УДК 517.95
MSC2010 35K55, 35Q79

© П. Р. Месенев[1], А. Ю. Чеботарев[2]

# Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена

Рассмотрена граничная обратная задача нахождения отражающих свойств участка границы для стационарных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена в трёхмерной области. Доказано существование квазирешения обратной задачи и получена система оптимальности. Приведён алгоритм решения задачи, эффективность которого проиллюстрирована численными примерами.

Ключевые слова: *уравнения радиационного теплообмена, квазирешение обратной задачи, метод градиентного спуска.*

## 1. Введение

Исследование математических моделей радиационного теплопереноса [1], учитывающих одновременно вклад эффектов теплопроводности и излучения даёт теоретическую основу для инженерных решений в различных областях, таких как производство стекла [2], лазерная интерстициальная термотерапия [3], и др. Главной особенностью данных процессов является существенное влияние излучения на теплообмен при высоких температурах. Значительное число работ посвящено исследованию задач управления для нестационарных моделей сложного теплообмена [4–6], в которых для описания температурного поля используется нестационарное уравнение теплопроводности, а для моделирования излучения — стационарное диффузионное приближение уравнения переноса излучения. В работах [7, 8] задача оптимального управления сводится к bang-bang принципу [9], или аналогичному. Близкие к рассмотренной в данной статье, задача управления коэффициентом отражения для полностью стационарной модели исследовалась в [10], для нестационарной модели – в [11]. Отметим также работы [12, 13], в которых рассмотрены свойства квазирешений обратных задач для уравнений тепломассопереноса.

Настоящая работа посвящена нахождению коэффициента отражения участка границы для стационарной модели, по дополнительной информации о температурном поле. Доказано существование квазирешения задачи. Предложен алгоритм градиентного спуска для решения экстремальной задачи и представлены результаты численных экспериментов.

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8;
[2] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7
Электронная почта: mesenev.pr@gmail.com (П. Р. Месенев), cheb@iam.dvo.ru (А. Ю. Чеботарев).

## 2. Постановка обратной задачи

Нормализованная стационарная модель, описывающая процесс радиационного теплопереноса в области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\Gamma$ (см. [14]), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^3|\theta| - \varphi) = 0, \\ -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\theta$ – нормализованная температура, $\varphi$ – нормализованная интенсивность излучения, усреднённая по всем направлениям, $\kappa_a$ – коэффициент поглощения. Константы $a, b, \alpha$ описываются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v},\ b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v},\ \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$$

где $k$ – теплопроводность, $c_v$ – удельная теплоёмкость, $\rho$ – плотность, $\sigma$ – постоянная Стефана–Больцмана, $n$ – индекс рефракции, $T_{\max}$ – максимальная температура, $\kappa := \kappa_s + \kappa_a$ – коэффициент полного взаимодействия, $\kappa_s$ – коэффициент рассеяния. Коэффициент $A\in[-1,1]$ описывает анизотропию рассеивания; случай $A=0$ отвечает изотропному рассеиванию.

Уравнения (1) дополняются граничными условиями на $\Gamma := \partial\Omega = \overline{\Gamma}_0\cup\overline{\Gamma}_1\cup\overline{\Gamma}_2$, где части границы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ не имеют пересечений.

$$\begin{aligned} \Gamma:&\ a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \\ \Gamma_0\cup\Gamma_2:&\ \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \\ \Gamma_1:&\ \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Функции $\gamma, \theta_b, \beta$ – являются известными. Функция $u$ характеризует отражающие свойства участка границы $\Gamma_1$. Предполагается, что

$$0 < u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \tag{3}$$

где $u_1$ и $u_2$ - заданные ограниченные функции.

Обратная задача состоит в нахождении функций $u(x), x\in\Gamma_1, \theta(x), \varphi(x), x\in\Omega$ удовлетворяющих условиям (1)–(3), а также дополнительному условию на участке границы $\Gamma_2$:

$$\theta|_{\Gamma_2} = \theta_0 \tag{4}$$

где $\theta_0$ известная функция. Сформулированная обратная задача (1)–(4) сводится к экстремальной задаче, состоящей в минимизации функционала

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0)^2 d\Gamma \tag{5}$$

на решениях краевой задачи (1)–(3). Решение задачи (1)–(3), (5) называется квазирешением задачи (1)–(4).

## 3. Формализация задачи нахождения квазирешения

Будем предполагать что исходные данные удовлетворяют следующему условию:

(i) $\beta \in L^\infty(\Gamma)$; $\gamma \in L^\infty(\Gamma_0 \cup \Gamma_2)$; $u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma_1)$; $0 < \beta_0 \leqslant \beta$; $0 < \gamma_0 \leqslant \gamma$; $\beta_0, \gamma_0 = Const$, $0 \leqslant u_1 \leqslant u_2$;

Пусть $H = L^2(\Omega), V = W_2^1(\Omega), Y = V \times V$. Пространство $H$ отождествляем с сопряжённым пространством $H'$ так, что $V \subset H = H' \subset V'$. Определим $(f, v)$ как значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в $H$, если $f \in H, \|f\|^2 = (f, f)$. Пространство $U = L^2(\Gamma_1)$ является пространством управлений; $U_{ad} = \{u \in U, u_1 \leqslant u \leqslant u_2\}$ — множество допустимых управлений.

Пусть $v$ произвольный элемент множества $H^1(\Omega)$. Определим операторы:

$$A_{1,2} \colon V \to V', \;\; F \colon V \times U \to V', \; f \in V', \; \mathrm{g} \in V'.$$

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int\limits_{\Gamma} \beta\theta v d\Gamma, \; (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int\limits_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} \gamma\varphi v d\Gamma,$$

$$(f, v) = \int\limits_{\Gamma} \beta\theta_b v d\Gamma, \;\; (\mathrm{g}, v) = \int\limits_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma,$$

$$(F(\varphi, u), v) = \int\limits_{\Gamma_1} u(\varphi - \theta_b^4) v d\Gamma.$$

Пару $\{\theta, \varphi\} \in Y$ будем называть слабым решением задачи (1), (2), если

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) = \mathrm{g}. \tag{6}$$

Отметим, что в силу вложения $H^1(\Omega) \subset L^6\Omega)$ выражение $(|\theta|\theta^3, v)$ имеет смысл для любой функции $v \in H^1(\Omega)$.

Задача нахождения квазирешения состоит в минимизации функционала $J(\theta)$, определённом на компоненте $\theta$ решения системы (6). Таким образом

$$J(\theta) \to \inf, \; \{\theta, \varphi\} \text{ решение (6), соответствующее функции } u \in U_{ad}. \tag{7}$$

Пара $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$ соответствующая минимуму $J$, отвечающая функции $\hat{u}$ называется оптимальным состоянием. В таком случае $\hat{u}$ называется квазирешением обратной задачи (1)–(4).

## 4. Анализ экстремальной задачи

Для доказательства разрешимости задачи (7) нам необходимо также установить некоторые свойства решения задачи (1), (2).

**Лемма 1** [15]. *Пусть выполняется условие (i). Тогда для каждого $u \in U_{ad}$ существует единственное слабое решение $\{\theta, \varphi\}$ для задачи (1),(2) и справедливы оценки:*

$$M_1 \leqslant \theta \leqslant M_2, \; M_1^4 \leqslant \varphi \leqslant M_2^4, \tag{8}$$

$$\|\nabla\varphi\|^2 \leqslant C. \tag{9}$$

*Здесь $M_1 = \text{ess inf}\,\theta_b, M_2 = \text{ess sup}\,\theta_b$, и константа $C > 0$ зависит только от $a, b, \alpha, \kappa_a, \beta, \gamma, \|u\|_{L^\infty(\Gamma)}$ и области $\Omega$.*

На основе оценок (8) и (9) аналогично [10] доказывается разрешимость экстремальной задачи (7).

**Теорема 1.** *Пусть выполняется условие (i). Тогда существует хотя бы одно решение задачи* (7).

Для вывода системы оптимальности, покажем дифференцируемость функционала $J$.

**Лемма 2.** *Функционал $J : V \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Фреше.*

Доказательство. Покажем, что для произвольной функции $\theta \in V$ выполняется следующее равенство:

$$J(\theta + h) = J(\theta) + J'(\theta)\langle h\rangle + r(\theta, h)\ \forall h \in V, \quad \text{где}\quad J'(\theta)\langle h\rangle = \int\limits_{\Gamma_2} (\theta - \theta_0) h d\Gamma, \tag{10}$$

где для остаточного члена $r(\theta, h)$ справедливо соотношение:

$$\frac{|r(\theta, h)|}{\|h\|_V} \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_V \to 0. \tag{11}$$

Перепишем (10) в виде

$$\frac{1}{2}\|\theta + h - \theta_0\|^2_{L^2(\Gamma_2)} = \frac{1}{2}\|\theta - \theta_0\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + (\theta - \theta_0, h)_{L^2(\Gamma_2)} + \frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2(\Gamma_2)}.$$

Согласно теореме о следах $\|h\|_{L^2(\Gamma_2)} \leqslant C\|h\|_V$, где $C$ не зависит от $h$. Поэтому

$$\frac{r(\theta, h)}{\|h\|_V} \leqslant \frac{1}{2} C^2 \|h\|_V \to 0 \quad \text{при } \|h\|_V \to 0.$$

□

Вывод условий оптимальности основан на принципе множителей Лагранжа для гладко-выпуклых задач минимизации.

**Теорема 2.** *Пусть $\hat{y} = \{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\} \in Y, \hat{u} \in U_{ad}$ — решение экстремальной задачи* (7). *Тогда существует пара $p = (p_1, p_2)$, $p \in Y$ такая, что тройка $(\hat{y}, \hat{u}, p)$, удовлетворяет следующим условиям:*

$$A_1 p_1 + 4|\hat{\theta}|^3 \kappa_a (b p_1 - p_2) = f_c, \quad (f_c, v) = -\int\limits_{\Gamma_2} (\hat{\theta} - \theta_0) v d\Gamma, \tag{12}$$

$$A_2 p_2 + \kappa_a (p_2 - b p_1) = \mathrm{g}_c((p_2, \hat{u}), v), \quad \mathrm{g}_c((p_2, \hat{u}), v) = -\int\limits_{\Gamma_1} \hat{u} p_2 v \Gamma, \tag{13}$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} p_2(\hat{\varphi} - \theta_b^4)(u - w) \leqslant 0 \quad \forall w \in U_{ad}. \tag{14}$$

Доказательство. Перепишем уравнения (6) следующим образом:

$$H(y,u)=0,\;\; y=\{\theta,\varphi\}\in Y,$$

где

$$H : Y\times U \to Y',$$

$$H(y,u)=\{A_1\theta+b\kappa_a(|\theta|\theta^3-\varphi)-f, A_2\varphi+\kappa_a(\varphi-|\theta|\theta^3)+F(\varphi,u)-\mathrm{g}\}.$$

Заметим, что для всех $u\in U_{ad}$, отображение $y\to J(\theta)$ и $y\to H(y,u)$ непрерывно дифференцируемо в окрестности $\mathcal{O}(\hat{y})$ точки $\hat{y}$. Непрерывная дифференцируемость членов в $H$ следует из непрерывной дифференцируемости функции $t\in\mathbb{R}\to|t|t^3$, а также из непрерывности вложения $V\subset L^6(\Omega)$. В дополнение, отображение $u\to H(y,u)$ непрерывно из $U\to Y'$ и афинно. В [10] показано, что $\mathrm{Im}H'_y(\hat{y},\hat{u})=Y$, что влечёт невырожденность условий оптимальности.

Рассмотрим функцию Лагранжа $L(y,u,p)=J(\theta)+(H(y,u),p)$, где $y,p\in Y$, $u\in U_{ad}$. Согласно принципу Лагранжа [16, Гл.2, Теорема 1.5] существует пара $p=\{p_1,p_2\}\in Y$ такая, что

$$(L_\theta,\zeta)=\int\limits_{\Gamma_2}(\hat{\theta}-\theta_0)\zeta d\Gamma+(A_1\zeta+4b\kappa_a|\hat{\theta}|^3\zeta,p_1)-4\kappa_a(|\hat{\theta}|^3\zeta,p_2)=0\;\forall\zeta\in V, \qquad (15)$$

$$(L_\varphi,\zeta)=(A_2\zeta+\kappa_a\zeta,p_2)-b\kappa_a(\zeta,p_1)+\int\limits_{\Gamma_1}\hat{u}\zeta p_2=0\;\forall\zeta\in V, \qquad (16)$$

$$(L_u,\tau)=\int\limits_{\Gamma_1}\tau(\hat{\varphi}-\theta_b^4)p_2d\Gamma\leqslant 0,\;\tau:=\hat{u}-w\;\forall w\in U_{ad}. \qquad (17)$$

Сопряжённые уравнения (12),(13) являются прямым следствием вариационных равенств (15) и (16). □

## 5. Численные эксперименты

Пусть функционал $J(\theta)$ удовлетворяет условиям, указанным в разд. 4. Для удобства введём переобозначение $\hat{J}(u):=J(\theta(u)), \hat{J}:L^2(\Gamma_1)\to\mathbb{R}$. Здесь $\theta(u)$ – температурное поле задачи (1)–(2) отвечающее управлению $u\in L^2(\Gamma_1)$. Согласно формуле (14) градиент функционала $\hat{J}(u)$ [8] имеет вид

$$\hat{J}'(u)=(\varphi(u)-\theta_b^4)p_2,$$

где $\varphi(u)$ есть интенсивность излучения, $p_2$ – соответствующая переменная сопряжённой системы.

Предлагаемый алгоритм решения выглядит следующим образом:

**Алгоритм градиентного спуска с проекцией**

1: Выбираем значение градиентного шага $\lambda$,
2: Выбираем количество итераций $N$,
3: Выбираем произвольное $u_0 \in U_{ad}$,
4: **for** $k \leftarrow 0, 1, 2, ..., N$ **do**:
5: Для полученного $u_k$ рассчитываем состояние $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$ из (6).
6: Рассчитываем значение функционала качества $J(\theta_k)$ из (5).
7: Рассчитываем сопряжённое состояние $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$ из уравнений (12)–(13), где $\hat{\theta} = \theta_k, \hat{u} = u_k$.
8: Пересчитываем управление $u_{k+1} = P_{ad}\left[u_k - \lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}\right]$.

Значение параметра $\lambda$ выбирается согласованным со значением градиента $J'(u_k) = (\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}$ таким образом, чтобы значение $\lambda(\varphi_k - \theta_b^4)p_{2k}$ определяло значимую поправку для $u_k$. В экспериментах, приведённых ниже, значение параметра $\lambda = 20$.

Количество итераций $N$ выбирается достаточным для выполнения условия $J(\theta_{N-1}) - J(\theta_N) < 10^{-15}$. Эксперименты показывают хорошее восстановление функции $u$ при $N > 10^5$.

Оператор проекции $P_{ad}: U \to U_{ad}$ определён следующим образом

$$P_{ad}[v] = \begin{cases} u_1, & \text{если } v \leqslant u_1 \\ v, & \text{если } u_1 < v < u_2 \\ u_2, & \text{если } v \geqslant u_2 \end{cases}$$

Приведём далее примеры расчётов для двумерного случая. Положим $\Omega = \{(x,y), 0 \leqslant x,y \leqslant l\}$, $l = 1$ см. Граница $\partial\Omega$ состоит из участков:

$\Gamma_0 = \{x = \{0,1\}, y \in [0,1]\}$

$\Gamma_1 = \{x \in [0,1], y = 0\}$ – участок с неизвестными отражающими свойствами,

$\Gamma_2 = \{x \in [0,1], y = 1\}$ – участок наблюдения.

Будем также далее считать, что $a = 0.006[\text{см}^2/\text{с}]$, $b = 0.025[\text{см}/\text{с}]$, $\beta = 0.00005[\text{см}/\text{с}]$, $\kappa = 1[\text{см}^{-1}]$, $\kappa_s = 0$, $A = 0$, $\gamma = 0.3$. Указанные параметры соответствуют стеклу [8]. Температуру на границе $\Omega$ положим равной $\theta_b = (x^2 + y^2)/3$.

При указанных параметрах для первого эксперимента выберем следующее тестовое значение функции $u$ (рис. 1(a)):

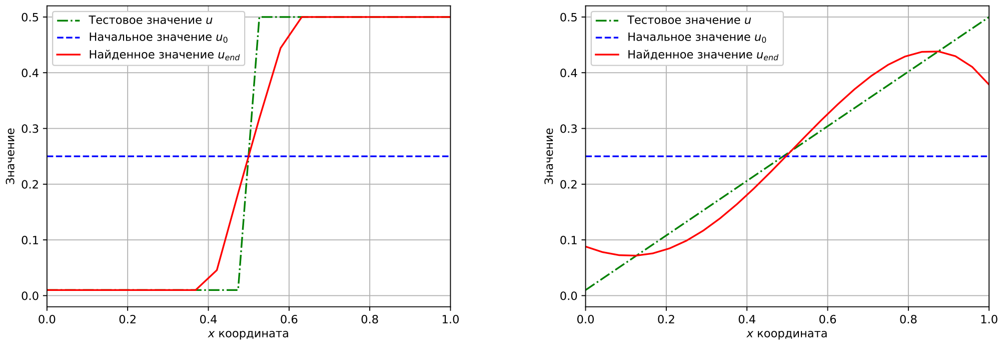
$$u(x) = \begin{cases} 0.01, & \text{если } x \leqslant 0.5, \\ 0.5, & \text{если } x > 0.5, \end{cases} \tag{18}$$

и для второго эксперимента (рис. 1(b)):

$$u(x) = 0.49x + 0.01. \tag{19}$$

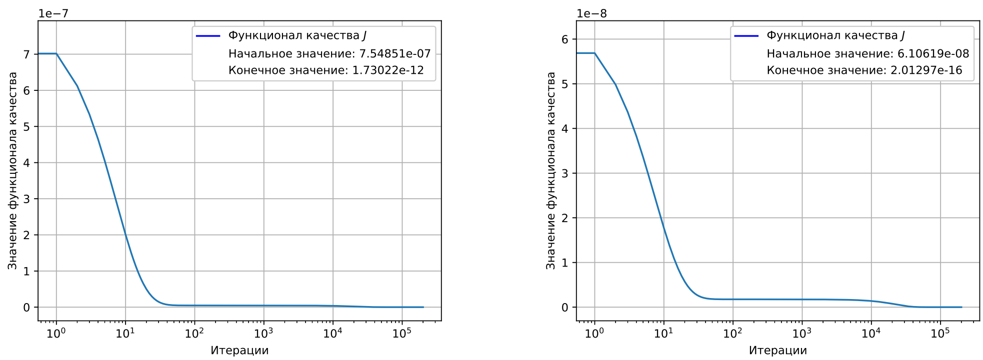
Вычислим решение прямой задачи (1)–(2) для этих случаев. Полученное температурное поле на участке наблюдения $\Gamma_2$ выберем в качестве $\theta_0$. Далее, применяя предложенный алгоритм находим квазирешение обратной задачи (1)–(4). Эффективность алгоритма, а также значение $u_0$ в первом и втором случаях иллюстрируются рис. 1. На рис. 2 показана динамика функционала качества по итерациям.

**Замечание.** В предложенных примерах мы использовали $1.5*10^5$ итераций для нахождения квазирешения $u$. В то же время температурное поле на участке наблюдения $\Gamma_2$ становится близким к $\theta_0$ уже на $10^2$ итерации. Также наблюдается существенное падение скорости уменьшения функционала качества с каждой итерацией после того, как среднее значение найденной функции становится близко к тестовой функции.




(a) Первый эксперимент (b) Второй эксперимент

Рис. 1: Тестовая функция $u$, начальная $u_0$, найденная функция $u_{end}$.




(a) Первый эксперимент (b) Второй эксперимент

Рис. 2: Динамика функции $\hat{J}(u)$ по итерациям.

## Список литературы

[1] M. F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, 2003.

[2] Clever D. and Lang J., “Optimal control of radiative heat transfer in glass cooling with restrictions on the temperature gradient”, **33**:2 (2012), 157–175.

[3] O. Tse, R. Pinnau, N. Siedow, “Identification of temperature dependent parameters in laser–interstitial thermo therapy”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **22**:9 (2012), 1–29O.

[4] N. Siedow O. Tse, R. Pinnau., “Identification of temperature dependent parameters in a simplified radiative heat transfer”, *Aust. J. Basic Appl. Sci.*, 2011, 7–14.

[5] R. Pinnau O. Tse, “Optimal control of a simplified natural convection-radiation model”, *Commun. Math. Sci.*, 2013, 679–707.

[6] Thomes G., Pinnau R., Seaid M., Gotz T., and A. Klar., *Trans. Theory Stat Phys.*, **31**:4–6 (2002), 513–529.

[7] Alexander Yu. Chebotarev, Andrey E. Kovtanyuk, Gleb V. Grenkin, Nikolai D. Botkin, and Karl Heinz Hoffmann, “Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model”, *Applied Mathematics and Computation*, **289**:10 (2016), 371–380.

[8] Chebotarev A., Kovtanyuk A., Grenkin G., Botkin N., and Hoffman K.-H. “Boundary optimal control problem of complex heat transfer model”, *J. Math. Anal. Appl.*, **433**:2 (2016), 1243–1260.

[9] K. Glashoff and E. Sachs, “On theoretical and numerical aspects of the bang-bang-principle”, *Numer. Math.*, **29**:1 (1977), 93–113.

[10] Kovtanyuk Andrey E., Chebotarev Alexander Yu., Botkin Nikolai D., and Hoffmann Karl-Heinz, “Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive convective radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **412** (2014), 520–528.

[11] Гренкин Г.В., “Оптимальное управление в нестационарной модели сложного теплообмена”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:2 (2014), 160–172.

[12] Р. В. Бризицкий, Ж. Ю. Сарицкая, “Устойчивость решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции при условии Дирихле”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:12 (2016), 2042–2053.

[13] Г. В. Алексеев, Р. В. Бризицкий, Ж. Ю. Сарицкая, “Оценки устойчивости решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции-диффузии-реакции”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **19**:2 (2016), 3–16.

[14] Pinnau R., “Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by the $sp_1$-system”, *Comm. Math. Sci.,*, **5**:4 (2007), 951–969.

[15] Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., and Hoffman Karl-Heinz, “Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model,”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **20** (2015), 776–784.

[16] A.D. Ioffe and V.M. Tikhomirov, *Theory of extremal problems*, North Holland, Amsterdam, 1979.


Поступила в редакцию
20 февраля 2018 г.

*Mesenev P. R., Chebotarev A. Yu.* Boundary inverse problem for conductive-radiative equations of heat transfer. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 1–8.

ABSTRACT

The boundary inverse problem of finding the reflecting properties of the boundary region for stationary radiation-conductive heat transfer equations in the three-dimensional region is considered. The existence of a quasi-solution of the inverse problem is proved and an optimality system is obtained. An algorithm for solving a problem is presented, the effectiveness of which is illustrated by numerical examples.

Key words: *Radiative heat transfer equations, quasi-solution of the inverse problem, gradient descent method.*