ＣＧのための線形代数入門

mebiusbox software

2018 年 8 月 27 日

1 はじめに

CG プログラミングで最もよく使われる数学に線形代数があります．線形代数ではベクトル，行列といったおなじみの要素が入っていますし，行列式もよく使います．線形代数の範囲はもっと広いのですが，ここでは基礎的な部分のみを取り上げて，なるべくわかりやすく説明していきたいと思います．用語もなるべく少なくしているので，興味を持ったり，もっと知りたくなった人は，参考書を見たり，検索したりすることをお勧めします．今回の内容は，あくまで CG プログラミングに興味のある読者を対象にしていますが，コードは一切登場せず，数式が沢山出てきます．１つ１つゆっくり確認しながら読んでもらえるといいかなと思います．

今回の内容は村上雅人著「なるほど線形代数」にかなり影響されています．この本は個人的に大変わかりやすいと思いますのでお勧めします．ただし，線形代数の本は，線形代数は量子力学で大活躍するといった謳い文句で始まることが多く，この本もその１冊です．今回はあくまで CG プログラミングを目的としているので，ベクトルの内積や外積などに，ほんの少し CG プログラミングに関する説明を追加しています．

ここで説明する内容は主に，ベクトル，行列，行列式の３つの要素です．それでは始めてみましょう．

2 ベクトル

2.1 ベクトルは数の集まり

ベクトルといえば，多くの人が３次元ベクトルを思い浮かぶかもしれません．もしくは２次元ベクトルかもしれませんね．頭の中では３次元もしくは２次元座標上に矢印が描かれていることでしょう．それはベクトルで間違いありませんが，あくまでベクトルの種類の１つです．３次元空間上のある点を表すには３つの数が必要です．２次元平面上の点なら２つの数です．３次元を XYZ 軸で表すとある点は (x, y, z) の座標で表せますね．２次元なら (x, y) です．２次元平面や３次元空間は幾何的に想像しやすいですが，例えば，３次元空間に「時間」を追加した４次元を考えることも出来ます．この場合は，４つの数が必要になります．時間を t とすれば，(x, y, z, t) と表せそうです．流石に４次元となるとなかなか想像できません．今は２次元や３次元座標上のある点を例にしましたが，別に座標である必要はなく，例えば，あなたのお財布の中に５００円硬貨が１枚，１００円硬貨が４枚，１０円硬貨が２枚，１円硬貨が６枚入っていたら，$(1, 4, 2, 6)$ という４つの数で表わせそうです．このように，複数の数を集めたもの

を**ベクトル**といいます．ちなみに，私の財布の中をベクトルで表すと，(0,6,1,4) です．このベクトルは５００円硬貨が０枚，１００円硬貨が６枚，１０円硬貨が１枚，１円硬貨が４枚だとわかりますね．ベクトルは４つ以上の数も扱えますので，n個の数を持つベクトルもあるわけです．

2.2 ベクトルの種類

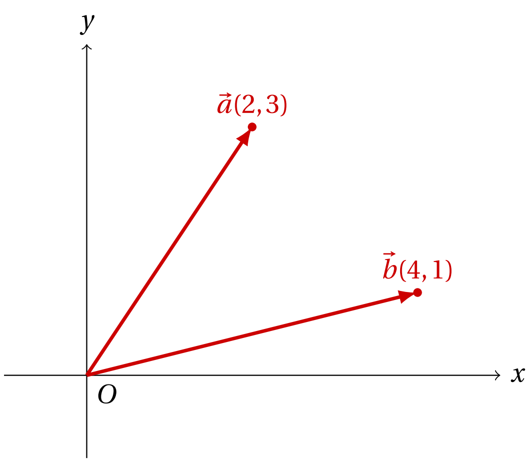
ベクトルは n 次元の数を持つことができるわけなのですが，平面（２次元）や空間（３次元）を扱うことが多いです．平面や空間上のある点を原点からの値で表したベクトル（座標という）を**位置ベクトル**といいます．また，原点ではなく，ある位置から別の位置への値を表すベクトルもあります．これは向きと大きさを表し，**幾何ベクトル**といいます．そして，平面や空間ではなく，さきほどの硬貨の説明で使ったベクトルは単に数の集まりを表しているので**数ベクトル**といいます．CG プログラミングでは位置ベクトルと幾何ベクトルを主に使います．

2.3 ベクトルの表記

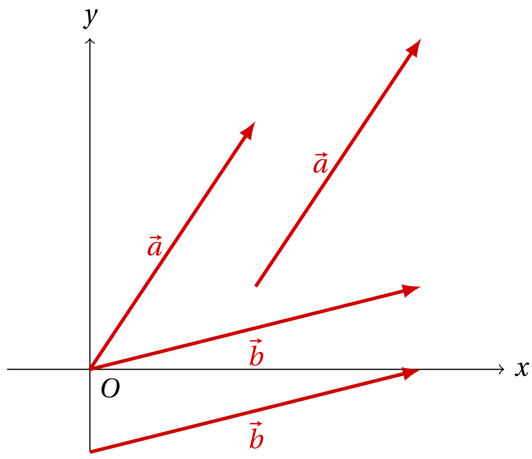
ベクトルは $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ と太字にしたり，$\vec{a},\vec{b}$ と矢印をつけて表します．また，始点を A，終点を B とすると $\vec{AB}$ と表すこともあります．この文書では矢印をつけてベクトルを表記します．例えば，次のようなベクトルを考えます．

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

ベクトルの個々の数を**成分**といい，このように成分を並べて表示することを**成分表示**といいます．この２次元ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ を位置ベクトルとして考えると，それぞれ XY 平面上の点に対応します．



また，幾何ベクトルとして考えるとベクトル $\vec{a}$ は X 方向に 2，Y 方向に 3 進むベクトル，ベクトル $\vec{b}$ は X 方向に 4，Y 方向に 1 進むベクトルとなります．幾何ベクトルの場合は始点が原点ではなく，任意の点が始点になり，大きさと方向が同じベクトルはすべて同じベクトルと考えられます．



幾何ベクトルは方向と大きさを表すベクトルです．方向は XY の値で表されていますが，大きさはどうでしょうか．この大きさはピタゴラスの定理を使って求めることができます．ベクトルの大きさは，絶対値記号を使って $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ と表します．

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

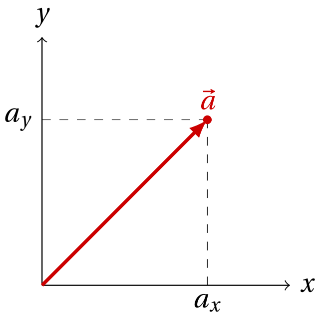
２次元ベクトルを一般化して書くと

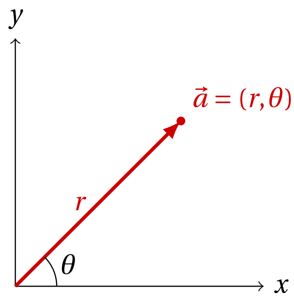
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

a_x は x 成分，a_y は y 成分を表します．上記のように縦に並べたベクトルを**列ベクトル**といいます．また，数を横に並べたベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix}$$

を**行ベクトル**といいます．２次元ベクトルは座標 (a_x, a_y) で表現することも，長さと x 軸の正方向からの角度 (r, θ) で表現することもできます．r は大きさと同じなので $r = |\vec{a}|$ です．





上図から次の関係がわかります．

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad a_x = |\vec{a}|\cos\theta \qquad a_y = |\vec{a}|\sin\theta$$

2.4 ベクトルの演算

ベクトルの加算は成分ごとに行います．

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

減算も同様に行えます．

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

同じベクトルでの引き算は

$$\vec{a} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは数字の 0 と同じように，成分がすべて 0 のベクトルとなり，ゼロベクトルといいます．

$-\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ大きさで，方向が逆のベクトルです．

ベクトルの加算では順番を変えても同じ結果になります（交換法則）．

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

同じベクトルを足し合わせると

$$\vec{a}+\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$$

という関係なので，ベクトルを整数倍するときは成分ごとに整数倍すればよいことがわかります．n を適当な実数とすれば

$$n\vec{a}=\begin{pmatrix}na_x\\na_y\end{pmatrix}$$

となります．ここでさらに任意の実数 m を使って

$$(m+n)\vec{a}=\begin{pmatrix}(m+n)a_x\\(m+n)a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ma_x\\ma_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}na_x\\na_y\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=m\vec{a}+n\vec{a}$$

と計算できるから

$$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$$

$$(m-n)\vec{a}=m\vec{a}-n\vec{a}$$

となり，分配法則が成り立つことがわかります．

次に，複数のベクトルの和を考えてみます．今，３つのベクトル

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix}$$

があります．この３つのベクトルの和は

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+b_x+c_x\\a_y+b_y+c_y\end{pmatrix}$$

となります．これは

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\begin{pmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+b_x+c_x\\a_y+b_y+c_y\end{pmatrix}$$

という形にしても計算できます．また，

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_x+c_x\\b_y+c_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x+b_x+c_x\\a_y+b_y+c_y\end{pmatrix}$$

としても同じ答えが得られます．よって

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

という結合法則が成り立ちます．このようにベクトルの加減算，実数倍の演算は自由に行うことができます．そして，これまで２次元ベクトルの演算を見てきましたが，数が増えても同じルールで計算することができるので，３次元やｎ次元のベクトルに対しても同様の演算が出来ます．

2.5 ベクトルの乗算

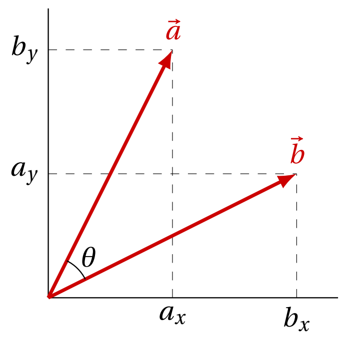
ベクトルの演算のところで実数倍の計算を行いました．ベクトルが数の集まりであるのに対して，１つの実数を**スカラー**といいます．ベクトルの大きさ $|\vec{a}|$ や $n\vec{a}$ の n はスカラーです．ベクトルとスカラーの乗算，つまりベクトル × 実数の乗算はベクトルの大きさを変えます．また，負の実数を乗算すると大きさが変化するとともに，ベクトルの方向は反転します．それではベクトルとベクトルの乗算を考えてみます．ベクトルの乗算には２種類あって，**内積**と**外積**があります．内積と外積はベクトル演算に大変便利な特性を持っていて，CG プログラミングでも頻繁に使うことになります．元々は四元数の積から来ているようですので，興味があれば四元数と内積で検索してみてください．ここではまず定義から見ていくことにします．

2.6 内積

いま，２つのベクトル

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$$

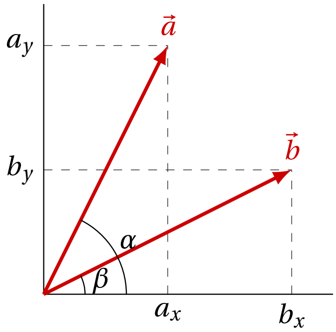
を考えます．下図の左のように，この２つのベクトルがなす角を θ としたとき



内積は次のようになります．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

この計算はベクトル × ベクトルですが，結果はスカラーになります．



上図のように，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が x 軸となす角を α, β とすると次の関係が成り立つことがわかります．

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos\beta = \frac{b_x}{|\vec{b}|} \quad \sin\alpha = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \sin\beta = \frac{b_y}{|\vec{b}|}$$

これを先程の式に代入すると

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\\ &= |\vec{a}||\vec{b}|\left(\frac{a_x b_x}{|\vec{a}||\vec{b}|} + \frac{a_y b_y}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)\\ &= a_x b_x + a_y b_y\end{aligned}$$

同じベクトル同士の内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x a_x + a_y a_y = a_x^2 + a_y^2$$

となり，ベクトルの大きさの二乗となります．内積を使ってベクトルの大きさを

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

と表わせます．これを**ノルム**といいます．ベクトルの大きさ（長さ）とノルムの値は同じですが，４次元以上のベクトルの大きさというと想像しにくいです．そのかわり，ノルムといえば誤解なく伝わります．ノルムは $||\vec{a}||$ と表記することもあります．

内積は行ベクトルと列ベクトルを使って次のようにも表わせます．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$

内積を使えば，２つのベクトルがなす角度を求めることができます．内積の式を変形して

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

ここで

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$$

という関係にあるので，代入すると

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

となり，角度を求めることができます．

次に，３次元の内積を見てみましょう．次のような３次元ベクトルを考えます．

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

この内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

となります．４次元以上の内積も結果は予想できそうですね．最初の方で，ベクトルが数の集まりということを説明しました．そのときに硬貨の枚数をベクトルで表したことを覚えていますか？　もう一度このベクトルを見てましょう．あなたのお財布の中にある硬貨の枚数をベクトルで表すと

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

でした．ここで，硬貨の額面をベクトルにすると

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 500 & 100 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．これらの内積を計算すると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 500 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 6 \times 1 = 926$$

というように総額が求まりました．２次元や３次元の位置ベクトルや幾何ベクトルをよく扱いますが，この硬貨のベクトルのように数ベクトルにおける内積のイメージを掴んでおくことも大事です．

2.7 ベクトルの外積

内積ではベクトル × ベクトルを計算するとスカラーになりました．外積はベクトル × ベクトルで結果がベクトルになります．こちらの方が直感的ではありますが，外積で求まるベクトルは最初はわかりづらいかもしれません．説明が天下り的になってしまいますが，１つ１つ確認しながら外積を見ていきましょう．

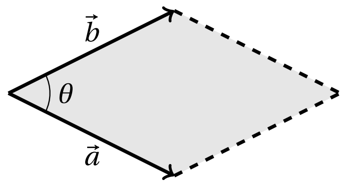
まず，外積は３次元ベクトルでのみ定義されます．よって，ここでのベクトルは３次元ベクトルです．次に外積の定義は次のようになっています．

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とすると，その大きさは

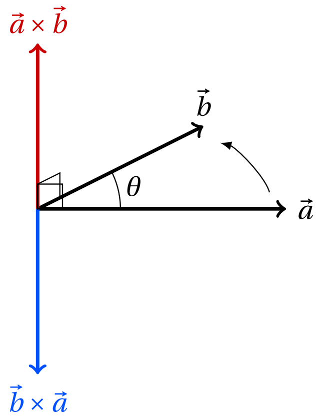
$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

となります．下図のように，この大きさは $\vec{a}, \vec{b}$ がつくる平行四辺形の面積になります．



また，$\vec{c}$ の向きは，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のそれぞれに直交する向きになります．たとえば，$\vec{a}, \vec{b}$ が xy 平面にあるとすると，$\vec{c}$ は z 軸方向を向きます．$\vec{c}$ の方向はベクトルをかける順番によって変

化します．それは右ねじの法則や右手系に準拠していて，xy 平面を上からみたときに，ベクトルをかける順番が右回りなら奥に，左回りなら手前に向かうベクトルとなります．



外積はベクトルをかける順番によって符号が変わります．

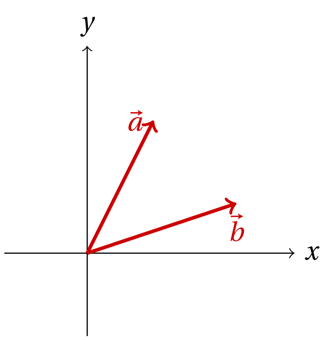
$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$$

つまり，交換法則が成り立ちません．

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

外積と内積を比べてみると，内積は２つのベクトルが平行の場合（$\cos 0 = 1$）値がもっとも大きくなりますが，外積はベクトルが並行の場合（$\sin 0 = 0$）大きさがもっとも小さくなります．逆にベクトルが直交しているとき，内積は 0 で，外積の大きさは最も大きくなります．

外積をもっと詳しく見ていく上でいくつか準備が必要です．用語が多く出てきますので，確認しながら読み進んでください．まず，一度 xy 平面について考えてみます．下図のように互いに平行でないベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ があります（このようなベクトルを**線形独立**といいます）．

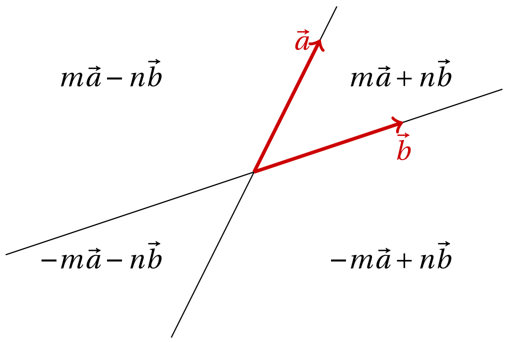


すると，適当な実数 m, n を使って XY 平面上にあるすべてのベクトルを次のように表わせ

ます．

$$\vec{p} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

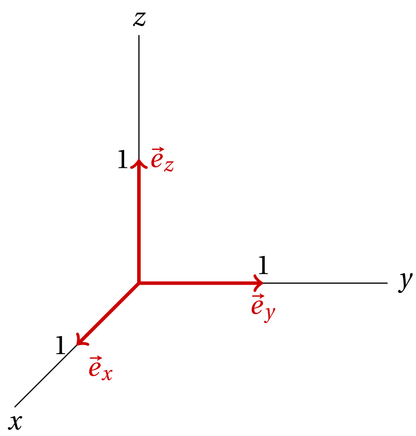
下図のように，加減算や符号を反転させて XY 平面上を網羅できることがわかります．



このような結合を**線形結合**または**1 次結合**といいます．２次元空間では互いに平行ではないベクトルが２つあれば，その線形結合ですべての平面を表すことができます．この関係は３次元でもそのまま使えて，互いに平行でないベクトルが３つあれば xyz 空間上にあるベクトルは適当な実数 m, n, k を使って

$$\vec{p} = m\vec{a} + n\vec{b} + k\vec{c}$$

となります．このようにベクトルの線形結合で張ることのできる空間を**線形空間**，または**ベクトル空間**といいます．もちろん，n 次元に対しても同様です．
線形結合で２次元平面や３次元空間のすべてのベクトルを網羅できることがわかりました．任意の平行でないベクトルを２つもしくは３つあればいいわけですが，ここで基本的なベクトルを使うと，線形結合がよりわかりやすくなります．そのようなベクトルを**基本ベクトル**といいます．具体的には，下図のように，x, y, z 軸に沿った大きさが１のベクトルを使います．



このような大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**といいます．単位ベクトルを列ベクトルで表記すると，２次元の場合は

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

また，３次元の場合は

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります．この単位ベクトルを使うと，座標の点を位置ベクトルとすれば，単位ベクトルの係数がそのまま座標になります．このような単位ベクトルを**基本ベクトル**または**基底**といいます．たとえば，２次元の座標 $(2, 1)$ を単位ベクトルの線形結合で表すと

$$\vec{p} = 2\vec{e}_x + 1\vec{e}_y = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります．一般的に

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

というベクトルは

$$\vec{a} = \vec{a}_x\vec{e}_x + \vec{a}_y\vec{e}_y$$

と書けます．３次元ベクトルも

$$\vec{a} = \vec{a}_x\vec{e}_x + \vec{a}_y\vec{e}_y + \vec{a}_z\vec{e}_z$$

となります．これら基本ベクトルに対して内積を使うと

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$$

という関係になり，外積に対しては

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

という関係になります．ここで

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

という２つのベクトルの内積を単位ベクトルを使って計算すると

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$$

$$\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y$$

となり

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y\right) \cdot \left(b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y\right)$$

計算すると

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \left(a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y\right)\cdot\left(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y\right)\\
&= a_x b_x(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x) + a_x b_y(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y) + a_y b_x(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x) + a_y b_y(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y)\\
&= a_x b_x \times 1 + a_x b_y \times 0 + a_y b_x \times 0 + a_y b_y \times 1\\
&= a_x b_x + a_y b_y
\end{aligned}
$$

ベクトルの内積が得られていることがわかります．さらに，任意のベクトル $\vec{a}$ と単位ベクトルの内積をとると，そのベクトルの成分を求めることができます．

$$
\vec{a}\cdot\vec{e}_x = \begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_x\cdot 1 + a_y\cdot 0 = a_x
$$

$$
\vec{a}\cdot\vec{e}_y = \begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_x\cdot 0 + a_y\cdot 1 = a_y
$$

これで外積に必要な準備は出来ました．外積について，基本ベクトルを使って計算してみます．つぎの２つのベクトルを考えます．

$$
\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}
$$

これらベクトルを基本ベクトルを使って

$$
\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z
$$

$$
\vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z
$$

となります．そして，ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積は

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= \left(a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z\right)\times\left(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z\right) \\
&= a_xb_x\left(\vec{e}_x\times\vec{e}_x\right) + a_xb_y\left(\vec{e}_x\times\vec{e}_y\right) + a_xb_z\left(\vec{e}_x\times\vec{e}_z\right) \\
&\quad + a_yb_x\left(\vec{e}_y\times\vec{e}_x\right) + a_yb_y\left(\vec{e}_y\times\vec{e}_y\right) + a_yb_z\left(\vec{e}_y\times\vec{e}_z\right) \\
&\quad + a_zb_x\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_x\right) + a_zb_y\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_y\right) + a_zb_z\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_z\right) \\
&= a_xb_x\times 0 + a_xb_y\vec{e}_z - a_xb_z\vec{e}_y \\
&\quad - a_yb_x\vec{e}_z + a_yb_y\times 0 + a_yb_z\vec{e}_x \\
&\quad + a_zb_x\vec{e}_y - a_zb_y\vec{e}_x + a_zb_z\times 0 \\
&= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{e}_x + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{e}_y + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

これを列ベクトルに書き直すと

$$
\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix}
$$

となります.

2.8 正規直交化基底ベクトル

つぎのベクトルを線形空間の基底のひとつにする場合を考えます.

$$
\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}
$$

基底にするには，このベクトルを単位ベクトルにする必要があります．つまり，大きさを 1 にします．そのためには，ベクトルの各成分をそのベクトルの大きさで割ります.

$$
\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}
$$

このような操作を**正規化**といいます．今は 3 次元ベクトルを考えているので，基底ベクトルはあと 2 つ必要です．これは内積を使って任意に求めることができます．ベクトル $\vec{e}_a$ と線形独立な（平行でない）ベクトル $\vec{b}$ を考えます．つぎに，基底ベクトル $\vec{e}_a$ との内積を計算して

$$
\vec{e}_a\cdot\vec{b} = k
$$

k が得られたとします．ここで，新たに

$$\vec{b}' = \vec{b} - k\vec{e}_a$$

というベクトルをつくります．このベクトルと基底ベクトル $\vec{e}_a$ との内積を計算すると

$$\vec{e}_a \cdot \vec{b}' = \vec{e}_a \cdot \vec{b} - k\vec{e}_a \cdot \vec{e}_a = k - k = 0$$

内積の値が 0 なので，この 2 つのベクトルは直交関係になっています．ベクトル $\vec{b}'$ を基底とするために正規化をします．

$$\vec{e}_b = \frac{\vec{b}'}{|\vec{b}'|}$$

残りの基底ベクトルも内積を使って求められます．基底ベクトル $\vec{e}_a, \vec{e}_b$ と線形独立なベクトル $\vec{c}$ を決めて，２つの基底ベクトルとの内積をとります．

$$\vec{e}_a \cdot \vec{c} = l \qquad \vec{e}_b \cdot \vec{c} = m$$

この l, m を使って

$$\vec{c}' = \vec{c} - l\vec{e}_a - m\vec{e}_b$$

というベクトルを作ります．同じように基底ベクトルとの内積をとると

$$\vec{e}_a \cdot \vec{c}' = \vec{e}_a \cdot \vec{c} - l\vec{e}_a \cdot \vec{e}_a - m\vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = l - l - 0 = 0$$

$$\vec{e}_b \cdot \vec{c}' = \vec{e}_b \cdot \vec{c} - l\vec{e}_b \cdot \vec{e}_a - m\vec{e}_b \cdot \vec{e}_b = m - m - 0 = 0$$

となり，ベクトル $\vec{c}'$ が 2 つの基底ベクトルと直交関係にあることがわかります．このベクトルも基底とするために正規化します．

$$\vec{e}_c = \frac{\vec{c}'}{|\vec{c}'|}$$

これで 3 つの基底ベクトル $\vec{e}_a, \vec{e}_b, \vec{e}_c$ が得られました．このような基底ベクトルを**正規直交化基底ベクトル**といいます．また，内積を使って基底ベクトルをつくる方法を**シュミットの正規直交化法**または**グラム・シュミットの直交化法**と呼びます．

2.9 内積の特性

それでは CG プログラミングでどのように内積や外積が使われるのか，簡単に紹介していきます．まずは内積からです．すでに説明しているものも含まれていますので復習のつもりで確認してみてください．また，CG に関する用語についてはある程度理解していることを前提としています．

2.9.1 ベクトル間の角度

２つのベクトルがなす角度 (θ) を求められます．式で表すと

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

となります．２次元ベクトルの場合

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

３次元ベクトルの場合

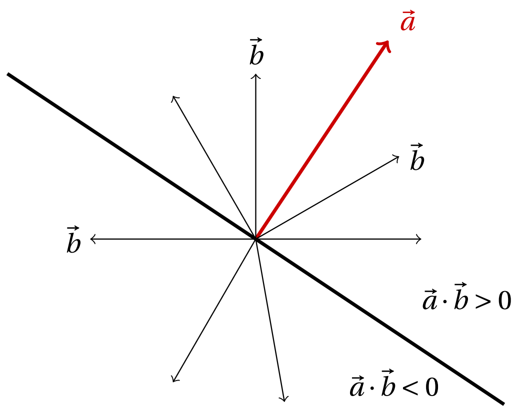
$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

となります．

次に２つのベクトルがお互いに直交しているかがわかります．内積の定義を確認してみると

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

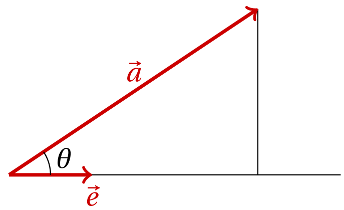
直交しているということは２つのベクトル間の角度が 90 度となり，$\cos\theta$ の値が 0 になります．よって，内積の値が 0 なら直交しています．あと，２つのベクトルがどれくらい同じ方向を向いているかがわかります．次の図を見てください．



ベクトル $\vec{a}$ に垂直な平面があるとします．この平面に関して，ベクトル $\vec{a}$ と同じ側にあるベクトルは，ベクトル $\vec{a}$ との内積が正の値になります．逆に反対の方向を向いているときは負の値になります．たとえば，ある表面に対してその法線ベクトルと視線ベクトルの内積をとることで，その表面が見えるかどうかがわかります．

2.9.2　ベクトル方向の長さを測る

ベクトル $\vec{a}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ の内積を取ると，ベクトル $\vec{a}$ を単位ベクトル $\vec{e}$ の方向で測った値になります．



式で表すと

$$\vec{a}\cdot\vec{e} = |\vec{a}|\cos\theta$$

たとえば XYZ の正規直交基底ベクトルを使って，それぞれの軸で内積をとると，各軸の値を求められます．いま，ベクトル $\vec{p}$ が (4,2,-3) の座標を指していた場合

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

となります.

2.9.3　ランバートの余弦則

ある表面に入射してくる光の量は，その表面の法線方向と入射方向の余弦に比例します．これを**ランバートの余弦則**といいます．表面の単位面積あたりの入射光の強度は，表面の法線方向と光源ベクトル（表面から光源への方向）が同じほど大きくなります．逆に方向が離れるほど入射した光が照らす面積が大きくなり，単位面積あたりの光の強度が小さくなります．この光の強度は内積を使って求められます．法線ベクトルと光源ベクトルの内積を単位面積あたりの強度にかけてあげれば，照度を求めることができます．

2.9.4　衝突判定

内積は衝突判定でかなり活躍します．ノルムは平方根の計算が入りますが，内積なら長さの２乗が求まりますので，２乗のまま使う場合があります．平方根の処理はなるべく回避することで処理速度が速くなりますから．あと，ベクトルへの射影に内積が使われます．

2.10 外積の特性

2.10.1　座標系の決定

直交する３軸のうち，２つの基底ベクトルがわかっていれば，それらの外積をとることで残りの１軸を決めることができます．たとえば，進行方向 (Z) と天井方向 (Y) がわかれば左右方向 (X) がわかります．

2.10.2 法線の決定

あるポリゴンの法線は，ポリゴンの２辺から外積を使って求められます．また，法線と接線から従法線を求めるときも外積を使います．

2.10.3 衝突判定

外積も衝突判定に使われます．たとえば分離軸判定によく使われます．

3 行列

3.1 行列はベクトルの集まり

ベクトルは数の集まりと説明しました．それに対して行列はベクトルの集まりと考えることができます．例えば

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

これら列ベクトルを行列にまとめると

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

また，次の行ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

を行列にまとめると

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

となります．このように行列はベクトルが並んでいるものと考えると，行列演算においてもベクトルの考え方が導入できてわかりやすいと思います．

3.2 行列の表記

行列は A のように大文字で表します．わかりやすく $\tilde{A}$ と表記することもあります．行列を一般的に表記すると

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

となります．行列では各成分を要素ということもあります．成分の添字として 2 つの数字を使います．例えば 12 という添字は 1 行 2 列目の成分を指しています．右辺の成分を i, j を使って

$$A = [a_{ij}]$$

と略記することもあります.

3.3 行列の演算

ベクトルのときは各成分ごとに演算しました．行列はベクトルの集まりなので，各ベクトルを成分と考え加減算を行うとわかりやすいです.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という 2 つの行列を考えます．この 2 つの行列の加減算は

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

となります．ここでは行ベクトルで演算しましたが，列ベクトルでも構いません．行列の加減算を一般的に書くと

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

$$A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}]$$

行列の加減算では行と列の数が同じ行列どうしでないと計算できません．同じ行列を減算す

ると

$$A - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となって，すべての成分が 0 になります．これをゼロ行列といいます．

次に行列のスカラー倍は

$$4A = 4 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 4\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 16 & 20 & 24 \end{pmatrix}$$

となります．これも一般的に書くと，スカラーを k とすれば

$$kA = [ka_{ij}]$$

となります．

3.4 行列の乗算

行列の乗算はベクトルの内積を使います．ここで，もう一度ベクトルの内積を思い出してみましょう．いま，

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right) \quad \vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$$

の２つのベクトルを考えます．この内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

と与えられます．これは行ベクトルと列ベクトルの各成分どうしをかけていることがわかります．左の行ベクトルを行列にしてみると

$$A \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

このとき，行列の行ベクトルごとに内積を計算すると

$$A \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + a_{13} b_3 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + a_{23} b_3 \end{pmatrix}$$

となります．右の列ベクトルも行列にしてみると

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

これをベクトルで表すと

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{pmatrix}$$

となります．ここで注意することは行列の乗算ではかけられる側の行成分の数とかける側の列成分の数が同じである必要があります．また，かけられる側の行数を m，かける側の列数を n とすると，これら行列の乗算をすれば m 行 n 列の行列になります．

行列をベクトルの集まりと考えるのは理由があります．CG プログラミングでは行列を座標変換でよく使います．あるベクトルに行列を乗算すると回転や拡縮されます．これを式で表すと，あるベクトルを $\vec{p}$，行列を A，変換後のベクトルを $\vec{p}'$ とすれば

$$\vec{p}' = \vec{p}A$$

ここで行列 A の成分が正規直交基底ベクトルだとすると

$$\vec{p}' = \vec{p}A = \begin{pmatrix} \vec{p} \cdot \vec{e}_x & \vec{p} \cdot \vec{e}_y & \vec{p} \cdot \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

となります．内積の特性には「ベクトル方向の長さを測る」というのがあります．この式はベクトル p を行列 A の正規直交基底ベクトルをつかって成分ごとに長さを測っていることを表しています．例えば，行列 A が回転行列とすると，行列 A は回転された正規直交基底ベクトルの集まりです．これをベクトル p にかけると，回転された座標系でベクトル p を測り直しているわけです．結果的にベクトル p は回転されることになります．一般的に行列 A がベクトル $\vec{p}$ から $\vec{p}'$ に**写像**を表しているといいます．

次に，行列の乗算で重要な性質を見てみます．今，２つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

を乗算すると

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}$$

というように，交換法則が成立しません．つまり

$$AB \neq BA$$

です．

3.5 転置

行と列を入れかえた行列を**転置行列**といいます．行列 A の転置行列を ${}^tA$ または A^T と表します．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

転置行列の表記方法を使えば列ベクトルと行ベクトルは次のような関係になります．

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

3.6 単位行列

ある行列 A に別の行列 E を乗算すると A になるとき，行列 E を**単位行列**といいます．これは数字の 1 に相当します．

$$AE = A \quad EA = A$$

行列の乗算で見たとおり，行列の行数と列数によって乗算で得られる行列の行と列の数が異なります．そのため，単位行列は行数と列数が同じ**正方行列**です．正方行列において，左上から

右下への対角線上にある成分を**対角成分**といいます．次の行列の場合，対角成分は a_{11}, a_{22}, a_{33} です．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

単位行列は対角成分がすべて 1，それ以外の成分がすべて 0 の行列です．以下は 3 行 3 列の単位行列です．

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで次の記号を導入します．

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

これは**クロネッカーのデルタ**といいます．この記号は i と j が同じ場合（例えば a_{11}, a_{22}）に 1 となり，i と j が異なる場合（例えば a_{12}, a_{31}）は 0 になります．これを使うと単位行列は

$$E = [\delta_{ij}]$$

と表わせます．

3.7 逆行列

ある行列 A に別の行列 X を乗算すると単位行列 E になる行列 X を考えます．ちょうど逆数のような働きをします．

$$AX = E$$

これを 2 行 2 列の行列で考えてみます．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の関係を満たします．これを計算すると

$$\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これから，次の連立方程式を作ります

$$\begin{cases} ap+br=1 \\ cp+dr=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} aq+bs=0 \\ cq+ds=1 \end{cases}$$

これを解くと

$$p=\frac{d}{ad-bc} \quad r=\frac{-c}{ad-bc} \qquad q=\frac{-b}{ad-bc} \quad s=\frac{a}{ad-bc}$$

X に代入すると

$$X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられます．このような行列を**逆行列**といい，行列 A の逆行列を A^{-1} と表記します．

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

逆行列は必ず存在するわけではなく，もし $ad-bc=0$ とすると分母が 0 になるため，無限大となって逆行列は存在しません．逆行列が存在する行列のことを**正則行列**または**正則**といいます．

ここで次の連立方程式を考えます．

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

これは行列とベクトルを使って

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と書けます．最初の行列を**係数行列**，右辺を**定数項**といいます．これらは

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{p}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と表記すると，連立１次方程式は

$$A\vec{x} = \vec{p}$$

と表わせます．このとき，A が正則であれば解が存在し，逆行列を使って

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{p} \\ A^{-1}A\vec{x} &= A^{-1}\vec{p} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{p} \end{aligned}$$

解を求めることができます．実際に代入してみると

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{p} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dp-bq \\ -cp+aq \end{pmatrix}$$

よって

$$x = \frac{dp-bq}{ad-bc} \quad y = \frac{aq-cp}{ad-bc}$$

と解を求めることができます．

3.8 行基本変形

連立１次方程式を逆行列を使って解く方法を見てみました．２行２列の逆行列を求めるのはさほど難しくありませんが，行列の行列数が増えると計算が複雑になります．ここでは，逆行列を求める方法のうち，行基本変形を使った方法を説明します．まずは，連立１次方程式を行基本変形を使って解く方法から見ていきます．
次の連立方程式を解いてみます．

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

普通に解くと消去法や代入法を使って解きます．式を実数倍したり，お互いに足したり引いたりして整理していきます．このような操作をしても解は変わりません．そこで，まず連立１次方程式の係数と定数項を取り出して次のような行列を作ります．

$$\begin{pmatrix} a & b & \vdots & p \\ c & d & \vdots & q \end{pmatrix}$$

このような行列を**係数拡大行列**といいます．この行列に対して，行に実数をかけたり，行どうし足したり引いたりして

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & e \\ 0 & 1 & \vdots & f \end{pmatrix}$$

のように左の部分が単位行列になるように変形すると，解が求められます．これは

$$\begin{cases} 1 \times x + 0 \times y = e \\ 0 \times x + 1 \times y = f \end{cases}$$

という形の式を変形したものと考えることができます．実際に変形してみます．

$$\begin{pmatrix} a & b & \vdots & p \\ c & d & \vdots & q \end{pmatrix}$$

ここで係数行列の各行を $r_1 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, $r_2 = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$ と表します．右側に基本変形の内容を記載し，左側は変形後を表しています．

$$\begin{pmatrix} ac & bc & \vdots & cp \\ ac & ad & \vdots & aq \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 \times c \\ r_2 \times a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} ac & bc & \vdots & cp \\ 0 & ad-bc & \vdots & aq-cp \end{pmatrix} \quad r_2 - r_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{bc}{ac} & \vdots & \frac{cp}{ac} \\ 0 & ad-bc & \vdots & aq-cp \end{pmatrix} \quad r_1 \div ac$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{bc}{ac} & \vdots & \frac{cp}{ac} \\ 0 & \frac{bc}{ac} & \vdots & \frac{aq-cp}{ad-bc} \cdot \frac{bc}{ac} \end{pmatrix} \quad r_2 \times \frac{bc}{ac(ad-bc)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{cp}{ac} - \frac{aq-cp}{ad-bc} \cdot \frac{bc}{ac} \\ 0 & \frac{bc}{ac} & \vdots & \frac{aq-cp}{ad-bc} \cdot \frac{bc}{ac} \end{pmatrix} \quad r_1 - r_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ 0 & \frac{bc}{ac} & \vdots & \frac{aq-cp}{ad-bc} \cdot \frac{bc}{ac} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{pmatrix} \quad r_2 \div \frac{bc}{ac}$$

よって

$$x = \frac{dp-bq}{ad-bc} \quad y = \frac{aq-cp}{ad-bc}$$

と解が求まりました．このような変形はすべて行どうしで行っているので行列の**行基本変形**といいます．

3.9 逆行列を求める

行基本変形を使って連立１次方程式を解くことができました．これを応用して逆行列を求めることができます．次の行列の逆行列を求めてみます．

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき逆行列を

$$X = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

とおいて

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす X が逆行列となります．これを，拡大係数行列のように

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

として，行基本変形を行います．

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad r_1 - r_2$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad r_2 - 2r_1$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad r_1 + r_2$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \quad (-1)r_2$$

ここで，逆行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

と求められます．実際に確かめてみると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times -1 + 2\times 2 & 3\times 2 + 2\times -3 \\ 2\times -1 + 1\times 2 & 2\times 2 + 1\times -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となって，求めた解が逆行列となっていることがわかります．なぜ，この操作で逆行列を求めることができるでしょうか．最初の式に戻って考えてみます．

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これを連立１次方程式にすると

$$\begin{cases} 3e+2g=1 \\ 2e+1g=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3f+2h=0 \\ 2f+1h=1 \end{cases}$$

この方程式を満たす解を求める必要があります．連立１次方程式を解くときは拡大係数行列を作って行基本変形を行いました．まずは，それぞれの拡大係数行列を作ると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

係数行列は２つとも同じなので，行基本変形を使って変形する操作は両方とも同じになります．そこで定数項を２つ並べて同時に変形して解を求めています．この方法はすべての正方行列に対して使うことができます．任意の n 次正方行列と n 次単位行列を A, E とすると (A, E) のかたちをした行列は，行基本変形で $\left(E, A^{-1}\right)$ に変形できます．

3.10 階数

一般的に，すべての連立方程式に解が存在するとは限りません．方程式の数が変数の数より多い場合には解が定まりません．また，変数の数が方程式の数よりも多い場合には，解が無数に存在することになります．

連立１次方程式から拡大係数行列をとりだして，行基本変形をおこなうと，成分がすべて 0 になる行ができることがあります．この場合，その行の方程式は意味をなしません．例えば３元連立１次方程式があったとき，拡大係数行列をとりだして，行基本変形を行い，成分がすべて 0 になる行が１つ出来たとすると，変数が３つ，方程式が２つしかないので解が無数に存在します．一般的に，行基本変形を行って，成分が 0 意外の行の数を，その行列の**階数**といいます．階数は実質的な方程式の数です．連立１次方程式を

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

としたとき，行列の階数を $rankA$ とすると

$$rankA = rank\left[A, \vec{b}\right]$$

のときに解が存在します．変数 n 個の連立１次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ が解をもつとき，

$$n - rankA$$

を**解の自由度**といいます．$n = rank\left[A, \vec{b}\right]$ のとき，ただ１組の解が存在し，$n > rank\left[A, \vec{b}\right]$ のとき，無数の解が存在します．

4 行列式

4.1 行列式の特性

行列のところで行基本変形を使った連立１次方程式を解きました．その方法以外にもこの行列式を使って解くことができます．特定の条件を満たすと行列式の計算が簡単になるため，行基本変形を使って変形してから行列式を計算するという方法もあります．次に，行列が正則（逆行列が存在する）かどうかが行列式からわかります．そして，行列式はベクトルとも関係があります．面積（体積），外積，スカラー３重積に行列式が使われます．

4.2 行列式の定義

行列式は正方行列から得られるスカラーです．次のように表します．

$$\det A \quad \text{または} \quad |A|$$

行列の成分を表記して

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

というようにすることもあります．

行列式を計算するために，n 次正方行列の各行各列からそれぞれ１つずつとりだした n 個の成分の積を $n!$ 個作ります．それらに対応した符号をかけたものの総和が行列式となります．ややこしいですが，１つずつ確認していきます．

最初に，行列の各行各列からそれぞれ１つずつとりだして n 個の成分の積をつくることについてです．ここで次の行列式を考えてみます．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

まず，１列目 (a_{11}, a_{12}) から a_{11} を取り出します．次に２列目 (a_{12}, a_{22}) からは１列目で取った行の成分を選ぶことができません．つまり，a_{12} を取り出すことができませんので，a_{22} を取り出します．よって取り出した成分の積は

$$a_{11}a_{22}$$

となります．今度は１列目から a_{21} を取り出すと，２列目の a_{22} は取り出せないので，a_{12} を取り出すことになります．よって

$$a_{12}a_{21}$$

となります．今度は 3 次正方行列で考えてみます．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

１列目から a_{11} を取り出します．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

２列目では a_{22}, a_{32} のどちらかを取り出せますので，a_{32} を取り出してみます．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{23} \\ \cdot & a_{32} & \cdot \end{vmatrix}$$

そうすると 3 列目では a_{23} しか取り出せないので

$$a_{11}a_{32}a_{23}$$

となります．同じように $a_{21}a_{12}a_{33}$ を取り出す場合は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \cdot & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot \\ a_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{33} \end{vmatrix}$$

となっています．このような成分の積が $n!$ 個作れます．$n!$ は階乗を表していて，$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ という意味です．つまり，2 次正方行列では $2! = 1 \times 2 = 2$ 個，3 次正方行列では $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ 個作れることになります．確認してみましょう．

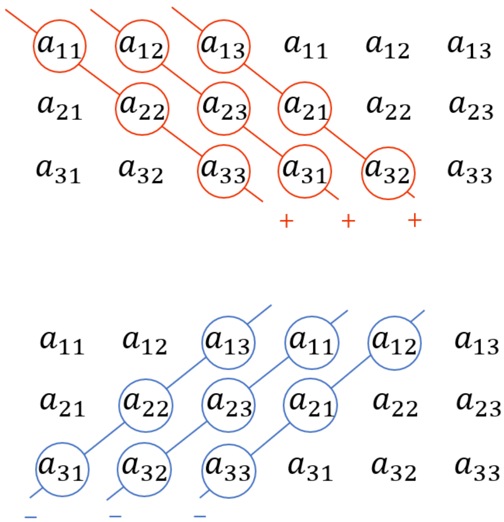
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{23} \\ \cdot & a_{32} & \cdot \end{vmatrix} = a_{11}a_{32}a_{23} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot \\ a_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12}a_{33} \qquad \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a_{13} \\ a_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{32} & \cdot \end{vmatrix} = a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a_{13} \\ \cdot & a_{22} & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = a_{31}a_{22}a_{13} \qquad \begin{vmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{23} \\ a_{31} & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot \\ \cdot & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \qquad \begin{vmatrix} \cdot & a_{12} \\ a_{21} & \cdot \end{vmatrix} = a_{12}a_{21}$$

次に，作り出した成分の積に符号をかけるのですが，このルールが置換数とか偶置換・奇置換とか面倒です．ところが，３次行列式の場合は単純明快な法則があります．次の図を見てください．

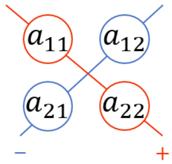


３次行列式の成分を横に２回並べて，左上から右下に取り出した成分の積は正の符号，右上から左下に取り出した成分の積は負の符号がつきます．これを**サラスの法則**といいます．この法則を使って符号をつけると，３次行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

となります．２次の場合は下図のように似たような法則になります．



よって，２次行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

となります．このような法則は２次と３次行列式のみで，４次以上にはこのようなルールは使えません．ですが，４次以上の行列式は３次行列式に変形できることが知られているので，２次と３次を理解していれば何とかなります．

4.3 余因子展開

前のところで４次以上の行列式は３次行列式に変形できると言及しました．これについて詳しく見ていきましょう．まず，３次行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

でした．ここで１行目の成分 (a_{11}, a_{12}, a_{13}) でくくると

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

となります．これは，行列式を使って

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

と表わせます．このようにある行または列の成分で展開することができます．そして，このような展開はすべての行列式に対して行うことができます．つまり，例えば５次行列式のときは，４次行列式に，そこからさらに３次行列式に展開することができるわけです．ここで，このような展開を行ったときに，行列式に正負の符号がつきます．一般にある成分 (a_{ij}) でくくった行列式の符号は

$$(-1)^{i+j}$$

となります．これは次のように

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

という関係になっています．n 次行列式から i 行 j 列の成分でくくった $n-1$ 次行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを**余因子**といいます．そして，ある行，または列の成分の余因子をつかって行列式を展開することを**余因子展開**といいます．この余因子展開を使って，４次行列式を１行目の成分で展開すると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

となります．

4.4 行列式の基本性質

ここでは行列式の様々な性質を見ていきます．一般的な行列は表記せず，３次行列式や２次行列式を使って説明しますが，n 次行列に対してもそのまま適用することができます．

まず，ある行列の行または列のすべての成分が 0 であれば，行列式の値が 0 になります．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

これはすべての成分の積に，0 となっている行または列の成分が含まれているからです．次に，行列式の２つの行または列が同じ場合は行列式の値が 0 になります．たとえば，２次行列式だと

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

となります．３次行列式では

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

これの３行目に１行目を代入してみると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{12} - a_{12}a_{21}a_{13}$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{11}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{11}) +$$

$$(a_{12}a_{23}a_{11} - a_{11}a_{23}a_{12}) +$$

$$(a_{13}a_{21}a_{12} - a_{12}a_{21}a_{13})$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

となって 0 になります．

今度は次のような３次正方行列を考えます．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

この行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}\left(a_{22}+b_{22}\right)a_{33}-a_{11}\left(a_{23}+b_{23}\right)a_{32}-a_{12}\left(a_{21}+b_{21}\right)a_{33}$$

$$+a_{12}\left(a_{23}+b_{23}\right)a_{31}+a_{13}\left(a_{21}+b_{21}\right)a_{32}-a_{13}\left(a_{22}+b_{21}\right)a_{31}$$

となります．この括弧内を分解して展開すれば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

となります．つまり，ある行が２項の和になっている場合には，２つの行列式に分解することができます．また２項が同じ数の場合

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21} & a_{22}+a_{22} & a_{23}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

となります．この演算は繰り返し行うことができるので

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成立します．これは行だけでなく列を k 倍すると，行列式の値も k 倍になります．

次に行の入れ換えによって行列式の符号が反転します．余因子展開を使って確認してみます．

３次行列式を１行目を余因子展開をすると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ここで，１行目と２行目を入れ換えて，２行目で余因子展開を行うと

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

となるので

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

となります．今度は１行目と３行目を入れ替えて，３行目で余因子展開をすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} \end{aligned}$$

符号は変わっていませんが，余因子の行が入れ替わっています．元の入れ替える前と比べると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= -a_{11}a_{23}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \end{aligned}$$

符号が反転していることがわかります．

ここまでいくつかの基本性質を見てきました．これをまとめると

- 行列式の行または列のすべての成分が 0 であれば，行列式の値は 0
- 行列式の２つの行または列が同じ場合，行列式の値は 0
- 行列式のある行が２項の和になっている場合，２つの行列式に分解できる
- 行列式のある行または列を k 倍すると，行列式の値も k 倍
- 行列式の行または列を入れ替えると，行列式の値の符号が反転する

となります．

4.5 行および列基本変形

係数行列および拡大係数行列に対して行った行基本変形と同じような操作が行列式に対しても行うことができます．さらに行列式では，列に対しても同様の操作を行うことができます．た

だし，行列式における行基本変形では注意することがあります．まず，行列式では他の行の実数倍をある行に加えても，その値が変わりません．次の３次行列式で２行目に３行目の k 倍したものを加算した場合

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

となり，右辺の２項目は２つの行が同じなので，その値は 0 です．よって

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

となります．次に，行基本変形である行を m 倍すると，行列式の値も m 倍されます．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{21}+na_{31} & ma_{22}+na_{32} & ma_{23}+na_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

そして，１列目の２行目以降のすべての成分，または１行目の２列目以降のすべての成分が 0 のとき，$n-1$ 次行列式に変形することができます．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

これらを使って実際に次の行列式を計算してみます．

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

１列目が最初の成分以外 0 なので

$$3\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

と変形できます．次に，３行目に -2 倍した２行目を足します

$$3\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

そして，１行目と２行目を入れ換えると，符号が反転します．

$$-3\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

ここで，また１列目の最初の成分以外が 0 になったので

$$(-3 \times 2)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

となりました．あとは２次行列式を計算して

$$-6\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -6 \times (7 \times -3 - 2 \times -2) = -6 \times -17 = 102$$

となります．この行列式を余因子展開で計算した場合

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3 \times 0)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} - (3 \times 7)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (3 \times 2)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -21\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -21(6 - 12) + 6(16 - 20) = -21 \times -6 + 6 \times -4 = 126 - 24$$

$$= 102$$

となります．

行列式の計算では，行列を特定の形に変形すると計算が簡単になります．次の行列を見てください．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

このように対角成分以外のすべての成分が 0 になっている行列のことを**対角行列**といいます．

この対角行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

のように，対角成分の積になります．さらに

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

このような対角成分の下にある成分がすべて 0 の行列のことを**三角行列**または**上三角行列**といいます．これもまた，行列式の値は対角成分の積になります．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

これは，１列目の最初の成分以外がすべて 0 なので

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23} \times 0\right) = a_{11}a_{22}a_{33}$$

という関係になるからです．このことから，行または列基本変形を使って三角行列に変形することができれば行列式の計算が簡単に行えることがわかります．これを使って次の行列式を計算してみます．

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix} \quad r_2 - 3r_1$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & -2 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix} \quad r_1 - 2r_2$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 9 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix} \quad r_1 \Leftrightarrow r_2$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & -15 & 57 \end{vmatrix} \quad r_3 - 17r_1$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -78 \end{vmatrix} \quad r_3 + (-15)r_2$$

$$= -(1 \times -1 \times -78) = -78$$

これも余因子展開による計算を見てみます.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 19 & 23 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 17 & 23 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 17 & 19 \end{vmatrix}$$

$$= 2(11 \times 23 - 13 \times 19) - 3(7 \times 23 - 13 \times 17) + 5(7 \times 19 - 11 \times 17)$$

$$= 2(253 - 247) - 3(161 - 221) + 5(133 - 187)$$

$$= 2 \times 6 - 3 \times (-60) + 5 \times (-54)$$

$$= 12 + 180 - 270 = -78$$

となります.

4.6 クラメールの公式

行列式を使って 3 元連立 1 次方程式を解く方法を見ていきます．次の連立 1 次方程式を考えます.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3
\end{cases}
$$

この係数行列は

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{pmatrix}
$$

となります．この行列式の１列目に x_1 をかけると

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\
a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\
a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
= x_1
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
$$

となって，最初の行列式の値が x_1 倍されます．ここで，最初の方程式を変形すると

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\
a_{21}x_1 = b_2 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \\
a_{31}x_1 = b_3 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3
\end{cases}
$$

という関係にあるので，行列式に代入すると

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\
a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\
a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\
b_2 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\
b_3 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
$$

この右辺の行列式を分解すると

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\
b_2 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\
b_3 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix} \\
&\qquad =
\begin{vmatrix}
b_1 & a_{12} & a_{13} \\
b_2 & a_{22} & a_{23} \\
b_3 & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
- x_2
\begin{vmatrix}
a_{12} & a_{12} & a_{13} \\
a_{22} & a_{22} & a_{23} \\
a_{32} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
- x_3
\begin{vmatrix}
a_{13} & a_{12} & a_{13} \\
a_{23} & a_{22} & a_{23} \\
a_{33} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

このとき，右辺の２項目と３項目の行列式には同じ列が含まれているので，行列式の値は 0 になります．整理すると

$$
x_1
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
b_1 & a_{12} & a_{13} \\
b_2 & a_{22} & a_{23} \\
b_3 & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
$$

という関係が成立します．よって

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

となって，x_1 の解を求めることができます．同じように

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

と求めることができます．また，次のように 2 元連立 1 次方程式の場合

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

この解は

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

となります．このように，分母に行列式，分子はその行列式の列を 1 列ずつ定数項に置き換えていくと解が求まります．これを**クラメールの公式**といいます．このクラメールの公式は n 次行列式すべてにあてはめることができます．

4.7 ベクトルと行列式

最後にベクトルと行列式との関係性を見ていきます．いま，２つの行ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x & b_y \end{pmatrix}$$

をもつ行列

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}$$

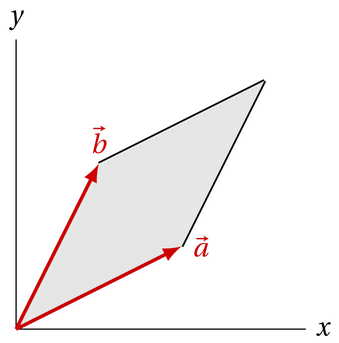
の行列式は

$$\det\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$$

となります．行ベクトルを列ベクトルにしても行列式の値は同じになります．

$$\det\begin{pmatrix} {}^t\vec{a} & {}^t\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - b_x a_y = a_x b_y - a_y b_x$$

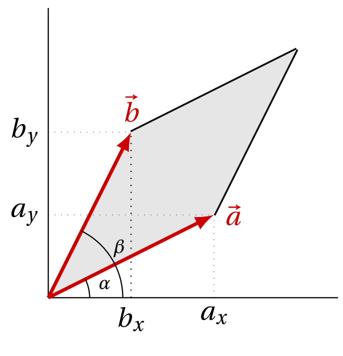
この値は，２つのベクトルを辺とする平行四辺形の面積になります．



この平行四辺形の面積は

$$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

で与えられます．ここで θ は２つのベクトルのなす角です．



加法定理より

$$\sin\theta = \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$$

となります．よって

$$\sin\alpha = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \qquad \sin\beta = \frac{b_y}{|\vec{b}|} \quad \cos\beta = \frac{b_x}{|\vec{b}|}$$

の関係にあるので，さきほどの式に代入すると

$$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}||\vec{b}|\left(\frac{b_y}{|\vec{b}|}\frac{a_x}{|\vec{a}|} - \frac{b_x}{|\vec{b}|}\frac{a_y}{|\vec{a}|}\right) = a_x b_y - a_y b_x$$

となり，平行四辺形の面積と一致しています．次に３次元空間における３つのベクトルで考えてみます．次のような３つのベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$$

の行列式は

$$\det\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

となります．この値はこれら３つのベクトルを辺とする平行６面体の体積になります．

ここでベクトルの外積を思い出してみましょう．外積は２つの３次元ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

としたとき，その外積は

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

で与えられました．そこで外積に行列式を使うと

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

で表すことができます．$\vec{e}$ は単位ベクトルです．これを１行目で余因子展開すると

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x \left(a_y b_z - a_z b_y\right) - \vec{e}_y \left(a_x b_z - a_z b_x\right) + \vec{e}_z \left(a_x b_y - a_y b_x\right)$$

となります．これを成分表示すると

$$\begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -\left(a_x b_z - a_z b_x\right) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

となって，外積の値になりました．また，$\vec{b} \times \vec{a}$ を計算してみると

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

となります．行列式で２つの行を交換すると符号が反転しますから

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

となって，外積でかける順番を変えるとベクトルの方向が逆になる性質が確認できます．

次に，行列式を使った外積の余因子展開と平行６面体の体積の余因子展開を並べてみると

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$$

外積を平行６面体の体積と同じ式にするためには，外積とベクトル $\vec{a}$ の内積を計算します．

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z\right) \left(\vec{e}_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\right)$$

$$= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$$

つまり

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

という関係になります．これをベクトルの**スカラー３重積**といいます．そして，これは３つのベクトルがつくる平行６面体の体積となります．ここでは解説しませんが，スカラー３重積は三角形と直線との交差判定に使ったりします．

5 最後に

ベクトル，行列，行列式と線形代数の基本となる要素を説明してきましたが，いかがだったでしょうか．入門ということで用語や定義も少なめにしたので，人によっては物足りなかったかもしれませんね．さらに線形代数に興味が出たり勉強したくなったときは他のサイトや参考書などを参照してください．はじめに書いたとおり，主に CG 系の人向けにまとめました．参考になれば幸いです．

6 参考文献

- 村上雅人「なるほど線形代数」海鳴社，2001
- Eric Lengyel 著，狩野智英訳「ゲームプログラミングのための３ D グラフィックス数学」ボーンデジタル社，2006
- 佐藤恒雄・野澤宗平「初歩から学べる線形代数」培風館，2007