دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

گزارش درس الگوریتم های پیشرفته

مسائل 3SUM-Hard

نگارش:
میثم حجازی نیا

تحت نظارت:
جناب آقای دکتر باقری

بهمن ماه 1387

آنکه فکرش گره از کار جهان بگشاید
گو دراین نکته بفرما نظری بهتر ازین

حافظ

فهرست مطالب:

مقدمه

یکی از گروه های مسائلی که تا کنون شناخته شده اند، مسائل NP-Complete هستند، که طبق آن در صورتی که مسئله ای دو شرط را داشته باشد، آن را مساله NPC می نامند، که اولا این مساله NP باشد، یعنی یک پاسخ این مساله را بتوان در زمان چند جمله ای verify نمود، و دوم اینکه این مساله ای NPC را بتوان یافت که به این مساله قابل کاهش باشد، بعبارتی دیگر، این مساله NP-Hard باشد، گروه دیگری از مسائل مشابه گروه NPC تعریف شده اند، این گروه از مسائل 3SUM ها هستند تا کنون راه حلی با زمان کمتر از $\Omega(n^2)$ برای آن پیدا نشده است، در این گروه نیز یک مساله اصلی 3SUM داریم، مساله اصلی 3SUM-Hard بصورت زیر است:

یک مجموعه S از n عنصر داریم، آیا سه عنصر در آن می توان یافت که $a+b+c=0$ باشد؟

راه حلی که برای این مساله پیشنهاد می شود، آن است که این اعداد را مرتب نمائیم و دو به دو تست نمایيم که آیا برابر عدد سوم می شود یا خیر. و هنوز راه حلی با زمانی کمتر از این مورد پیدا نشده است، البته راه حل های هیوریستیکی و تصادفی[1] هم برای این مساله ارائه شده است، که البته در آن تلاش شده است مدل محاسباتی بنوعی تغییر داده شود.

اگر ضریب ثابتی از نمونه مساله 3SUM بتواند مساله را از طریق کاهش $O(n^2)$ حل نماید، این مساله '3SUM-Hard' نامیده خواهد شد. اکنون به تعریف رسمی کاهش، و مسائلی که در این دسته قرار می گیرند می پردازیم.

تعریف رسمی کاهش[2]

در تعریف رسمی تر، برای دو مساله Pr1 و Pr2، عبارت، $PR1 <<<_{f(n)} PR2$، بدان معناست که تمامی نمونه های Pr1 با سایز n می تواند با استفاده از تعداد ثابتی از نمونه های PR2 به اضافه O(f(n)) ، حل گردند.

عبارت دیگر $PR1 ==_{f(n)} PR2$ به این معناست که $PR1 <<<_{f(n)} PR2$ و $PR2 <<<_{f(n)} PR1$ هر دو برقرار باشند.

مساله PR، 3SUM-Hard نامیده می شود، اگر و تنها اگر $3SUM <<<_{f(n)} PR$ که $f(n)=O(n^2)$.

---

[1] Randomized

[2] Reduction

مسالـه 3SUM’

مسالـه: سه مجموعه عدد طبیعی A و B و C بنحوی داده شده که |A|+|B|+|C|=n، آیا سه عدد $a \in A, b \in B, c \in C$ موجودند که a+b=c باشد.

ارتباط مسالـه 3SUM و 3SUM’ به این شکل است: $3SUM ==_n 3SUM'$.

اکنون به اثبات این مطلب می پردازیم:

اثبات $3SUM' <<<_n 3SUM$ ساده است، در صورتی که A=S و B=S بگیریم، و C=-S باشد. اکنون در صورتیکه $a \in A, b \in B, c \in C$ باشد، و a+b=c در اینصورت، $a, b, (-c) \in S$ و لذا a+b+(-c)=0.

اثبات معکوس یعنی $3SUM' <<<_n 3SUM$ نسبتا مشکل تر است. ما می خواهیم مجموعه S را به نحوی خلق کنیم که وقتی که سه مولفه در S جمعشان 0 گردد، سه عضو، $a \in A, b \in B, c \in C$ وجود دارد که a+b=c. بدون کم شدن از کلیت ما فرض می کنیم که تمامی مولفه ها در مجموعه ها مثبت هستند. فرض کنیم که m=2.max(A,B,C). مجموعه S را به این شکل خلق می کنیم: برای هر مولفه $a \in A$، عنصر a’=a+m را در S قرار دهید. برای هر مولفه $b \in B$، b’=b را در S قرار دهید، و در نهایت برای هر مولفه $c \in C$، c’=-c-m را در S قرار دهید. بوضوح، اگر a+b=c باشد، در اینصورت a’+b’+c’=0 است. تنها مساله ای که برای اثبات باقی می ماند این است که هر وقت سه مولفه در S وجود دارد که جمع آنها 0 باشد، از سه مجموعه مجزا آمده اند. از ساخت S بلافاصله مشخص می شود که برای تمامی $a \in A, b \in B, c \in C$ ما داریم: $m < a' \le 1.5m$ ، $0 < b' \le 0.5m$ و $-1.5m < c' \le -m$. فرض کنید $x, y, z \in S$ که داشته باشیم: $x + y + z = 0$. حداکثر یکی از مولفه ها می توانند از A آمده باشند، چرا که در غیر اینصورت مجموع حداقل 2m-1.5m=0.5 خواهد بود. به نحو مشابه تنها یک مولفه می تواند از C آمده باشد، چرا که در غیر اینصورت مجموع کمتر از -2m+1.5m=-0.5m خواهد بود. همچنین یک مولفه بایستی از C آمده باشد، چرا که تمامی مولفه هایی که از A و B آمده اند مثبت اند. اکنون فرض کنید که یک مولفه از C آمده است و باقی دو مولفه از B آمده اند. در این حالت مجموع کمتر از صفر است، چرا که دو مولفه از B حداکثر مجموعشان m است، و مولفه از C کمتر از m است.لذا تنها یک حالت می ماند که تمامی سه مولفه از مجموعه های مختلف آمده باشند.

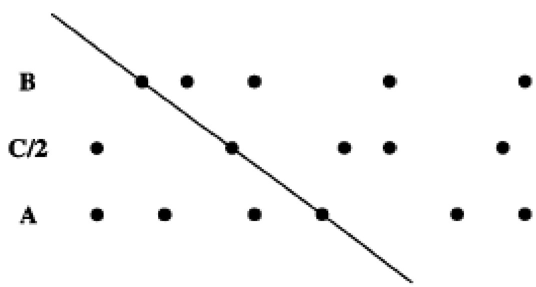
مسالـه GEOMBASE

مسالـه: N تا نقطه روی خط های افقی y=0، y=1 و y=2 داده شده اند، آیا یک خط غیر افقی وجود دارد که از سه نقطه بگذرد؟

دلیل نامگذاری این مسئله آن است که این مساله به عنوان مساله میانجی در اثبات اینکه مسائل هندسی 3SUM هستند بکار برده شده است.

ارتباط مساله GEOMBASE با 3SUM' به این شکل است: $3SUM'==_n GEOMBASE$.

ابتدا نشان می دهیم که $3SUM'<<<_n GEOMBASE$برای هر مولفه $a \in A$ نقطه (A,0) را روی خط y=0 خلق کنید. به نحو مشابه برای هر مولفه $b \in B$ نیز نقطه (b,0) و برای هر مولفه $c \in C$ نیز نقطه (c/2,1) را خلق می نماییم. که در تصویر زیر این نگاشت قابل مشاهده است. اکنون واضح است که سه نقطه (a,0)، (b,2) و (c/2,1) اگر و فقط اگر روی یک خط اند که a+b=c. معکوس این مورد هم به همین شکل ثابت می شود که: برای هر نقطه (a,0) مولفه $a \in A$ را خلق کنید، برای هر نقطه (b,2) مولفه $b \in B$ را خلق نموده و برای هر نقطه (c,1) مولفه $2c \in C$را خلق نمائید.



تصویر 1مثالی از GEOMBASE

مساله 3-POINT-ON-LINE

مساله: مجموعه S از n تا نقطه در صفحه داده شده است، آیا هیچ کدام از این سه نقطه روی یک خط هستند.

ارتباط این مساله با مساله GEOMBASE به این صورت است: $GEOMBASE <<<_1 3-POINT-ON-LINE$.

اثبات این مورد واضح است، چرا که GEOMBASE حالت خاصی از 3-POINT-ON-LINE است.

البته ارتباطی را با مساله 3SUM نیز به این شکل برقرار کرده اند: $3SUM <<<_n 3-POINT-ON-LINE$.

اثبات این مطلب به صورت زیر است:

ما هر مولفه $x \in S$ را به یک نقطه (x, x^3) نگاشت می نماییم. سه نقطه (a, a^3)، (b, b^3) و (c, c^3) اگر و تنها اگر هم خط باشند، a+b+c=0. در این حالت خطی که از (a, a^3) و (b, b^3) می گذرد از $(-(a+b), -(a+b)^3)$ نیز می گذرد،

اگر قرار باشد چنین رابطه ای برقرار باشد، بصورت برداری اگر ما به میزان s از نقطه (a, a^3) با برداری که از نقطه (a, a^3) به نقطه (b, b^3) حرکت کنیم، بایستی داشته باشیم که :

$$\begin{pmatrix} a \\ a^3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} b-a \\ b^3 - a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a+b) \\ -(a+b)^3 \end{pmatrix}$$

در این حالت بایستی داشته باشیم، $s = \dfrac{2a+b}{a-b}$.

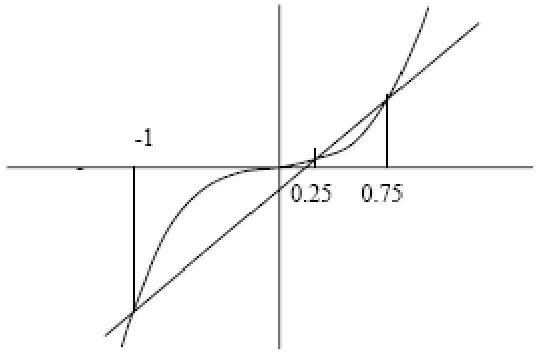
اثبات نیز بصورت زیر است:

$$a^3 + (a+b)^3 + \frac{2a+b}{a-b}(b^3 - a^3) = 0 \Rightarrow (a-b)(a^3 + (a+b)^3) + (2a+b)(b^3 - a^3) = 0 \Rightarrow$$
$$a^4 - a^3 b + (a-b)(a+b)(a+b)^2 + 2ab^3 - 2a^4 + b^4 - a^3 b \Rightarrow$$
$$b^4 - a^4 - 2a^3 b + 2ab^3 + (a^2 - b^2)(a^2 + 2ab + b^2) = 0$$

که مورد آخر البته اتحاد چاق و لاغر است. که به وضوح اثبات می گردد،

لذا در صورتی که جوابی برای مساله 3sum وجود داشته باشد، سه نقطه روی منحنی $y = x^3$ روی یک خط قرار می گیرند، و نیز در صورتیکه سه نقطه هم خط روی این منحنی وجود داشته باشد، بطور معکوس می توان ثابت کرد که این رابطه برقرار است.

نکته اینکه این مساله حالت خاصی از مساله مشخص کردن این مطلب است که آیا مجموعه ای از هر نوع شیئ دو بعدی در صفحه دارای سه مولفه است که بتواند یک خط آنها را قطع کند. لذا این مساله نیز 3sum-hard می باشد.



تصویر 2 نگاشت بین مساله 3SUM و مساله 3-POINT-ON-LINE

مساله Point-ON-3-LINES

مساله: مجموعه ای از خطوط در صفحه داده شده است، آیا نقطه ای وجود دارد که روی حداقل سه تا از آنها باشد؟

این مساله دقیقا دوگان[3] (استفاده از دوگان مناسب) از 3-Points-ON-LINE می باشد. بنابراین، لذا رابطه آن به صورت:

$$POINT-ON-3-LINES ==_n 3-POINT-ON-LINE$$

حالت کلی POINT-ON-3-LINES وجود دارد. برای مثال اینکه آیا نقطه ای در مجموعه ای از پاره خط ها، چندضلعی ها، کمان های داره ای، وجود دارد که روی سه شئ باشد . بنابراین تمامی این مسائل 3SUM-HARD هستند. (نکته این است که این مطلب ممکن است برای این مساله که آیا نقطه ای روی سه شئ در مجموعه ای از دیسک ها وجود دارد یا خیر، صحیح نباشد.)

اکثر مسائل ذکر شده در فوق می تواند براحتی در $O(n^2)$حل گردد، که این از طریق جاروکشی توپولوژیکی[4] امکان پذیر است. اکنون این قرار گرفتن نقطه در راس آرایی که در $O(n^2)$قابل بررسی است، با پیمایش این آرایش ممکن است.

مساله MINIMUM-AREA-TRIANGLE

مساله: مجموعه S از n نقطه در صفحه داده شده است، مساحت کوچکترین مثلث تشکیل شده توسط هر سه نقطه از این نقاط چقدر است؟

[3] dual
[4] Topological sweeping

این مساله 3SUM-hard است چرا که حداقل به سختی مساله 3-POINTS-ON-LINE است. بوضوح یک مجموعه S از نقاط دارای سه نقطه روی خط است اگر و تنها اگر مساحت کوچکترین مثلث برابر 0 باشد.

مساله SEPARATOR

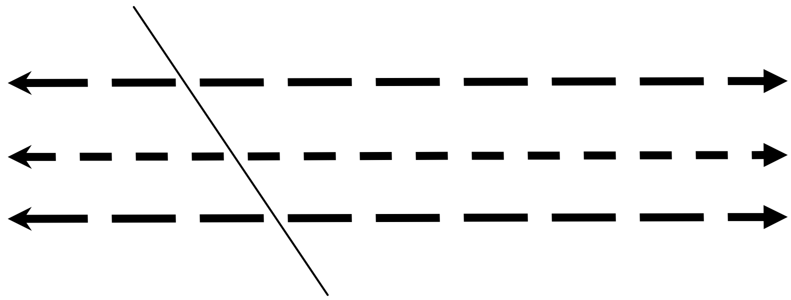
مساله: مجموعه S از n تا پاره خط داده شده است، آیا خطی وجود دارد که S را به دو زیر مجموعه غیر تهی تقسیم نماید؟

بطور رسمی: اگر ما مجموعه S از n تا شیء در صفحه را داشته باشیم، یک خط مستقیم g، را Separator ، S نامیده می شود، اگر با هیچ شیئی تماس نداشته باشد، و این دو نیم صفحه ایجاد شده، حداقل حاوی یک شیئ باشد، یا بعبارتی تهی نباشد.

ارتباط این مساله را با مساله میانجی هندسی GEOMBASE بصورت $SEPARATOR <<<_{n \log n} GEOMBASE$ برقرار می نمائیم.

اثبات به این شکل است، که به ما مجموعه نقاطی با مختصات صحیح روی سه خط افقی A: y=0، B: y=1 و C: y=1 داده شده است، اگر مختصات x از نقاط روی خط اول A، از سمت چپ به راست بصورت، $a_1, a_2, ..., a_n$مرتب شده باشند، به نحو مشابه اگر نقاط روی خطوط دیگر B و C، $b_1, b_2, ..., b_n$ و $c_1, c_2, ..., c_n$باشند. و $\epsilon = 1/4$، اکنون نقاط داخل A را به پاره خط های افقی در A با بازه های x، $[-\infty : a_1], [a_1+\epsilon : a_2-\epsilon], ..., [a_n+\epsilon : \infty]$نگاشت می نمائیم. به نحو مشابه برای مجموعه B و C نیز این نگاشت را انجام می دهیم. به وضوح این نگاشت می تواند در زمان O(n log n) انجام گیرد. اکنون واضح است که، وقتی خطی از نقاط a که در A است، b که در B است، و c که در C است بگذرد، یک separator غیر افقی وجود خواهد داشت. چیزی که باقی می ماند اثبات معکوس است. همان طور که در تصویر زیر مشاهده می گردد، برای برای وضعیتی که شکل آن در قسمت GEOMBASE آمد، خطی که از بین حفره ها بگذرد، متناظر با همان separator تعریف شده در این مساله است. بنابراین، فرض کنید که l یک separator غیر افقی باشد. واضح است که l بایستی از سه حفره $(a-\epsilon : a+\epsilon)$ در A، $(b-\epsilon : b+\epsilon)$ در B، و $(c-\epsilon : c+\epsilon)$، در C بایستی بگذرد. بنابراین $(a+\delta_1)+(b+\delta_2)=2(c+\delta_3)$.

و این رابطه برای $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ای که بین $(-\epsilon, +\epsilon)$ قرار دارد برقرار است. از آنجایی که $\epsilon = 1/4$، و a و b و c صحیح هستند، این مورد تنها وقتی ممکن است که a+b=2c باشد. و این یعنی وقتی که خطی وجود داشته باشد که از نقاط داخل A و B و C بگذرد.



تصویر 3 نگاشت بین مساله GEOMBASE و مساله SEPARATOR

مساله STRIPS-COVER-BOX

مساله: یک مستطیل و n تا نوار با طول بی نهایت (نوار در اینجا منظور فاصله بین دو خط موازی است) داده شده است، آیا اجتماع این نوار ها مستطیل را می پوشاند؟

ارتباط این مساله را نیز برای اثبات 3SUM بودن با مساله میانجی هندسی GEOMBASE برقرار می نمائیم. این ارتباط به صورت $STRIPS-COVER-BOX <<<_{n\log n} GEOMBASE$ می باشد.

برای اثبات این مساله ما از دوگان استفاده می کنیم، دو گان ما به این صورت زیر است:

1. دو گان هر نقطه $p=(a,b)$ در صفحه اول، در صفحه دوم (صفحه دوگان) تبدیل به خط $p^*: y=ax-b$ می گردد.

2. همچنین خط $l: y=ax+b$ در صفحه اول، تبدیل به نقطه $l^*=(a,-b)$ در صفحه دو گان می گردد.

برای اثبات ابتدا ما نمونه های مساله GEOMBASE را به مجموعه ای از پاره خط های افقی مانند آن پاره خط هایی که در اثبات مساله SEPARATOR وجود داشت می نمائیم. ما این مجموعه را دوران می دهیم تا مجموعه پاره خط های عمودی بدست آوریم، اکنون دوگان ها بصورت زیر هستند:

1. دوگان خطی که مستقیم عمودی نیست، و مورب است، در صفحه دوم طبق خاصیت دو گان شماره 2 مطرح شده در فوق، تبدیل به یک نقطه می گردد.

2. دوگان یک پاره خط عمودی یک نوار است. دلیل آن است که پاره خط عمودی از دو نقطه تشکیل شده است، که مختصات x آنها برابر است، لذا $p1=(a,b)$ و $p2=(a,c)$ فرض کنیم که این دو نقطه باشند، این دو نقطه در صفحه دو گان طبق خاصیت شماره 1 دو گان ما تبدیل به دو خط می

گردند که p1*:y=ax-b و p2*:y=ax-c می باشد، مشاهده می شود که این دو خط موازی هستند، لذا فاصله بین این دو نوار نامیده می شود. دلیل آن است که اگر نقطه p3=(a,d) که b<d<c برقرار باشد، این نقطه نگاشت به خط p3*:y=ax-d می گردد، که خطی بین این دو خط موازی است، که موازی آنهاست، لذا نتیجه می گیریم که این پاره خط ها در صفحه اول نگاشت به نواری در صفحه دو گان می گردند.

3. دوگان یک نیم خط عمودی یکه نیم صفحه می باشد. برای اثبات این مطلب همانند قسمت دوم گفته شده در فوق عمل می کنیم، اینجا تفاوت این است که نقطه دوم دارای x یکسان است، اما در y بی نهایت قرار دارد، لذا آن سمتی که نقطه دوم قرار دارد، در صفحه دوم یک خط موازی در بی نهایت خواهیم داشت، که این نیز تعریف نیم صحفه می باشد.

لذا بطور خلاصه با استفاده از این دوگان پاره خط ها تبدیل به نوار می گردند. 6 نیم خط بی نهایت تبدیل به نیم صفحه می گردند. و یک خط غی عمودی در صفحه اولیه[5] تبدیل به نیم صحفه هایی می گردند. خطوط غیر عمدی در صفحه primal تبدیل به نقطه ای در صفحه دوگان می گردد. و این تبدیل بنحوی است که اگر و فقط اگر خطی به سه پاره خط برخورد نکند، نقطه ای وجود دارد که روی هیچ کدام از این نوارها قرار نمی گیرد.

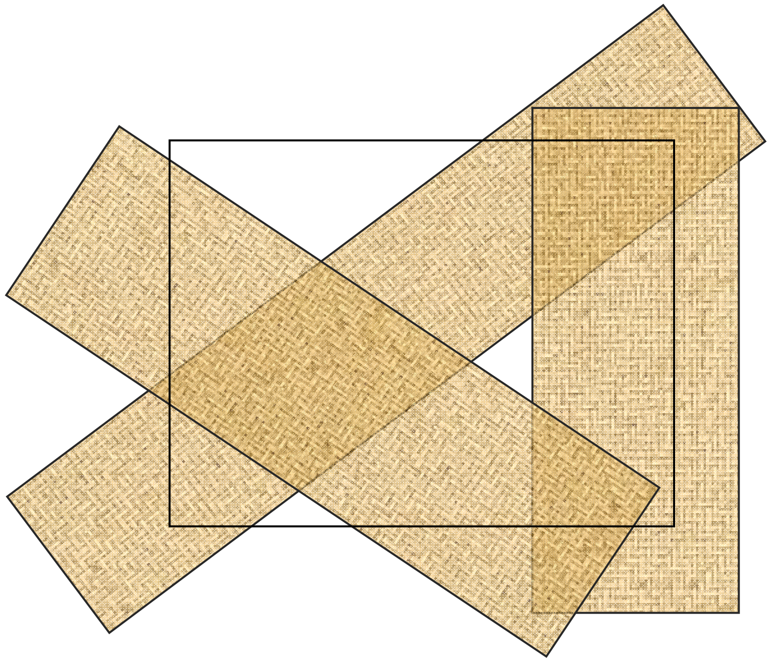
فرض کنیم P چندضلعی است که در اثر تقاطع مکمل های شش نیم صفحه ایجاد شده باشد. P متناظر با تمامی نقاطی است که با هیچ کدام از این پاره خط های بی نهایت برخورد نمی کنند، براحتی اثبات می شود که P محدود است. اکنون یک مستطیل R را به موازات محورهای مختصات در نظر بگیرید که شامل P باشد. ما هر کدام از نیم صفحه ها را به نواری با استفاده از خطی خارج از R به شکلی تبدیل می کنیم که تقاطع نوارها با R مشابه تقاطع نیم صفحه ها با R باشد. بعبارتی ما قسمت های نیم صفحه را که خارج از این مستطیل است می بریم، و قسمت باقی مانده را به شکل نوار در می آوریم. اکنون مجموعه ای از n تا نوار بدست می آید. اگر کاملا R را بپوشانند، آنها کاملا P را پوشانده اند، و لذا، هیچ separator ای در مساله GEOMBASE وجود ندارد. از سمت دیگر، اگر نقطه ای باشد که داخل r پوشانده نشده باشد، بایستی درون p باشد، و متناظر با خط separator می باشد[6]. نمونه ای از مساله STRIP-COVER-BX در زیر قابل مشاهده است.

---

[5] primal

[6]برای درک بهتر از اثبات مساله، می توان به Applet واقع در آدرس زیر مشاهده کنید، که نشان می دهد dual ها به چه شکل است:

http://web.mit.edu/jazayeri/www/6.838/lecture/duality.html



مساله TRIANGLE-COVER-TRIANGLE

مساله: مجموعه S از n تا مثلث و یک مثلث t داده شده اند، آیا اجتماع مثلث های مجموعه S، t را می پوشانند؟

ارتباط این مساله با مساله STRIPS-COVER-BOX به این صورت برقرار می شود:

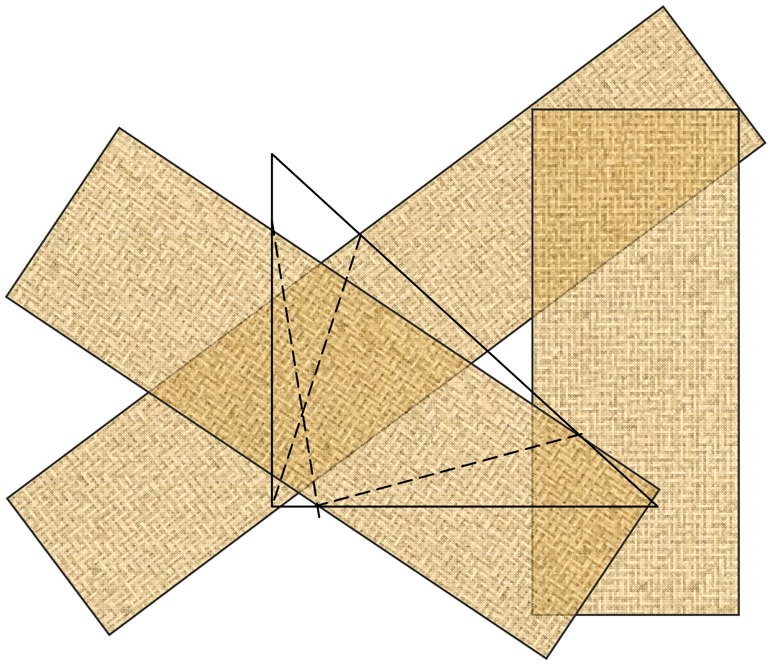
$$STRIPS-COVER-BOX <<<_n TRIANGLES-COVER-TRIANGLE$$

اثبات به این شکل است که ابتدا نشان می دهیم که $STRIPS-COVER-BOX ==_n STRIPS-COVER-TRIANGLE$.

که البته تعریف مساله STRIPS-COVER-TRIANGLE هم به نحو مشابه STRIP-COVER-BOX است. مساله دوم می تواند مساله اول را با شکستن مستطیل[7] به دو مثلث و بررسی اینکه آیا هر دوی این مثلث ها پوشش داده می شود، حل نماید. مساله دوم بطور معکوس وقتی می تواند حل شود که یک مستطیل دور مثلث در نظر بگیریم، و سه تا نوار[8] به مجموعه اضافه کنیم که فاصله بین مستطیل و مثلث محاط شده درون آن را بپوشانند، اکنون مستطیل وقتی پوشش داده می شود که مثلث پوشش داده شود.

[7] Box
[8] Strip

مشاهده این مطلب که $STRIPS-COVER-TRIGANGLE <<<_n TRIANGLES-COVER-TRIANGLE$ نیز ساده است، براحتی هر نوار خارج از مثلث را ببرید که مستطیل هایی بدست آورید، و هر مستطیل را به دو مثلث بشکنید، اکنون مثلث ها مثلث را می پوشانند، اگر و تنها اگر نوارها مثلث را بپوشانند. تصویر زیر بخوبی این نگاشت را نمایش می دهد.



تصویر 4نگاشت بین **STRIPS-COVER-TRIANGLE** و **TRANGLES-COVER-TRIANGLE**

مساله HOLE-IN-UNION

مساله: مجموعه ای از مثلث ها در صفحه داده شده است، آیا اجتماع آنها حاوی یک حفره است؟

ارتباط این مساله با مساله TRIANGLE-COVER-TRIANGLE برقرار می شود و به صورت:

$TRIANGLES-COVER-TRIGANGLE <<<_n HOLE-IN-UNION$

برای اثبات فرض کنیدS مجموعه ای از مثلث ها باشد، و t مثلثی باشد که می خواهیم بپوشانیم. برای هر مثلث $t' \in S$، قسمتی از آن را که خارج از t است ببرید، اگر قسمت باقی مانده مثلث نباشد، آن را به مثلث هایی تقسیم نمائید. (همانند تقسیم بندی که در شکل 4 انجام دادیم)

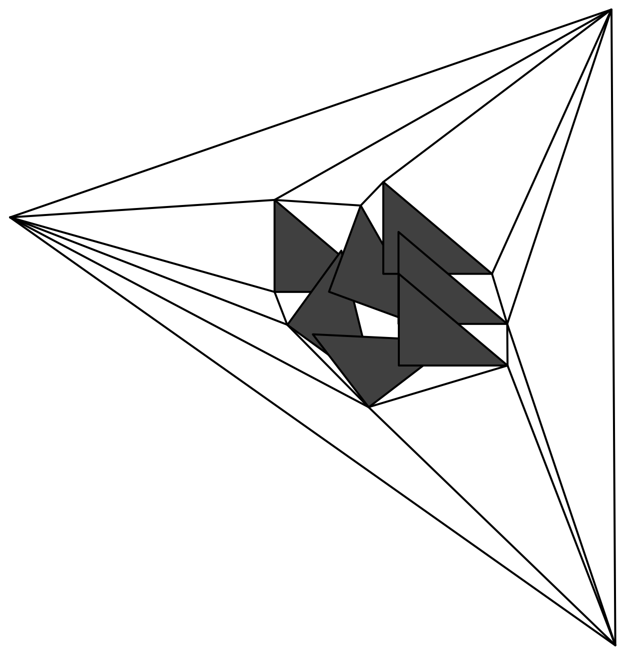
به این روش ما در زمان خطی مجموعه S’ را بدست می آوریم که حاوی O(n) مثلث می باشد، که تمامی آنها کاملا درون t قرار دارند، و اجتماع آنها مشابه اجتماع S است، که به t محدود می باشد. بنابراین t کاملا توسط S پوشانده می شود، اگر و فقط اگر کاملا توسط S’ پوشانده شود، این نیز اگر و تنها اگر S’ حاوی هیچ حفره ای نباشد ممکن است.

اکنون با تلاشی بیشتر می توانیم معکوس این مطلب را نیز نشان دهیم، یعنی:

$$HOLE-IN-UNION <<<_{n\log^2 n} TRIANGLES-COVER-TRIGANGLE$$

که البته ملاحظه می شود که این هم ارزی، در $n\log^2 n$ اتفاق می افتد.

برای اثبات به این شکل عمل می کنیم، فرض کنید، S مجموعه ای از مثلث هایی باشد که می خواهیم بدانیم آیا اجتماع آنها حاوی یک حفره هست یا خیر. مثلث t را که حاوی تمام مثلث هایی که در S است مشخص کنید. در ادامه خط واصل C از S را که از قسمتی از مرز اجتماع شروع می شود، و محدود به وجوه خارجی است مشخص نمائید. تصویر زیر بخوبی گویای این مطلب است. این در زمان $O(n\log^2 n)$ امکان پذیر است (برای توضیحات بیشتر به منبع شماره 10 مراجعه نمایید). سر انجام قسمت های بین t و C را مثلث بندی می نمائیم، که این کار در زمان خطی امکان پذیر است. (روش ارائه شده در منبع شماره 11، برای این منظور استفاده می شود، که بنوعی visibility map در پیمایش بالا به پایین ساخته شده، و سپس بطور معکوس از پایین به بالا مثلث بندی انجام می گیرد) این مثلث ها را به S اضافه نمائید، که مجموعه S’ را بدست می آورید. اکنون واضح است که اجتماع S شامل حفره است اگر و تنها اگر S’ بطور کامل t را نپوشاند.



تصویر 5 نگاشت مساله HOLE-IN-UNION به TRIANGLES-COVER-TRIANGE

(مثلث های مشکی اعضای S و مثلث های سفید بیرونی مثلث های اضافه شده در 'S مستند)

مساله TRIANGLE-MEASURE

مساله: مجموعه ای از مثلث ها در صفحه داده شده است، مساحت اجتماع آنها را محاسبه نمائید.

ارتباط این مساله با مساله TRIANGLES-COVER-TRIANGLE برقرار می شود و به صورت:

$$TRIANGLES-COVER-TRIGANGLE <<<_n TRIANGLE-MEASURE$$

می باشد.

همانند اثبات مساله قبل، ما مجموعه S از مثلث ها را به مجموعه هم ارزی 'S که کاملا داخل t باشد نگاشت می کنیم. اکنون واضح است که t کاملا پوشش می یابد اگر و فقط اگر مساحت اجتماع 'S برابر با مساحت t باشد.

مساله POINT-COVERING

مساله: مجموعه n تا نیم صفحه و عدد k داده شده اند، مشخص کنید که آیا نقطه p وجود دارد که توسط حداقل k تا از نیم صفحه ها پوشش داده شود.

نکته اینکه این مساله برای $k \le n/2$ بدیهث است. جواب بله می باشد. اما برای k های بزرگ تر مساله 3SUM-Hard می باشد.

ارتباط این مساله با مساله STRIPS-COVER-BOX بصورت زیر برقرار می شود:

$$STRIPS-COVER-BOX <<<_n POINT-COVERING$$

یک نوار معادل دو نیم صفحه است، که با تفریق نوار از کل صفحه بدست می آیند. بعبارتی آنها مکمل های نوار هستند. به این شیوه، ما به مجموعه S از 2n نیم صفحه خواهیم رسید. بوضوح، هر نقطه ای که روی هیچ کدام از نوار ها نباشد، روی دقیقا N تا نیم صفحه قرار دارد. هر نقطه دیگر روی تعداد کمتری از نیم صفحه ها قرار دارد. به S چهار نیم صفحه اضافه کنید که نقاط داخل چهار نیم صفحه مستطیل را تشکیل دهند، اکنون واضح است که نوارهایی این مستطیل را نمی پوشانند، اگر و فقط اگر نقطه ای باشد، که توسط n+4 نیم صفحه پوشش داده شوند.

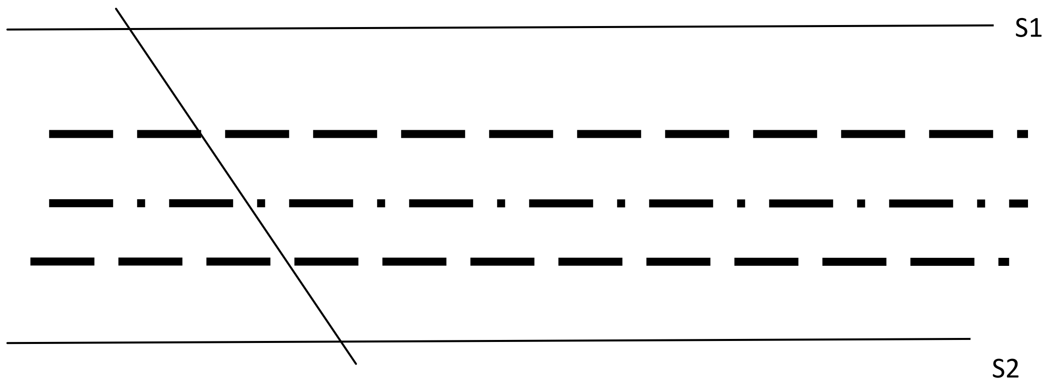
مساله VISIBILITY-BETWEEN-SEGMENTS

مساله: مجموعه S از n تا پاره خط در صفحه و دو پاره خط عمودی s1 و s2، داده شده است، مشخص کنید که آیا نقاطی روی s1 و s2 وجود دارد، که بتوانند همدیگر را ببینند. یعنی، بنحوی که پاره خط بین نقاط با پاره خط های داخل S برخورد ننمایند.

ارتباط این مساله با مساله میانجی هندسی GEOMBASE بصورت زیر برقرار می شود:

$$GEOMBASE <<<_{n\log n} VISIBILITY-BETWEEN-SEGMENTS$$

اثبات به این شکل است که مجموعه پاره خط هایی را که برای اثبات مساله SEPERATOR استفاده شده در نظر بگیرید، پاره خط s1 و s2 را بالا و پایین مجموعه حفره ها در نظر بگیرید (همانند تصویر زیر)، واضح است که s1 و s2 می توانند همدیگر را اگر و تنها اگر سه حفره روی یک خط قرار گیرند مشاهده کنند، که این ارتباط فوق را ثابت می کند.



تصویر 6 نگاشت مساله GEOMBASE به مساله VISIBILITY-BETWEEN-SEGMENTS.

مساله VISIBILITY-FROM-INFINITY

مساله: مجموعه S از پاره خط های موازی محور محورهای مختصات در صفحه داده شده است و یک پاره خط افقی خاصs نیز داده شده است، مشخص کنید که آیا نقطه ای روی s وجود دارد که بتواند از بی نهایت دیده شود؟

ارتباط این مساله را نیز با مساله میانجی هندسی بصورت زیر برقرار می نمائیم:

$$GEOMBASE <<<_{n \log n} VISIBILITY - FROM - INFINITY$$

اثبات نیز به شکل اثبات مساله قبلی است، اما این دفعه برای اینکه از بی نهایت خط S2 دیده شود کافی است که خطی از بین پاره خط ها عبور کند، که این خط یک انتهای آن به S2 برخورد نموده و انتهای دیگر نیز به بی نهایت می رود.

مساله VISIBLE-TRIANGLE

مساله: مجموعه S از مثلث های افقی مات داده شده است، همچنین مثلث افقی t را بهمراه نقطه نگاه[9] p داریم، آیا نقطه ای در t وجود دارد که بتواند از نقطه p دیده شود؟

ارتباط این مساله با مساله TRIANGLES-COVER-TRIANGLE بصورت زیر برقرار می شود:

$$TRIANGLES - COVER - TRIANGE ==_{n} VISIBLE - TRIANGLEY$$

[9] View point

اثبات به این شکل است که در ابتدا در نظر بگیرید که، با استفاده از تبدیل استاندارد پرسپکتیو VISIBLE-TRIANGLE می تواند به مساله ای تبدیل شود که ما از بی نهایت نگاه می کنیم، لذا هم ارز آن است.

ابتدا نشان می دهیم که $TRIANGLES-COVER-TRIANGE <<<_n VISIBLE-TRIANGLEY$. فرض کنید که t مثلثی برای پوشش دادن باشد. t را روی صفحه xy قرار دهید. تمامی مثلث های دیگر را در ارتفاع های مختلف بالای t قرار دهید. در اینصورت بوضوح قسمتی از t از بی نهایت اگر و تنها اگر مثلث ها کاملا t را نپوشانند قابل مشاهده است.

برای اثبات معکوس، تمامی مثلث های زیر t را بردارید. تصویر مثلث های باقی مانده را روی صفحه xy بیندازید، و آنها را در مجموعه S قرار دهید. همچنین تصویر t را روی صفحه xy بیندازید. اکنون مجددا قسمتی از t از بی نهایت اگر و تنها اگر مثلث های داخل S کاملا t را نپوشانند، قابل مشاهده است.

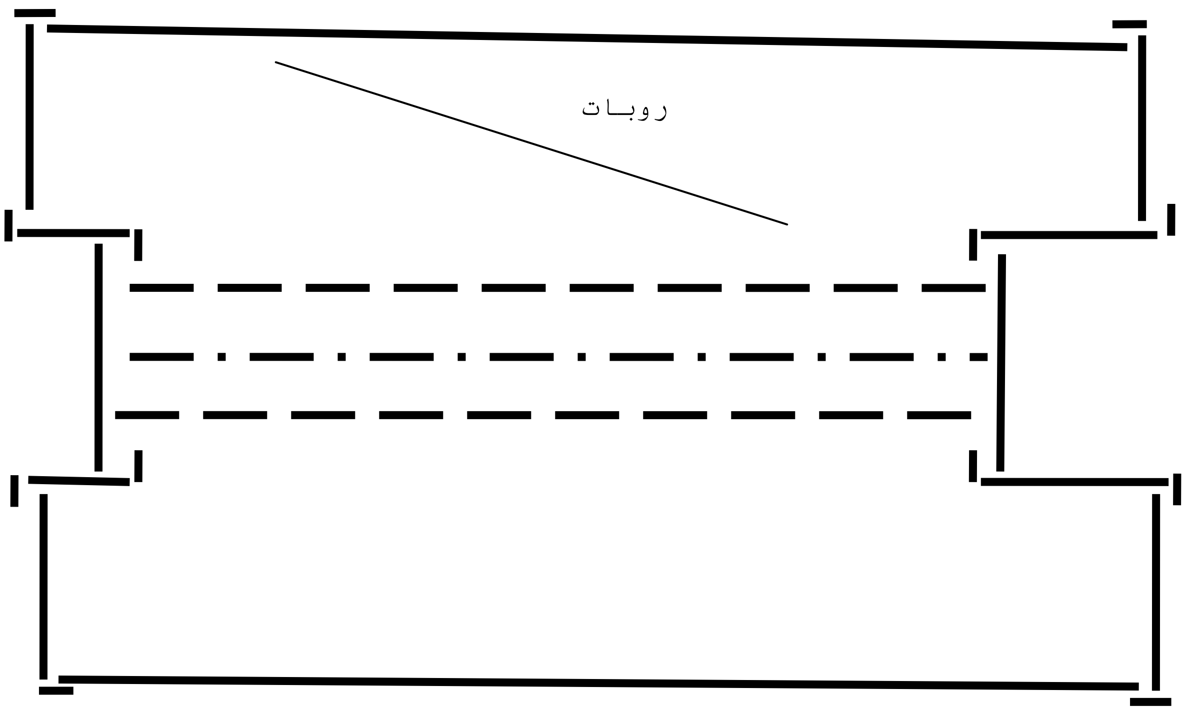
مساله PLANAR-MOTION-PLANNING

مساله: مجموعه ای از مانع های پاره خطی که موازی محورهای مختصات هستند، و با هم برخورد نمی کنند، و همدیگر را touch نمی کنند، داده شده است. همچنین روباتی به شکل پاره خط داریم (میله ای یا نردبانی)، مشخص کنید که آیا این میله می تواند از یک منبع به مقصد بدون برخورد به موانع برسد. (هر دوی انتقال و دوران امکان پذیر است).

ارتباط این مساله با مساله میانجی هندسی GEOMBASE به صورت زیر برقرار می شود:

$$GEOMBASE <<<_{n\log n} PLANNAR-MOTION-PLANNING$$

ما از ساختمانی با پاره خط های افقی بصورت زیر استفاده می نمائیم: (مشابه مساله SEPARATOR است اما خطوط بی نهایت را با پاره خط های بلند جایگزین می کنیم، که خطوط عمدی در انتهای آن قرار دارند، نکته اینکه عدم تقارن وجود دارد.). تفاوت دیگر این است که انتهای چپ و راست را تغییر داده و پاره خط هایی را برای بدست آوردن ساختار نشان داده شده در شکل زیر اضافه می کنیم.



تصویر 7نگاشت مسئله GEOMBASE به مسئله PLANAR-MOTION-PLANNING

جابجا کنیم. بسهولت اثبات می شود که میله به هیچ وجه نمی تواند از دو ناحیه بالایی و پایین خارج شود. لذا، بایستی بین پاره خط های میانی حرکت کند. همچنین، اگر میله به اندازه کافی بلند باشد، همیشه بایستی قسمتی از آن همواره در ناحیه بالا، یا ناحیه پایین باشد. بنابراین، برای حرکت کردن از بالا به پایین، بایستی لحظه ای وجود داشته باشد، که در هر دو ناحیه است. در این لحظه، میله از سه فاصله بین پاره خط ها می گذرد، و با بحثی مشابه مساله SEPARATOR متناظر با راه حل GEOMBASE است.

از سمتی دیگر وقتی راه حل GEOMBASE، وجود داشته باشد، حرکتی برای میلیه از ناحیه بالا به ناحیه پایین وجود دارد. بسهولت میله را در جهت سه حفره می چرخانیم و آن را از یک جهت به جهت دیگر حرکت می دهیم. با در نظر گرفتن دو ناحیه بصورت بزرگ، این بدون مشکل قابل انجام است. لذا راه حل GEOMBASE اگر و تنها اگر حرکتی پیدا شود، موجود است.

مساله 3D-MOTION-PLANNING

مساله: مجموعه موانع مثلثی افقی، غیر متقاطع، که هم را لمس نمی کنند در فضای سه بعدی به همراه یک پاره خط عمودی به عنوان روبات داده شده است، مشخص کنید که آیا روبات می تواند با استفاده از انتقال از محل منبع به محل مقصد بدون برخورد به موانع حرکت کند.

بهترین راه حلی که برای این مساله وجود دارد $O(n^2 \log n)$ زمان می گیرد. این بدلیل آن است که فضای باز برای این نمونه خاص از مساله برنامه ریزی حرکتی دارای پیچیدگی $O(n^2)$ می باشد. و لذا بهبود تا $O(n^2)$ ممکن است.

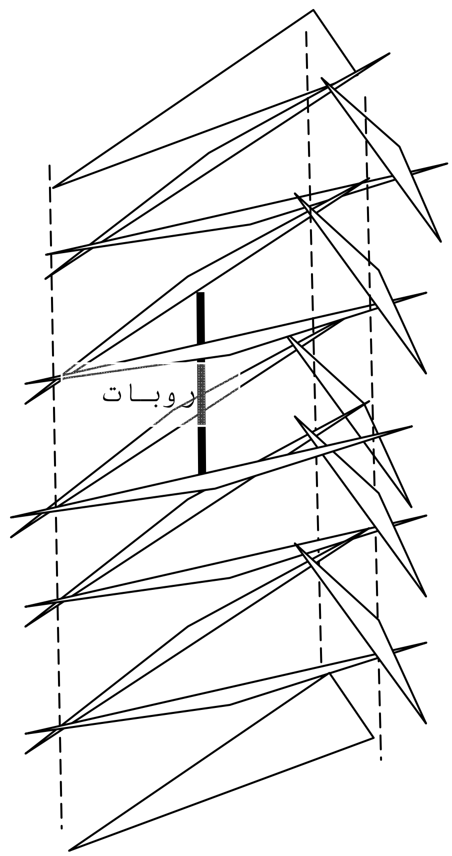
ارتباط این مساله با مساله TRIANGLE-COVER-TRIANGLE بصورت زیر برقرار می گردد:

$$TRIANGLES-COVER-TRIANGLE <<<_n 3D-MOTION-PLANNING$$

برای اثبات فرض کنید S مجموعه مثلث ها باشد، و t مثلثی باشد که قرار است پوشیده شود. ما این را به نمونه ای از مسئله برنامه ریزی حرکتی تبدیل می کنیم، که در آن میله ای با طول یک می خواهد از محلی بالای صفحه xy به محلی پایین صفحه حرکت نماید.

ما در ابتدا می خواهیم محدودیتی برای روبات بگذاریم، که روبات بایستی از صفحه xy داخل مثلث t عبور کند. برای این مورد ما «قفس» ای می سازیم که روبات نتواند از آن بگریزد. خارج از مثلث t در صفحه xy ما سه مثلث قرار می دهید که کمی با هم برخورد دارند. برای جلوگیری از اینکه مثلث ها با هم برخورد کنند، ما آنها را با اختلاف ارتفاع کمی از هم قرار می دهیم. ما این ساختار را حصار[10] می نامیم. واضح است که روبات می تواند با پرش از روی حصار عبور کند. ما این حصار را در ارتفاع های z=-1، z=-0.5 ، z=0.5 و z=1 قرار می دهیم. سر انجام ما یک مثلث عمودی بزرگ را (بزرگتر از t) در z=-1.6 و z=1.6 قرار می دهیم. پس ما 5 قفس و مثلث های بالایی و پایینی را خواهیم داشت. به این شیوه، ما قفس مثلثی می سازیم که دور t قرار دارد، و از z=-1.6 تا z=1.6 پراکنده شده است، که روبات نمی تواند از آن بگریزد. تصویر این قفس ها در زیر آمده است:

[10] fence



تصویر 8 قفسی که روبات نمی تواند از آن بگریزد.

تصور کنید که پایین ترین نقطه ربات، نقطه مرجع باشد. نقطه مبداء برای ربات نقطه ای در t در z=0.5 و نقطه مقصد برای آن z=-1.5 می باشد. بنابراین روبات کاملا از بالای صفحه xy شروع می کند، و کاملا پایین صفحه xy به مقصد می رسد. و دلیل هم آن است که روبات بایستی داخل قفس باشد و از صفحه xy داخل t بگذرد.

اکنون مثلث های داخل S را در نظر بگیرید. ما تمام آنها را در ارتفاع های تقریبا متفاوت با مختصات z بین 0 و 0.5 قرار می دهیم. بوضوح به این شیوه ما n+17 مانع مثلثی افقی بدست می آوریم که با هم برخورد ندارند (n تا از آنها از S و 17 تای آنها برای قفس است). نکته آنکه t خودش در مجموعه موانع ظاهر نمی شود. اکنون باقی می ماند که نشان دهیم یک مسیر برای روبات اگر و تنها اگر مثلث های S کاملا t را نپوشانند، وجود دارد.

اجازه دهید در ابتدا فرض کنیم که S کاملا t را نمی پوشاند، در اینصورت یک نقطه (x,y) در t وجود دارد که پوشش یافته نشده است. ما اکنون می توانیم روبات را از مبداء به هدف حرکت دهیم، ابتدا ما

روبات را بطور افقی از مبداء به (x,y,0.5) حرکت می دهیم. سپس آن را بطور عمودی به (x,y,-1.5) می بریم. سرانجام آن را بطور افقی به هدف نزدک می کنیم. براحتی می تواند بررسی کرد که این منجر به هیچ برخوردی نمی شود.

اکنون فرض کنید که مسیری از مبدا به مقصد وجود دارد. ما بایستی نشان دهیم که در این حالت مثلث های داخل S کاملا t را نمی پوشانند. این مورد می تواند به این صورت مشاهده گردد. در برخی لحظات در حین حرکت نقطه مرجع روبات، در t روی صفحه xy قرار خواهد گرفت. فرض کنید که این در نقطه ی (x,y) اتفاق بیفتد. از آنجا که روبات عمودی است، و دارای طول یک می باشد، از (x,y,0) تا (x,y,1) کشیده شده است. از آنجایی که تمامی مثلث های داخل S دارای مختصات z بین 0 و 0.5 هستند، نقطه (x,y) به هیچ کدام از آنها نمی تواند تعلق داشته باشد. بنابراین نقطه (x,y) در t پوشیده نشده است.

مساله EQDIST (EQUAL DISTANCE)

مساله: دو مجموعه p و q به ترتیب n و m=O(n)، تا عدد حقیقی داده شده است، آیا جفت $p1,p2 \in P$ و جفت $q1,q2 \in Q$ وجود دارد که p1-p2=q1-q2 باشد؟

ارتباط این مساله با 3SUM' به صورت $3SUM' <<<_n EQDIST$ می باشد. برای اثبات فرض کنیم که (A,B,C) نمونه[11] ای از مساله 3SUM' باشد، بنحوی که |A|=|B|=n. بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید که $A \cup B \cup C \subseteq (0,1)$ (که البته این مطلب می تواند با اعمال تبدیلی خطی امکان پذیر باشد). ما مجموعه P از 2n تا عدد از C را با نگاشت هر کدام از اعداد $c_i \in C$ به جفت اعداد با تفاوت $3-c_i$ ایجاد می نمائیم که به صورت زیر است:

$$P = \{100i, 100i + 3 - c_i \mid c_i \in C, i = 1,...,n\}$$

ما همچنین مجموعه Q را به صورت زیر تعریف می نمائیم:

$$Q = A \cup \{3 - b \mid b \in B\}$$

ما ادعا می کنیم، که (P,Q) متناظر با نمونه مساله EQDIST می باشد.

ابتدا فرض کنید که راه حلی برای نمونه 3SUM' وجود دارد، که این یعنی $a \in A$، $b \in B$ و $c_i \in C$ بنحوی وجود دارند که $a + b = c_i$، در اینصورت راه حلی برای EQDIST به صورت $(100i + 3 - c_i) - (100i) = (3 - b) - a$ وجود خواهد داشت. اکنون فرض کنید که راه حلی برای نمونه EQDIST وجود دارد، که

[11] Instance

$p1, p2 \in P$ و $q1, q2 \in Q$ باشد بنحوی که $p_1 - p_2 = q_1 - q_2$. بوضوح، p1 و p2 بایستی متناظر با $c_i \in C$ باشند، در غیر اینصورت تفاوت بین آنها حداقل 97 خواهد بود، در حالیکه، تفاوت بین q1 و q2 حداکثر 3 می باشد. علاوه بر آن $|p_1 - p_2| > 1$ است، بنابراین q1 و q2 نمی توانند متناظر با جفتی در A یا جفتی در B باشند چون در اینصورت $|q_1 - q_2| < 1$ است. بنابراین $100i, 100i + 3 - c_i \in P$ (که $c_i \in C$)، و $a, b \in Q$ (که $a \in A$، $b \in B$)، وجود خواهند داشت بنحوی که $(100i + 3 - c_i) - (100i) = (3 - b) - a$. که این دلالت بر آن دارد که $a + b = c_i$ برای نمونه 3SUM' صدق می کند. لذا اثبات تمام است.

مساله SEGCONTPNT (SEGMENTS-CONTAINING POINTS)

مساله: مجموعه P از n عدد حقیقی و مجوعه Q از m=O(n) بازه جدا از هم از اعداد حقیقی داده شده اند، آیا عدد حقیقی (انتقال) v وجود دارد که $P + v \subseteq Q$ باشد؟

وجه تسمیه این مساله آن است که P مجموعه ای از نقاط، و Q مجموعه ای از پاره خط ها، (بطور عمومی تر، دو مجموعه از پاره خط ها)، روی محور حقیقی است. ارتباط این مساله با مساله 3SUM' به صورت $3SUM' <<<_n SEGCONTPNT$.

برای اثبات ما Q' را با استفاده از Q تعریف شده در اثبات مساله قبلی ایجاد می کنیم:

$$Q' = [-100(n-1), -94] \cup Q \cup [100, 100(n-1) + 6]$$

ملاحظه می شود که اکنون Q' علاوه بر دو بازه [-100(n-1),-94] و [100,100(n-1)+6] از تعدادی بازه نقطه ای بصورت [q,q] تشکیل شده است که $q \in Q$ می باشد. این q ها با توجه به فرضی که در مساله قبل داشتیم، از دو نوع عضو a، که $a \in A$ و 3-b که $b \in B$ است، تشکیل شده اند، لذا تعدادی از این نقاط که از a هستند، طبق فرضی که در مساله قبل داشتیم، $A \cup B \cup C \subseteq (0,1)$، در بازه (0,1) قرار دارند، و تعدادی دیگر، که 3-b ها هستند، در بازه (2,3) قرار دارند. طول و محل بازه های جدید بنحوی انتخاب شده است، که شامل نگاشت (n-1) (اما نه n تا) از جفت نقاط P است، چرا که نقاط P، بالاترین فاصله بینشان 100n است، در حالی که این بازه ها طولی کمتر از این مقدار دارند. مساله دوم آن است که اجتماع این دو بازه جدید، نیز نمی تواند هیچ انتقالی از P را بطور کامل شامل شود، دلیل آن است

که فاصله این دو بازه 194 می باشد، لذا حتما یکی از نقاط عضو P در این بازه خواهد بود. مساله بعدی این است که حتما بایستی دو نقطه از P روی نقاط Q قرار گیرد، چرا که در صورتی که یکی از نقاط P در بازه (0,1) باشد، نقطه بعدی که متناظر با همان $c_i \in C$ است، بایستی در بازه (2,3) باشد، چرا که فاصله این دو عدد در مجموعه P، بین 2 و 3 می باشد.

لذا انتقال $P+v \subseteq Q$ اگر و تنها اگر حداقل یک جفت از نقاط P+v در Q قرار گیرند، موجود خواهد بود. و این طبق بحث راه حل مساله قبل، تنها وقتی ممکن است که رابطه بیان شده در راه حل سوال فوق یعنی $(100i+3-c_i)-(100i)=(3-b)-a$ برقرار باشد، چرا که با بررسی تک تک این موارد عین استدلال سوال فوق، تنها یک حالت ممکن خواهد بود. و بطور معکوس نیز به همین شکل می توان به این نتیجه رسید که راه حل مساله EQDIST متناظر با انتقالی است که به شکل $P+v \subseteq Q'$ باشد.

مساله POLYCONT

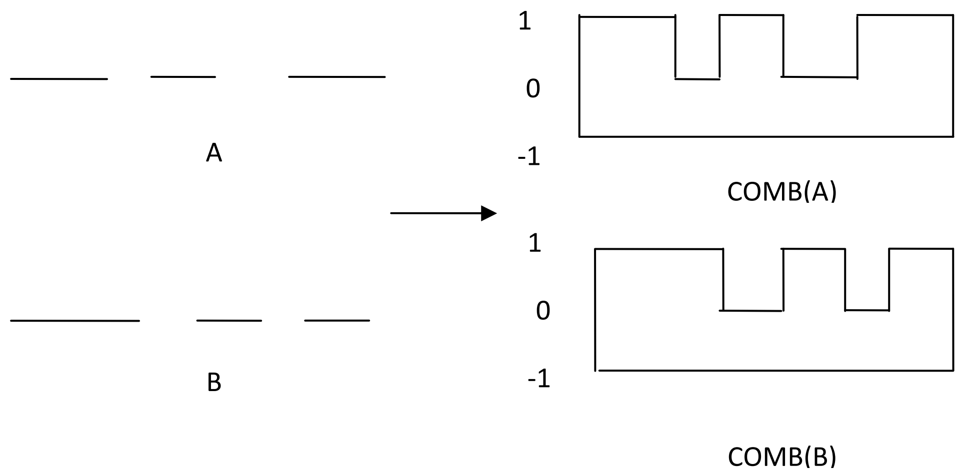
مساله: دو چندضلعی ساده P و Q در صفحه به ترتیب با n و m=O(n) یال داده شده است، آیا انتقالی از P وجود دارد که آن را بطور کامل داخل Q قرار دهد؟

ارتباط این مساله با مساله SEGCONTPNT بصورت $POLYCONT <<<_{n\log n} SEGCONTPNT$برقرار می شود.

ابتدا I(S) را بر روی مجموعه S از بازه ها تعریف می کنیم، که عبارتست از کوچکترین بازه از اعداد حقیقی که کل S را پوشش می دهد.

برای اثبات رابطه فوق فرض کنید (A,B) نمونه مساله SEGCONTPNT باشد، بنحوی که |A|,|B|=O(n). بدون کم شدن از کلیت فرض کنید، که A و B بر محور x ها قرار دارند. ما نمونه POLYCONT را بنحوی می سازیم که اگر و فقط اگر راه حلی برای نمونه مساله SEGCONTPNT اولیه راه حلی وجود داشته باشد، برای آن نیز راه حل موجود باشد.

بطور رسمی مجموعه S از بازه ها به چندضلعی ساده $COMB(S)=S\times[0,1]\cup I(S)\times[-1,0]$نگاشت می گردد (تصویر زیر را مشاهده کنید). ما $C_A=COMB(A)$ و $C_B=COMB(B)$را در زمان $O(n\log n)$ با مرتب سازی A و B در راستانی محور x ها محاسبه می کنیم. بوضوح اگر $C_A+(u,v)\subseteq C_B$ به ازای $(u,v)\in IR^2$باشد، در اینصورت $v=0$ می باشد. (از آنجایی که ارتفاع هر دوی C_A و C_Bبرابر 2 است). علاوه بر این، بسادگی قابل مشاهده است (طبق تعریف) که $C_A+(u,0)\subseteq C_B$ اگر و فقط اگر $A+u\subseteq B$باشد.



تصویر 9 تبدیل مجموعه پاره خط ها به چندضلعی

مساله CPOLYCONTROT

مساله: دو چندضلعی محدب P و Q در صفحه به ترتیب با n و m=O(n) یال داده شده است، آیا دورانی از P وجود دارد که آن را کاملا داخل Q قرار دهد؟

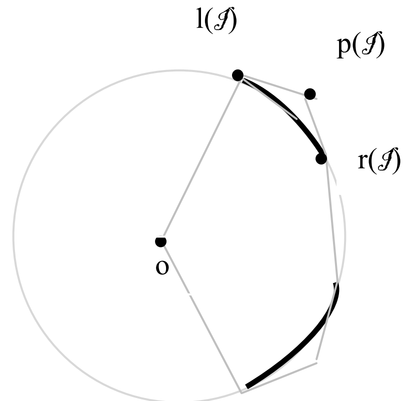
ارتباط این مساله با SEGCONTPNT بصورت $CPOLYCONTROT <<<_{n\log n} SEGCONTPNT$ برقرار می شود.

برای اثبات فرض کنید (A',B') یک نمونه SEGCONTPNT بنحوی باشد که |A'|,|B'|=O(n) باشد. بدون کم شدن از کلیت فرض کنید که $A',B' \subseteq [0.45,0.55]$ باشد. فرض کنید، $A=\{0.1\}\cup A'\cup\{0.9\}$ و $B=[0,0.2]\cup B'\cup[0.8,1]$ باشد. بوضوح $A+v\subseteq B$ است اگر و فقط اگر برای هر $v\in IR$، $A'+v\subseteq B'$ برقرار باشد.

فرض کنید $\mathcal{C}$ دایره ای به شعاع 1، با مرکز o باشد، f(x)=(sin(x/100), cos(x/100) نگاشتی از محور حقیقی به $\mathcal{C}$ باشد و $\mathcal{A}$=f(A)، و $\mathcal{B}$=f(B) باشد. بوضوح، انتقال $v\in IR$ بنحوی که $A+v\subseteq B$ اگر و تنها اگر دورانی از $\mathcal{A}$ دور o وجود داشته باشد، که $\mathcal{A}$ را کاملا درون $\mathcal{B}$ قرار دهد، وجود دارد.

بازه دایره ای (کمان) $\mathcal{I}\subset\mathcal{C}$ را در نظر بگیرد، ما p($\mathcal{I}$) را تقاطع نقاط بین دو خط مماس از $\mathcal{C}$ در l($\mathcal{I}$) و r($\mathcal{I}$)، دو نقطه انتهایی $\mathcal{I}$، تعریف می کنیم، (در صورتی که $\mathcal{I}$ یک نقطه انتهایی باشد، p($\mathcal{I}$)=$\mathcal{I}$). برای مجموعه S از کمان های $\mathcal{C}$، ما $W(S)=CH(\{0.0\}\cup\bigcup_{I\in S}\{l(I),r(I),p(I)\})$، را تعریف می نمائیم (CH(.) یک عملگر چندضلعی محدب است). تصویر زیر این مطلب را نشان می دهد. مجددا ما W($\mathcal{A}$) و W($\mathcal{B}$) را در زمان O(nlog n) (با مرتب سازی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ بر روی $\mathcal{C}$) می سازیم.

راه حلی برای نمونه SEGCONTPNT اولیه داده شده است، بلافاصله استنتاج می شود که برای مسائل CPOLYCONTROT و CPOLYRMOTION اگر $A+v\subseteq B$ (برای $v\in IR$) باشد، فرض کنید R_V دوران متناظر دور o بنحوی باشد که $R_V(\mathscr{A})\subseteq(\mathscr{B})$ برقرار باشد. طبق تعریف $R_V W(\mathscr{A})\subseteq W(\mathscr{B})$ است. بنحو مشابه، راه حلی برای نمونه CPOLYCONTROT شامل راه حلی برای نمونه SEGCONTPNT می باشد. لذا این ارتباط نیز اثبات می گردد.



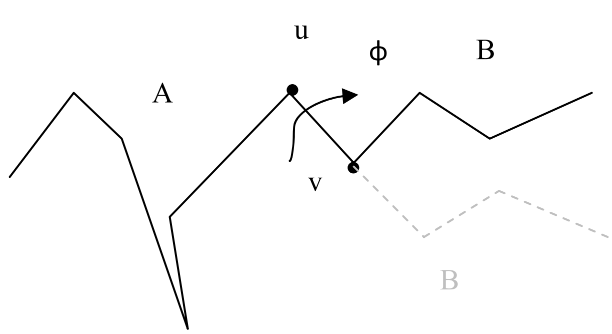
تصویر 10 ساخت چندضلعی محدب از مجموعه ای از کمان های دایره ای

مساله DIHEDRAL-ROTATION

مساله: یک زنجیر چندجمله ای از n تا یال در فضای سه بعدی داده شده است، دوران بصورت دوسطحی[12] قابل انجام سات، آیا دوران باعث می شود که این زنجیر به خودش برخورد کند؟

تصویر زیر دوران دو سطحی را نشان می دهد:

B



[12] dihedral

تصویر 11 دوران دو سطحی

ارتباط این مساله را با 3SUM' برقرار می نمائیم که به صورت $3SUM' <<<_{n\log n} DIHEDRAL-ROTATION$ است.

برای اثبات فرض کنید نمونه ای از مساله 3SUM' داده شده است، ما زنجیر چند جمله از پاره خط ها را در زمان $O(n\log n)$ بنحوی خلق می کنیم که دنباله ای از O(n) تا دوران دو سطحی مسائل، 3SUM' را حل نماید، خلق می نمائیم. در اینصورت خواهیم داشت:

P(n)-nQ(n)=Ω(3SUM(n)).

ما کار را با تغییر مجموعه ها بنحوی آغاز می کنیم که هر مجموعه در بازه ای با با فاصله زیاد از دیگری قرار گیرد. بطور خاص، ما A و C را با دو مجموعه جدید، $A'=\{a-2m \mid a\in A\}$ و $C'=\{c+2m \mid c\in C\}$ جایگزین می نمائیم که در آن m ماکزیمم مطلق مقدار هر مولفه داخل $A\cup B\cup C$ می باشد. این جایگزینی بوضوح تاثیری روی نتیجه 3SUM' نخواهد داشت. برای سهولت امر کاهش ما سه مجموعه را در زمان $O(n\log n)$ مرتب می سازیم. (البته کاهش پیچیده تری در زمان O(n) نیز وجود دارد که با بکار بردن بعد سوم از مرتب سازی اجتناب می ورزد)

ما زنجیر مسطحی را همانند تصویر زیر می سازیم. برای هر مولفه $a'\in A'$، شانه سمت چپ دارای دندانه های برآمده نازکی است که مرکز آن روی خط x=c' قرار دارد. برای هر مولفه $c'\in C'$ شانه سمت راستی حاوی دندانه هایی بسیار نازک به سمت پایین است. سرانجام، برای هر مولفه $b\in B$، پله شامل یک یال عمودی روی خط x=-b/2 است.

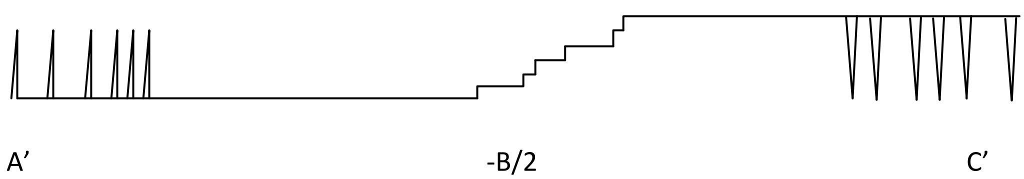
اکنون سری پرسش هایی از O(n) دوران دو سطحی می پرسیم، برای مثال، آیا دوران دوسطحی با زاویه 2π در هر یال عمودی در پله متعاد قابل انجام است؟ از آنجایی که یال عمودی است، و زنجیر مسطح است، تنها امکان تقاطع وقتی است که دوران به π می رسد. در این نقطه، یک شانه و قسمتی از پله در یال عمودی همانند شکل زیر منعکس می گردد.

از آنجایی که دوران در یال عمودی انجام می گیرد، هیچ تغییری در ارتفاع نداریم. این دلالت بر این دارد که پله نمی تواند با خودش برخورد کند. هر شانه بطور خاص صلب باقی می ماند، لذا هیچ کدام از شانه ها نمی توانند با خودشان بر خورد کنند. علاوه بر این، از آنجایی که هر یال عمودی در پله در فاصله ای حداکثر به اندازه m از تمامی یال های پله ای قرار دارد، اما در فاصله ای حداقل 3m/2 از یال های دیگر شانه قرار دارد، یک دوران دو سطحی نمی تواند منجر به این شود که شانه و پله با هم برخورد کنند. لذا، تنها حالتی که ممکن است تلاقی در حین دوران رخ دهد، بین دو شانه است. از آنجایی که ارتفاع

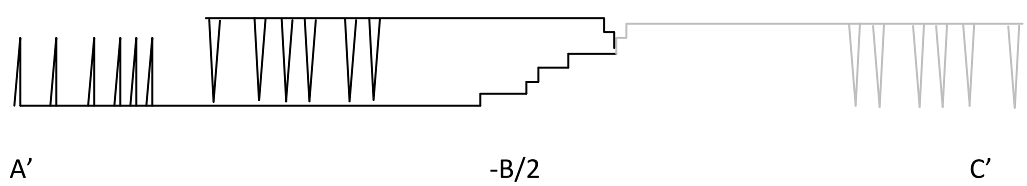
یک یال در حین حرکت ثابت می ماند، تلاقی تنها در دندانه ها ممکن است.

فرض کنید که دوران دو سطحی با زاویه π در یال پله عمودی در خط x=-b/2 انجام گیرد. این دوران شانه سمت راست را در مقابل خط عمودی منعکس می سازد، هر کدام از دندانه های شانه سمت راست، از مختصات x، c’ به مختصات x، -c’-b حرکت می دهد. این دوران منجر به برخورد دو دندانه اگر و فقط اگر a’=-c’-b’ یا بطور هم ارز a’+b+c’=0 برای برخی از مولفه های، $a'\in A, c'\in C$ باشد ممکن می گردد.

ما هر کدام از پرسش های دوران دو سطحی را برای هر کدام از یال های پله انجام می دهیم. اگر هر کدام از این دوران ها غیرممکن باشد، دوران ناممکن سه مولفه $a'\in A, c'\in C, b\in B$ را بنحوی مشخص می نماید که با اعمال حداکثر n تا پرسش دوران دوسطحی، ما نمونه اصلی مساله 3SUM’ را حل نمائیم.



تصویر 12کاهش مساله 3SUM' به سری ایستایی از پرسش های دوران دو سطحی

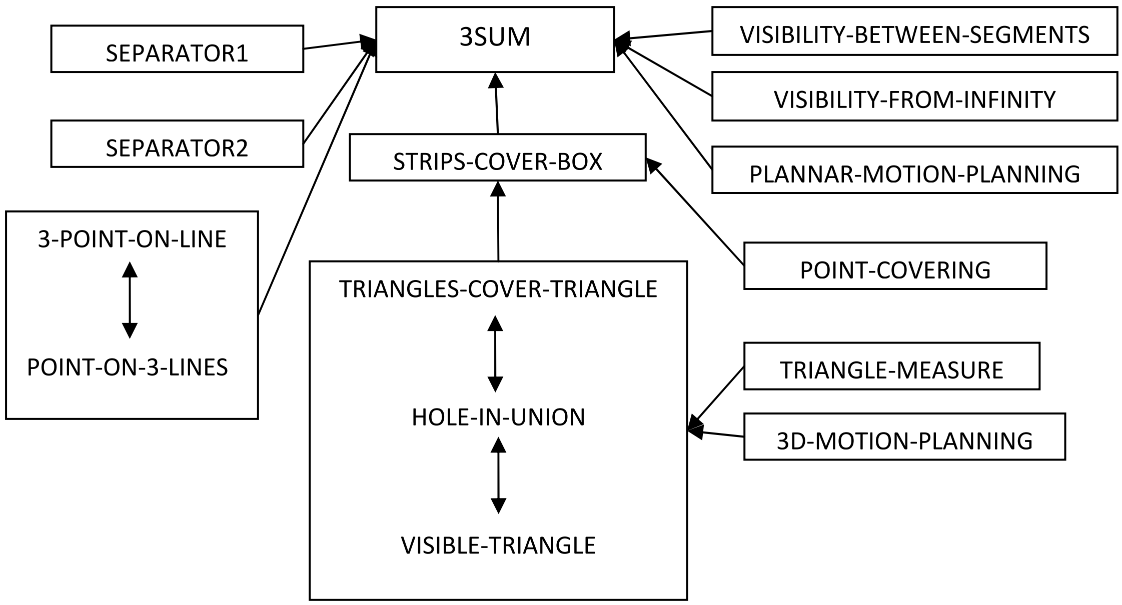


تصویر 13 دوران دوسطحی در یال پله ای عمودی

نتیجه گیری

در این گزارش ما دسته مسائل 3SUM را مطرح ساختیم، که در صورتیکه بتوان راه حلی برای این مسائل با زمان کمتر از $O(n^2)$ یافت پیچیدگی زمانی مسائل هم ارز 3SUM و خود آن کاهش خواهد یافت. در این گزارش صرفا به ارتباط بین پیچیدگی زمانی مسائل مختلف پرداختیم، و البته هیچ چیز در مورد بهبود پیچیدگی زمانی ارائه ننمودیم. ارتباط بین پیچیدگی زمانی مسائل مختلف در تصویر زیر نشان داشده شده است، که

فلشی از سمت مسئله A به مساله B بدان معناست که B می تواند با استفاده از مساله A حل شود، یا بعبارتی دیگر B ساده تر از A است.



پرسش مهمی که وجود دارد آن است که وقتی مشخص شود که شما به مساله 3SUM برخورد کرده اید چه باید بکنید. راه های مختلفی وجود دارد، یکی اینکه تلاش کنید راه حلی حساس به خروجی پیدا کنید. برای مثال فردی ممکن است مساله 3-POINT-ON-LINE را به مساله K-POINT-ON-LINE توسعه دهد، که در آن مجموعه ای از نقاط در صفحه داده شده است، آیا خطی وجود دارد که حداقل k تا نقطه را در بر گیرد. در منبع شماره 13 نشان داده شده است، که این مساله می تواند در زمان $O(n^2/k.\log n/k)$ که این بسیار سریعتر از $O(n^2)$ برای k های بزرگ می باشد. راه حل دیگر ممکن است نگاه کردن به الگوریتم هایی است که بنحو کارا برای کلاس خاصی از اشیاء کار می کنند. بطور خاص اشیاء «چاق»[13] بنظر می رسد بهبود زیادی ایجاد می کنند. (اشیائی چاق نامیده می شوند که قسمت های لاقر بلند نداشته باشند). همچنین مساله PLANAR-MOTION-PLANNING می تواند در زمان $O(n\log n)$ برای میله ای که بین مانع های چاق حرکت می کند، حل گردد. راه حل های کارا همچنین ممکن است برای انواع دیگری از حالات خاص وجود داشته باشد. برای مثال، مساله SEPARATOR وقتی که سایز کوچکترین پاره خط حداقل یک کسر ثابتی از قطر مجموعه پاره خط ها است، می تواند در $O(n\log n)$ حل گردد.

[13] fat

مسالـه اصلی بـاقـی مـانـده آن است، کـه حد بـهـتـری بـرای پـیـچـیـدگـی مـسالـه BASE پـیـدا نـمـائـیـم. کـوچـکـتـریـن بـهـبـود در حدپـایـیـن آن بـسرعـت بـر روی تـمـام مـسائـل تـاثـیـر مـی گـذارد، چـرا کـه کـاهـش خـیـلـی سریـع قـابـل انـجـام است. از سمـتـی دیـگـر، بـهـبـود حدبـالا بـرای بـهـبـود حدزمـانـی مـسائـل دیـگـر لازم است.
الـبـتـه Erickson و Seidel بـه $\Omega(n^2)$ در مـنـبـع شـمـاره 14بـه عـنـوان حدپـایـیـن رسیـدنـد، الـبـتـه تـنـهـا در مـدل مـحـاسـبـاتـی ضـعـیـف چـنـیـن اتـفـاقـی افـتـاده است.
فـعـالـیـت دیـگـری کـه مـی تـوان انـجـام داد تـلاش در تـوسعـه کـلاس مـسائـل 3SUM است.

مـنـابـع:

[1] James,King, A survey of 3SUM-Hard Problems, king@cs.ubc.ca, Dec2004.

[2] Hoang Nguyen, Eine Klasse von Problemen in O(n²), march2002.

[3]Anka Gajentaan and mark H.Overmars, n2-Hard Problems in Computational Geometry, Utresht university, Apr1993.

[4] Ilya Baran, Erik D.Demaine, Mihai Pastra scu, Subquadratic Algorithms for 3SUM, MIT Computer Science and Articicial Intelligence Laboratory. 2005.

[5] Gill Barquet, Sariel Har-Peled, Some Variants of Polygon Containtment and Minimum Hausdorff Distance under Translation are 3SUM-Hard, Sept1998.

[6] Jeff Erickson, Lower Bounds for linear satisfiability Problems, Univeristy of California, May1997.

[7] Andranik Mirzaian, Triangulating Simple Pligons: Psedo-Triangulations, York University, Aug1998.

[8]Arnit K.Patel, 3SUM-Hard Problems, Jan2005.

[9] Michael Soss, Jeff Erickson, Mark Overmars, Preprocessing Chains for Fast Dihedral Rotations Is hard or Even Impossible, Apr2002.

[10] Bernard Chazelle, Leo J.Guidbas, D.T.Lee, The Power of Geometric Duality, 1985.

[11] H.Edelsbrunner, L.Guibas, M. Sharir, The complexity and construction of many faces in arrangement of lines and of segments, 1990.

[12] B. Chazelle, Triangulating a simple polygon in linear time, 1991.

[13] l.Guibas, M.Overmars, J-M. Robert, The exact fitting problem for points, Proc. Third Canadian Conference on Computational Geometry, 1991.

[14] J.Erickson and R.Seidel, Better lower bounds on detecting degeneracies, in perapration. 1993.