Crashkurs 3D-Transformationen

universitätbonn

3D Vektoren

- **3D Vektoren** bestehen aus 3 reellen Zahlen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

z.B. $$\begin{pmatrix} 0{,}537 \\ 1/3 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

- Wir unterscheiden
  - Ortsvektoren (Positionen)
  - Richtungsvektoren

universitätbonn

3D Vektorrechnung

- **Addition** von 2 Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

- **Subtraktion** analog!

z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

3D Vektorrechnung (2)

- **Multiplikation** mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

$$\lambda \, \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \, a_x \\ \lambda \, a_y \\ \lambda \, a_z \end{pmatrix}$$

z.B. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4,5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt

- Definition **Skalarprodukt**:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Ergebnis ist eine reele Zahl (Skalar)!

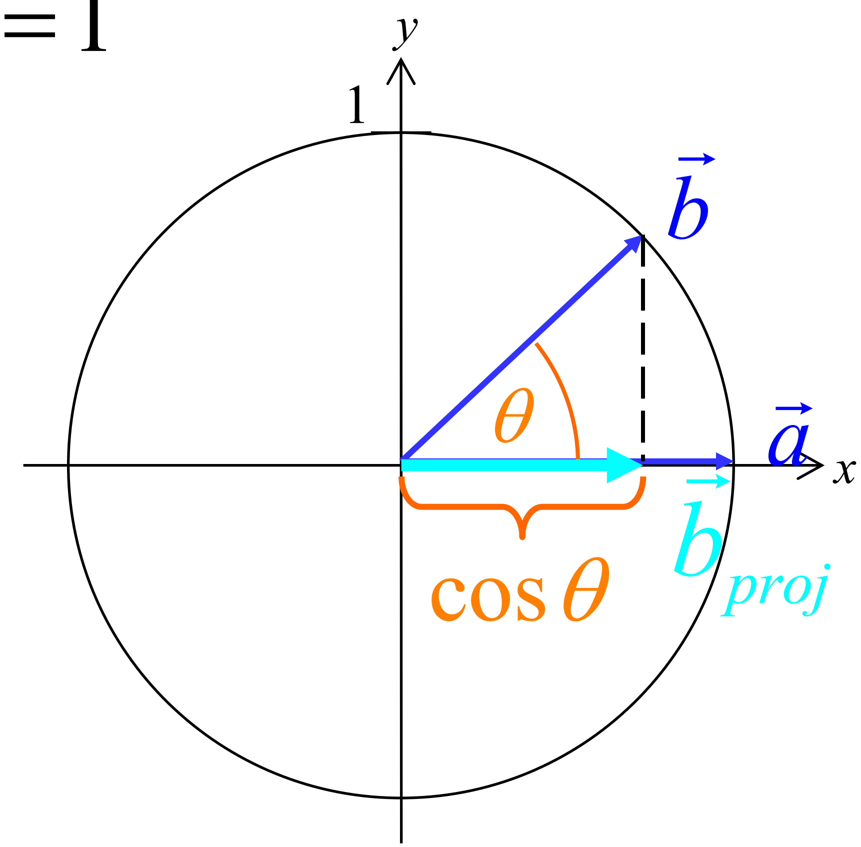
Skalarprodukt Anschauung

- Wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Länge 1 haben, d.h.

$$|\vec{a}| = 1, \ |\vec{b}| = 1$$

dann gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\theta$$



- **Projektion** von b auf a

$$\vec{b}_{proj} = \cos\theta \, \vec{a}$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{b}) \, \vec{a}$$

Skalarprodukt! Skalare Multiplikation!

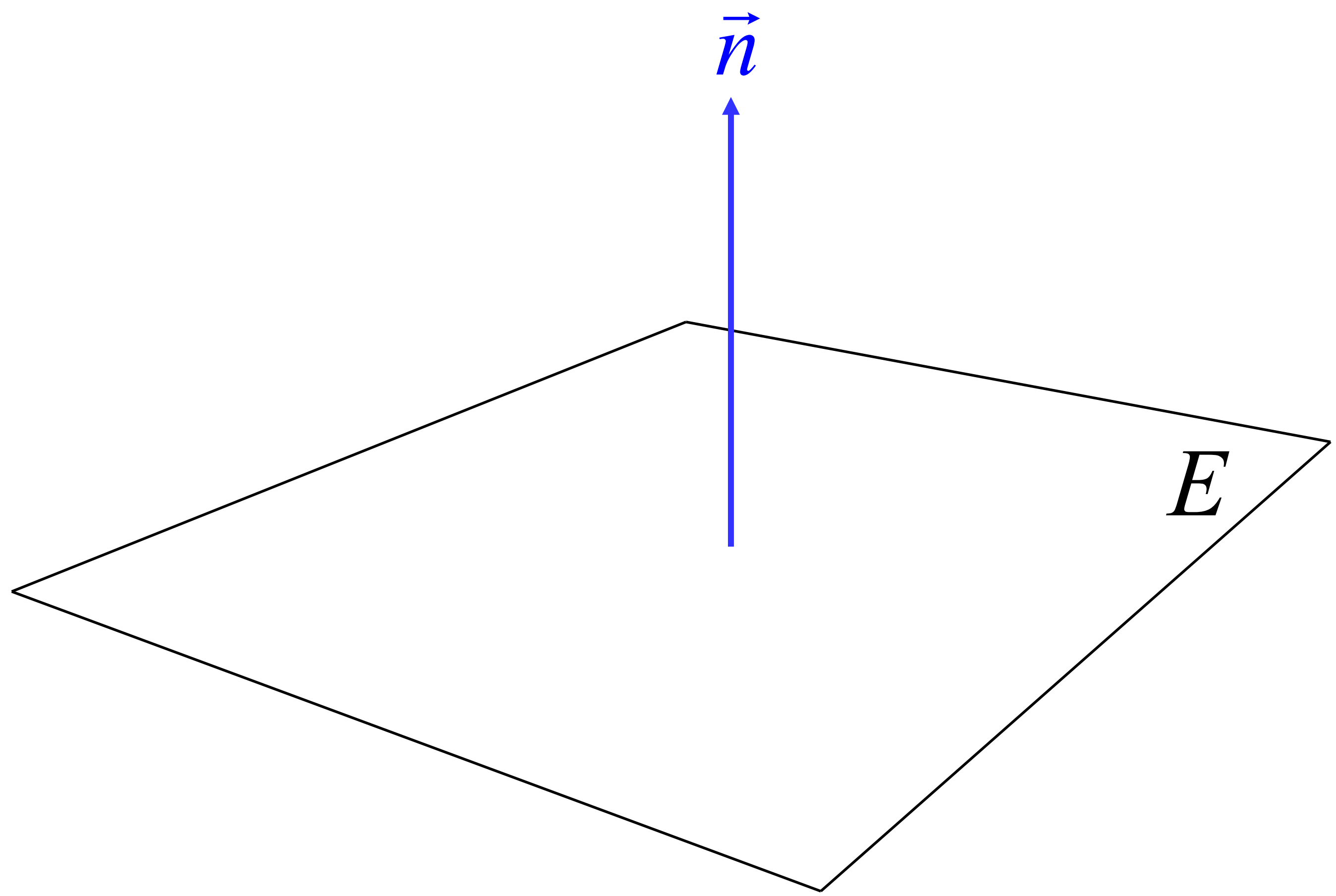
Skalarprodukt Anschauung (2)

- Im allgemeinen gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

Ebene und Normale

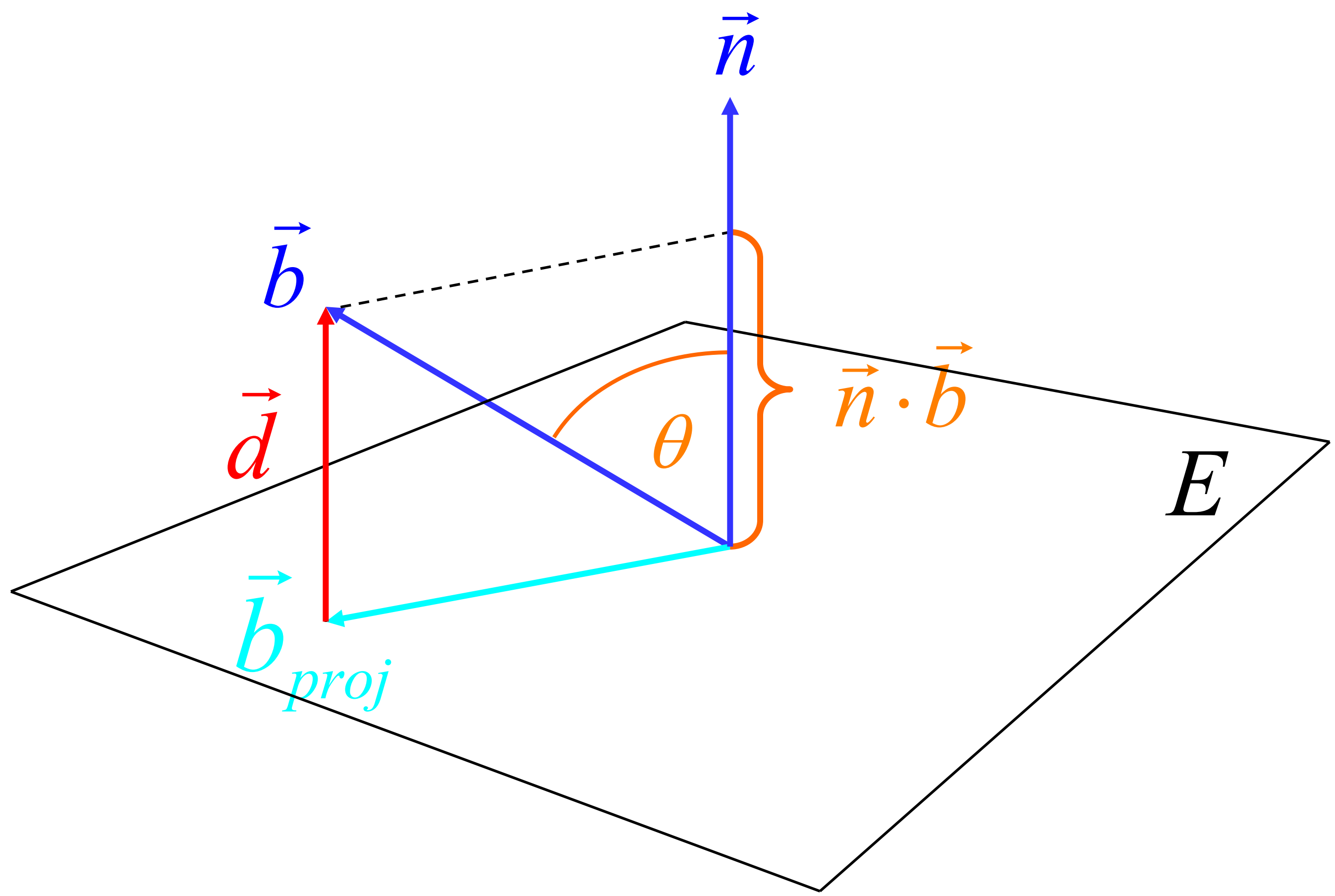
- Für eine Ebene E ist die **Normale** $\vec{n}$ der Richtungsvektor, der auf der Ebene senkrecht steht



Projektion auf Ebene

- Berechne Differenzvektor zwischen $\vec{b}$ und $\vec{b}_{proj}$ durch Projektion auf Normale

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{b}_{proj}$$
$$= (\vec{n} \cdot \vec{b})\, \vec{n}$$



- Projektionsformel

$$\vec{b}_{proj} = \vec{b} - \vec{d} = \vec{b} - (\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{n}$$

(Kurz durchatmen;-)

3x3 Matrizen

- **3x3 Matrizen** bestehen aus 3x3 reellen Zahlen

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x3}$$

Matrix-Vektor-Multiplikation

- Multiplikation einer Matrix M mit einem Vektor v

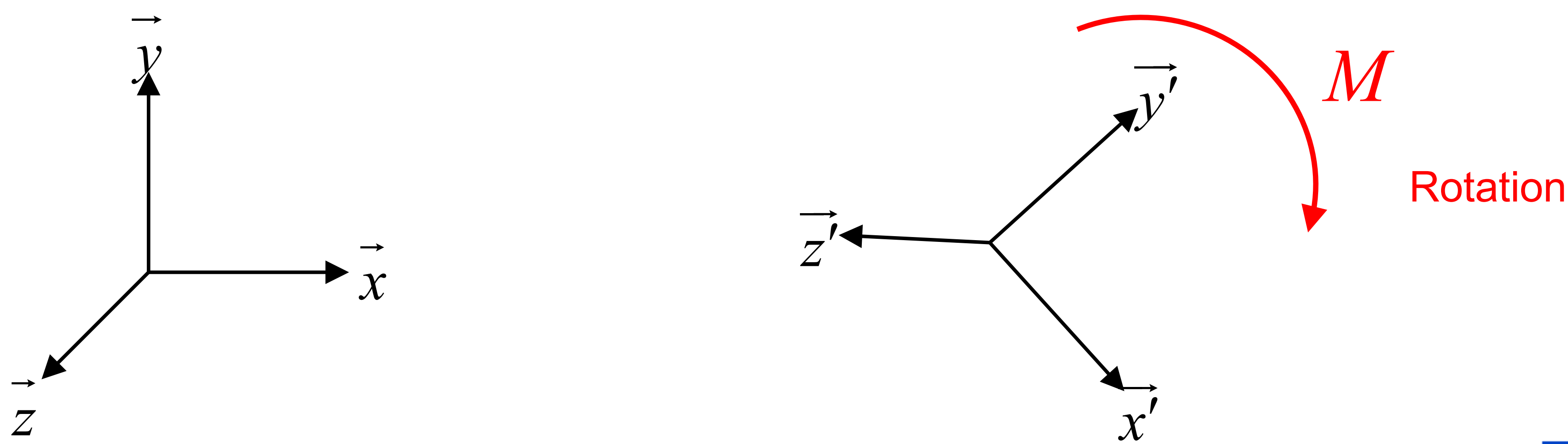
$$\begin{array}{ccccc} & \vec{m}_1 & \vec{v} & & \vec{m}_1 \cdot \vec{v} \\ M\,\vec{v} = & \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} m_{11}v_x + m_{12}v_y + m_{13}v_z \\ m_{21}v_x + m_{22}v_y + m_{23}v_z \\ m_{31}v_x + m_{32}v_y + m_{33}v_z \end{pmatrix} \end{array}$$

- Fasst man die Zeilen der Matrix als Vektoren auf, dann entsprechen die Komponenten des Ergebnisses dem Skalarprodukt der Zeilenvektoren mit dem Vektor v.

Was macht die Matrix mit dem Vektor?

$$M\vec{v} = \vec{w}$$

- Die Matrix M kann den Vektor v
  - **Rotieren** (z.B. w ist v rotiert um 30° um die y-Achse) und/oder
  - **Skalieren** (z.B. w ist 2,5-mal so groß wie v) und/oder
  - Scheren
  - ...oder überhaupt nicht verändern (**Identitätsmatrix**)

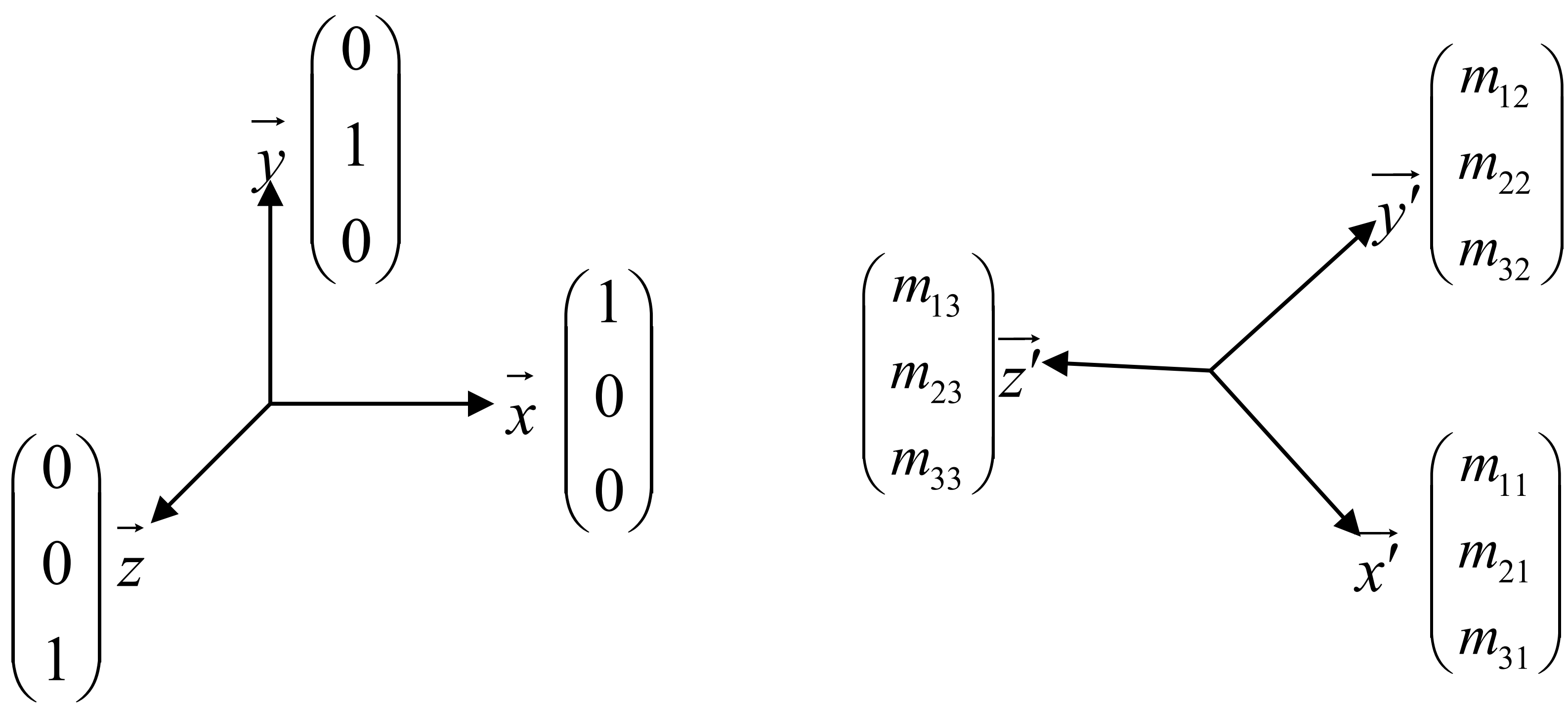


universität bonn

Was macht die Matrix mit dem Vektor?

- Was macht die Matrix mit dem Koordinatensystem?

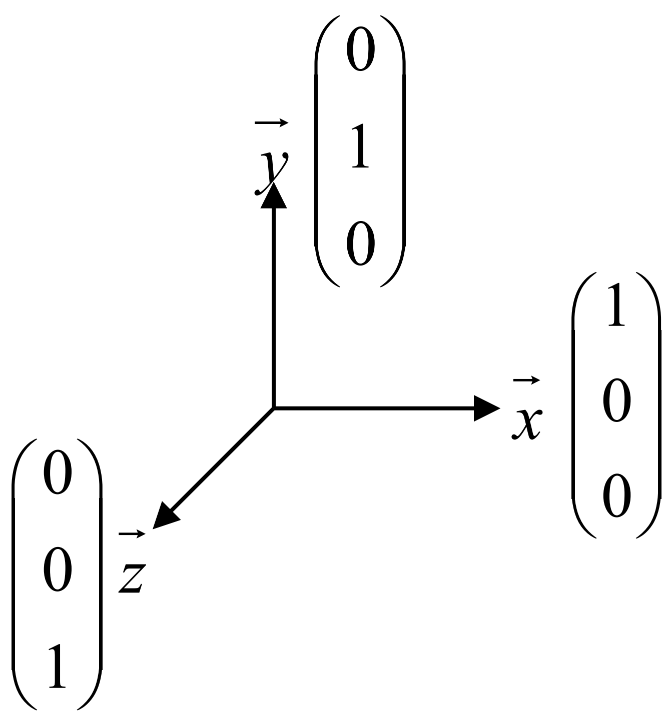
$$M\,\vec{v} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}1 + m_{12}0 + m_{13}0 \\ m_{21}1 + m_{22}0 + m_{23}0 \\ m_{31}1 + m_{32}0 + m_{33}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$$

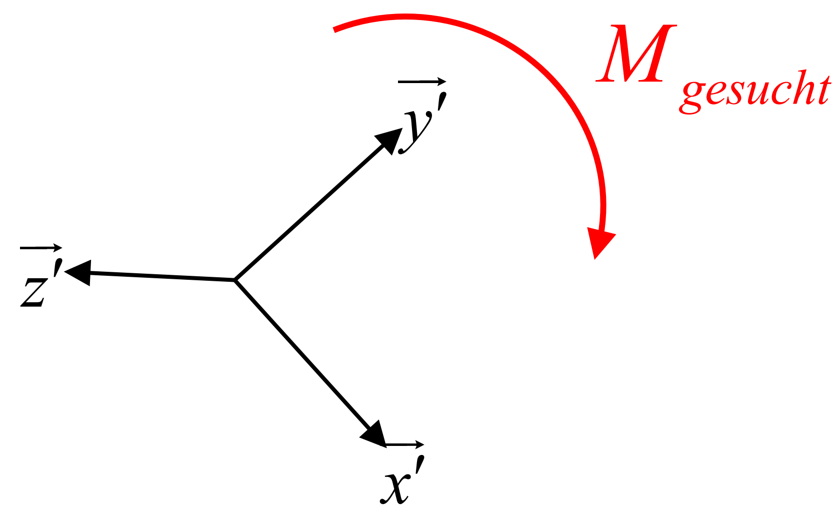


Was macht die Matrix mit dem Vektor?

- Wie findet man jetzt die Matrix M wenn die Achsen des Zielkoordinatensystems bekannt sind?
- Einfach die Achsenrichtungen als Spalten eintragen!

$$M_{gesucht} = \begin{pmatrix} \boxed{\overrightarrow{x'}} & \boxed{\overrightarrow{y'}} & \boxed{\overrightarrow{z'}} \end{pmatrix}$$

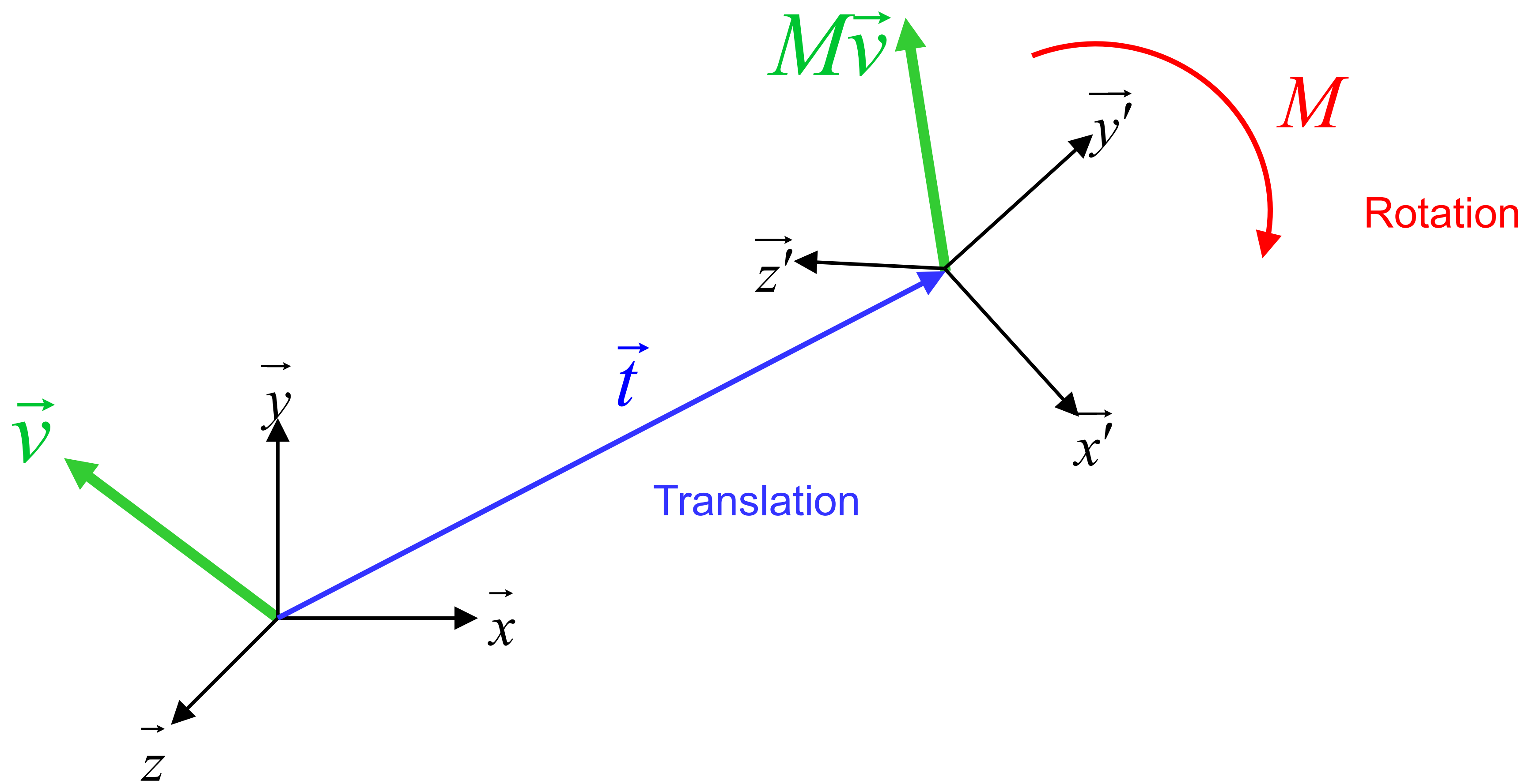




Was macht die Matrix mit dem Vektor?

- Um den Übergang zwischen zwei beliebigen Koordinatensystemen zu beschreiben wird zusätzlich noch eine **Verschiebung (Translation)** benötigt, welche durch eine Vektoraddition dargestellt werden kann

$$M\vec{v} + \vec{t} = \vec{w}$$



Matrix-Matrix-Multiplikation

- Multiplikation einer Matrix A mit einer Matrix B

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

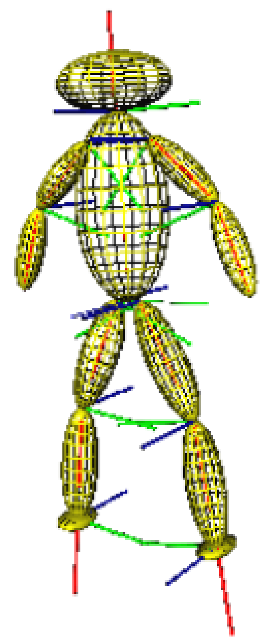
- Entspricht Skalarprodukten
  der Zeilenvektoren von A mit den Spaltenvektoren von B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{\overrightarrow{a_1}} \\ \boxed{\overrightarrow{a_2}} \\ \boxed{\overrightarrow{a_3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\overrightarrow{b_1}} & \boxed{\overrightarrow{b_2}} & \boxed{\overrightarrow{b_3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_2} & \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_3} \\ \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_2} & \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_3} \\ \overrightarrow{a_3} \cdot \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{a_3} \cdot \overrightarrow{b_2} & \overrightarrow{a_3} \cdot \overrightarrow{b_3} \end{pmatrix}$$

"**Zeile** mal **Spalte**"

Objekthierarchie

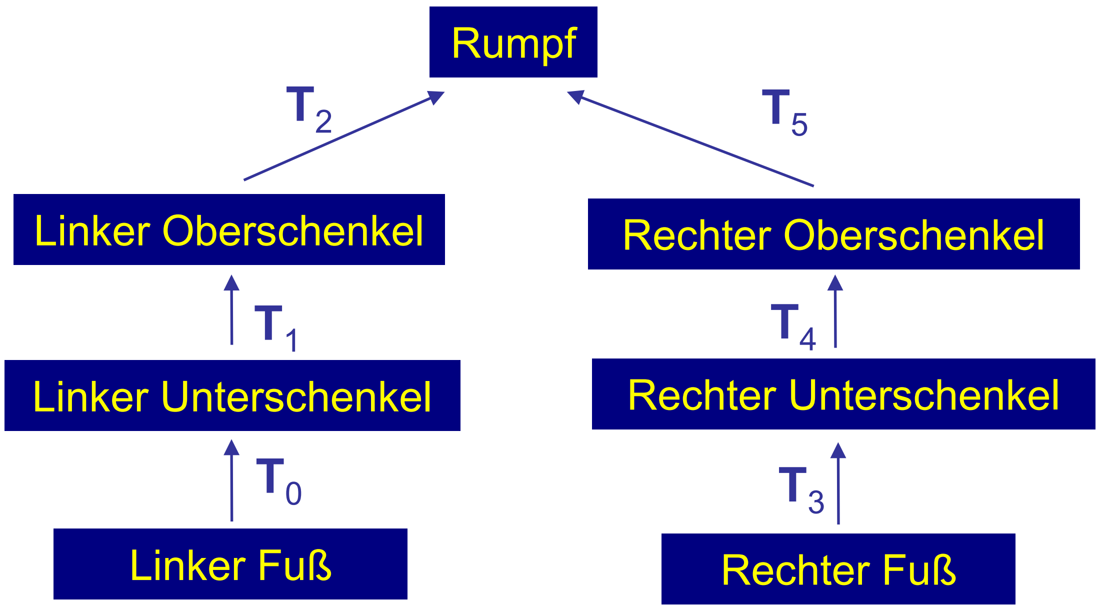
- In komplexeren Szenen bzw. Objekten hängt die Lage von Teilobjekten häufig von anderen Teilobjekten ab, z.B.:
  - Menschmodell:
    Ringfingers ist Teil der Hand, ihre Lage hängt von der Lage des Unterarms ab, diese wiederum von der Lage des Oberarms, usw.

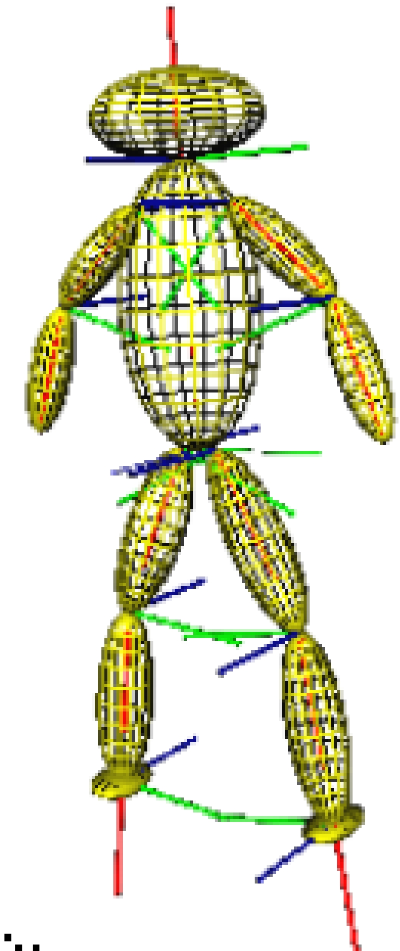


  - Solarsystem:
    die Lage des Monds hängt von der Lage der Erde ab, deren Lage von der Sonne abhängt, usw.

Objekthierarchie (2)

- Bsp.: Menschmodell

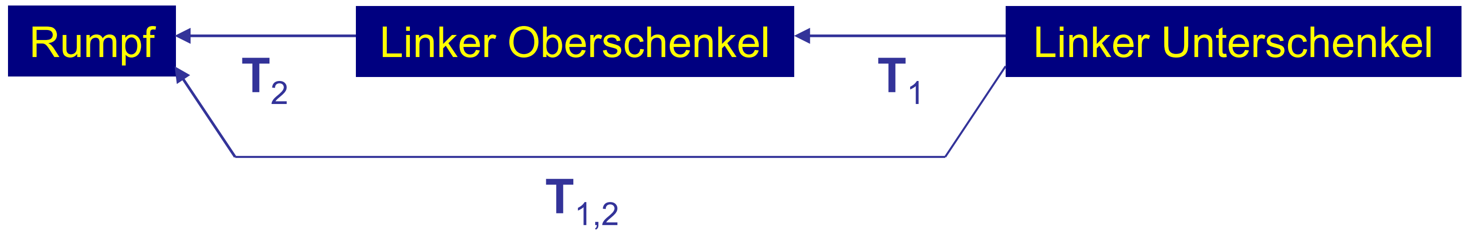




  - Die Transformationen $\mathbf{T}_i$ beschreiben den Übergang vom Koordinatensystem eines Objekts in das Koordinatensystem des jeweiligen Vaterobjekts

$$T_i : \quad M_i \vec{v} + \vec{t}_i$$

Verkettung von Transformationen



- gegeben: Transformationen $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{T}_2$:

$$\mathrm{T}_1: \quad \mathrm{T}_1(\vec{v}) = M_1\vec{v} + \vec{t}_1$$
$$\mathrm{T}_2: \quad \mathrm{T}_2(\vec{v}) = M_2\vec{v} + \vec{t}_2$$

- gesucht: Transformation $\mathbf{T}_{1,2}$ ($\mathbf{T}_2$ *nach* $\mathbf{T}_1$):

$$\mathrm{T}_{1,2}: \quad \mathrm{T}_{1,2}(\vec{v}) = M_{1,2}\vec{v} + \vec{t}_{1,2}$$

- Lösung durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{1,2}: \quad \mathrm{T}_2(\mathrm{T}_1(\vec{v})) &= M_2(M_1\vec{v} + \vec{t}_1) + \vec{t}_2 \\
&= M_2(M_1\vec{v}) + M_2\vec{t}_1 + \vec{t}_2 \\
&= \underbrace{(M_2 \cdot M_1)}\vec{v} + \underbrace{M_2\vec{t}_1 + \vec{t}_2} \\
&= M_{1,2}\,\vec{v} + \vec{t}_{1,2}
\end{aligned}$$