ＣＧのためのフーリエ解析入門

mebiusbox

2021 年 3 月 6 日

目次

1．はじめに

フーリエ解析というのは基本的に波を解析する手法です．世の中には様々な波があるわけですが，CG では特に関係のあるものに光があります．光は電磁波であり波の一種です．光はいろんな波が含まれていて，それを単純な波がどれくらい含まれているか解析するのがフーリエ解析です．そのような作業をスペクトル分析といいます．例えば太陽光をスペクトル分光すると７色の光に分解できます．この分光が自然で起きている現象が虹です．また，プリズムを使えば人為的に分光することができます．

ここではフーリエ解析の入門ということで，フーリエ級数，フーリエ変換について２回に分けて解説しようと思います．フーリエ解析では高校で学んだ三角関数，複素数，ベクトル，微積分をすべて使うことになります．三角関数と微積分については詳しく解説しませんので，途中でわからなくなった場合は復習するようにしてください．ベクトルについては「CG のための線形代数 ベクトル編」という記事を書いていますのでそちらを参照してみてください．複素数については最低限の説明をします．

2．フーリエ級数

2.1 数列

例えば，$1,2,3,4,\ldots$ のように，ある規則によって並べられた数の列を**数列**といいます．一般に数列 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ を

$$\{a_n\}$$

と書きます．この数列の和

$$a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots$$

を**級数**といい

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

と表すことができます．

2.2 級数展開

x を任意の数，数列を $\{a_n\}$ としたとき，次のような級数を作ることができます．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

これを**べき級数**といいます．ある関数 $f(x)$ を次のようなべき級数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

に展開することを**べき級数展開**といいます．関数をこのように単純な多項式に変形することができると，例えば，微分・積分が項ごとに行えて計算がしやすくなります．ところで，この式に $x=0$ を代入すると

$$f(0)=a_0$$

となって最初の定数項が求まります．次に $f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

となります．これに $x=0$ を代入すると

$$f'(0)=a_1$$

となって，a_1 が求まります．同じように微分したものをまた微分して $x=0$ を代入すると，それ以降の係数が求まります．例えば

$$f''(x)=2a_2+(3\cdot 2)a_3x+(4\cdot 3)a_4x^2+\cdots$$
$$f'''(x)=(3\cdot 2)a_3+(4\cdot 3\cdot 2)a_4x+(5\cdot 4\cdot 3)a_5x^2+\cdots$$

これらに $x=0$ を代入して計算すると a_2 と a_3 は

$$a_2=\frac{1}{1\cdot 2}f''(0)$$
$$a_3=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0)$$

となります．また，a_n は

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

と求められます．よって，$f(x)$ の展開式は

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots$$

となります．これを一般式にすると

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

となります．このように $x=0$ で展開することを**マクローリン展開**といい，また，x に任意の値 a を代入して

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と展開することを**テイラー展開**といいます．ついでに補足しておくと，$f''(x)$ は $f'(x)$ を x で微分したもので，これを $f(x)$ の第２次導関数といいます．また，$f(x)$ を x で n 回微分したものを

$$f^{(n)}(x)$$

と書きます。また，２次以上の導関数のことを**高階導関数**といいます．

それでは，例として，$f(x)=2x^4+x^3+2x^2+3x+4$ を級数展開してみます．まず $f(x)$ に $x=0$ を代入して計算すると

$$f(0)=4$$

となります．$f(x)$ を微分していくと

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 8x^3+3x^2+4x+3 \\
f''(x) &= 24x^2+6x+4 \\
f'''(x) &= 48x+6 \\
f^{(4)}(x) &= 48 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

となって，これらに $x=0$ を代入すると

$$
f'(0)=3 \qquad f''(0)=4 \qquad f'''(0)=6 \qquad f^{(4)}(0)=48
$$

と与えられます．よって $f(x)$ は

$$
f(x)=4+3x+\frac{1}{2!}4x^2+\frac{1}{3!}6x^3+\frac{1}{4!}48x^4+0+\cdots
$$

となります．これを展開すると

$$
f(x)=2x^4+x^3+2x^2+3x+4
$$

となって，もとの関数が得られます．続いて，$(1+x)^n$ を級数展開してみます．まずは，微分してみると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^n \\
f'(x) &= n(1+x)^{n-1} \\
f''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2} \\
f'''(x) &= n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} \\
f^{(4)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)(1+x)^{n-4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n!(1+x)^{n-n} = n!
\end{aligned}
$$

となって，それぞれに $x=0$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= n \\
f''(0) &= n(n-1) \\
f'''(0) &= n(n-1)(n-2) \\
f^{(4)}(0) &= n(n-1)(n-2)(n-3) \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= n!
\end{aligned}
$$

となります．$(n+1)$ 次以上の項の係数はすべて 0 になります．これを

$$
f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots
$$

に代入すると

$$
f(x) = 1 + nx + \frac{1}{2!}n(n-1)x^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3 + \cdots + x^n
$$

となります．一般式で表すと

$$
f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k
$$

が得られます．これは 2 項定理の関係であり，次のように表すこともできます．

$$
f(x) = (1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n
$$

2.3 指数関数の級数展開

級数展開について説明したので，いくつかの関数の級数展開を見ていきます．まずは指数関数です．級数展開では，微分を繰り返し行う必要があります．微分が簡単な計算で求まる場合は，級数展開も簡単に行うことができます．そのような関数として指数関数が挙げられます．指数関数 e^x では，微分しても変わらない性質をもっています．

$$
\frac{df(x)}{dx} = \frac{de^x}{dx} = e^x = f(x)
$$

また，指数関数を 2 階微分すると

$$
\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{de^x}{dx} = e^x
$$

となります．つまり指数関数の n 階微分は

$$
f^{(n)}(x) = e^x
$$

となります．ここで，$x = 0$ を代入すると

$$
f^{(n)}(0) = e^0 = 1
$$

となって，すべての係数が 1 になります．よって，e の展開式は

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

となります．ここで，e の展開式に $x = 1$ を代入すると

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$$

となって，これを計算すると

$$e = 2.718281828\ldots$$

が得られます.

2.4 三角関数の級数展開

三角関数の級数展開を考えてみます．最初は $f(x) = \sin x$ です．sin と cos の微分は次のような関係になっています

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(5)}(x) = \cos x \qquad f^{(6)}(x) = -\sin x$$

このように sin と cos は 4 回微分すると元に戻ります．そして

$$\sin 0 = 0 \qquad \cos 0 = 1$$

よって $x = 0$ を代入すると

$$f'(0) = \cos 0 = 1 \qquad f''(0) = -\sin 0 = 0 \qquad f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0 \qquad f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1 \qquad f^{(6)}(0) = -\sin 0 = 0$$

となります．これを

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots$$

に代入すると

$$f(x) = \sin x = 0 + 1x + \frac{1}{2!}\cdot 0x^2 + \frac{1}{3!}\cdot(-1)x^3 + \frac{1}{4!}\cdot 0x^4 + \frac{1}{5!}\cdot 1x^5 + \cdots$$

となって

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

と展開できます．次に $\cos x$ も級数展開してみます．まずは微分すると

$$f'(x) = -\sin x \qquad f''(x) = -\cos x \qquad f'''(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(5)}(x) = -\sin x \qquad f^{(6)}(x) = -\cos x$$

となって，展開式は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

となります．

ここまで指数関数，三角関数の級数展開（マクローリン展開）を見てきました．この展開した式は近似式として使用することができます．それぞれ３次までグラフにしたものを図で表しています．

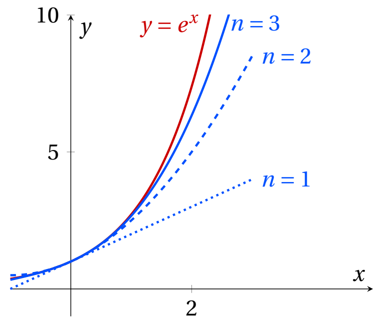


Fig.1: 指数関数

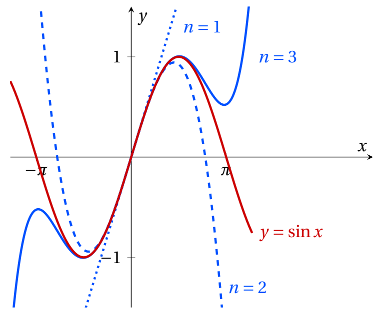


Fig.2: 正弦関数

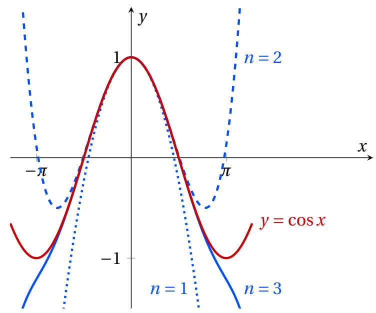


Fig.3: 余弦関数

n の値が増えていくと，もとの関数に近似していくのがわかります．

2.5 オイラーの公式

これまで級数展開してきた指数関数，三角関数（正弦・余弦）の展開式を並べてみましょう．

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

なんとなく e^x の各項が $\sin x$ と $\cos x$ の各項に対応しているように見えます．$\sin x$ と $\cos x$ を足し合わせると

$$\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$
$$+ (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

となって e^x に大分似ている形になっています．ただし，符号の部分が異なっていることがわかります．ここで**虚数**を使います．

虚数は二乗すると -1 となる数で記号 i で表されます．

$$i^2 = -1 \qquad i = \sqrt{-1}$$

そして，e^x の x を ix と置き換えると

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \cdots$$
$$= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}ix^5 + \cdots$$

となります．このうち実数の項と虚数 i が含まれている項をそれぞれ取り出すと

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$
$$ix - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{5!}ix^5 - \frac{1}{7!}ix^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}ix^{2n+1} + \cdots$$

となって，$\sin x$ と $\cos x$ の展開式と一致します．よって

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

という関係がわかります．これを**オイラーの公式**といいます．ここで，オイラーの公式に $x = \pi$ を代入すると

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

となって，値が求まります．このように円周率，虚数，指数関数，三角関数の関係を単純な式で関係づけることができます．

オイラーの公式から次の関係も成り立ちます．

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

ここで，この和と差をとると

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$
$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

となって，$\sin x$ と $\cos x$ それぞれについて整理すると

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

が得られます．

次にオイラーの公式を使っていくつか計算してみると

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i$$

$$\exp\left(i\frac{2\pi}{2}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$$

$$\exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 + i\cdot(-1) = -i$$

$$\exp(i2\pi) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 + i\cdot 0 = 1$$

が得られます．$\exp(x)$ は e^x を表します．

2.6 複素数

2.6.1 虚数

オイラーの公式のところで虚数という概念が出てきました．虚数は実際には存在しない数です．+1 を 2 回かけても +1 であり，−1 を 2 回かけても +1 です．同じ数を 2 回かけても実数では負の値にはなりません．しかし，2 回かけると −1 になる値を考え，それを虚数と定義することにしました．少し詳しく見ていきます．ここで次の 2 次方程式を考えます．

$$ax^2 + bx + c = 0$$

この根は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

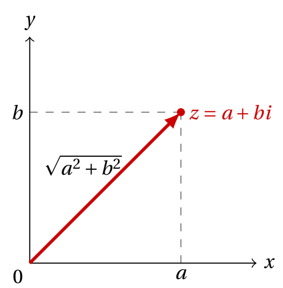
で与えられます．この時，$b^2 - 4ac$ を**判別式**といい，これが 0 または正であると実数解が得られ，負の値だと実数では解がありません．ところが，虚数を導入すると

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} i$$

となって，解が求められます．これは実数と虚数の和で表されます．このような数を**複素数**といいます．複素数が実数 a, b を用いて $a + bi$ と表されるとき，a を実部または実数部といい，b を虚部または虚数部といいます．

2.6.2 幾何学的な意味

複素数は実部と虚部からなる 2 次元のベクトルと考えることができます．複素数 $z = a + bi$ を平面上に描いてみると次の図のようになります．



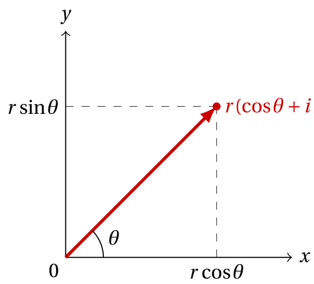
ここで x 軸は実軸，y 軸は虚軸となっています．このような xy 平面を**複素平面**または**ガウス平面**といいます．次に，上の図で示しているように原点から z までの距離は

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

となります．これを複素数の**絶対値**といいます．例えば，$4+2i$ の絶対値は $|4+2i| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$ になります．実際に複素数の絶対値を求める場合，a^2+b^2 を得るためには $a+bi$ に虚部の符号が反転した $a-bi$ をかけます．これら複素数を互いに**共役**であるといいます．$a+bi$ の共役な複素数は $a-bi$ であり，$a-bi$ の共役な複素数は $a+bi$ です．共役な複素数は $\overline{z}$ または $z*$ で表します．複素数 $z = a+bi$，その共役な複素数 $\overline{z} = a-bi$ を使うと

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 - b^2 i^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

となります．さらに，複素平面で原点から z までの距離 r と，x 軸の正の方向となす角 θ を使って複素数を表示することができます．



このような表現方法を**極形式**といいます．原点からの距離 r は絶対値なので

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

となります．そして，x 軸，y 軸，複素数 z は次の関係にあります．

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

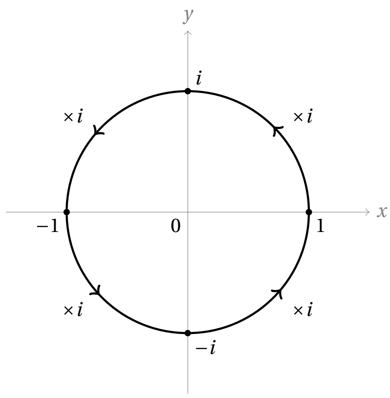
また，x 軸とのなす角 θ を**偏角**といい

$$\arg(z)$$

と書きます．

2.6.3　虚数 i は回転

大きさが 1 の複素数を考えます．複素平面で図示すると次のようになります．



1 は複素平面上だと $x=1$ の点になります．これに虚数 i をかけると

$$1 \times i = i$$

となって，y 軸上の点になります．さらに i をかけると

$$i \times i = i^2 = -1$$

となりますから，x 軸上の点になります．また，i をかけると

$$-1 \times i = -i$$

そして，もう一度 i をかけると

$$-i \times i = 1$$

となります．これは図上で確認してみると i をかけると反時計回りに 90°（$\frac{\pi}{2}$）回転していることがわかります．また，4 回 i をかけるともとに戻る性質も確認できます．

$$1 \to i \to i^2 \to i^3 \to i^4$$

$$1 \to i \to -1 \to -i \to 1$$

2.6.4　オイラーの公式との関係

これまでのところで複素数とオイラーの公式とで気づいたところがなかったでしょうか．まず，極形式の複素数とオイラーの公式を並べてみましょう．

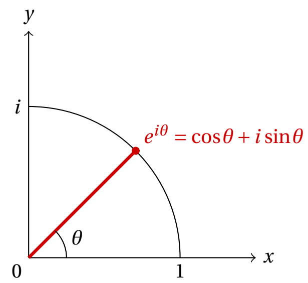
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

極形式のかっこ内がオイラーの公式の右辺であることがわかります．つまり

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

の関係になっています．また，オイラーの公式の右辺は大きさが 1 の複素数となっています．これを複素平面上に描いてみると下図のようになります．



ここでオイラーの公式のところで計算した式を思い出してみましょう．

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i$$

$$\exp\left(i\frac{2\pi}{2}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$$

$$\exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 + i\cdot(-1) = -i$$

$$\exp(i2\pi) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 + i\cdot 0 = 1$$

θ を増やすということは，単位円に沿って回転することになります．例えば，$\theta = 0$ から $\theta = \frac{\pi}{2}$ に変化させることは 1 に i をかけたものに相当します．これは

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(0 + i\frac{\pi}{2}\right) = \exp(0)\cdot\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$$

と変形することができ

$$\exp(0) = 1 \qquad \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$$

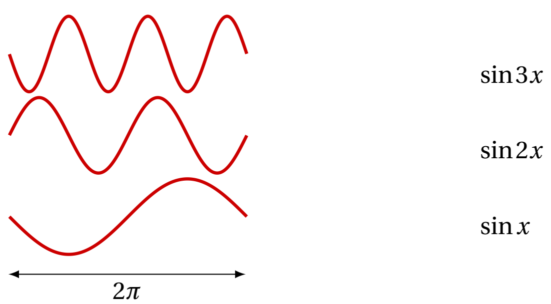
ということから，$1\times i$ ということがわかります．つまり，単位円においては角度のたし算が指数関数のかけ算と等価になっています．また，オイラーの公式は θ が増えていくと実部では cos，虚部では sin の波となって，その絶対値は常に 1 という性質を持っています．

3．フーリエ級数展開

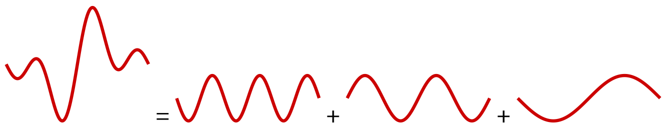
最初の方でべき級数展開を説明しました．べき級数展開では，ある関数 $f(x)$ を次のようなべき級数に展開することでした．

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

フーリエ級数展開は任意の関数 $f(x)$ を $\sin kx$ と $\cos kx$（k は整数）で級数展開する手法です．$\sin kx, \cos kx$ は下図のように基本振動の k 倍の振動数に対応していて，長さが 2π のなかにある波の数です．これを**波数**といいます．



電磁波や音波などの波は調べてみると，普通は複雑な形状をしています．この波を解析すると基本的な波を合成したものであることがわかります．



このように複雑な波を基本的な波に分解するのが**フーリエ級数展開**です．また，この分解を**スペクトル分光**ともいい，太陽光をスペクトル分光するのがプリズムです．プリズムを使って太陽光を分解すると 7 色の可視光に分解できます．

3.1 フーリエ級数展開

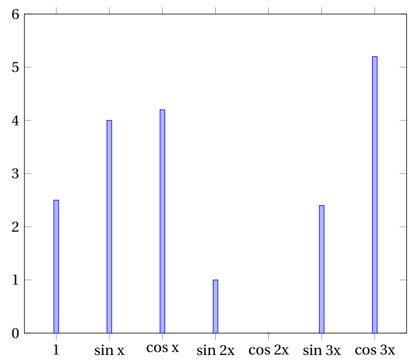
次のような級数展開を考えます．

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0 \cos 0x + a_1 \cos 1x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots \\
+ b_0 \sin 0x + b_1 \sin 1x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots
\end{aligned}
$$

$\sin 0 = 0$ なので b_0 の項が消えます．また，$\cos 0 = 1$ だから

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0 + a_1 \cos 1x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots \\
+ b_1 \sin 1x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots
\end{aligned}
$$

となります．これを**フーリエ級数**といい，a_n, b_n のことを**フーリエ係数**といいます．ここで，$\sin kx, \cos kx$ の項は 2π ごとに同じ値になるので，この級数では $f(x)$ には 2π を周期とした周期関数でなければなりません．その周期は $0 \leq x \leq 2\pi$ または $-\pi \leq x \leq \pi$ の 2 種類があります．フーリエ級数は，周期が 2π 以外のものや，積分区間が異なる場合などで形が変わります．しかし，式が変化しても本質は変わりません．
対象となる波（関数）をフーリエ級数展開するということは，下図のように 1 や $\sin kx, \cos kx$ が，波の中にどれくらいの量（係数 a_n, b_n）が含まれているかを調べることです．



実際に係数 a_n, b_n を求めていきましょう．べき級数展開では，関数の高階導関数を使って係数を求めました．フーリエ級数展開では三角関数の積分を使って求めます．

3.2 三角関数の積分の性質

三角関数の積分には便利な性質を持っています．１つずつ確認していきます．

3.2.1 性質① $\sin nx, \cos nx$ の積分

n をゼロ以外の整数とすると

$$\int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$$

という性質があります．図で確認するとわかりやすいです．

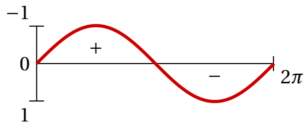


Fig.4: $sinx$

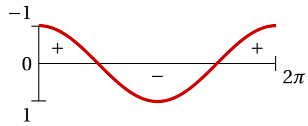


Fig.5: $cosx$

正の部分の面積と負の部分の面積が等しいため，その和はゼロになります．波数 n が増えても繰り返すだけなので，結局面積はゼロのままです．また，積分を計算すれば

$$\int_0^{2\pi} \sin nx dx = \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{n}(1-1) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx dx = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n}(0-0) = 0$$

となります．

3.2.2 性質② $\sin mx$ に $\cos nx$ をかけて積分

m, n を任意の整数とすると

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

という性質があります．これも図で確認してみると

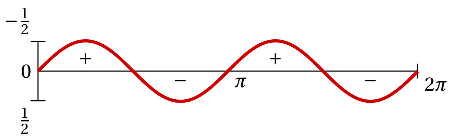


Fig.6: $sinxcosx$

となって，面積がゼロになることがわかります．この積分を計算するには次の三角関数の公式を使います．

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}$$

これを使うと，$m \neq n$ のとき

$$2\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \sin(m+n)x dx + \int_0^{2\pi} \sin(m-n)x dx$$

となって，性質①

$$\int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0$$

を使うと，0 になります．次に $m = n$ のときは

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2mx dx$$

となり，これもまた性質①から 0 となります．

3.2.3 性質③ $\sin mx$ に $\sin nx$，$\cos mx$ に $\cos nx$ をかけて積分

$\sin mx$ に $\sin nx$，$\cos mx$ に $\cos nx$ をかけて積分する場合，$m \neq n$ ならば

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0$$

という性質があります．これは次の三角関数の公式を使って確かめてみます．

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$$

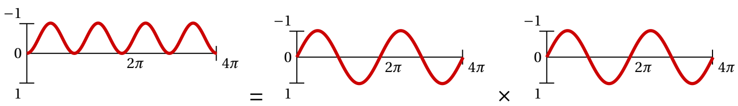
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$$

であるから

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)x dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)x dx$$

これらは性質①から，それぞれ積分の値が 0 になることがわかります．次に $m = n$ のときですが，下図を見てください．



この場合だと，正の部分だけとなり，面積が 0 になりません．では実際に積分してみると

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2mx dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2mx dx = \pi$$

となって，積分の値が π になりました．

3.3 フーリエ係数を求める

ここまででフーリエ係数を求める準備ができました．実際に求めてみましょう．まずは，フーリエ級数展開した関数 $f(x)$ を 0 から 2π まで積分します．

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = a_0 \int_0^{2\pi} dx + a_1 \int_0^{2\pi} \cos x dx + a_2 \int_0^{2\pi} \cos 2x dx + cdots$$

$$+ b_1 \int_0^{2\pi} \sin x dx + b_2 \int_0^{2\pi} \sin 2x dx + \cdots$$

このとき，性質①によって係数 a_0 以外の積分がすべて 0 となり，結局 a_0 だけ残ります．つまり

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = a_0 \int_0^{2\pi} 1 dx = a_0 [x]_0^{2\pi} = 2\pi a_0$$

となるので，変形すると係数 a_0 は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

で得られます．これは，この範囲における $f(x)$ の平均値になります．

次に，a_n を求めます．$f(x)$ に $\cos nx$ をかけて 0 から 2π まで積分します．

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_n}{2} dx = a_n\pi$$

となるので，変形すると係数 a_n は

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

となります．同様に b_n は $f(x)$ に $\sin nx$ をかけて 0 から 2π まで積分します．

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \int_0^{2\pi} \frac{b_n}{2} dx = b_n\pi$$

となって

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

で得られます．

3.4 フーリエ級数展開の一般式

もう一度，フーリエ級数を書くと

$$f(x) = a_0 + a_1\cos 1x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots + a_n\cos nx + \cdots$$

$$+ b_1\sin 1x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \cdots + b_n\sin nx + \cdots$$

です．そして，フーリエ係数は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

となります．ここで，a_0 は $\cos 0x$ の項に対応するので，a_n の一般式で表すには

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

に $n=0$ を代入すると

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

となって，もとの a_0 の式と見比べてみると $\frac{1}{2}$ だけ係数が異なっています．そこで，a_0 のときだけ $\frac{a_0}{2}$ とすると a_n の一般式を適用することができます．まとめると，フーリエ級数は

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

となり，フーリエ係数は

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx dx \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx$$

となりました．

それでは，実際に次の関数をフーリエ級数展開してみましょう．

$$f(x)=3\sin 2x+5\cos 3x$$

これは 2π を周期とする周期関数です．まず，a_0 を求めます．

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3\sin 2x+5\cos 3x)\,dx\\
&=\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2x dx+\frac{5}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos 3x dx\\
&=0+0=0
\end{aligned}$$

$a_0=0$ となりました．同様に a_1, b_1 を求めてみると

$$\begin{aligned}
a_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3\sin 2x+5\cos 3x)\cos x dx\\
&=\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2x\cos x dx+\frac{5}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos 3x\cos x dx\\
&=0+0=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3\sin 2x+5\cos 3x)\sin x dx\\
&=\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2x\sin x dx+\frac{5}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos 3x\sin x dx\\
&=0+0=0
\end{aligned}$$

これもまた，$a_1=b_1=0$ となりました．積分の値が 0 以外の値になるには，関数 $f(x)$ 内の各項にある $\sin nx, \cos nx$ の n が乗算する係数と同じである必要があります．$f(x)$ を見てみると $\sin 2x$ と $\cos 3x$ なので，a_3 と b_2 の場合に積分の値が 0 以外になりそうです．それらを計算してみると

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3\sin 2x + 5\cos 3x)\cos 3x dx \\
&= \frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2x\cos 3x dx + \frac{5}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos 3x\cos 3x dx \\
&= \frac{5}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos 3x\cos 3x dx \\
&= \frac{5}{\pi}\pi = 5 \\
b_2 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3\sin 2x + 5\cos 3x)\sin x 2 dx \\
&= \frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2x\sin 2x dx + \frac{5}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos 3x\sin 2x dx \\
&= \frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2x\sin 2x dx \\
&= \frac{3}{\pi}\pi = 3
\end{aligned}
$$

よって，$f(x)$ のフーリエ級数展開は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 + 0\cos x + 0\cos 2x + 5\cos 3x + \cdots + 0\cos nx + \cdots \\
&\quad + 0\sin x + 3\sin 2x + 0\sin 3x + \cdots + 0\sin nx + \cdots \\
&= 3\sin 2x + 5\cos 3x
\end{aligned}
$$

となって，もとの関数になります．

3.5 任意周期のフーリエ級数展開

これまで扱ってきたフーリエ級数展開の対象となる関数は 2π の周期をもつ周期関数でなければなりません．そこで，任意の周期をもつ一般の関数に対応してみましょう．いま，ある関数の周期が $2L$ とすると，周期 2π の x から周期 $2L$ の t に変数変換します．t は

$$
t = \frac{Lx}{\pi} \qquad \therefore x = \frac{\pi t}{L}
$$

となります．t を x で微分すると

$$
\frac{dt}{dx} = \frac{L}{\pi} \qquad \therefore dx = \frac{\pi}{L}dt
$$

となります．これをフーリエ級数の一般式に代入すると

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{L}\int_0^{2L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt
\end{aligned}
$$

よって，周期 $2L$ に対応したフーリエ級数の一般式は

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \sin\frac{n\pi t}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L} dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L} dt$$

となります．

4．フーリエ変換に向けて

ここまでで，フーリエ級数展開の一般式を導きました．実数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}, \{b_n\}_{n=1,2,\cdots}$ に対応するフーリエ級数展開は次のようになっています：

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots + a_n\cos nx + \cdots \\
+b_1\sin x + b_2\sin 2x + a_3\sin 3x + \cdots + b_n\sin nx + \cdots
\end{aligned}
$$

これをまとめると，次のようになります：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

これは $f(x)$ が 2π の周期でなければなりません．まずは，周期から１つずつ確認して進めていきたいと思います．

5．周期関数

関数 $f(x)$ が，すべての x に対して，

$$f(x+T)=f(x) \tag{1}$$

となるような正の定数 T をもつならば，この関数は周期的であり， $f(x)$ を **周期関数**， T を **周期**といいます．式 (1) から，整数 n に対して，

$$f(x+nT)=f(x) \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{2}$$

が成り立ちます．式 (1) を満たす T の最小値を特に **基本周期**や **最小周期**と呼ぶことがあります．そして， $f(x)$ と $g(x)$ が周期関数ならば，その 1 次結合 $af(x)+bg(x)$ もまた周期関数という性質があります．また，三角関数 $\sin x$ と $\cos x$ も周期関数であり，その周期は 2π です． $n>0$ のとき $\sin nx$ の周期は $T=\frac{2\pi}{n}$ であり，また $n=\frac{2\pi}{T}$ です．

6．関数の直交性

例えば，ベクトル $\vec{v}$ は正規直交基底を使って

$$\vec{v}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z=a_x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

と表すことができます．正規直交基底は

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z=\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z=0$$

の関係になっています．ここでベクトル $\vec{v}$ と正規直交ベクトルとの内積を求めると

$$\vec{v}\cdot\vec{e}_x=a_x\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x+a_z\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x=a_x$$

各成分が取り出せます．これは関数でも同じことが言えます．区間 $a\le x\le b$ で定義された関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ が互いに直交関係のとき

$$\int_a^b f_1(x)\cdot f_2(x)dx=0,\qquad \int_a^b f_2(x)\cdot f_3(x)dx=0,\qquad \int_a^b f_1(x)\cdot f_3(x)dx=0$$

の関係にあります．このような関数の集まりを **直交関数系**といいます．ここで次のような任意の関数 $F(x)$ を定義します．

$$F(x)=a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+a_3f_3(x)$$

$F(x)$ と $f_1(x)$ の内積を積分すると

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)\cdot f_1(x)dx&=a_1\int_a^b f_1(x)\cdot f_1(x)dx+a_2\int_a^b f_2(x)\cdot f_1(x)dx+a_3\int_a^b f_3(x)\cdot f_1(x)dx\\&=a_1\int_a^b f_1(x)\cdot f_1(x)dx\\&=a_1\int_a^b f_1^2(x)dx\end{aligned}$$

となります．また，

$$\int_a^b f_1(x)\cdot f_1(x)dx = \int_a^b f_1^2(x)dx = 1$$

と正規化されていれば，ただちに係数 a_1 が求められます．

$$\int_a^b F(x)\cdot e_1(x)dx = a_1, \qquad \int_a^b F(x)\cdot e_2(x)dx = a_2,$$

$$\vdots,$$

$$\int_a^b F(x)\cdot e_n(x)dx = a_n$$

もし正規化されていなければ関数のノルム

$$|f(x)| = \sqrt{(f,f)}$$

あるいは

$$|f(x)| = \left(\int_a^b f(x)\cdot f(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

を使って

$$\frac{1}{|f_1(x)|} = \frac{1}{\sqrt{(f_1,f_1)}} = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b f_1^2(x)dx}}$$

とおくと

$$\int_a^b e_1(x)\cdot e_1(x)dx = \int_a^b \frac{f_1(x)}{\sqrt{\int_a^b f_1^2(x)dx}}\frac{f_1(x)}{\sqrt{\int_a^b f_1^2(x)dx}}dx$$

$$= \frac{1}{\int_a^b f_1^2(x)dx}\cdot\int_a^b f_1^2(x)dx = 1$$

となります．ここで正規直交関数系

$$e_1(x), e_2(x), e_3(x), \cdots, e_n(x), \cdots$$

において，次のような関数 $G(x)$ を定義し

$$G(x) = a_1e_1(x) + a_2e_2(x) + a_3e_3(x)$$

この関数 $G(x)$ の内積を計算すると

$$
\begin{aligned}
(G,G) &= \int_a^b G(x)\cdot G(x)dx \\
&= \int_a^b (a_1e_1(x)+a_2e_2(x)+a_3e_3(x))^2 \\
&= \int_a^b (a_1e_1(x))^2 + \int_a^b (a_2e_2(x))^2 + \int_a^b (a_3e_3(x))^2 \\
&\quad +2\int_a^b a_1e_1(x)\cdot a_2e_2(x) + 2\int_a^b a_2e_2(x)\cdot a_3e_3(x) + 2\int_a^b a_3e_3(x)\cdot a_3e_3(x) \\
&= a_1^2\int_a^b e_1(x)dx + a_2^2\int_a^b e_2(x)dx + a_3^2\int_a^b e_3(x)dx \\
&\quad +2a_1a_2\int_a^b e_1(x)\cdot e_2(x)dx + 2a_2a_3\int_a^b e_2(x)\cdot e_3(x)dx + 2a_3a_1\int_a^b e_3(x)\cdot e_1(x)dx \\
&= a_1^2+a_2^2+a_3^2
\end{aligned}
$$

となって各係数の 2 乗の総和が得られます．

7．三角関数から複素数へ

フーリエ級数展開

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

の無限級数の意味は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

ということです．ここで，**オイラーの公式**

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

および，**ド・モアブルの公式**

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$$

から，

$$\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n = e^{inx}$$

という関係がわかります．また，

$$e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx$$

という関係も成立します．そして，この和と差をとると

$$\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} \qquad \sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

が得られます．これを無限級数の部分に代入すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\\
&= \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)\\
&= \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\{\left(a_n+\frac{b_n}{i}\right)e^{inx} + \left(a_n-\frac{b_n}{i}\right)e^{-inx}\right\}\\
&= \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\{(a_n-b_ni)\,e^{inx} + (a_n+b_ni)\,e^{-inx}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，フーリエ係数を

$$
c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i)
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(c_ne^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right)\\
&= c_0 + \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}\left(c_ne^{inx}\right) + \sum_{n=-N}^{-1}\left(c_ne^{inx}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

さらに， c_0 もまとめて

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{3}
$$

とすることができます． c_{-n} は

$$
c_{-n} = \overline{c_n}
$$

と複素共役の関係です． e^{inx} は複素平面において，半径 1 の単位円に対応し，実軸は $\cos nx$ ，虚軸は $\sin nx$ に対応しています．このフーリエ級数展開は関数 $f(x)$ を

$$
\{1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{i2x}, e^{-i2x}, \ldots, e^{inx}, e^{-inx}, \ldots\}
$$

という基本周波数の整数倍の波の重ね合わせであり，三角関数と同様に直交関係にあります．直交関係になるかどうかは内積が 0 になるかどうかでわかります．複素数の内積は

$$
z \cdot z = z\overline{z} = \overline{z}z = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2
$$

です．複素関数 $f(x)$, $g(x)$ の内積も同様に，

$$
(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx
$$

となります． e^{imx} と e^{inx} の内積は

$$
\int_0^{2\pi}\overline{e^{imx}}e^{inx}dx = \int_0^{2\pi}e^{-imx}e^{inx}dx = \int_0^{2\pi}e^{i(n-m)x}dx
$$

となります．ここで $m \neq n$ のとき

$$
\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)x}dx = \left[\frac{1}{i(n-m)}e^{i(n-m)x}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{i(n-m)}(1-1) = 0
$$

となって，この積分は 0 となり，直交関係であることがわかります．一方， $m=n$ のとき

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx = \int_0^{2\pi} e^0 dx = \int_0^{2\pi} 1dx = [x]_0^{2\pi} = 2\pi$$

となります．よって，これらの関数のノルムはすべて $\sqrt{2\pi}$ となります．次に複素数のフーリエ係数を求めます．式（3）を展開すると

$$f(x) = \ldots + c_{-n}e^{-inx} + \ldots + c_{-2}e^{-i2x} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} + c_2e^{i2x} + \ldots + c_ne^{inx} + \ldots$$

となります． e^{inx} の項のみを取り出すには $f(x)$ に e^{-inx} をかけて積分します．

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \\
&\quad \ldots + c_{-n}\int_0^{2\pi} e^{-i2nx}dx + \ldots \\
&\quad + c_{-1}\int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)x}dx + c_0\int_0^{2\pi} e^{-inx}dx + c_1\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)x}dx + \ldots + c_n\int_0^{2\pi} 1dx + \ldots
\end{aligned}$$

となって， $e^{inx}\cdot e^{-inx}=1$ から，残る項は c_ne^{inx} となります．よって

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

となります．まとめると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_ne^{inx} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

となります．これが複素フーリエ級数展開の式です．

8．周期 2L の複素フーリエ級数展開

三角関数を使ったフーリエ級数展開と同様に，複素フーリエ級数展開も周期 $2L$ に拡張することができます．複素フーリエ級数展開は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_ne^{i\frac{n\pi t}{L}} \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\frac{n\pi t}{L}}dt$$

となります．

9．フーリエ積分

これまでで，周期 $2L$ のフーリエ級数展開が得られました．では，非周期関数に対してフーリエ級数展開するにはどうすれば良いでしょうか．周期的でないということは，全体を 1 つの周期とみなす，つまり，周期 $2L$ を無限 ∞ にみなすと考えることができます．周期 $2L$ をもつ周期関数 $f_L(x)$ がフーリエ級数で表されているとします．

$$f_L(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4}$$

ここで

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt \tag{5}$$

式 (5) を式 (4) に代入すると

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(t)dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f_L(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt + \sin\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f_L(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt\right]$$

ここで

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad \Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

と置くと

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(t)dt \tag{6}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\left[\cos\omega_n x\int_{-L}^{L} f_L(t)\cos\omega_n t dt + \sin\omega_n x\int_{-L}^{L} f_L(t)\sin\omega_n t dt\right] \tag{7}$$

ここで， $L\to\infty$ の極限を考えます

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x)$$

この $f(x)$ は周期関数ではなくなります．また，この関数は**絶対可積分**であるとします（絶対可積分については付録Aを参照してください）．式 (7) の第一項は $L\to\infty$ とすると無限に小さくなって無視できるので 0 となります．

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(t)dt = 0$$

よって，式 (7) は

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\left[\cos\omega_n x\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega_n t dt + \sin\omega_n x\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega_n t dt\right] \tag{8}$$

となります．さらに， $L\to\infty$ では ω_n は連続変数とみなせること， $\Delta\omega\to 0$ であることを考慮して和を積分に変えます．

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} X(\omega_n)\Delta\omega \to \int_0^{\infty} X(\omega)dw \tag{9}$$

これはリーマン積分の定義式と同じ表示になります．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)dx$$

式 (8) と式 (9) から

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\cos\omega x d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt + \int_0^{\infty}\sin\omega x d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt\right]$$

が得られます．ここで，

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \qquad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

と置くと

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

となります．これを **フーリエ積分表示**と呼びます．また，三角関数の加法定理

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

を使えば

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty \cos\omega x d\omega\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\omega t dt+\int_0^\infty \sin\omega x d\omega\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\omega t dt\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\omega t dt\cos\omega x+\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin\omega t dt\sin\omega x\right]d\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty f(t)(\cos\omega x\cos\omega t+\sin\omega x\sin\omega t)dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\omega(x-t)dt
\end{aligned}$$

が得られます．これを **フーリエ積分公式**といいます．

10． フーリエ変換

フーリエ積分公式から

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\omega(x-t)dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty f(t)\frac{1}{2}\left(e^{i\omega(x-t)}+e^{-i\omega(x-t)}\right)dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega(x-t)}dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i\omega x}\cdot e^{-i\omega t}dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t}dt
\end{aligned}$$

が得られます．これはフーリエ積分公式の複素表示です．ここで

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t}dt$$

と置くと

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty X(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

となります． $X(\omega)$ を **フーリエ変換**といい，この $f(x)$ を **フーリエ逆変換（反転公式）**，そして，この２つの式の組み合わせを **フーリエ変換対**といいます．ここで $X(\omega)=2\pi u(\omega)$ という関数を２つの式に代入すると

$$
\begin{aligned}
u(\omega) &= \frac{X(\omega)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} \\
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi u(\omega)e^{i\omega x}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega)e^{i\omega x}d\omega
\end{aligned}
$$

となります． $u(\omega)$ を $X(\omega)$ として整理すると

$$
X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}, \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega x}d\omega
$$

となって，係数 $\frac{1}{2\pi}$ を移動することができます．このようにフーリエ変換対はいくつも種類があります．代表的なフーリエ変換対を以下に示します．

$$
X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega x}d\omega
$$

$$
X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}, \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega x}d\omega
$$

$$
X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega x}d\omega
$$

$$
X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x}, \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{2\pi i\omega x}d\omega
$$

11．離散へ

これまでのフーリエ変換は連続的な関数を対象としています．しかし，コンピュータグラフィックスなどコンピュータで扱うデータは離散（ディジタル）データです．そのため，離散データに対してもフーリエ変換出来るように対応する必要があります．ここではフーリエ変換対に以下を使います．

$$
X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi i\omega t}, \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{2\pi i\omega t}d\omega
$$

ある連続的な信号を表す関数を $x(t)$ とします． t は時間だと思ってください．このとき，周波数 ω の関数 $X(\omega)$ を求めたいわけです．変域は

$$
-\infty < \omega < \infty, \qquad -\infty < t < \infty
$$

と考えます．ここで， Δt 時間を単位として $x(t)$ を量子化します．つまり， n を整数として，標本点 $n\cdot\Delta t$ における値， $x(n\cdot\Delta t)$ を扱います．そして， Δt の逆数を

$$
F = \frac{1}{\Delta t}
$$

と定義します．また，

$$
W_F = e^{-i2\pi/F}
$$

を導入します．よって

$$x(n\cdot\Delta t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{2\pi in\omega\Delta t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)W_F^{-n\omega}d\omega$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{kF}^{(k+1)F}X(\omega)W_F^{-n\omega}d\omega$$

n は整数なので，$e^{2\pi in\omega/F}$ は周期 F の周期関数となります：

$$W_F^{-n(\omega+F)}=W_F^{-n\omega}$$

そして，積分を 0 から F に変換すると

$$\int_{kF}^{(k+1)F}X(\omega)W_F^{-n\omega}d\omega=\int_0^F X(\omega+kF)W_F^{-n\omega}d\omega$$

となって，

$$x(n\cdot\Delta t)=\int_0^F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega+kF)\right]W_F^{-n\omega}d\omega=\int_0^F X_p(\omega)W_F^{-n\omega}d\omega$$

ここで

$$X_p(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega+kF)$$

となっています．この関数 $X_p(\omega)$ は $X(\omega)$ を，n の整数倍ずつずらし，重ね合わせることによって作られる周期 F の周期関数です．よって，フーリエ級数展開できます．

$$X_p(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nW_F^{n\omega},\qquad 0\le\omega<F$$

$$C_n=\frac{1}{F}\int_0^F X_p(\omega)W_F^{-n\omega}d\omega.$$

ここで求めたフーリエ係数 C_n は $x(n\cdot\Delta t)$ に $1/F$ を掛けたものですから，

$$x(n\cdot\Delta t)=\int_0^F X_p(\omega)W_F^{-n\omega}d\omega,$$

$$X_p(\omega)=\frac{1}{F}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\cdot\Delta t)W_F^{n\omega}$$

という関係が得られます．ここまでで，t に関しては離散的になりましたが，項数がまだ有限ではありません．そこで，$x(t)$ に対して変数 t を量子化したように，$X_p(\omega)$ に対しても変数 F を区間

$$\Delta\omega=\frac{F}{N}=\frac{1}{N\Delta t}$$

と量子化します．今度は

$$W_F^{nk\Delta\omega}=W_N^{nk}$$

が周期 N の周期関数となって

$$X_p(k\cdot\Delta\omega)=\frac{1}{F}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1}x((n+\ell N)\Delta t)W_N^{nk}=\frac{1}{F}\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n\cdot\Delta t)W_N^{nk}$$

$$x_p(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(t+\ell T), \qquad T = N\Delta t = \frac{N}{F} = \frac{1}{\Delta\omega}$$

が得られます．この $x_p(t)$ は周期 T の周期関数です．よって

$$x_p(n\cdot\Delta t) = \frac{F}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(k\cdot\Delta\omega)W_N^{-nk}$$

となります．ここで，$F=N$ とすれば

$$X_p(k\cdot\Delta\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n\cdot\Delta t)W_N^{nk}$$

$$x_p(n\cdot\Delta t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k\cdot\Delta\omega)W_N^{-nk}$$

の関係が得られます．そして，$\Delta\omega$ や Δt，添字 p も省くと

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

と書くことが出来ます．$X(k)$ が **離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform: DFT)**，$x(n)$ が **離散フーリエ逆変換 (Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)** です．離散フーリエ変換もフーリエ変換と同様に変換対が複数あります．

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \qquad x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \qquad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

12．高速フーリエ変換

周期 N の数列 $\{x_n\}$ の離散フーリエ変換（以降，DFT とします）では，すべての X_k を求めるのに複素数の乗算が N^2 回必要です．処理の計算量を表すオーダーで表すと $O(N^2)$ となります．これは N が増えると計算量も膨れ上がっていくことを表しています．そこで，DFT を高速に処理するアルゴリズムがいくつも見出され，**高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform: FFT)** と呼ばれます．ここでは，Cooley と Turky による手法の１つを解説します．

離散フーリエ変換対は次を使います：

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}, \qquad x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{-nk}$$

まず，数列 $\{x_n\}$ は周期が $N=2^m$ とします．この長さ N の数列 $\{x_n\}$ を次のように長さ $N/2$ の２つの数列に分けます．

$$\left.\begin{aligned} x_n^{1)} &= x_{2n} \\ x_n^{2)} &= x_{2n+1} \end{aligned}\right\} n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2}-1$$

これらの DFT はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} X_k^{1)} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_n^{1)} W_{N/2}^{nk} \\ X_k^{2)} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_n^{2)} W_{N/2}^{nk} \end{aligned}\right\} k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

と定義されます．これをもとに元の数列 $\{x_n\}$ の DFT の定義を変形すると

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_N^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_N^{2nk} \cdot W_N^k \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_n^{1)} W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_n^{2)} W_{N/2}^{nk} \\ &= X_k^{1)} + W_N^k X_k^{2)} \end{aligned}$$

となります． $X_k^{1)}$ および $X_k^{2)}$ は $N/2$ 周期であり，

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

であることから（詳しくは付録 B：回転子を参照してください）

$$X_k = \begin{cases} X_k^{1)} + W_N^k X_k^{2)} & 0 \le k \le \frac{N}{2} - 1 \\ X_{k-N/2}^{1)} - W_N^{k-N/2} X_{k-N/2}^{2)} & \frac{N}{2} \le k \le N - 1 \end{cases} \tag{10}$$

と書くことができます．これで長さ N の数列の DFT が長さ $N/2$ の数列の DFT に分解出来ました．これで複素数の計算回数は

$$\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$$

となって，ほぼ半分になります．また，分割した数列 $x_n^{1)}$ と $x_n^{2)}$ は同様の方法でさらに分解してそれぞれの DFT を計算することで計算回数がさらに半分になります．これを再帰的に繰り返すことで高速に処理することが出来ます．これを **DIT 法 (Decimation-In-Time algorithm)** といいます．

式 (10) をもう少し詳しく見てみましょう． $X_k^{1)}$ と $X_k^{2)}$ は $N/2$ 周期になったということは，例えば $N = 8$ の場合

$$X_0 = X_0^{1)} + W_8^0 X_0^{2)}$$

$$X_1 = X_1^{1)} + W_8^1 X_1^{2)}$$

$$X_2 = X_2^{1)} + W_8^2 X_2^{2)}$$

$$X_3 = X_3^{1)} + W_8^3 X_3^{2)}$$

$$X_4 = X_{4-8/2}^{1)} - W_8^{4-8/2} X_{4-8/2}^{2)} = X_0^{1)} - W_8^0 X_0^{2)}$$

$$X_5 = X_{5-8/2}^{1)} - W_8^{5-8/2} X_{5-8/2}^{2)} = X_1^{1)} - W_8^1 X_1^{2)}$$

$$X_6 = X_{6-8/2}^{1)} - W_8^{6-8/2} X_{6-8/2}^{2)} = X_2^{1)} - W_8^2 X_2^{2)}$$

$$X_7 = X_{7-8/2}^{1)} - W_8^{7-8/2} X_{7-8/2}^{2)} = X_3^{1)} - W_8^3 X_3^{2)}$$

となって，$X_4^{1)}, X_5^{1)}, X_6^{1)}, X_7^{1)}$ および $X_4^{2)}, X_5^{2)}, X_6^{2)}, X_7^{2)}$ の計算が不要になっていることがわかります．また，$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ によって，例えば $+W_8^4 X_4^{2)}$ は X_0 の第２項の符号を反転した $-W_8^0 X_0^{2)}$ であることもわかります．ここで，X_k の順番を次のように並び変えて，２個ずつ組み合わせてみると

$$\begin{cases} X_0 &= X_0^{1)} + W_8^0 X_0^{2)} \\ X_4 &= X_0^{1)} - W_8^0 X_0^{2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 &= X_2^{1)} + W_8^2 X_2^{2)} \\ X_6 &= X_2^{1)} - W_8^2 X_2^{2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 &= X_1^{1)} + W_8^1 X_1^{2)} \\ X_5 &= X_1^{1)} - W_8^1 X_1^{2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_3 &= X_3^{1)} + W_8^3 X_3^{2)} \\ X_7 &= X_3^{1)} - W_8^3 X_3^{2)} \end{cases}$$

となります．ここで次のような図を考えてみましょう．

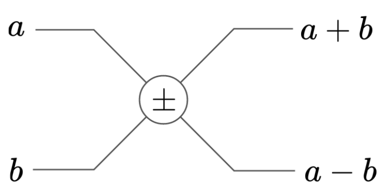


Fig.7: バタフライ演算

これは２つの入力 a と b から $a+b$ と $a-b$ の出力を表しています．これは蝶の形に見えるため，**バタフライ演算**と呼ばれています．

a を $X_0^{1)}$，b を $X_0^{2)}$ とおくと，このバタフライ演算は

$$\begin{cases} X_0 &= X_0^{1)} + W_8^0 X_0^{2)} \\ X_4 &= X_0^{1)} - W_8^0 X_0^{2)} \end{cases}$$

に近い形になります．しかし W_8^0 がありません．そこでバタフライ演算の図に記号を追加します．

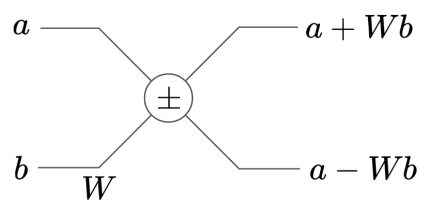


Fig.8: バタフライ演算

これで表現することができます．そして，FFT の構造を DFT およびバタフライ演算を使って図にしてみると

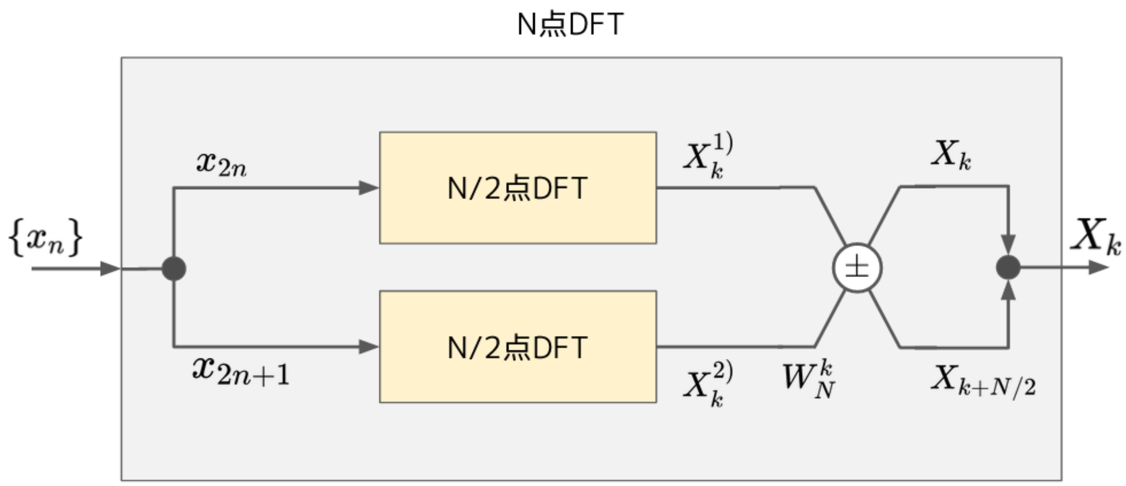


Fig.9: FFT の再帰的構造

と表すことができます．例として $N=8$ のときの FFT は次のようになります．

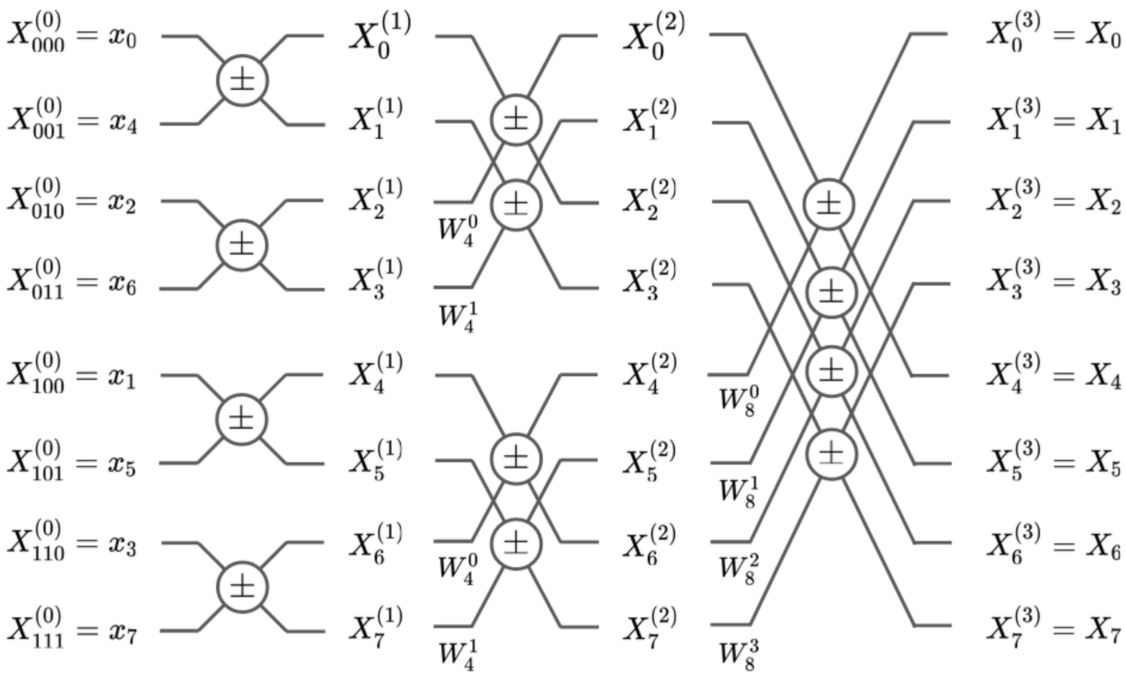


Fig.10: 8 点 FFT

一番左の列に気づいた人もいると思います．$X^{(0)}_{000}$ という記号です．この右下の 000 は 2 進数です．X_k の順番を並び替えることによって上の図のように綺麗に整理することができるのですが，k の並び替えには法則性があります．いま，n を 2 進数で

$$n = b_{m-1} \cdots b_1 b_0 = \sum_{i=0}^{m-1} b_i 2^i$$

で表すとき，その並びを逆転した数

$$\overline{n} = b_0 b_1 \cdots b_{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} b_i 2^{m-1-i}$$

を n の逆転 2 進数と呼びます．この処理をビットリバースともいいます．例えば $N = 8$ のとき，逆転 2 進数は次のようになります．

値	2 進数	逆転	逆転後の値
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

これで，FFT を実装する準備が整いました．まずはこの逆転 2 進数を求めるプログラム (python) は次のようになります．

```python
def bit_reverse(bit, r):
    bitr = 0
    for i in range(r):
        bitr = bitr << 1
        bitr |= (bit & 1)
        bit = bit>>1
    return bitr
```

`bit` には変換する値を，r にはビット数を渡します．例えば $N = 8$ の場合は $r = 3$ になります．これは例えば

```python
r = int(log2(N))
```

で求められます．次に FFT は次のようになります．

```
def fft(x):
    N = len(x)
    r = int(log2(N))
    X = [0+0j for i in range(N)]
    for i in range(N):
        bi = bit_reverse(i, r)
        X[bi] = x[i]+0j
    for i in range(r):
        k = 2**i # k=1,2,4,8,...
        for j in range(k):
            w = float(j)*pi/k # = 2.0*pi/(2.0*k)
            wr, wi = cos(w), -sin(w)
            n = j
            while n < N:
                xr = wr*X[n+k].real - wi*X[n+k].imag
                xi = wr*X[n+k].imag + wi*X[n+k].real
                X[n+k] = complex(X[n].real - xr, X[n].imag - xi)
                X[n  ] = complex(X[n].real + xr, X[n].imag + xi)
                n = n + k*2
    return X
```

そして，高速逆フーリエ変換 (IFFT) は次のようになります．

```
def ifft(x):
    N = len(x)
    r = int(log2(N))
    X = [0+0j for i in range(N)]
    for i in range(N):
        bi = bit_reverse(i, r)
        X[bi] = x[i]+0j
    for i in range(r):
        k = 2**i # k=1,2,4,8,...
        for j in range(k):
            w = float(j)*pi/k # = 2.0*pi/(2.0*k)
            wr, wi = cos(w), sin(w)
            n = j
            while n < N:
                xr = wr*X[n+k].real - wi*X[n+k].imag
                xi = wr*X[n+k].imag + wi*X[n+k].real
                X[n+k] = complex(X[n].real - xr, X[n].imag - xi)
                X[n  ] = complex(X[n].real + xr, X[n].imag + xi)
                n = n + k*2
    recip = 1.0 / N
    for i in range(N):
        X[i] = X[i] * recip
    return X
```

IFFT は W_N^k の符号と，最後に N で割る以外は FFT と同じなので 1 つの関数にまとめることも簡単にできるはずです．以下の部分

```
for i in range(r):
```

が図 (4) の $X^{(i)}$ に相当しています．

```
for j in range(k):
```

は，W_k^j に相当します．さらに内側の n は，$2k$ ずつ飛ばしながら k 離れたペアとバタフライ演算するイテレータです．

13．最後に

フーリエ級数展開に必要な知識と，任意の周期に対応したフーリエ級数の一般式，そして，複素フーリエ級数，フーリエ積分，フーリエ変換，離散フーリエ変換，高速フーリエ変換，さらにその実装までまとめました．いかがだったでしょうか．私も勉強中のため，何か間違っている場所があればご連絡してもらえると助かります．なお，本文では詳しく触れなかったものは付録として書いてありますので，興味があれば呼んでみてください．少しでも誰かの参考になれば幸いです．

14．付録A：絶対可積分

次のフーリエ変換の定義式

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}$$

において，$f(x)=x$ を考えると

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-i\omega x}$$

となります．部分積分を使うと

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}xe^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\left[x\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2\pi i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}dx$$

ここで，第２項は，$k=0$ のとき分母に k があるので発散してしまいます．$k\neq 0$ のときは 0 になります．また，第１項は変形すると

$$\frac{1}{2\pi}\left[x\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{-\infty}^{\infty}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left[x\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{-t}^{t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{t\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}-(-t)\frac{e^{i\omega x}}{-i\omega}\right\}$$

$$=-\frac{t}{i\pi k}\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}$$

$$=\frac{t\cos kt}{i\pi k}$$

よって，$t\to\infty$ では無限大となってしまいます．つまり，フーリエ変換するときに，積分範囲が $-\infty$ から ∞ なので，$f(x)$ が $x\to\pm\infty$ で，$f(x)\to 0$ とならない関数は積分値が発散します．よって，フーリエ変換の対象となる関数 $f(x)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$$

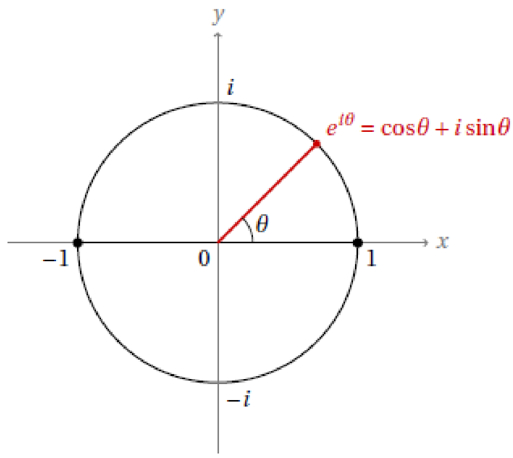
という条件があります．これを **絶対可積分** といいます．ここでは $f(x)=x$ を使いましたが，これはデルタ関数を使うことでフーリエ変換が可能になります．

15．付録B：回転子

オイラーの公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

は，$r=1$ の極形式です．θ を変数とすると，複素平面における半径１の単位円に対応します．



このとき，θ を足していけば，反時計回りに回転するということになります．例えば，$\theta = 0$ から $\theta = \pi/2$ への変化は，1 に i を掛けたものに相当します．これは

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(0+\frac{\pi}{2}\right)} = e^0 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 \cdot i$$

ということです．さらに $\pi/2$ を増やせば $i \cdot i = -1$ となります．また，複素平面では，回転していることになります．よって，i は **回転演算子**とも呼ばれます．これは，複素平面の単位円上では，角度の足し算が指数関数の掛け算になっています．

次に $z^3 = 1$ の根を考えてみます．これは

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1) = 0$$

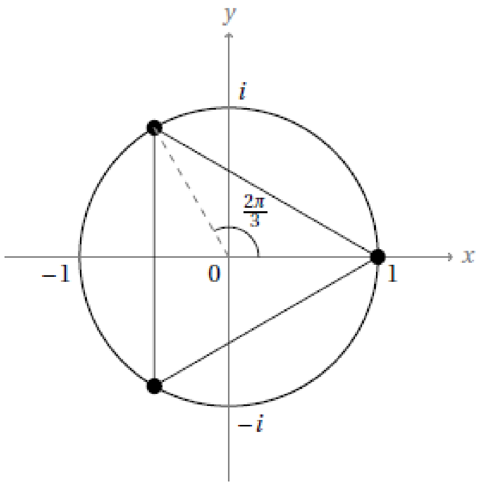
と因数分解できて，$z = 1$ と $z^2 + z + 1 = 0$ の解となります．この 2 次方程式は虚数を使うと

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

が得られます．よって，$z^3 = 1$ の 3 乗根は

$$z = 1, \qquad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

となります．これを踏まえて複素平面に戻ってみます．$e^{2\pi i} = 1$ なので，$z = e^{i\theta}$ の偏角に注目すると，指数関数の掛け算は角度の足し算だったので，3 回足すと 2π になる角度 θ を偏角とする $e^{i\theta}$ が根となります．ということは，$\theta = \frac{2\pi}{3}$ という解が得られます．



また， $e^{4\pi i}=1$ でもあるため， $z=e^{\frac{4\pi i}{3}}$ も根です．同じように， 6π， $8\pi, \ldots$ と続きますが，

$$e^{\frac{6\pi}{3}}=e^{2\pi}=1$$

のように繰り返しとなるので，結局

$$z=e^{\frac{2\pi}{3}}, \qquad z=e^{\frac{4\pi}{3}}, \qquad z=e^{\frac{6\pi}{3}}$$

となります．これらをオイラーの公式に代入すれば

$$z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z=\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}=\cos 2\pi=1$$

と 3 乗根が得られます．それでは，これを n 乗根，つまり $z^n=1$ （1 の n 乗根）に一般化します． $z^n=1$ の根として， 1 と $e^{2\pi/n}$ が得られることがわかると思います．そして，それ以外の根も 3 乗根と同じように求めることができるので，

$$\sqrt[n]{1}=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

と与えられます．ここで，離散フーリエ変換，および高速フーリエ変換で出てくる記号

$$W_N^k=e^{-i2k\pi/N}$$

に注目してみます．右辺の指数部分は負（マイナス）になっているので， k が増えると，複素平面において時計回りの回転になることに注意してください．ここで， $N=2,4,8$ のときの図を見てみましょう．

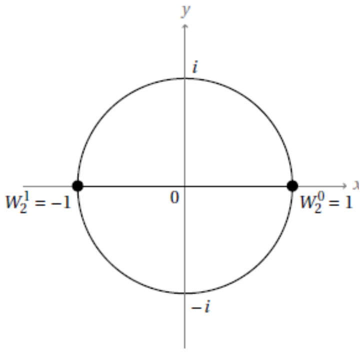


Fig.11: N=2

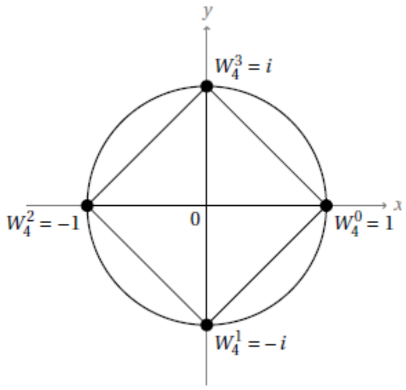


Fig.12: N=4

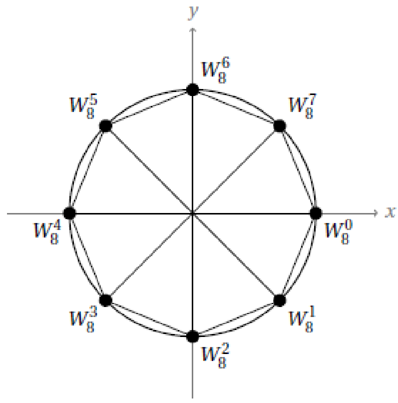


Fig.13: N=8

W_N^k のそれぞれの位置は単位円上であり， W_N^k と $W_N^{k+N/2}$ は実軸と虚軸の両方で対称の位置にあることがわかります．よって，例えば $W_8^5 = -W_8^1$ という関係になります．これも $N = 2,4,8$ のときの図で確認してみましょう．

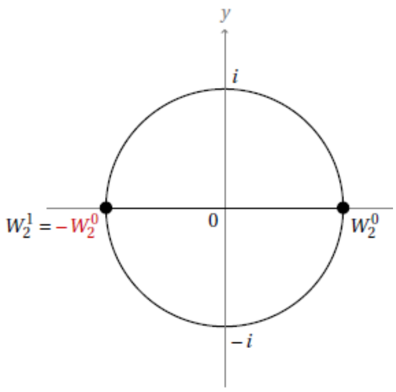


Fig.14: N=2

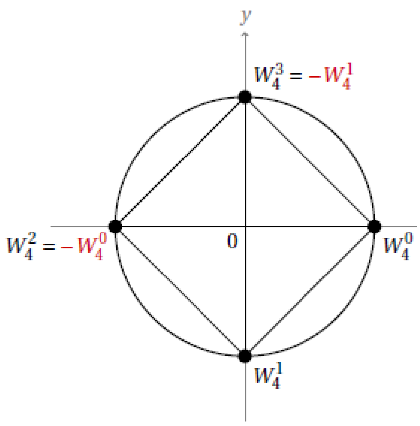


Fig.15: N=4

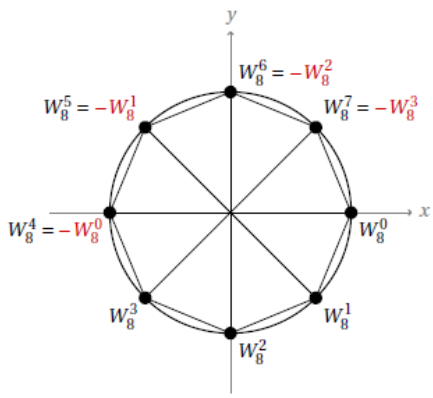
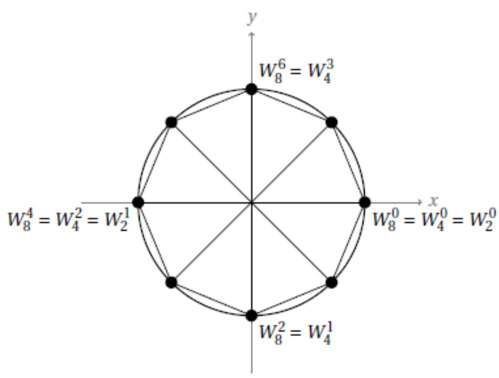


Fig.16: N=8

また，次の関係もわかります．



この W_N のことを **回転子** と呼ぶことがあります．まとめると，

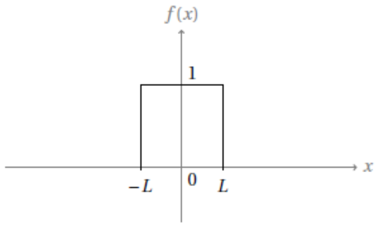
$$W_N^k = W_N^{k+nN}, \qquad W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

という関係が得られます．

16．付録C：デルタ関数

次のような関数を考えてみます．

$$\begin{cases} f(x) = 1 & (-L \leq x \leq L) \\ f(x) = 0 & (|L| < |x|) \end{cases}$$



これは単インパルス信号に対応した関数です．このフーリエ変換は

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-L} 0\cdot e^{-i\omega x}dx + \int_{-L}^{L} 1\cdot e^{-i\omega x}dx + \int_{L}^{\infty} 0\cdot e^{-i\omega x}dx\right\} \\ &= -\frac{1}{i2\pi\omega}\left[e^{-i\omega x}\right]_{-L}^{L} \\ &= -\frac{1}{i2\pi\omega}\left(e^{i\omega L} - e^{-i\omega L}\right) \end{aligned}$$

となります．ここでオイラーの公式

$$\sin\omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$$

を使うと

$$F(\omega) = \frac{1}{i2\pi k}\left\{e^{i\omega L} - e^{-i\omega L}\right\} = \frac{\sin\omega L}{\pi\omega}$$

が得られます．これを図に表すと次のようになります．

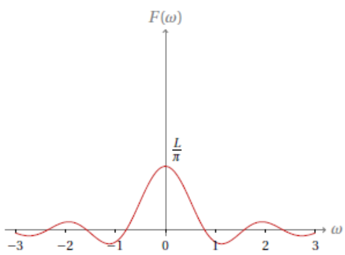


Fig.17: L=4

このパルス幅をどんどん大きくしていくと，中心部の高さが大きくなっていきます．

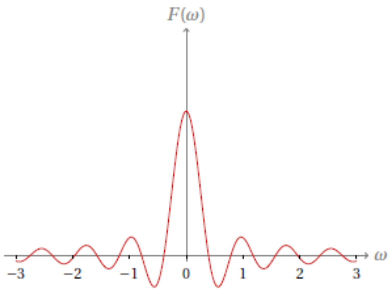


Fig.18: L=8

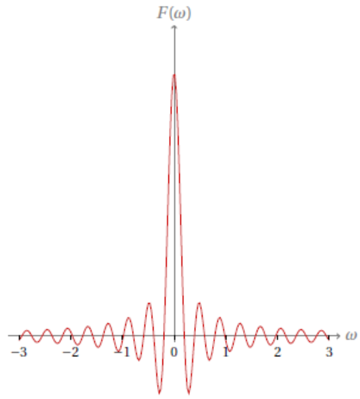
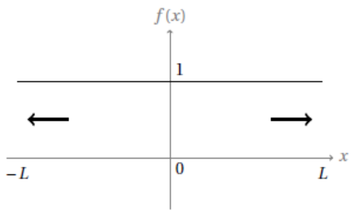


Fig.19: L=16

そして，パルス幅を無限大にした極限では， $y=1$ のグラフに近づいていき， $x=0$ での値が無限大になります．



これは何も振動しない波であることから，波数 $\omega=0$ の成分しか持っていないことを表しています．ここで， $L=1$ として逆フーリエ変換すると

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\pi\omega}e^{-i\omega x}d\omega$$

となって， $x=0$ と置くと

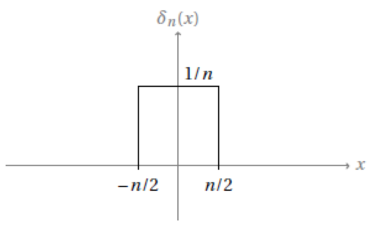
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\pi\omega}e^{-i\omega\cdot 0}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\pi\omega}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=f(0)=1$$

となって， x を移行すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\pi$$

が得られます．

次に，下図のような関数 $\delta_n(x)$ を考えてみます．



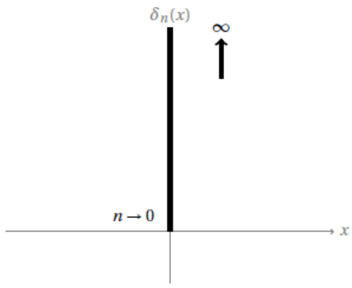
原点をはさんで幅が n，高さが $1/n$ の長方形であり，この面積は常に 1 になります．よって， $\xi n/2$ とすれば

$$\int_{-\xi}^{\xi}\delta_n(x)dx=1$$

と書けます．さらに ξ を無限に広げても

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)dx = 1$$

となります．これは $n \to 0$ の極限を考えれば，長方形の幅が無限小になり，高さが無限大の関数となります．



このような関数を **デルタ関数** (ディラックのデルタ関数) と呼んで，$\delta(x)$ と表記します．そしてこれはさきほどの単インパルス信号のフーリエ変換 $F(\omega)$ と同じものです．つまり，$f(x) = 1$ のフーリエ変換はデルタ関数であるということです．次にいくつかのデルタ関数の性質を見ていきましょう．まずは次の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$$

では，関数 $f(x)$ にデルタ関数をかけて，無限区間で積分したものです．ここで，デルタ関数が値を持つのは $x = 0$ のときで，この場合の積分値が 1 であることから

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

となります．また，デルタ関数を

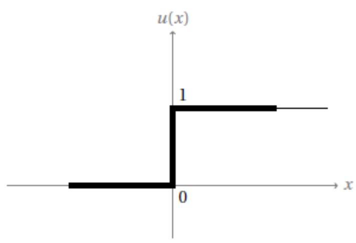
$$\delta(x-a)$$

と変形すると，デルタ関数において値を持つ点が $x = a$ に移ることを意味するので

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

となって，任意の点における関数の値を取り出せることになります．次に，ヘビサイドのステップ関数 $u(x)$ を考えると

$$u(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$



これは，$x = 0$ の点において，0 から 1 に変換する関数です．この関数の微分をとると，$x = 0$ のときに無限大となり，それ以外では傾きが 0 なので

$$\delta(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

の関係にあります．最後に，デルタ関数をフーリエ変換すると

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i\omega x}dx$$

となりますが，デルタ関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

から

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}e^{-i\omega\cdot 0} = \frac{1}{2\pi}$$

となって，これをフーリエ逆変換すると

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega$$

が得られます．右辺の積分部分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega$$

の積分値は $x = 0$ のときに 2π となります．また， ω が負の場合でも結果は変わりません．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}d\omega$$

ここで，デルタ関数

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}d\omega$$

を x で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta(x)}{dx} &= \frac{1}{2\pi}\frac{d\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}d\omega\right]}{dx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\left(e^{-i\omega x}\right)}{dx}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega)e^{-i\omega x}d\omega \\
&= (-i)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\cdot e^{-i\omega x}dx
\end{aligned}$$

となります．右辺に注目してみると，これは $f(\omega) = \omega$ のフーリエ変換であることがわかります． $1/-i = (1\cdot i)/(-i\cdot i) = i$ なので，関数 $f(x) = x$ のフーリエ変換は

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}x\cdot e^{-i\omega x}dx = i\frac{d\delta(x)}{dx}$$

となります．さらに

$$\frac{d\delta(x)}{dx} = (-i)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\cdot e^{-i\omega x}dx$$

を x に関して微分すれば

$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = (-i)\cdot(-i)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\cdot e^{-i\omega x}dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\cdot e^{-i\omega x}dx$$

となって， $f(x) = x^2$ のフーリエ変換となります．同様の手順を繰り返せば，べき関数 (x^n) のフーリエ変換ができます．

参考文献

[1] 村上雅人「なるほどフーリエ解析」海鳴社，2002

[2] 村上雅人「なるほど複素関数」海鳴社，2002

[3] 村上雅人「なるほど虚数」海鳴社，2010

[4] 有本卓「数値解析 (1)」コロナ社，1997

[5] 和達三樹「物理のための数学」岩波出版，2019

[6] 和達三樹「微分積分」岩波出版，2018

[7] 伏見康治・赤井逸「復刊　直交関数系　増補版」共立出版株式会社，2011

[8] 久保裕一郎「プログラマのための数学教室」「C Magazine」2002 年 1 月号, ソフトバンク パブリッシング

[9] 坂巻佳壽美「見てわかるディジタル信号処理」工業調査会，2007

[10] 足立修一「信号・システム理論の基礎」コロナ社，2014

[11] 竹内淳「高校数学でわかるフーリエ変換」講談社，2009

[12] 小暮陽三「なっとくするフーリエ変換」講談社，1999

[13] 涌井良幸・涌井貞美「道具としてのフーリエ解析」日本実業出版社, 2014

[14] S. ラング著，松坂和夫・片山孝次訳「解析入門」岩波出版, 1978

[15] 熊原啓作「フーリエ級数とは」「数学セミナー」2018 年 3 月号，日本評論社

[16] 野村隆昭「駆け足で巡るフーリエ変換」「数学セミナー」2018 年 3 月号，日本評論社