

1 Sac à dos disjonctif

On s'intéresse au problème du sac à dos disjonctif. On dispose de n objets indicés de 1 à n . On note $I = \{1, \dots, n\}$. Chaque objet a une taille c_i , et un profit p_i . La taille du sac à dos est C . On dispose en plus d'un graph (I, E) qui représente des conflits entre objets. Si $(i, j) \in E$ alors on ne peut pas sélectionner i et j dans une solution. Le problème peut se modéliser de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1, \dots, n} p_i x_i \\ & \sum_{i=1, \dots, n} c_i x_i \leq C, \\ & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall (i, j) \in E \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Question 1. Implémentez ce modèle dans le solveur de votre choix.

2 Relaxation lagrangienne

Pour cette section, on pourra résoudre les sous-problème à l'aide de la programmation linéaire.

Question 2. Ecrivez le modèle obtenu si on applique la relaxation lagrangienne à la contrainte de sac à dos.

Question 3. Implémentez un modèle pour résoudre le problème à multiplicateurs fixés. Vous pouvez utiliser un solveur de programmation linéaire en nombres entiers.

Question 4. Implémentez un algorithme pour résoudre le problème dual lagrangien associé. Indice : il n'y a qu'un multiplicateur.

Question 5. Ecrivez le modèle obtenu si on applique la relaxation lagrangienne aux contraintes de conflit.

Question 6. Implémentez un modèle pour résoudre le problème à multiplicateurs fixés. Vous pouvez utiliser un solveur.

Question 7. Implémentez l'algorithme des sous-gradients pour résoudre le problème dual lagrangien associé.

Question 8. Comparez les valeurs des deux relaxations avec l'optimum obtenu par le modèle initial.

3 Programmation dynamique

Question 9. Dans la relaxation lagrangienne des contraintes de conflit, remplacez le programme linéaire pour le sac à dos par un programme dynamique que vous implémenterez avec un tableau à deux dimensions.

On notera que dans ce cas de figure, il faut reconstruire le tableau pour chaque nouvel ensemble de multiplicateurs.

Question 10. Bonus. Implémentez votre programme dynamique sous la forme d'un graphe, où seuls les coûts des arcs sont modifiés à chaque étape.