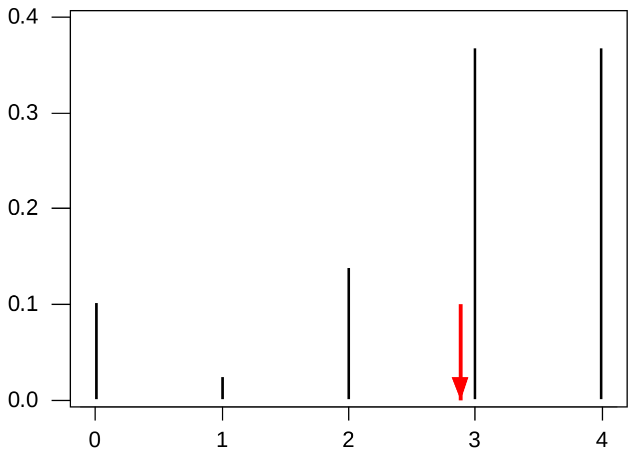
$$\mathrm{V}(X) = \sigma_X^2 = \sum_{\forall k} (k - E(X))^2 p_X(k) \quad \text{en VAD}$$

$$\mathrm{V}(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \mathrm{f}_X(x)dx \quad \text{en VAC}$$

Podem relacionar els dos indicadors amb: $\mathrm{V}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

EXEMPLE: En l'exemple del servidor i de la xarxa, analitzem l'esperança i variància de la variable X "número de connexions al servidor amb n=4"

k	$P_X(k)$	$k \cdot P_X(k)$	$(k-\mu)^2$	$(k-\mu)^2 \cdot P_X(k)$
0	0.10144	0	8.2944	0.84138
1	0.02304	0.02304	3.5344	0.08143
2	0.13824	0.27648	0.7744	0.10705
3	0.36864	1.10592	0.0144	0.00531
4	0.36864	1.47456	1.2544	0.46242
		μ=2.88		σ^2=1.4976
				σ =1.2238



L'esperança 2.88 indica que s'espera un promig de 2.88 connexions si l'experiència es repetís un gran número de vegades. No s'ha d'arrodonir a un enter. L'esperança s'associa al centre de gravetat.

La desviació 1.22 informa sobre la magnitud de la dispersió de la variable. Major desviació suposa major probabilitat de buscar un valor allunyat del valor esperat. Menor desviació, major concentració.

Primeres PROPIETATS DELS INDICADORS

- $E(a+bX) = a + b \cdot E(X)$
- $V(a+b \cdot X) = b^2 \cdot V(X)$

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$E(X) = \mu_X$

$V(X) = \sigma_X^2$

a, b són escalars

X, *Y* són variables aleatòries

Si *X* i *Y* són independents $\Rightarrow$ $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

EXERCICI: moneda

En l'experiència aleatòria de **llençar una moneda equilibrada <u>tres</u> cops,** hem calculat probabilitats definint la variable aleatòria "número de cares". Vegem-ne algun indicador.

<u>Indicador de tendència central</u> esperança ...

com que

k	$p_X(k)$
0	**1/8**
1	**3/8**
2	**3/8**
3	**1/8**

llavors E(X)=

El podem comparar amb l'*<u>indicador de tendència central d'una mostra</u>:* mitjana d'unes dades mostrals recollides al realitzar repetidament l'experiència aleatòria (aplicant les eines d'Estadística Descriptiva que es treballen a laboratori).

Per exemple si recollim 8 realitzacions en dos estudiants (8 vegades llencen tres vegades la moneda i apunten el nombre de cares) i obtenim

estudiant1: 1 2 0 1 0 1 3 1 (en R: mean(c(1,2,0,1,0,1,3,1)) és)

estudiant2: 1 3 1 1 2 3 0 1 (en R: mean(c(1,3,1,1,2,3,0,1)) és)

EXERCICI: 3 bits

Considerem el conjunt de tots els paquets de 3 bits que es poden enviar per una línea de comunicació:
$\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

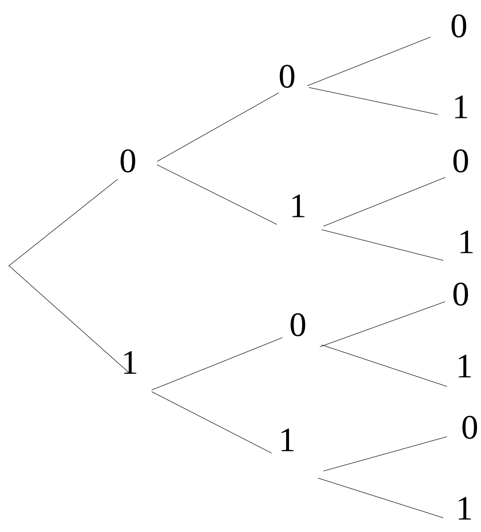
Suposem que totes les seqüències són equiprobables.

Es defineix dos variables aleatòries X i Y:
la variable X és la suma dels 3 bits, i
la variable Y és el número d'alternances en la seqüència de bits.

Per tant, $X \in \{0,1,2,3\}$ i $Y \in \{0,1,2\}$.

Definir la funció de probabilitat de les variables X i Y, i calcular els valors esperats.

EXERCICI: 3 bits



Possibilitats	X (suma)	Y (#alternances)
000	0	0
001	1	1
010	1	2
011	...	...
100	...	...
101	...	...
110	...	..
111	3	0

EXERCICI: 3 bits

P_X / k	$P_X(X=k)$
0	
1	
2	
3	

P_Y / k	$P_Y(Y=k)$
0	
1	
2	

E(Y)=

E(X)=

EXERCICI: Airport I (e-status)

Siguiendo con el ejemplo del aeropuerto, nos planteamos estudiar determinadas variables aleatorias para modelar y obtener información en diversos aspectos del funcionamiento de un aeropuerto.
En primer lugar, se ha establecido que la distribución de X (número de viajeros que llegan a un punto de facturación por minuto) es como sigue:

K	P(X=K)
5	0.12
6	0.32
7	0.48
8	0.08

Calcular la probabilidad de que
lleguen 7 viajeros:

lleguen menos de 7 viajeros:

lleguen más de 7 viajeros:

lleguen entre 7 y 8 viajeros:

Esperanza de X (valor esperado, media, de viajeros que llegan por minuto):

Varianza de X del número de viajeros que llegan en un minuto:

Desviación típica del número de viajeros que llegan en un minuto:

Por otra parte, cuando se ha estudiado el tiempo que un viajero permanece en el mostrador de facturación, se ha encontrado que la siguiente función

$$f_T(k) = 0.2\exp(-0.2k)$$

es un modelo adecuado para representar la variable aleatoria T de tiempo (en minutos).

Calcular la probabilidad de que
el tiempo sea de 7 minutos
el tiempo sea menos de 7 minutos
el tiempo sea más de 7 minutos
el tiempo sea entre 7 y 8 minutos

I cabe esperar que, en media, un viajero espere ..… minutos en el mostrador de facturación

Calculamos la esperanza:

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t \, \mathrm{f}_X(t) dt = \int_0^{\infty} t 0.2 e^{-0.2t} dt =$$

$$= uv - \int v du =$$

Por partes: $dv = 0.2e^{-0.2t}dt$

$u = t$

$(v = \int 0.2e^{-0.2t} = -e^{-0.2t})$

$(du = dt)$

PROBABILITATS ACUMULADES: “quantils”

Sigui X una variable aleatòria,
diem que x_α és el quantil α de X si es compleix: $F_X(x_\alpha) = \alpha \qquad (0 \le \alpha \le 1)$

Calcular un quantil és el problema invers al càlcul de probabilitats acumulades. Quantil seria la funció inversa de la funció de distribució.

L’equivalent mostral dóna lloc als quantils utilitzats en estadística descriptiva. Expressats en percentatge dóna lloc als percentils.

Exemples: el primer quartil(Q1) és el percentil 25, el tercer quartil(Q3) és el percentil 75, la mediana (Me) és el percentil 50

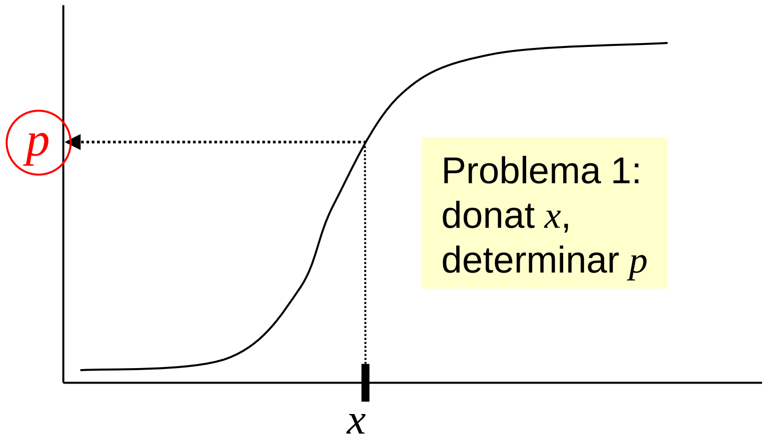
Exemple:

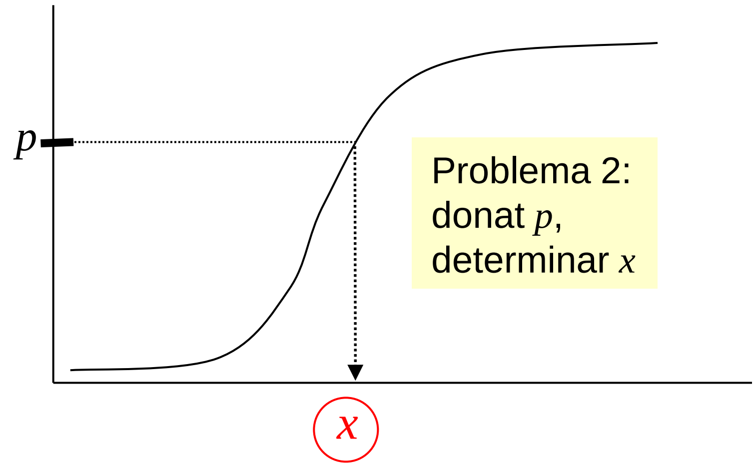
Id	Nota	alfa
AA	2.75	40.00
BB	4.25	66.67
CC	5.25	80.00
DD	0.25	13.33
EE	7.25	93.33
FF	3.50	53.33
GG	3.00	46.67
HH	3.75	60.00
II	9.00	100.00
JJ	1.50	26.67
KK	4.75	73.33
LL	0.00	6.67
MM	1.25	20.00
NN	2.75	40.00
ZZ	7.25	93.33

És habitual publicar llistes de qualificacions com percentils

(informen sobre el nivell aconseguit en relació a la resta del grup)

El cas de VAC, és habitual plantejar problemes en els dos sentits:





Donat ***x*** calcular la probabilitat ***p*** tq:

$$p = F_X(x) = P(X \le x)$$

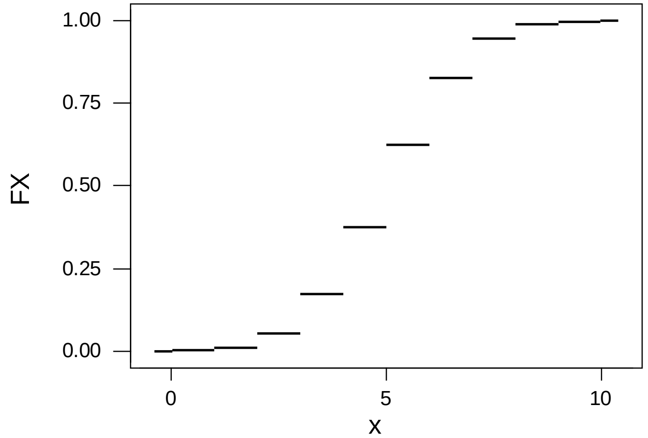
Donada una probabilitat ***p*** calcular ***x*** tq:

$$x = F_X^{-1}(p) \qquad (P(X \le x) = p)$$

Exemple: si els llits dels hotels mesuren 200 cm, quina proporció de congressistes poden dormir ben estirats?

Exemple: si desitgem que pugin dormir ben estirats el 98% dels congressistes, quina longitud han de tenir els llits?

El cas de VAD la solució pot ser aproximada:

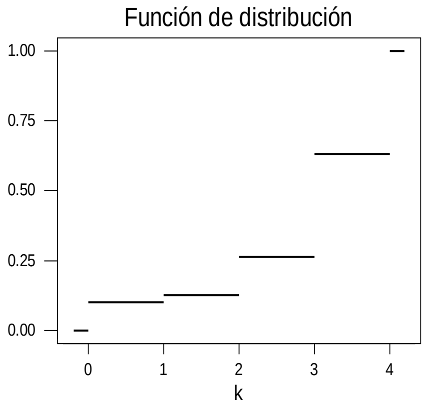


Exemple

Quin és el quantil de 0,25?
(o quin *és el percentil* 25?,
o del 25%)

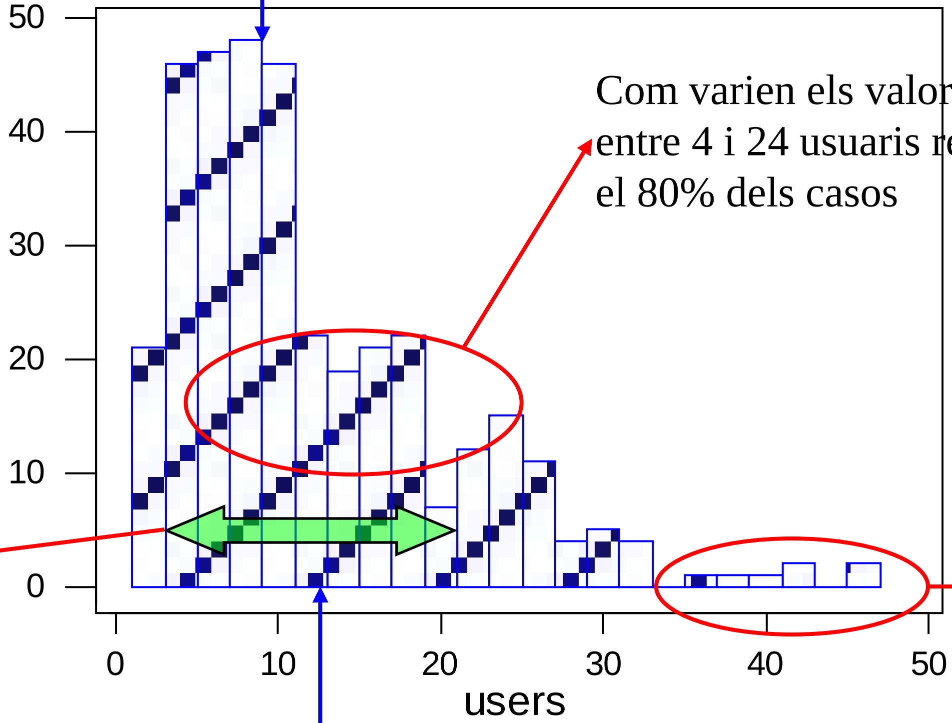
3 és el valor on es troba una probabilitat de 0,25

k	$F_X(k)$
$(-\infty,0)$	0.00000
[0,1)	0.10144
[1,2)	0.12448
[2,3)	0.26272
[3,4)	0.63136
$[4,+\infty)$	1.00000



L'exemple mostral del número d'usuaris d'un sistema:

El 50% dels casos hi ha com a molt 9 usuaris en el sistema



Com varien els valors usuals: entre 4 i 24 usuaris representen el 80% dels casos

La desviació típica és d'uns 8.5 usuaris

Un 2% dels casos correspon a més de 35 usuaris

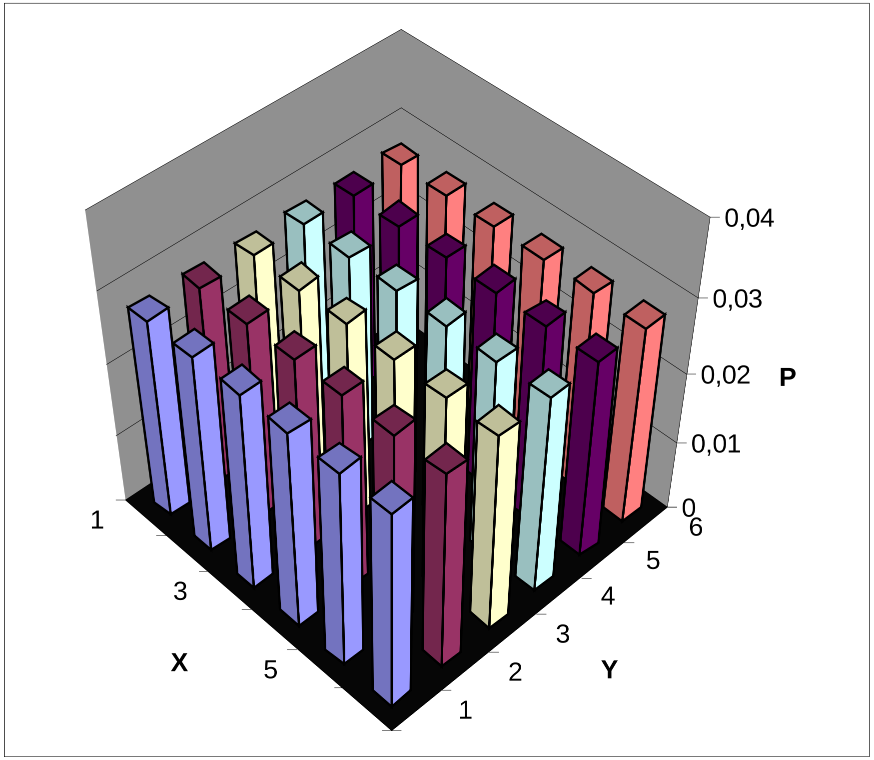
La carga promig és de 11.5 usuaris

PARELL DE VARIABLES (VAD)

Quan d'una experiència s'obté dos variables *X* i *Y*, quines relacions aleatòries es duen a terme entre elles?

Per exemple, llancem dues vegades un dau equilibrat, i anomenem *X* al primer resultat i *Y* al segon.

Raonablement, els dos llançaments són independents, llavors $P(X=x \cap Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$, per x, y = 1, 2, …, 6.



Definim funció de probabilitat conjunta de X i Y:

$$P_{X,Y}(x,y)=P(X=x \cap Y=y)$$

[evidentment, $\{X=x\} \cap \{Y=y\}$ és un succés]

Si $\{X=x\}$ és independent de $\{Y=y\}$ per a tots els parells (x,y) es pot aplicar la descomposició en dos factors: $P_{X,Y}(x,y)=P(X=x)P(Y=y)$

De l'experiència anterior, definim $S=X+Y$, $D=|X-Y|$.

X + Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

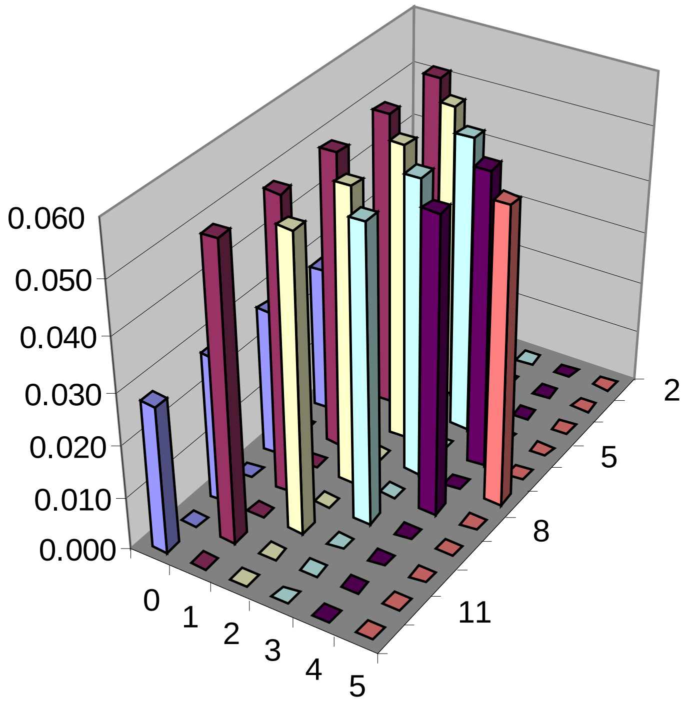
|X - Y|	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Les corresponents funcions de probabilitat

k	P_S(k)		k	P_D(k)
2	0.028		0	0.167
3	0.056		1	0.278
4	0.083		2	0.222
5	0.111		3	0.167
6	0.139		4	0.111
7	0.167		5	0.056
8	0.139			
9	0.111			
10	0.083			
11	0.056			
12	0.028			

A continuació, s’ha de trobar la funció P(S=s ∩ D=d), buscant els resultats coincidents.

	0	1	2	3	4	5	
2	**0.028**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.028
3	0.000	**0.056**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.056
4	**0.028**	0.000	**0.056**	0.000	0.000	0.000	0.083
5	0.000	**0.056**	0.000	**0.056**	0.000	0.000	0.111
6	**0.028**	0.000	**0.056**	0.000	**0.056**	0.000	0.139
7	0.000	**0.056**	0.000	**0.056**	0.000	**0.056**	0.167
8	**0.028**	0.000	**0.056**	0.000	**0.056**	0.000	0.139
9	0.000	**0.056**	0.000	**0.056**	0.000	0.000	0.111
10	**0.028**	0.000	**0.056**	0.000	0.000	0.000	0.083
11	0.000	**0.056**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.056
12	**0.028**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.028
	0.167	0.278	0.222	0.167	0.111	0.056	1



Quan S=12 i D=0? Sols si X=6 i Y=6 (probabilitat=1/36)

Quan S=9 i D=3? Quan X=6 i Y=3, o si X=3 i Y=6 (1/36 + 1/36=1/18)

Quan S=7 i D=4? No existeix un resultat on es pugui produir aquesta combinació (0)

Definim la funció de probabilitat de X condicionada per Y:

$$P_{X|Y=y}(x) = P_{X,Y}(x,y)/ P_Y(y).$$

Direm que X i Y són V.A. independents $\Leftrightarrow$

$P_{X,Y}(x,y)= P_X(x)\cdot P_Y(y) \quad \Leftrightarrow \quad P_{X|Y=y}(x)= P_X(x) \quad \Leftrightarrow \quad P_{Y|X=x}(y)= P_Y(y).$

Exemple. Són independents *S* i *D*?

k	P_S|D=1(k)	k	P_S|D=4(k)
2	0	2	0
3	0.2	3	0
4	0	4	0
5	0.2	5	0
6	0	6	0.5
7	0.2	7	0
8	0	8	0.5
9	0.2	9	0
10	0	10	0
11	0.2	11	0
12	0	12	0

k	P_D|S=4(k)	k	P_D|S=7(k)
0	0.3333333	0	0
1	0	1	0.3333333
2	0.6666667	2	0
3	0	3	0.3333333
4	0	4	0
5	0	5	0.3333333

Observem que passa amb $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\sigma}$ per la variable *S* quan està condicionada amb *D* (parlem llavors d'*esperances* i *variàncies condicionades* perquè utilitzem $P_{X|Y=y}(x)$ en lloc de $P_X(x)$):

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2	0.167	0	0	0	0	0
3	0	0.2	0	0	0	0
4	0.167	0	0.25	0	0	0
5	0	0.2	0	0.33	0	0
6	0.167	0	0.25	0	0.5	0
7	0	0.2	0	0.33	0	1
8	0.167	0	0.25	0	0.5	0
9	0	0.2	0	0.33	0	0
10	0.167	0	0.25	0	0	0
11	0	0.2	0	0	0	0
12	0.167	0	0	0	0	0
μ	7	7	7	7	7	7
σ	3.42	2.8	2.2	1.6	1	0

Sabem que *D*=0, la suma de les dades té un valor esperat de 7, i una desviació estàndard de 3.42 (gran dispersió).

Observem que a mesura que *D* creix, el valor esperat es manté, però la desviació disminueix, ja que la probabilitat es concentra al voltant del valor 7.

(es pot realitzar *D* condicionada amb *S*)

EXERCICI: 3 bits

En l'exemple anterior dels paquets de 3 bits que es poden enviar a través d'una línea de comunicació (Ω = {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111})
amb les variables aleatòries X i Y (suma dels 3 bits i número d'alternances en la seqüència de bits, rspectivament)
Construir la taula amb la funció de probabilitat conjunta de les variables X i Y, a partir de:

Possibilitats	X (suma)	Y (#alternances)
000		
001		
010		
011		
100		
101		
110		
111		

P_{YX}	*X=0*	*X=1*	*X=2*	*X=3*	
Y=0	...	...	...	...	...
Y=1	...	...	...	...	...
Y=2	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	

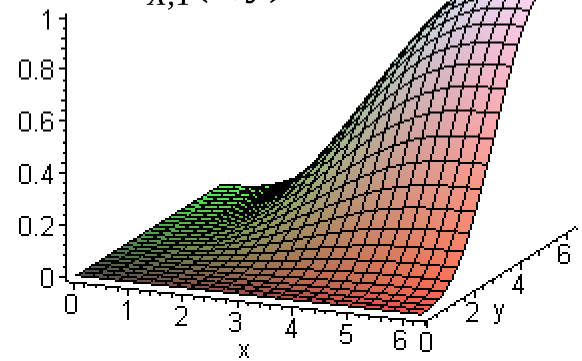
PARELL DE VARIABLES (VAC)

I quan tenim dos variables VAC ?

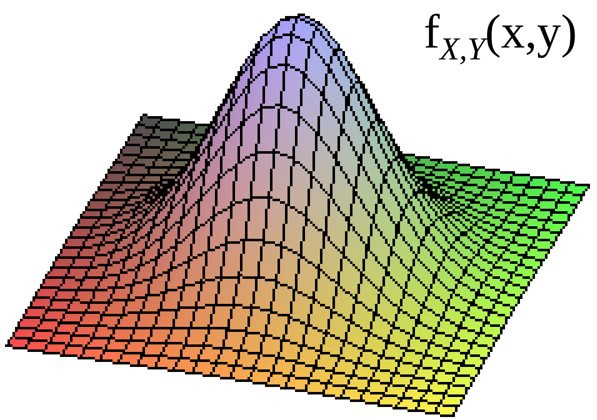
En cas de que existeixin dos variables contínues X i Y en la mateixa experiència, la relació comuna es reflecteix a través de la funció de densitat conjunta, $f_{X,Y}(x,y)$.

- Sigui $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$, *funció de distribució conjunta* de les variables aleatòries
- Si derivem $F_{X,Y}(x,y)$ respecte a les variables (x i y), obtenim $f_{X,Y}(x,y)$
- La definició de funcions condicionades és idéntica per a V.A.D: $f_{X|Y=y}(x) = f_{X,Y}(x,y) / f_Y(y)$
- El volum total tancat sota $f_{X,Y}(x,y)$ és igual a 1, i una porció d'ell equival a una probabilitat

$F_{X,Y}(x,y)$



$f_{X,Y}(x,y)$



INDICADORS parell VA: Covariància i correlació

A partir d'un parell de variables *X* i *Y* definim indicadors de la seva relació bivariant (també equivalents als mostrals que es veuen a EDBivariant a laboratori)

La covariància indica si existeix relació lineal o no, a partir del producte, per cada parell de valors, de la diferència respecte al seu valor esperat

La correlació indica si existeix relació lineal o no relativitzant-ho a valors entre -1 i 1 (a partir de la covariància i dividint per les desviacions corresponents)

Covariància X Y

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{\forall x}\sum_{\forall y}(x - E(X))(y - E(Y))\, p_{XY}(x,y)$$

en VAD

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \iint_{\forall x,y}(x - E(X))(y - E(Y))\, \mathrm{f}_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

en VAC

Correlació X Y

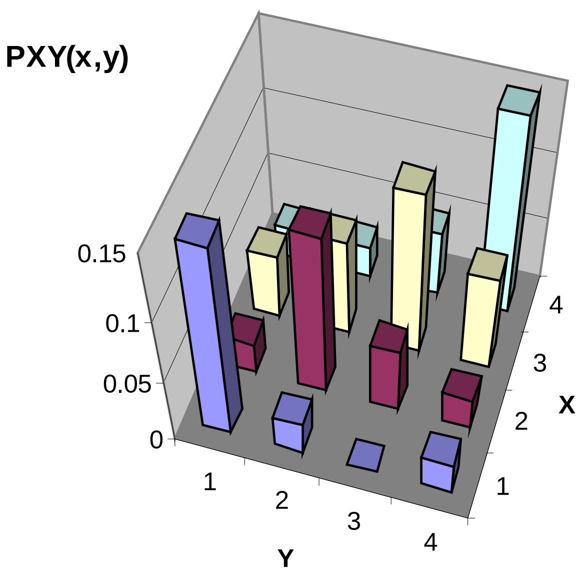
$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \rho_{X,Y} = \mathrm{Cov}(X,Y) / \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

(per qualsevol parell de variables *X* i *Y* : $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$)

EXEMPLE:

X \ Y	1	2	3	4	
1	0.15	0.025	0	0.025	0.2
2	0.025	0.125	0.05	0.025	0.225
3	0.05	0.075	0.125	0.075	0.325
4	0.025	0.025	0.05	0.15	0.25
	0.25	0.25	0.225	0.275	1

Suposem dos variables *X* i *Y* que presenten la funció $P_{X,Y}(x,y)$ anterior.
Veiem que:
$\mu_X = 2.625$ $\sigma_X = 1.065$
$\mu_Y = 2.525$ $\sigma_Y = 1.140$



Alerta amb la relació entre les variables: en general, el valor de Y és de la magnitud de *X*, hi ha una *relació directa*, encara que no sigui determinista (com diríem si fos *Y* = *X*)

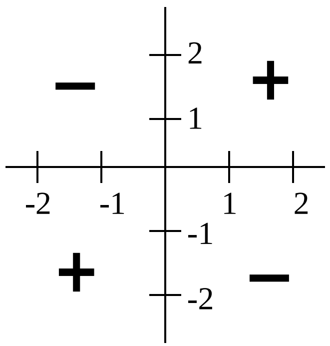
Calculem:

covariància, **Cov(*X,Y*) = 0,647**

(pot donar idea de relació positiva)

correlació, $\boldsymbol{\rho_{X,Y}}$ **= 0,533**
(indica relació positiva ja que l'indicador pot valer entre -1 i 1)

Si una variable té $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ es diu que és una variable *centrada* i *reduïda* (és a dir, estem centrant i reduint *X* i *Y*). D'aquesta manera, la correlació ve estandaritzada entre -1 i 1.



Aquests quadrants indiquen el signe del producte resultant. Si la probabilitat es reparteix preferentment entre els quadrants positius, la relació entre *X* i *Y* és *directa*. En cas contrari la relació és *inversa* (si *X* augmenta, *Y* tendeix a disminuir).

- Si $|\rho_{X,Y}|=1$, la relació és total i lineal: $Y = a+b\cdot X$ (signe $\rho_{X,Y}$=signe b)
- $|\rho_{X,Y}|$ a prop de 1 $\Rightarrow$ *X* i *Y* estan molt relacionades
- *X* i *Y* independents $\Rightarrow$ $\rho_{X,Y}=0$, però a la inversa no és cert
- La magnitud de la covariància esta en funció de les variables

EXERCICI: Memòria d'un ordinador i bloquejos mensuals

	0	1	2	3	4	5
64	0	0.02	0.03	0.05	0.06	0.08
96	0	0.015	0.015	0.035	0.045	0.03
128	0	0.03	0.06	0.05	0.03	0.03
192	0.06	0.05	0.045	0.03	0.03	0
256	0.1	0.075	0.03	0	0	0

k	**P_M(k)**
64	0.24
96	0.14
128	0.20
192	0.215
256	0.205

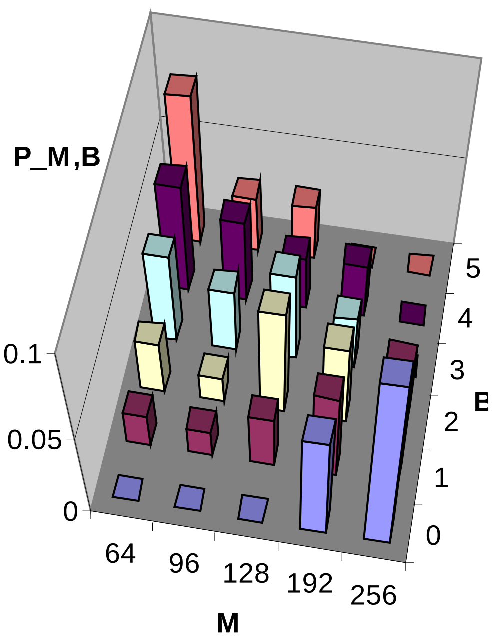
k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
P_B(k)	0.16	0.19	0.18	0.165	0.165	0.14

Distribucions conjuntes i marginals de M i B.

- representar $P_{M\,|\,B=3}()$ i $P_{M\,|\,B=4}()$. Que es dedueix d'això?
- representar $P_{B\,|\,M=96}()$ i $P_{B\,|\,M=192}()$. Que es dedueix d'això?
- prob. de que un ordenador tingui menys de 128 MB i més de 2 bloquejos
- prob. de que tingui més de 2 bloquejos si té menys de 128 MB
- prob. de que tingui més de 128 MB si ha tingut menys de 2 bloquejos

En mitjana, els ordinadors tractats tenen una memòria de MB, i han patit una mitjana de bloquejos mensuals. La distribució és bastant uniforme, amb desviacions estàndards de MB i b/m.

Les dues variables no són independents, la funció $P_{M,B}()$ mostra una clara relació inversa (com més memòria, menys bloquejos):



Cov(*M,B*) = (si les unitats de *M* fossin kilobytes, el resultat seria)

Corr(*M,B*) = $\rho_{M,B}$ = (no afecten els canvis d'escala)

Si $|\rho_{X,Y}|$ és alta, la variabilitat de *B* condicionada amb *M* és sensiblement menor que la global de *B*.

PROPIETATS DELS INDICADORS

- $E(a+b\cdot X) = a+b\cdot E(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y) + Cov(X,Y)$
- $V(a+b\cdot X) = b^2\cdot V(X)$
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\cdot Cov(X,Y)$
- $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\cdot Cov(X,Y)$
- $Cov(a\cdot X,b\cdot Y) = a\cdot b\cdot Cov(X,Y)$
- $Cov(X,X) = V(X)$

Si X i Y són independents $\Rightarrow$

- $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$
- $V(X\pm Y) = V(X) + V(Y)$

$E(X) = \mu_X$

$V(X) = \sigma_X^2$

a, b són escalars

X, Y són variables aleatòries

MODELS TEÒRICS DE DISTRIBUCIONS de VA

Són models teòrics generals aplicables a una variable aleatòria.

El més senzill és el model de Bernoulli:

k	$P_X(k)$
0	$1-p=q$
1	p

Els valors "0" i "1" tenen un sentit ampli: "1" pot significar *encert*, *èxit*, *positiu*; "0", *error*, *fracàs*, *negatiu*. El paràmetre p és la probabilitat d'observar un èxit.

Per repetició de proves independents (procés de Bernoulli), es deriven altres distribucions interessants:

- **sobre *n* proves, número d'èxits totals (dist. Binomial)**
- núm. d'intents fins observar el primer èxit (dist. geomètrica)
- núm. d'intents fins observar el r-èssim èxit (dist. binomial negativa)
- **fenòmens estranys (dist. de Poisson)**

Esperança i variància per alguns models

Distribució	*Declaració*	**Funció de probabilitat o de densitat**	**Funció de distribució**	**Esperança**	**Variància**	*(valors)*
Bernoulli	X~Bern(p)			**p**	**p q**	*(0,1)*
Geomètrica	X~Geom(p)					
Binomial	**X~B(n,p)**		taules estadístiques	**n p**	**n p q**	*(0,1,2,…n)*
Binomial negativa	X~BN(r,p)					
Poisson	**X~P(λ)**		taules estadístiques	λ	λ	*(0,1,2,..)*
Exponencial	X~Exp(λ)					
Uniforme	X~U[a,b]					
Normal	X~N(μ,σ)		taules estadístiques			

$0 < p < 1$; $q = 1 - p$; n enter > 0; r enter > 0; λ real > 0.0 (paràmetre procés de Poisson)

EXERCICI: moneda

Experiència aleatòria de **llençar una moneda n cops.**

Començant per n=3, determinarem l'arbre i considerarem la variable "número de cares en els n llançaments" (o "número de creus en els n llançaments") i les seves probabilitats.

Generalitzarem a n, comprovant que és un model Binomial

n=3

P(o) = 1/2 = p **P(+) = 1/2 = (1-p) = q**

(o,o,o) = w1	P(w1) = 1/8	$p^3\ q^0$
(o,o,+) = w2	P(w2) = 1/8	$p^2\ q^1$
(o,+,o) = w3	P(w3) = 1/8	$p^2\ q^1$
(o,+,+) = w4	P(w4) = 1/8	$p^1\ q^2$
(+,o,o) = w5	P(w5) = 1/8	$p^2\ q^1$
(+,o,+) = w6	P(w6) = 1/8	$p^1\ q^2$
(+,+,o) = w7	P(w7) = 1/8	$p^1\ q^2$
(+,+,+) = w8	P(w8) = 1/8	$p^0\ q^3$

X = número de "o" (cares)

	k	$p_X(k)$	
0 cares (3 +)	0	**1/8**	$\binom{3}{0} p^0\ q^{3-0}$
1 cara (2 +)	1	**3/8**	$\binom{3}{1} p^1\ q^{3-1}$
2 cares (1 +)	2	**3/8**	$\binom{3}{2} p^2\ q^{3-2}$
3 cares (0 +)	3	**1/8**	$\binom{3}{3} p^3\ q^{3-3}$

n=4

$(o,o,o,o) = w1$ $\quad p^4\ q^0$

$(o,o,o,+) = w2$ $\quad p^3\ q^1$

$(+,+,+,+) = w16$ $\quad p^0\ q^4$

P(o) = p **P(+) = (1-p) = q**

X = número de "o" (cares)

	k	$p_X(k)$
0 cares (4 +)	0	$\binom{4}{0}$ $p^0\ q^{4-0}$
1 cara (3 +)	1	$\binom{4}{1}$ $p^1\ q^{4-1}$
...	...	
4 cares (0 +)	4	$\binom{4}{4}$ $p^4\ q^{4-4}$

n

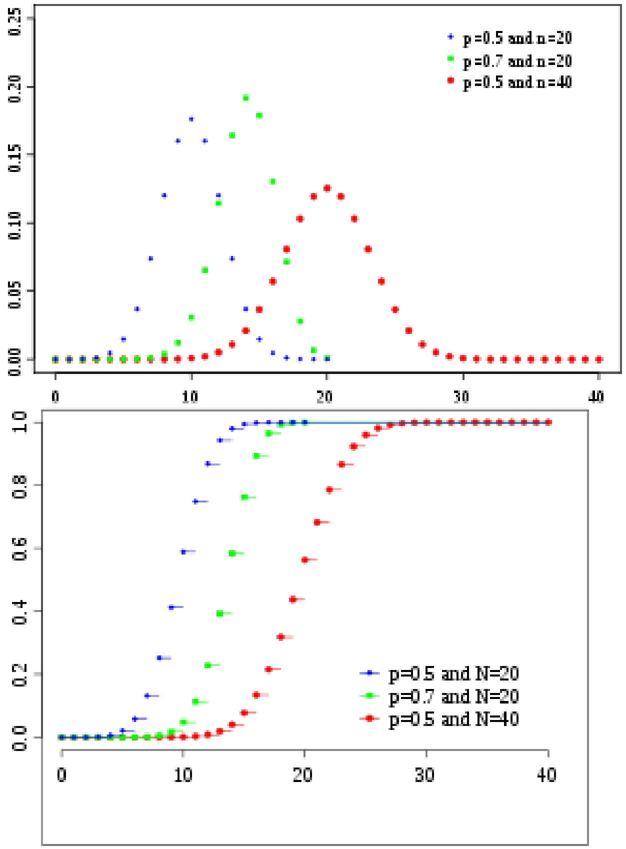
P(o) = p **P(+) = (1-p) = q**

X = número de "o" (cares)

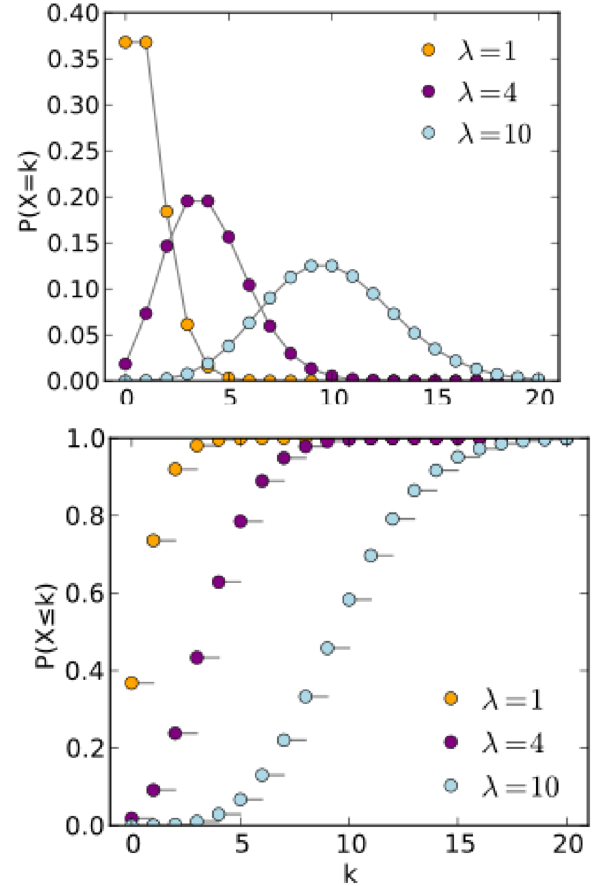
$$P(X=k)=$$

El model BINOMIAL i el model POISSON

Binomial distribution (wikipedia):

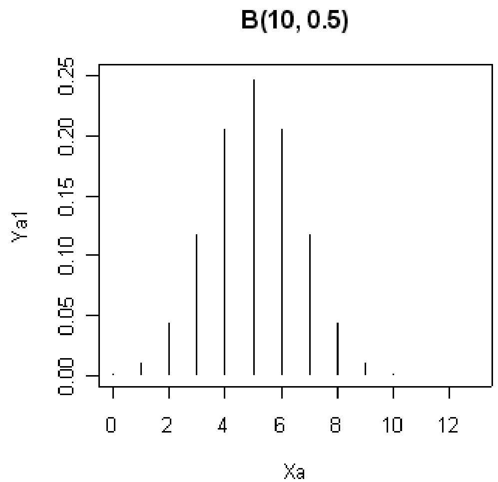


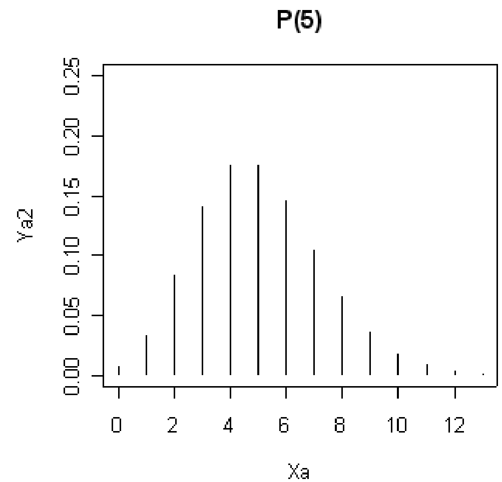
Poisson distribution (wikipedia):

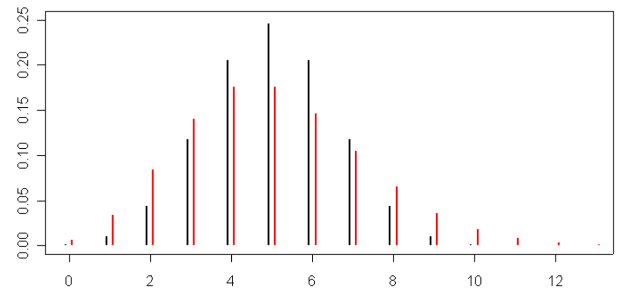


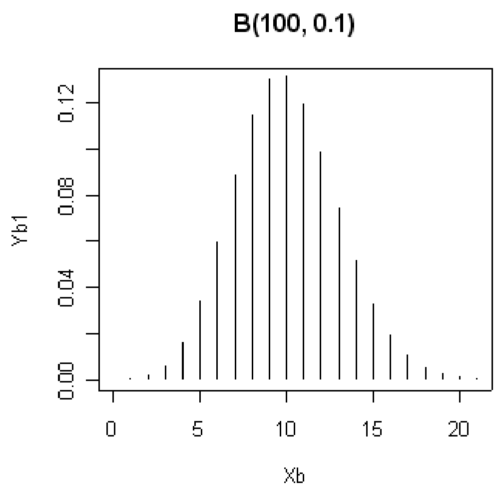
The **binomial distribution** converges towards the **Poisson distribution** as the number of trials goes to infinity while the product *np* remains fixed. Therefore the Poisson distribution with parameter $\lambda = np$ can be used as an approximation to B(n, p) of the binomial distribution if n is sufficiently large and p is sufficiently small. According to two rules of thumb, this approximation is good if $n \geq 20$ and $p \leq 0.05$, or if $n \geq 100$ and $np \leq 10$

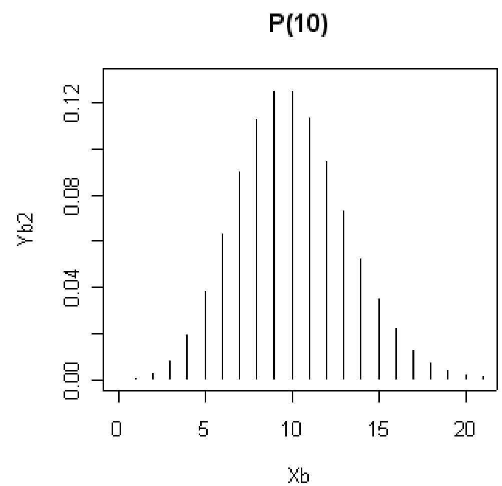
El model BINOMIAL i el model POISSON

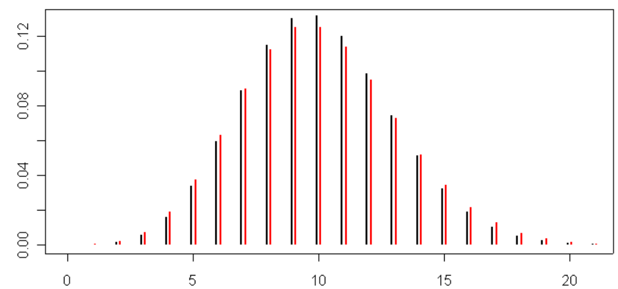












EXERCICI: Airport II (e-status)

En un aeroport, els passatgers obtenen la seva targeta d'embarcació en els punts de facturació. L'arribada de passatgers es produeix d'acord amb un procés aleatori, ja que no és previsible saber quan es produeix la pròxima arribada, o quants passatgers venen en un interval determinat.

S'ha comprovat que, per un passatger, la probabilitat de trobar cua en facturació és 0.278. Per altra banda, la probabilitat de que un passatger no ha de facturar perquè sols porta equipatge de mà és 0.559; a més, es sap que el 20.1% dels passatgers que no porten equipatge per facturar troben cua quan van a recollir la seva targeta d'embarcació.

Definirem les variables discretes X = "0 si no troba cua en facturació; 1 si troba", i Y = "0 si sols porta equipatge de mà; 1 si porta equipatge per facturar".

1. Quina és la funció de probabilitat conjunta de X i Y?

2. Determinat punt de facturació es caracteritza perquè el número de viatgers que arriben per minut es distribueix segons una llei Poisson amb una taxa d'arribades de 1.8. Indica l'esperança i la desviació estàndard d'aquesta variable.

3. Considerant els mostradors de facturació del 1 al 14 caracteritzats per una probabilitat 0.18 d'observar exactament 0 arribades en un minut, indiqui l'esperança i la variància de la variable *número de punts de facturació amb 0 arribades en un minut donat*.

4. Si considerem els 160 mostradors de facturació d'una terminal caracteritzats per una probabilitat 0.0075 d'observar més de 3 arribades en un minut, trobar l'esperança i la variància de la variable *número de punts de facturació amb més de 3 arribades en un minut*, utilitzant el model Binomial.

5. I si utilitzéssim un model Poisson?