

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт прикладной математики
Дальневосточного отделения Российской академии наук
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Дальневосточный федеральный университет

На правах рукописи

Гренкин Глеб Владимирович

**Моделирование и оптимизация сложного
теплообмена на основе диффузионного
приближения**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Чеботарев Александр Юрьевич

Владивосток – 2018

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Модели сложного теплообмена	15
1.1. P_1 -приближение уравнения переноса излучения	15
1.2. Стационарная модель сложного теплообмена в многослойной среде	19
1.3. Математический аппарат моделирования сложного теплообмена	29
Глава 2. Корректность моделей сложного теплообмена	38
2.1. Неоднородная нестационарная модель с заданным полем скоростей	38
2.2. Модель свободной конвекции с радиационным теплообменом	54
Глава 3. Устойчивость стационарных решений	76
3.1. Асимптотическая устойчивость в однородной модели	76
3.2. Устойчивость по Ляпунову в неоднородной модели	85
3.3. Вычислительные эксперименты	88
3.4. Поведение решения нестационарной модели при $t \approx 0$	100
3.5. Асимптотическая устойчивость в квазистационарной модели	110
Глава 4. Анализ задач оптимального управления	118
4.1. Оптимальное управление граничным коэффициентом в нестационарной модели	118
4.2. Управление сложным теплообменом при создании экстремальных полей	131
4.3. Оптимальное управление граничным коэффициентом в квазистационарной модели	136
4.4. Оптимальное управление граничным коэффициентом в стационарной модели	146

Глава 5. Численные методы и комплексы программ	150
5.1. Разностные схемы решения нестационарных уравнений	150
5.2. Сходимость метода Ньютона для стационарных уравнений	150
5.3. Метод простой итерации для решения задачи создания экстре- мальных полей	157
5.4. Алгоритм решения задачи управления граничным коэффициентом	162
5.5. Программа для решения задачи управления граничным коэффи- циентом	173
5.6. Общий решатель систем диффузии-реакции методом конечных разностей	174
Заключение	177
Список литературы	178

Введение

Актуальность темы исследования. Под сложным теплообменом понимают процесс распространения тепла, в котором участвуют несколько видов переноса тепла (радиационный, кондуктивный, конвективный), причем при высоких температурах радиационный перенос тепла играет существенную роль.

Математически процесс сложного теплообмена моделируется системой, состоящей из дифференциального уравнения теплопроводности и интегро-дифференциального уравнения переноса излучения [23, 26, 71, 89]. Решение уравнения переноса излучения требует больших вычислительных затрат, поскольку функция интенсивности излучения зависит не только от пространственной и временной переменных, но и от направления распространения излучения. В связи с этим был разработан ряд аппроксимаций уравнения переноса излучения, в том числе диффузионное P_1 -приближение, в котором интенсивность излучения усредняется по направлениям. P_1 -приближение является частным случаем метода сферических гармоник (P_N -приближения) и упрощенного метода сферических гармоник (SP_N -приближения, SP_1 эквивалентно P_1).

Диссертация посвящена теоретическому анализу нестационарных моделей сложного теплообмена на основе P_1 -приближения и исследованию задач оптимизации сложного теплообмена в рамках этих моделей.

Моделирование и оптимизация сложного теплообмена представляют интерес для инженерных приложений. Так, в работах [50, 51, 64, 75, 81, 83, 91, 98, 100, 105, 109] модели сложного теплообмена на основе SP_N -приближений применялись для моделирования и оптимизации сложного теплообмена при производстве стекла, в [52, 59, 106] моделировался сложный теплообмен в камерах сгорания газовых турбин, в [110] диффузионные модели использовались для моделирования переноса теплового излучения в растущем кристалле. Также P_1 -приближение применялось в составе моделей горения [8, 10, 24, 103, 114, 127], нагрева космического корабля [5, 35, 36] и лазерной термотерапии [9, 123, 126],

в которых наряду с теплообменом учитываются химические реакции, движение газа, повреждение ткани и другие эффекты.

Степень разработанности темы исследования. Перечислим работы, посвященные теоретическому анализу моделей сложного теплообмена. Работы А. А. Амосова, М. Laitinen, Т. Tiihonen, Р.-Е. Druet и др. [1, 2, 30, 31, 56, 57, 80, 86, 95, 119, 120] посвящены анализу разрешимости моделей сложного теплообмена между телами, разделенными прозрачной средой, эти модели включают уравнение теплопроводности с нелинейным нелокальным краевым условием, моделирующим тепловое излучение границы области и теплообмен излучением между частями границы, в [2, 31, 56, 80, 95, 119, 120] рассмотрены стационарные модели, в [1, 30, 57, 80, 86, 95, 119] — нестационарные.

В следующих работах исследована разрешимость моделей сложного теплообмена в полупрозрачной среде, в которых для моделирования радиационного теплообмена используется полное уравнение переноса излучения. В [63, 74] доказана однозначная разрешимость одномерных стационарных задач радиационно-кондуктивного теплообмена, в [67, 102, 118] доказана однозначная разрешимость трехмерных задач: в [118] исследована стационарная модель, в [102] — нестационарная, в [67] — квазистационарная. Под квазистационарными моделями сложного теплообмена мы понимаем модели, включающие нестационарное уравнение теплопроводности и стационарное уравнение переноса излучения. Отметим работы [37, 38, 44, 66, 76, 78], посвященные разработке численных методов для указанных моделей.

В работах А. А. Амосова [3, 4, 32, 33] доказана однозначная разрешимость стационарных и квазистационарных моделей сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел, где для описания распространения излучения используется уравнение переноса излучения с краевыми условиями, моделирующими отражение и преломление излучения на границах тел, также учитывается зависимость интенсивности излучения и оптических свойств тел от частоты излучения: в [3, 4] ставились условия диффузного отражения и преломления из-

лучения, в [32, 33] — условия отражения и преломления излучения по законам Френеля.

Отметим следующие работы, посвященные решению обратных задач в рамках моделей сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения. В [62] проведен теоретический анализ задачи оптимального управления источниками тепла в рамках квазистационарной модели сложного теплообмена, включающей полное уравнение переноса излучения: доказана однозначная разрешимость прямой задачи, доказана разрешимость задачи управления, и получены условия оптимальности. В [61] разработан численный алгоритм решения задачи оптимального управления источниками тепла и излучения в рамках стационарной модели сложного теплообмена с полным уравнением переноса излучения. Работа [94] посвящена теоретическому и численному анализу обратной задачи восстановления начального распределения температуры по известной зависимости температуры на границе области от времени в рамках квазистационарной модели сложного теплообмена. Отметим также работы [48, 87, 88, 95], посвященные анализу задач оптимального управления для стационарных моделей сложного теплообмена в прозрачной среде, включающих уравнение теплопроводности с нелинейным нелокальным краевым условием, моделирующим тепловое излучение границы области и теплообмен излучением между частями границы, и работу [45], в которой построен численный алгоритм решения задачи оптимального управления граничными коэффициентами в одномерной нестационарной модели, включающей уравнение теплопроводности с нелинейным краевым условием, которое описывает тепловое излучение границ.

Работы [79, 91, 99, 107] посвящены численному моделированию в рамках диффузионных моделей сложного теплообмена, в [34] исследована схема метода конечных объемов для решения квазистационарной системы уравнений сложного теплообмена на основе P_1 -приближения уравнения переноса излучения. Сравнение P_1 -приближения с другими методами аппроксимации уравнения переноса излучения проводилось в [60, 65, 78, 91, 109, 121]. Вывод и численный

анализ нестационарного P_1 -приближения выполнен в [29, 42, 64, 65, 121].

В работах R. Pinnau, O. Tse [97, 101] проведен теоретический анализ квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе SP_1 - и SP_3 -приближений. Эти модели включают уравнение теплопроводности, стационарное SP_N -приближение, а также в [101] уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска. В [97] доказаны существование, единственность и ограниченность решения задачи сложного теплообмена на основе P_1 -приближения без источников тепла и излучения, в [101] доказана однозначная разрешимость задачи свободной конвекции с радиационным теплообменом на основе SP_3 -приближения в двумерной области, в этой модели присутствуют источники тепла с ограниченной плотностью.

В работах А. Е. Ковтанюка, А. Ю. Чеботарева [13, 14, 125] доказана однозначная разрешимость краевых задач для стационарных моделей сложного теплообмена на основе P_1 -приближения, доказана сходимость метода простой итерации нахождения решения. Отметим, что численная реализация данного метода затруднена, поскольку на каждой итерации необходимо решить нелинейное эллиптическое уравнение. В [28] доказана однозначная разрешимость сходной субдифференциальной краевой задачи с многозначной зависимостью коэффициента излучения границы от интенсивности излучения. В [40, 72] получены результаты о существовании и единственности решений обратных задач для стационарной диффузионной модели сложного теплообмена, которые заключаются в нахождении неизвестной плотности источников тепла в виде линейной комбинации заданных функционалов при известных значениях этих функционалов на решении краевой задачи.

Работы R. Pinnau, O. Tse [97, 101] посвящены теоретическому анализу задач оптимального управления температурой на границе области в рамках квазистационарных моделей сложного теплообмена на основе SP_N -приближений: доказана разрешимость задач управления, найдены необходимые условия оптимальности. В [50, 51, 64, 81, 98, 100] разработаны численные методы решения за-

дач оптимального управления граничной температурой для квазистационарной модели сложного теплообмена на основе P_1 -приближения, при этом в [50, 51, 81] использовалась модель с учетом зависимости коэффициента поглощения от частоты излучения: в [64, 98] минимизировалось отклонение поля температуры от заданного и для решения задачи оптимизации применялся метод Ньютона, в [81] для решения задачи минимизации отклонения поля температуры от заданного применялся метод проекции градиента, в [50, 100] минимизировалась норма градиента температуры и для решения задачи оптимизации применялся метод проекции градиента, в [51] решалась задача минимизации отклонения поля температуры от заданного на основе серии из трех моделей, аппроксимирующих уравнение переноса излучения с разной точностью, использовался оптимизационный метод второго порядка. В [92] проведен теоретический анализ задачи оптимального управления температурой на границе области в рамках стационарной диффузионной модели сложного теплообмена, для численного решения задачи управления применен метод проекции градиента.

В работах А. Е. Ковтанюка, А. Ю. Чеботарева и др. [13, 18, 41, 111, 117] исследованы задачи оптимального управления коэффициентом излучения границы области в рамках стационарной модели сложного теплообмена на основе P_1 -приближения. В [13, 117] выведены необходимые условия оптимальности для задачи максимизации выходящей из среды энергии, доказана разрешимость задачи управления и получены достаточные условия регулярности системы оптимальности, которые выполняются при достаточно большой скорости движения среды и малых размерах области. В [18] рассмотрена обратная задача нахождения коэффициента излучения границы по дополнительной информации о температурном поле, для численного решения применен метод проекции градиента. В [41, 111] получены достаточные условия оптимальности для задач максимизации и минимизации полей температуры и излучения во всей области теплообмена, доказана сходимость метода простой итерации нахождения оптимального управления, эти исследования были выполнены позже аналогичной

работы автора для нестационарной модели.

Таким образом, ряд важных задач, относящихся к моделированию и оптимизации сложного теплообмена на основе диффузионного приближения, оставался нерешенным: исследование разрешимости нестационарной задачи сложного теплообмена с источниками тепла и излучения и нестационарной задачи свободной конвекции с радиационным теплообменом в трехмерной области, исследование устойчивости по Ляпунову стационарных решений, вывод диффузионной модели сложного теплообмена в многослойной среде, анализ сходимости метода Ньютона для уравнений сложного теплообмена, разработка численных методов решения задач оптимального управления коэффициентом излучения границы области в рамках нестационарных моделей сложного теплообмена, доказательство регулярности условий оптимальности для задачи оптимального управления коэффициентом излучения границы в рамках стационарной модели.

Цели и задачи диссертационной работы: Целью работы является теоретическое и численное исследование моделей сложного теплообмена на основе P_1 -приближения уравнения переноса излучения, а также задач оптимизации для этих моделей, а именно:

- исследование корректности нестационарных моделей сложного теплообмена и устойчивости по Ляпунову стационарных решений;
- разработка численных методов решения рассматриваемых краевых задач и задач оптимального управления коэффициентом излучения границы области;
- разработка комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов и тестирования предложенных алгоритмов.

Для достижения целей были сформулированы следующие задачи:

- доказать существование и единственность решения начально-краевой задачи для неоднородной нестационарной модели сложного теплообмена, доказать существование решения задачи о свободной конвекции с радиационным теплообменом и единственность решения в малом по времени;

- вывести модель сложного теплообмена в многослойной среде на основе P_1 -приближения уравнения переноса излучения, изучить важность учета эффектов отражения и преломления излучения на границе раздела сред на основании вычислительного эксперимента;
- исследовать устойчивость по Ляпунову стационарных решений уравнений сложного теплообмена; исследовать применимость стационарного уравнения для интенсивности излучения при моделировании процесса сложного теплообмена;
- предложить численные методы решения рассматриваемых краевых задач и исследовать их сходимость;
- провести теоретический анализ задач оптимального управления граничным коэффициентом в моделях сложного теплообмена, разработать численные методы решения указанных задач, реализовать их в виде программных систем, осуществить тестирование предложенных алгоритмов.

Отметим, что, в отличие от предыдущих работ, в которых проводился теоретический анализ диффузионных моделей сложного теплообмена, в диссертации рассмотрены модели с нестационарным уравнением P_1 -приближения. Использование стационарного уравнения связано с большой величиной скорости света, однако адекватность такой модели неясна без дополнительного анализа скорости стабилизации интенсивности излучения в сравнении со скоростью стабилизации температуры.

Научная новизна. В работе получены новые теоретические результаты о разрешимости начально-краевых задач для уравнений сложного теплообмена и устойчивости стационарных решений, исследованы новые задачи оптимизации.

Впервые доказана глобальная асимптотическая устойчивость стационарного решения в квазистационарной модели сложного теплообмена на основе P_1 -приближения. Регулярность условий оптимальности для задачи управления граничным коэффициентом в стационарной модели сложного теплообмена при нулевой скорости движения среды доказана без ограничений на исходные дан-

ные. Впервые поставлена и решена задача создания экстремальных полей в модели сложного теплообмена при выборе коэффициента излучения границы области. Обоснована сходимость упрощенного метода Ньютона для решения стационарных уравнений сложного теплообмена. Разработан и протестирован алгоритм решения задачи оптимального управления с двумерным bang-bang-управлением.

Теоретическая и практическая значимость. Исследование однозначной разрешимости начально-краевых задач для нелинейных уравнений сложного теплообмена имеет важность для построения и применения численных алгоритмов и анализа задач оптимального управления. Научная значимость результатов основана, с одной стороны, на решении открытых задач, связанных с корректностью моделей, учитывающих радиационный перенос тепла. С другой стороны, развитие новых методов управления для рассматриваемых нелинейных моделей является основой для решения прикладных задач и задач проектирования систем с заданными экстремальными свойствами.

Устойчивость по Ляпунову имеет принципиальное значение в связи с вопросом об адекватности стационарных моделей сложного теплообмена.

Решение задач оптимизации имеет практическое значение при выборе оптимальных параметров границы области, в которой происходит процесс сложного теплообмена. С теоретической точки зрения, поставлены и решены новые задачи оптимального управления.

С помощью разработанного комплекса программ проведено численное моделирование распространения теплового излучения в кожном покрове, находящемся под воздействием солнечного излучения, изучено влияние различных факторов на распределения полей температуры и интенсивности излучения.

Методология и методы исследования. При исследовании корректности и свойств решений задач сложного теплообмена и анализе задач оптимизации применялись методы функционального анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории экстремальных задач. При раз-

работке и тестировании численных алгоритмов применялись методы вычислительной математики, методы оптимизации и вычислительный эксперимент.

Положения, выносимые на защиту:

В области математического моделирования:

1. Доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи для неоднородной нестационарной модели сложного теплообмена; доказана разрешимость задачи свободной конвекции с радиационным теплообменом и единственность решения в малом по времени.

2. Доказана устойчивость по Ляпунову стационарных решений в неоднородной модели; найдены достаточные условия асимптотической устойчивости в однородной модели; доказана глобальная асимптотическая устойчивость в квазистационарной модели; показано, что при большом значении параметра скорости света поле интенсивности излучения в нестационарной модели приближается за короткий промежуток времени к решению стационарного уравнения.

3. Получены необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления коэффициентом излучения границы области в нестационарной и квазистационарной моделях сложного теплообмена, доказана разрешимость задач управления; найдены достаточные условия оптимальности для задачи управления сложным теплообменом при создании экстремальных полей; доказана регулярность системы оптимальности для задачи оптимального управления граничным коэффициентом в стационарной модели сложного теплообмена.

В области численных методов:

4. Проведено численное исследование сходимости метода Ньютона, и доказана сходимость упрощенного метода Ньютона для уравнений сложного теплообмена.

5. Предложен метод простой итерации для решения задачи управления сложным теплообменом при создании экстремальных полей, доказана его сходимость.

6. Разработан численный алгоритм решения задачи оптимального управ-

ления коэффициентом излучения границы области.

В области комплексов программ:

7. Разработан общий решатель систем диффузии-реакции методом конечных разностей, с помощью которого проведены вычислительные эксперименты по решению задач сопряжения для моделей сложного теплообмена в многослойных средах; реализован оптимизационный алгоритм решения задачи управления граничным коэффициентом.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертации теоретических результатов основывается на использовании методов функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории экстремальных задач и строгих математических доказательствах представленных теорем. Достоверность вычислительных экспериментов обеспечивается доказательством сходимости итерационных процессов и тестированием разработанного комплекса программ.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах Института прикладной математики ДВО РАН, Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, кафедры информатики, математического и компьютерного моделирования ДВФУ и на следующих научных конференциях: Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (Владивосток, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018), Научно-практическая конференция на английском языке студентов и аспирантов Школы естественных наук ДВФУ (Владивосток, 2014, 2015), Международная конференция «Dynamics and Structure of Combustion Waves» (Владивосток, 2014), XXXVIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2014), Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные проблемы математики» (Уссурийск, 2014), Конкурс научных докладов на английском языке среди студентов Инженерной школы ДВФУ (Владивосток, 2015), Международная конференция «Discrete Optimization and

Operations Research» (Владивосток, 2016), Молодежная конференция-школа «Математическое моделирование и компьютерные технологии» (Владивосток, 2017); опубликована статья о программной реализации метода конечных разностей на сайте Хабр [171].

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 35 работах, из них 15 статей [133–147] в журналах, индексируемых в международных базах научного цитирования (Web of Science, Scopus, MathSciNet, zbMATH), 5 статей [148–152] в сборниках материалов конференций, индексируемых в базе Scopus, 15 статей и тезисов докладов [153–167] в прочих сборниках трудов конференций, 6 из которых [153–158] индексируются в РИНЦ, получено 3 свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [168–170].

Личный вклад автора. Результаты в области математического моделирования получены совместно с научным руководителем. Результаты в области численных методов и комплексов программ получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации составляет 196 страниц, включая 38 рисунков и 2 таблицы. Список цитируемой литературы содержит 171 наименование.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00037), Российского научного фонда (проект № 14-11-00079) и гранта Министерства образования и науки РФ (проект № 14.Y26.31.0003).

Автор выражает благодарность А. Ю. Чеботареву, И. В. Прохорову, М. А. Гузеву и А. Е. Ковтанюку за помощь в подготовке диссертации, большой вклад в профессиональное становление автора и понимание авторских проблем.

Глава 1

Модели сложного теплообмена

1.1. P_1 -приближение уравнения переноса излучения

Перенос теплового излучения в среде, пропускающей, излучающей, поглощающей и рассеивающей тепловое излучение, заполняющей область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ , которая излучает, поглощает, а также зеркально и диффузно отражает тепловое излучение, моделируется уравнением [89, с. 282, с. 284, с. 289]

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(x, \omega, t)}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_x I_\nu(x, \omega, t) + \kappa_\nu I_\nu(x, \omega, t) = \\ = \frac{\kappa_{s\nu}}{4\pi} \int_S P_\nu(\omega, \omega') I_\nu(x, \omega', t) d\omega' + \kappa_{a\nu} I_{b\nu}(T(x, t)) + \frac{q_\nu(x, t)}{4\pi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

с граничным условием

$$\begin{aligned} I_\nu(x, \omega, t) = \varepsilon_\nu(x) I_{b\nu}(T_b(x, t)) + \rho_\nu^s(x) I_\nu(x, \omega_R, t) + \\ + \frac{\rho_\nu^d(x)}{\pi} \int_{\omega' \cdot \mathbf{n} > 0} I_\nu(x, \omega', t) \omega' \cdot \mathbf{n} d\omega', \quad \omega \cdot \mathbf{n} < 0, \quad x \in \Gamma \end{aligned} \quad (1.2)$$

и начальным условием

$$I_\nu(x, \omega, 0) = I_{0\nu}(x, \omega). \quad (1.3)$$

Здесь $I_\nu(x, \omega, t)$ [Вт/(м²·стер·Гц)] — спектральная интенсивность излучения, т.е. количество энергии излучения, проходящего через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения ω , внутри единичного телесного угла, осью которого является направление ω , в единичном интервале частот, включающем частоту ν , и в единицу времени, $T(x, t)$ [K] — абсолютная температура. Направления излучения ω отождествляются с точками единичной сферы $S = \{\omega \in \mathbb{R}^3: |\omega| = 1\}$. Через $I_{b\nu}(T)$ обозначена спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре T . Отметим, что [89, с. 10]

$$I_b(T) = \int_0^\infty I_{b\nu}(T) d\nu = \frac{\sigma n^2 T^4}{\pi},$$

где n — показатель преломления, σ — постоянная Стефана–Больцмана. Через $T_b(x, t)$ обозначена температура границы области, $q_\nu(x, t)$ [Вт/(м³ · Гц)] — спектральная объемная плотность изотропных источников излучения, c — скорость света в среде, $\kappa_{a\nu}$ [м⁻¹] — спектральный коэффициент поглощения (доля падающего излучения, поглощенная веществом на единице длины пути распространения излучения), $\kappa_{s\nu}$ [м⁻¹] — спектральный коэффициент рассеяния (доля падающего излучения, рассеянного веществом во всех направлениях на единице длины пути распространения излучения), $\kappa_\nu = \kappa_{a\nu} + \kappa_{s\nu}$ — полный спектральный коэффициент взаимодействия, $P_\nu(\omega, \omega')$ — фазовая функция рассеяния, величина $\frac{1}{4\pi} P_\nu(\omega, \omega') d\omega$ определяет вероятность того, что излучение частоты ν , падающее в направлении ω' , будет рассеяно в пределах элементарного телесного угла $d\omega$ в направлении ω . Через ε_ν обозначен коэффициент излучения границы области (отношение количества энергии, испускаемого поверхностью, к количеству энергии, испускаемому абсолютно черным телом при той же температуре), ρ_ν^s и ρ_ν^d — коэффициенты зеркального и диффузного отражения (доли зеркально и диффузно отраженного излучения), $\varepsilon_\nu + \rho_\nu^s + \rho_\nu^d = 1$, $\omega_R = \omega - 2(\omega \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ — направление отражения, \mathbf{n} — вектор внешней нормали к Γ .

В дальнейшем будем считать, что коэффициенты $\kappa_{a\nu}$, $\kappa_{s\nu}$, ε_ν , ρ_ν^s , ρ_ν^d и функция P_ν не зависят от ν , так что $\kappa_{a\nu} = \kappa_a$, $\kappa_{s\nu} = \kappa_s$, $\varepsilon_\nu = \varepsilon$, $\rho_\nu^s = \rho^s$, $\rho_\nu^d = \rho^d$, $P_\nu = P$, $\kappa = \kappa_a + \kappa_s$, $\int_0^\infty q_\nu(x, t) d\nu = q(x, t)$, тогда, интегрируя соотношения (1.1)–(1.3) по ν , приходим к следующим соотношениям относительно интегральной интенсивности излучения $I(x, \omega, t) = \int_0^\infty I_\nu(x, \omega, t) d\nu$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I(x, \omega, t)}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_x I(x, \omega, t) + \kappa I(x, \omega, t) = \\ = \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S P(\omega, \omega') I(x, \omega', t) d\omega' + \kappa_a \frac{\sigma n^2}{\pi} T^4(x, t) + \frac{q(x, t)}{4\pi}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
I(x, \omega, t) = & \varepsilon(x) \frac{\sigma n^2}{\pi} T_b^4(x, t) + \rho^s(x) I(x, \omega_R, t) + \\
& + \frac{\rho^d(x)}{\pi} \int_{\omega' \cdot \mathbf{n} > 0} I(x, \omega', t) \omega' \cdot \mathbf{n} d\omega', \quad \omega \cdot \mathbf{n} < 0, \quad x \in \Gamma, \\
I(x, \omega, 0) = & I_0(x, \omega).
\end{aligned}$$

В [121] выведено нестационарное уравнение P_1 -приближения уравнения переноса излучения в предположении оптически толстой среды (средняя длина свободного пробега фотона мала по сравнению с характерным размером области). Указанное уравнение имеет вид (ср. [124])

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} - \alpha \Delta \varphi(x, t) + \kappa_a (\varphi(x, t) - \theta^4(x, t)) = g(x, t) \quad (1.5)$$

с граничным условием

$$\alpha \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial n} + \gamma(x) (\varphi(x, t) - \theta_b^4(x, t)) = 0, \quad x \in \Gamma \quad (1.6)$$

и начальным условием

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x). \quad (1.7)$$

Здесь $\varphi(x, t) \approx \frac{1}{4\sigma n^2 T_{\max}^4} \int_S I(x, \omega, t) d\omega$ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, $\theta(x, t) = T(x, t)/T_{\max}$ — нормализованная температура, $g(x, t) = \frac{q(x, t)}{4\sigma n^2 T_{\max}^4}$, T_{\max} — максимальная температура в ненормализованной модели, $\alpha = (3\kappa - A\kappa_s)^{-1}$, $A \in [-1, 1]$ — коэффициент анизотропии рассеяния ($P(\omega, \omega') = 1 + A\omega \cdot \omega'$, $A/3$ — средний косинус угла рассеяния, случай $A = 0$ соответствует изотропному рассеянию), $\theta_b = T_b/T_{\max}$, $\gamma = \frac{\varepsilon}{2(2 - \varepsilon)}$.

Отметим, что точность P_1 -приближения снижается в оптически тонкой среде, вблизи границы области, на участках сильного изменения температуры и характеристик среды и в других случаях, когда распределение интенсивности излучения обладает сильной анизотропией, а также благоприятным условием применения P_1 -приближения является высокое рассеяние в среде (см. [35], [54], [55], [89, с. 509]).

Поле температуры описывается уравнением теплопроводности [89, с. 297]

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - k \Delta T(x, t) + \rho c_p \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla T(x, t) = -\operatorname{div} \mathbf{q}_r(x, t) + F(x, t),$$

где $\mathbf{v}(x, t)$ [м/с] — поле скоростей, k [Вт/(м · К)] — коэффициент теплопроводности, c_p [Дж/(кг · К)] — удельная теплоемкость при постоянном давлении, ρ [кг/м³] — плотность, $F(x, t)$ [Вт/м³] — объемная плотность источников тепла,

\mathbf{q}_r — вектор плотности потока излучения, определяемый формулой [89, с. 292]

$$\mathbf{q}_r(x, t) = \int_S I(x, \omega, t) \omega d\omega.$$

Проинтегрировав уравнение (1.4) по $\omega \in S$, получим следующее выражение:

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_r(x, t) = \kappa_a \left(4\sigma n^2 T^4 - \int_S I(x, \omega, t) d\omega \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S I(x, \omega, t) d\omega.$$

Заменяя в полученной формуле $\int_S I(x, \omega, t) d\omega$ на приближение $4\sigma n^2 T_{\max}^4 \varphi(x, t)$, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_r(x, t) \approx 4\sigma n^2 T_{\max}^4 \left[\kappa_a (\theta^4 - \varphi) - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right].$$

Пренебрегая слагаемым $-\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - a \Delta \theta(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta(x, t) + b \kappa_a (\theta^4(x, t) - \varphi(x, t)) = f(x, t), \quad (1.8)$$

где $a = \frac{k}{\rho c_p}$, $b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_p}$, $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho c_p T_{\max}}$.

На границе области поставим граничное условие III рода, выражающее закон Ньютона–Рихмана:

$$a \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial n} + \beta(x) (\theta(x, t) - \theta_b(x, t)) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1.9)$$

где $\beta = \frac{h}{\rho c_p}$, h [Вт/(м² · К)] — коэффициент теплоотдачи. При $t = 0$ поставим начальное условие

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x). \quad (1.10)$$

Следует отметить, что условия III рода для температуры обычно ставятся на твердой стенке, где $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. В данном случае постановка условий III рода на всей границе и, в частности, на участке втекания моделирует процесс теплообмена при малых значениях нормальной компоненты скорости. На участке втекания может быть также поставлено условие Дирихле для функции θ , что приблизительно соответствует большой величине коэффициента β (сравн. с условием (iii) в разделе 2.1), а на участке вытекания — однородное условие Неймана (см., например, [24, 47]).

Уравнения (1.5), (1.8) вместе с граничными условиями (1.6), (1.9) и начальными условиями (1.7), (1.10) образуют модель сложного теплообмена на основе P_1 -приближения уравнения переноса излучения.

1.2. Стационарная модель сложного теплообмена в многослойной среде

1.2.1. Вывод условий сопряжения

Предположим, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ состоит из конечного числа непересекающихся подобластей Ω_i , $i = 1, \dots, p$, таких, что $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0$, где $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^p \Omega_i$, причем область Ω_1 является внешней, т.е. $\partial\Omega \subset \partial\Omega_1$, как показано на рис. 1.1. Допустим, что $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega_1$, $i = 2, \dots, p$.

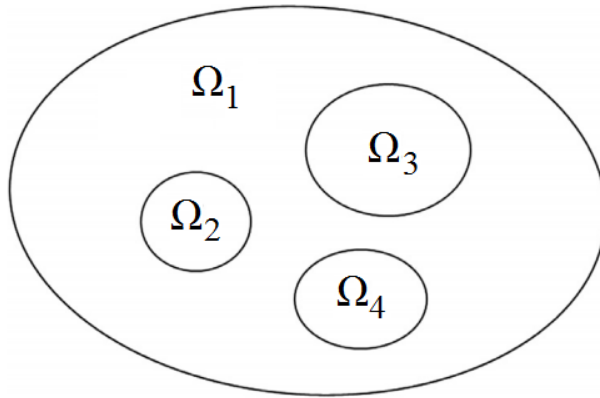


Рис. 1.1. Схема области Ω с подобластями Ω_i , $i = 1, \dots, p$, при $p = 4$.

Радиационно-кондуктивный теплообмен в области Ω_0 описывается следующими уравнениями [124]:

$$\begin{aligned}\omega \cdot \nabla_x I(x, \omega) + \kappa I(x, \omega) &= \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S P(x, \omega \cdot \omega') I(x, \omega') d\omega' + \kappa_a \frac{\sigma n^2 T^4(x)}{\pi}, \\ -a\Delta T(x) + 4\kappa_a \sigma n^2 T^4(x) &= \kappa_a \int_S I(x, \omega) d\omega.\end{aligned}$$

Здесь $I(x, \omega)$ — интенсивность излучения, $T(x)$ — температура. Направления излучения ω отождествляются с точками единичной сферы $S = \{\omega \in \mathbb{R}^3: |\omega| = 1\}$. Через $P(x, \omega \cdot \omega')$ обозначена фазовая функция рассеяния, a — коэффициент теплопроводности, n — показатель преломления, κ_a — коэффициент поглощения, κ_s — коэффициент рассеяния, $\kappa = \kappa_a + \kappa_s$, σ — постоянная Стефана–Больцмана. Предполагается, что указанные коэффициенты постоянны в каждой подобласти Ω_i , $i = 1, \dots, p$.

На границе $\Gamma = \partial\Omega$ ставятся граничные условия:

$$I_1(x, \omega) = \varepsilon \frac{\sigma n^2}{\pi} T_b^4(x) + (1 - \varepsilon) I_1(x, \omega_R), \quad \omega_R = \omega - 2(\omega \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad x \in \Gamma,$$

$$a \frac{\partial T(x)}{\partial n} + c(T(x) - T_b(x)) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Здесь \mathbf{n} — вектор внешней нормали к Γ , ε — коэффициент излучения, c — коэффициент теплоотдачи, T_b — температура границы области.

На внутренних границах $\Gamma_i = \partial\Omega_i$, $i = 2, \dots, p$, ставятся условия сопряжения [128]:

$$\omega \cdot \mathbf{n} < 0: \quad I_1(x, \omega) = R_{1i}(-\nu) I_1(x, \omega_R) + n_{1i}^2 (1 - R_{i1}(\psi_{1i}(\nu))) I_i(x, \omega_T), \quad (1.11)$$

$$\omega_R = \omega - 2\nu\mathbf{n}, \quad \omega_T = -\psi_{1i}(\nu)\mathbf{n} + n_{1i}(\omega - \nu\mathbf{n}), \quad x \in \Gamma_i,$$

$$\omega \cdot \mathbf{n} > 0: \quad I_i(x, \omega) = R_{i1}(\nu) I_i(x, \omega_R) + n_{i1}^2 (1 - R_{1i}(\psi_{i1}(\nu))) I_1(x, \omega_T), \quad (1.12)$$

$$\omega_R = \omega - 2\nu\mathbf{n}, \quad \omega_T = \psi_{i1}(\nu)\mathbf{n} + n_{i1}(\omega - \nu\mathbf{n}), \quad x \in \Gamma_i,$$

$$a_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = a_i \frac{\partial T_i}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_i. \quad (1.13)$$

Здесь $I_i = I|_{\Omega_i}$, $T_i = T|_{\Omega_i}$, $a_i = a|_{\Omega_i}$, $n_i = n|_{\Omega_i}$, $n_{ij} = n_i/n_j$, \mathbf{n} — вектор нормали к Γ_i , внешней по отношению к области Ω_1 , $\nu = \omega \cdot \mathbf{n}$. Коэффициент отражения $R_{ij}(\nu)$ и угол преломления $\psi_{ij}(\nu)$ определяются согласно формуле Френеля и закону Снеллиуса:

$$R_{ij}(\nu) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\psi_{ij}(\nu) - n_{ij}\nu}{\psi_{ij}(\nu) + n_{ij}\nu} \right]^2 + \left[\frac{n_{ij}\psi_{ij}(\nu) - \nu}{n_{ij}\psi_{ij}(\nu) + \nu} \right]^2 \right\},$$

$$\psi_{ij}(\nu) = \begin{cases} \sqrt{1 - n_{ij}^2(1 - \nu^2)}, & \text{если } 1 - n_{ij}^2(1 - \nu^2) > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для вывода модели сложного теплообмена на основе P_1 -приближения уравнения переноса излучения представим функцию интенсивности излучения и фазовую функцию рассеяния в виде

$$I(x, \omega) = \left(\frac{\sigma T_{\max}^4}{\pi} \right) n^2 (\varphi(x) + \Phi(x) \cdot \omega), \quad (1.14)$$

$$P(x, \omega \cdot \omega') = 1 + A(x) \omega \cdot \omega'.$$

Здесь T_{\max} — максимальная температура в ненормализованной модели, A — коэффициент анизотропии рассеяния.

Тогда

$$\Phi(x) = -3\alpha \nabla \varphi(x), \quad (1.15)$$

и поля интенсивности излучения и температуры удовлетворяют следующим уравнениям в области Ω_0 [124]:

$$-\alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - \theta^4) = 0, \quad -a \Delta \theta + b \kappa_a (\theta^4 - \varphi) = 0 \quad (1.16)$$

и граничным условиям на Γ :

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \gamma (\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad a \frac{\partial \theta}{\partial n} + c (\theta - \theta_b) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (1.17)$$

Здесь $\theta = T/T_{\max}$ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, $\alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$,

$$b = 4\sigma T_{\max}^3 n^2, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{2(2 - \varepsilon)}, \quad \theta_b = T_b/T_{\max}.$$

Для вывода условий сопряжения в диффузионной модели подставим выражение для интенсивности излучения (1.14) в соотношения (1.11), (1.12). Используя равенства

$$\begin{aligned}\psi_{1i}(\psi_{i1}(\nu)) &= \nu, \quad R_{i1}(\psi_{1i}(\nu)) = R_{1i}(\nu), \quad R_{1i}(\psi_{i1}(\nu)) = R_{i1}(\nu), \\ \int_0^1 \nu(1 - R_{1i}(\nu)) d\nu &= n_{i1}^2 \int_0^1 \nu(1 - R_{i1}(\nu)) d\nu, \\ \frac{1}{3} - \int_0^1 \nu^2 R_{1i}(\nu) d\nu &= n_{i1}^2 \int_0^1 \nu \psi_{i1}(\nu)(1 - R_{i1}(\nu)) d\nu, \\ \frac{1}{3} - \int_0^1 \nu^2 R_{i1}(\nu) d\nu &= n_{1i}^2 \int_0^1 \nu \psi_{1i}(\nu)(1 - R_{1i}(\nu)) d\nu,\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}(\varphi_1(x) - \varphi_i(x)) \int_0^1 \nu(1 - R_{1i}(\nu)) d\nu &= (\mathbf{\Phi}_1(x) \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{3} + \int_0^1 \nu^2 R_{1i}(\nu) d\nu \right) - \\ &- n_{i1}^2 (\mathbf{\Phi}_i(x) \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{3} - \int_0^1 \nu^2 R_{i1}(\nu) d\nu \right), \quad i = 2, \dots, p, \quad (1.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_i(x) - \varphi_1(x)) \int_0^1 \nu(1 - R_{1i}(\nu)) d\nu &= (\mathbf{\Phi}_1(x) \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{3} - \int_0^1 \nu^2 R_{1i}(\nu) d\nu \right) - \\ &- n_{i1}^2 (\mathbf{\Phi}_i(x) \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{1}{3} + \int_0^1 \nu^2 R_{i1}(\nu) d\nu \right), \quad i = 2, \dots, p, \quad (1.19)\end{aligned}$$

где $\varphi_i = \varphi|_{\Omega_i}$, $\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{\Phi}|_{\Omega_i}$.

Подставив выражение (1.15) в полученные равенства, получим условия сопряжения на Γ_i :

$$n_1^2 \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial n} = n_i^2 \alpha_i \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial n}, \quad (1.20)$$

$$h_i(\varphi_i(x) - \varphi_1(x)) = \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 2, \dots, p, \quad (1.21)$$

где

$$h_i = \int_0^1 \nu(1 - R_{1i}(\nu)) d\nu \left(3 \int_0^1 \nu^2 (R_{1i}(\nu) + R_{i1}(\nu)) d\nu \right)^{-1}.$$

Условия сопряжения для нормализованной температуры $\theta_i = \theta|_{\Omega_i}$ имеют вид:

$$\theta_1(x) = \theta_i(x), \quad a_1 \frac{\partial \theta_1(x)}{\partial n} = a_i \frac{\partial \theta_i(x)}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 2, \dots, p. \quad (1.22)$$

Уравнения (1.16) вместе с граничными условиями (1.17) и условиями сопряжения (1.20)–(1.22) образуют модель сложного теплообмена в многослойной среде на основе P_1 -приближения уравнения переноса излучения.

1.2.2. Вычислительные эксперименты

Проведем вычислительный эксперимент для модели сложного теплообмена в двуслойной среде, заполняющей двумерную область $\Omega = \{(x, y) : 0 < x, y < 0.25\}$. Пусть $\Omega_1 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_2$, где $\Omega_2 = \{(x, y) : 0.1 < x, y < 0.2\}$, координаты указаны в метрах. Положим $a_1 = 1.2$ Вт/(м·К), $a_2 = 0.0515$ Вт/(м·К), $\kappa_{a1} = \kappa_1 = 100$ м⁻¹, $\kappa_{a2} = 1$ м⁻¹, $\kappa_2 = 10$ м⁻¹, $\alpha_1 = 0.00333$ м, $\alpha_2 = 0.0333$ м, $n_1 = 1.47$, $n_2 = 1$, $\gamma = 0.3$, $c = 10$ Вт/(м²·К), $T_{\max} = 773$ К. Вещества, заполняющие области Ω_1 и Ω_2 , можно интерпретировать как стекло и воздух соответственно. Нормализованная температура границы определяется формулами: $\theta_b(x, 0) = 0.5$, $\theta_b(x, 0.25) = 1$, $\theta_b(0, y) = \theta_b(0.25, y) = 0.5 + 2y$.

Программная реализация выполнена с помощью общего конечноразностного решателя (разд. 5.6). Графики вычисленных полей температуры и интенсивности излучения представлены на рис. 1.2, 1.3, граница области Ω_2 выделена пунктирной линией. Отметим, что на этой границе интенсивность излучения терпит разрыв.

На рис. 1.4 представлен график относительного отклонения между полями интенсивности излучения, рассчитанными с учетом и без учета эффектов отражения и преломления на границе раздела сред. Во втором случае полагаем $h_2 = +\infty$, и вместо условия сопряжения (1.21) используем условие $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ на Γ_2 (ср. [77]). На рис. 1.5 представлен график относительного отклонения между полями температуры, рассчитанными с учетом и без учета эффектов отражения и преломления. Максимальное отклонение температуры равно 2.3%, максимальное отклонение интенсивности излучения равно 10.2%.

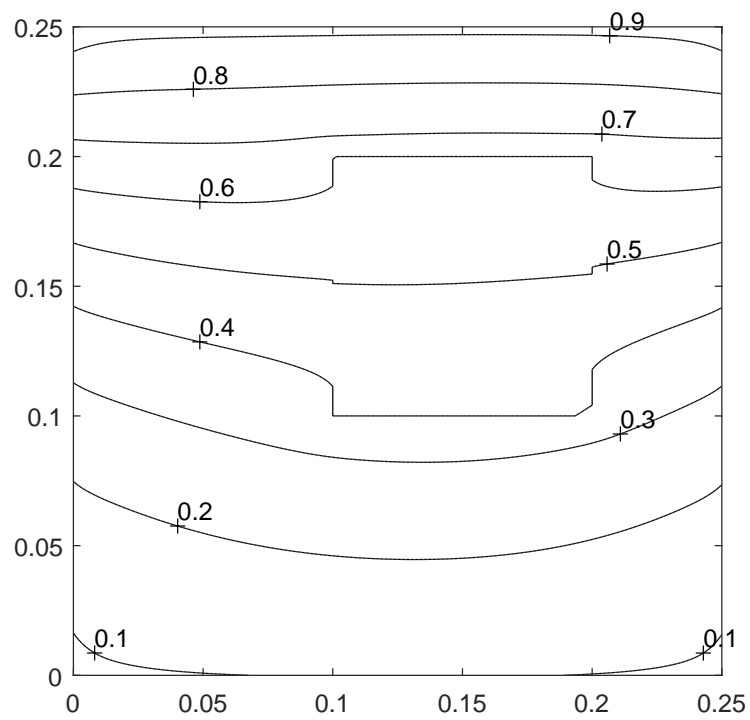


Рис. 1.2. Распределение нормализованной интенсивности излучения в области Ω .

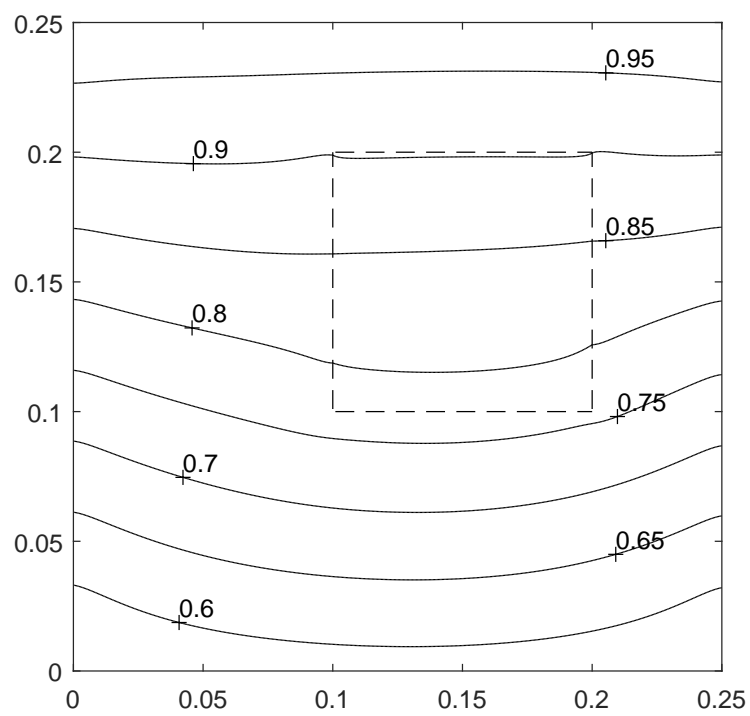


Рис. 1.3. Распределение нормализованной температуры в области Ω .

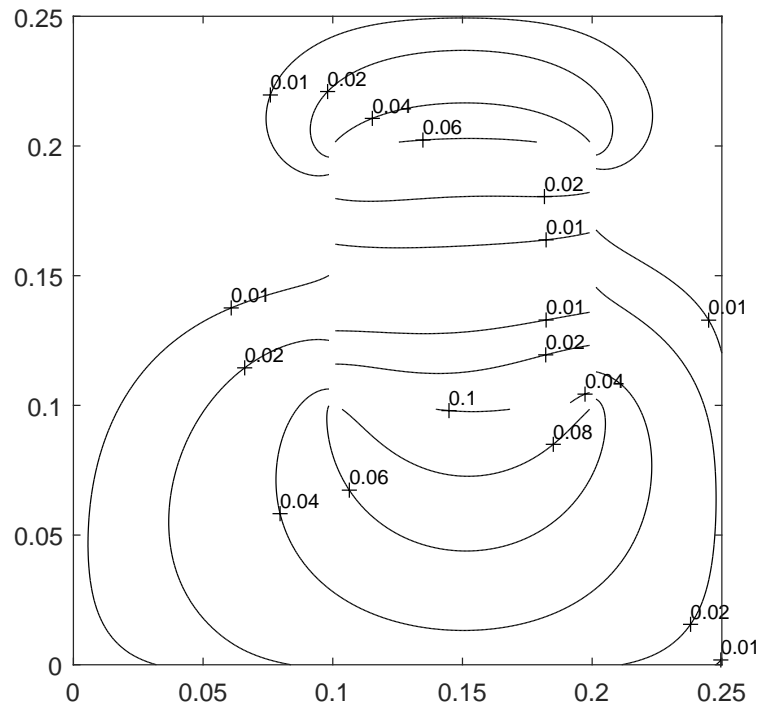


Рис. 1.4. Относительное отклонение между полями интенсивности излучения, рассчитанными с учетом и без учета эффектов отражения и преломления.

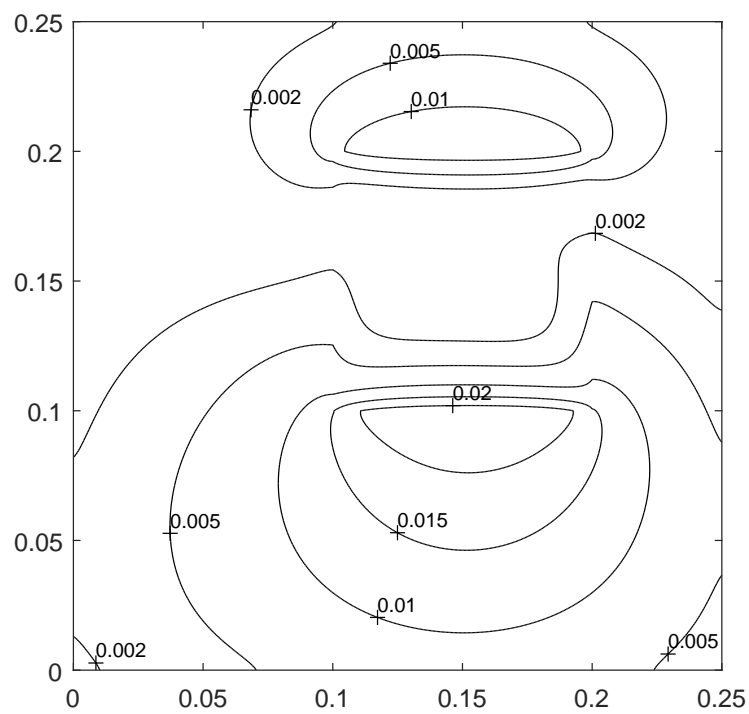


Рис. 1.5. Относительное отклонение между полями температуры, рассчитанными с учетом и без учета эффектов отражения и преломления.

Проведем вычислительный эксперимент для одномерной модели радиационно-кондуктивного теплообмена в p -слоистой среде $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^p \Omega_i$, $\Omega_i = (\tau_{i-1}, \tau_i)$ [150]:

$$\begin{aligned} -\alpha_i \varphi_i''(\tau) + (1 - \omega_i) \varphi_i(\tau) &= (1 - \omega_i) \theta_i^4(\tau), \\ -N_{ci} \theta_i''(\tau) + (1 - \omega_i) \theta_i^4(\tau) &= (1 - \omega_i) \varphi_i(\tau) \quad \text{в } \Omega_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ -\alpha_1 \varphi_1'(\tau_0) &= \gamma_0 (\theta_b^4(\tau_0) - \varphi_1(\tau_0)), \quad \alpha_p \varphi_p'(\tau_p) = \gamma_p (\theta_b^4(\tau_p) - \varphi_p(\tau_p)), \\ \theta_1(\tau_0) &= \theta_b(\tau_0), \quad \theta_p(\tau_p) = \theta_b(\tau_p), \\ n_i^2 \alpha_i \varphi_i'(\tau_i) &= n_{i+1}^2 \alpha_{i+1} \varphi_{i+1}'(\tau_i) = G_i (\varphi_{i+1}(\tau_i) - \varphi_i(\tau_i)), \\ N_{ci} n_i^2 \theta_i'(\tau_i) &= N_{c,i+1} n_{i+1}^2 \theta_{i+1}'(\tau_i), \quad i = 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Здесь θ_i — нормализованная температура в i -м слое, φ_i — нормализованная интенсивность излучения в i -м слое, τ — безразмерная оптическая координата, μ — косинус угла между направлением излучения и положительным направлением оси координат, ω_i — альбеда однократного рассеяния, $N_{ci} = \frac{k_i \kappa_i}{4\sigma T_{\max}^3 n_i^2}$ — радиационно-кондуктивный параметр, k_i — теплопроводность, κ_i — коэффициент затухания, n_i — показатель преломления, T_{\max} — максимальная температура в ненормализованной модели, θ_b — заданная нормализованная температура на внешних границах, $\alpha_i = \frac{1}{3 - A_i \omega_i}$, A_i — коэффициент анизотропии рассеяния, $\gamma_i = \frac{\varepsilon_i}{2(2 - \varepsilon_i)}$, $\varepsilon_i = 1 - R_i$, R_0, R_p — коэффициенты отражения внешних границ,

$$G_i = \frac{n_{i+1}^2}{3} \int_0^1 \mu (1 - R_i(\mu)) d\mu \left(\int_{-1}^1 \mu^2 R_i(\mu) d\mu \right)^{-1},$$

$R_i(\mu)$ — коэффициент зеркального отражения границы между i -м и $(i+1)$ -м слоями.

Положим $p = 3$, $(\tau_0, \tau_1) = (0, 1)$, $(\tau_1, \tau_2) = (1, 2)$, $(\tau_2, \tau_3) = (2, 3)$, $\theta_b(0) = 1$, $\theta_b(3) = 0.5$, $R_0 = R_3 = 0.3$, $N_{c1} = N_{c3} = 0.0001$, $N_{c2} = 0.1$, $\omega_1 = \omega_3 = 0.2$, $\omega_2 = 0.9$, $n_1 = n_3 = 1.8$, $n_2 = 1$, $A_1 = A_2 = A_3 = 0$.

Графики нормализованной температуры и нормализованной интенсивности излучения показаны сплошными линиями на рис. 1.6, 1.7. Пунктиром пока-

заны поля, рассчитанные без учета эффектов отражения и преломления ($G_i^{-1} = 0$, $i = 1, 2$). На рис. 1.8 представлен график среднеквадратичного отклонения между полями температуры, рассчитанными с учетом и без учета эффектов отражения и преломления, в зависимости от относительного показателя преломления $\tilde{n} = n_1/n_2 = n_3/n_2$. Программная реализация выполнена с помощью общего конечноразностного решателя (разд. 5.6).

Таким образом, рассмотренные примеры иллюстрируют целесообразность применения для моделирования сложного теплообмена уточненной модели с учетом эффектов отражения и преломления на границе раздела сред.

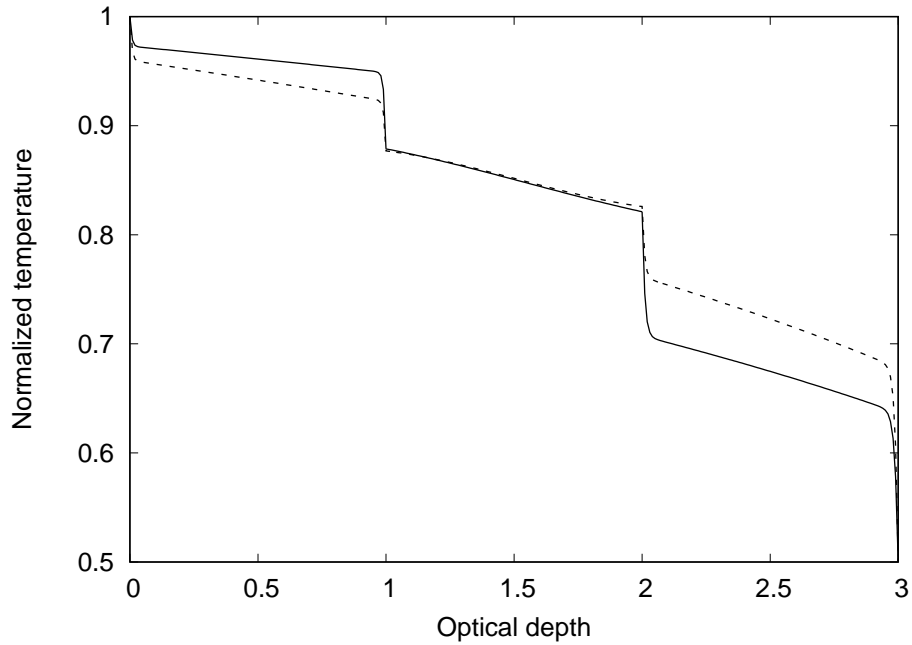


Рис. 1.6. Нормализованная температура в моделях с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) эффектов отражения и преломления.

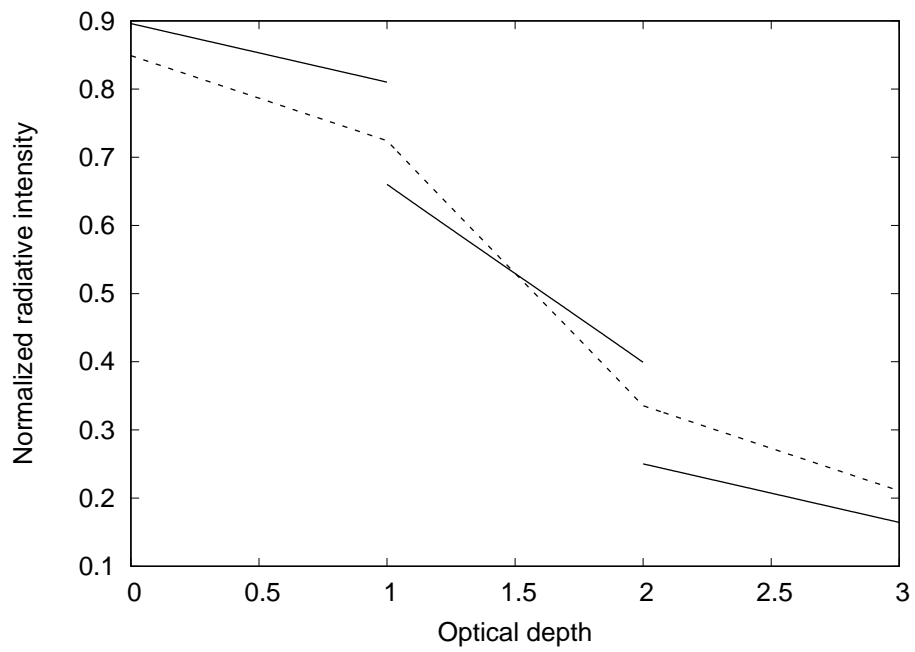


Рис. 1.7. Нормализованная интенсивность излучения в моделях с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) эффектов отражения и преломления.

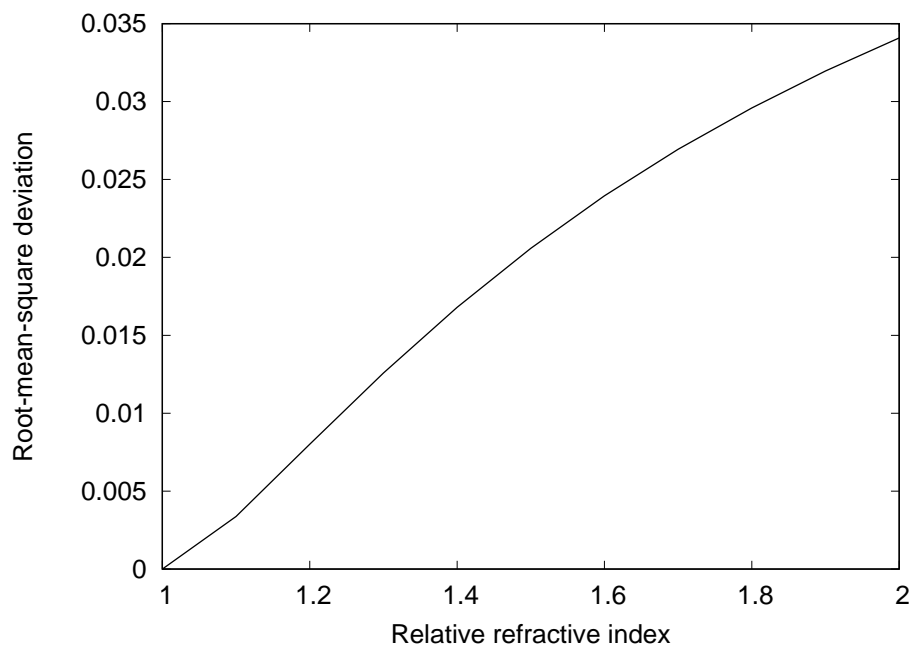


Рис. 1.8. Среднеквадратичное отклонение между полями нормализованной температуры, рассчитанными с учетом и без учета эффектов отражения и преломления, в зависимости от относительного показателя преломления \tilde{n} .

1.3. Математический аппарат моделирования сложного теплообмена

В дальнейшем считаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с липшицевой [129, с. 232] границей Γ , $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Через \mathbf{n} обозначаем вектор внешней нормали к границе области.

Будем использовать следующие обозначения: $|\Omega|$ — объем области Ω , $|\Gamma|$ — площадь границы Γ , $\mu(E)$ — мера множества E ; $L^p(\Omega), L^p(\Gamma), 1 \leq p \leq \infty$ — пространства Лебега, $H^s(\Omega)$ — пространство Соболева $W_2^s(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega): v|_\Gamma = 0\}$, $C_0^\infty(\Omega)$ — пространство функций класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω ; аналогично вводятся пространства вектор-функций $\mathbf{L}^s(\Omega), \mathbf{H}^s(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$; $L^p(0, T; X)$ — пространство Лебега функций со значениями в банаховом пространстве X , $C([0, T]; X)$ — пространство функций, непрерывных на $[0, T]$, со значениями в X , X' — пространство, сопряженное с пространством X . Если $y \in L^p(0, T; X)$, то обозначаем $y' = dy/dt$.

Обозначим $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$. Пространство H отождествляем с пространством H' , так что $V \subset H = H' \subset V'$. Через $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в H , а через (f, v) — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $f \in H$. Определим пространство $W = \{y \in L^2(0, T; V): y' \in L^2(0, T; V')\}$.

Скалярное произведение в H и нормы в H, V, V' определяются формулами

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx, \quad \|f\|^2 = (f, f), \quad \|f\|_V^2 = \|f\|^2 + \|\nabla f\|^2,$$

$$\|f\|_{V'} = \sup\{(f, v): v \in V, \|v\|_V = 1\}.$$

Лемма 1.1 (неравенство Гёльдера). [130, с. 35] Пусть $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$:

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Лемма 1.2 (неравенство Юнга). [130, с. 38] Пусть $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых $a, b \geq 0$, $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{q\varepsilon^q}.$$

Лемма 1.3. [130, с. 254] Всякое гильбертово пространство рефлексивно.

Лемма 1.4. [130, с. 255] Пусть X — рефлексивное банахово пространство. Если последовательность $x_n \in X$ ограничена, то в ней существует слабо сходящаяся подпоследовательность.

Лемма 1.5. [130, с. 260] Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Если последовательность $f_n \in X'$ ограничена, то в ней существует $*$ -слабо сходящаяся подпоследовательность.

Лемма 1.6. [130, с. 258] Пусть X — банахово пространство. Если $x_n \in X$, $x_n \rightharpoonup x$ слабо в X , то последовательность x_n ограничена и $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

Лемма 1.7. [122, с. 47] Пусть U — выпуклое, замкнутое множество в банаховом пространстве X , $x_n \in U$, $x_n \rightharpoonup x$ слабо в X . Тогда $x \in U$.

Определение 1.1. [17, с. 48] Множество M банахова пространства X называется компактным, если из всякого бесконечного подмножества множества M можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого множества. Множество называется относительно компактным, если его замыкание компактно.

Определение 1.2. [17, с. 190] Пусть X, Y — банаховы пространства. Оператор $A: M \subset X \rightarrow Y$ называется компактным, если он переводит всякое ограниченное подмножество множества M в относительно компактное множество пространства Y . Если, кроме того, оператор A непрерывен, то он называется вполне непрерывным.

Теорема 1.1 (принцип Шаудера). [17, с. 193] Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ — выпуклое замкнутое множество, $A: M \rightarrow M$ — вполне непрерывный оператор. Тогда оператор A имеет неподвижную точку $x \in M$,

т.е. $Ax = x$.

Лемма 1.8. [130, с. 365] Пусть X, Y, Z — банаховы пространства и $X \subset Y \subset Z$, причем вложение $X \subset Y$ компактно, а вложение $Y \subset Z$ непрерывно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_\varepsilon > 0$ такая, что $\|u\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + C_\varepsilon \|u\|_Z \quad \forall u \in X$.

Теорема 1.2. [108, теорема 3] Пусть F — ограниченное множество в $L^2(0, T; V)$,

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|^2 dt \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$ равномерно относительно $f \in F$. Тогда F относительно компактно в $L^2(0, T; H)$.

Теорема 1.3 (Гильберт, Шмидт). [15, с. 263] Пусть A — линейный, самосопряженный, компактный оператор в гильбертовом пространстве X . Тогда множество собственных элементов оператора A образует ортогональный базис в X .

Теорема 1.4 (Лакс, Мильграм). [22, с. 40] Пусть X — гильбертово пространство, $B: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная билинейная форма, $B(x, x) \geq C\|x\|_X^2$, $C > 0$. Тогда для любого $f \in X'$ задача $B(x, z) = (f, z) \quad \forall z \in X$ имеет единственное решение $x \in X$.

Определение 1.3. [122, с. 47] Пусть X — банахово пространство. Функционал $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется слабо полунепрерывным снизу, если для любой последовательности $x_n \in X$ такой, что $x_n \rightharpoonup x$ слабо, выполняется неравенство $J(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n)$.

Лемма 1.9. [122, с. 47] Пусть X — банахово пространство. Если функционал $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывный и выпуклый, то он слабо полунепрерывен снизу.

Следствие 1.1. Пусть X — банахово пространство, $a \in X$. Тогда функционал $J: X \rightarrow \mathbb{R}$, $J(x) = \|x - a\|_X^2$ слабо полунепрерывен снизу.

Лемма 1.10. [130, с. 37] Вложение $L^p(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ непрерывно при $1 \leq s \leq p \leq \infty$.

Лемма 1.11. [131, с. 1020] Пространство $L^p(\Omega)$ сепарабельно при $1 \leq p < \infty$ и рефлексивно при $1 < p < \infty$.

Лемма 1.12. Пусть $f_k \rightarrow f$ в $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда $g_k \rightarrow g$ в $L^p(\Omega)$, где $g_k = \max\{f_k, 0\}$, $g = \max\{f, 0\}$.

Доказательство. Так как $|g_k - g| \leq |f_k - f|$, то

$$\|g_k - g\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |g_k - g|^p dx \leq \int_{\Omega} |f_k - f|^p dx = \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)}^p \rightarrow 0.$$

■

Лемма 1.13. Пусть $f_k \rightarrow f$ в $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $f_k \geq 0$ п.в. в Ω . Тогда $f \geq 0$ п.в. в Ω .

Доказательство. По лемме 1.12 получаем, что $f_k = \max\{f_k, 0\} \rightarrow \max\{f, 0\}$ в $L^p(\Omega)$. Следовательно, $f = \max\{f, 0\}$, поэтому $f \geq 0$ п.в. в Ω . ■

Лемма 1.14. Пусть $f_k, f \geq 0$, $f_k \rightarrow f$ в $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Тогда $f_k^s \rightarrow f^s$ в $L^1(\Omega)$, если $1 < s < p$.

Доказательство. По формуле Лагранжа

$$|f_k^s - f^s| \leq s \xi^{s-1} |f_k - f| \leq s(f_k^{s-1} + f^{s-1}) |f_k - f|,$$

где $\xi(x)$ находится между $f_k(x)$ и $f(x)$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями $p, q = \frac{p}{p-1}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \|f_k^s - f^s\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} |f_k^s - f^s| dx \leq s \int_{\Omega} (f_k^{s-1} + f^{s-1}) |f_k - f| dx \leq \\ &\leq \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} (\|f_k^{s-1}\|_{L^q(\Omega)} + \|f^{s-1}\|_{L^q(\Omega)}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p-1}{p-s}, \frac{p-1}{s-1}$, получаем, что

$$\|f_k^{s-1}\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} 1 \cdot f_k^{\frac{(s-1)p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq |\Omega|^{1-\frac{s}{p}} \left(\int_{\Omega} f_k^p dx \right)^{\frac{s-1}{p}} = |\Omega|^{1-\frac{s}{p}} \|f_k\|_{L^p(\Omega)}^{s-1}.$$

Следовательно, второй сомножитель в (1.23) ограничен, поэтому $\|f_k^s - f^s\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$. ■

Теорема 1.5 (Лебег). [15, с. 321] Пусть $G \subset \mathbb{R}^N$, $f_n \rightarrow f$ н.в. в G , $\forall n: |f_n(x)| \leq \varphi(x)$ н.в. в G , где $\varphi \in L^1(G)$. Тогда $f \in L^1(G)$, $\int_G f_n(x) dx \rightarrow \int_G f(x) dx$.

Теорема 1.6 (Леви). [15, с. 322] Пусть $G \subset \mathbb{R}^N$, последовательность $f_n \in L^1(G)$ не убывает и $\forall n: \int_G f_n(x) dx \leq K$. Тогда $f_n \rightarrow f$ н.в. в G , где $f \in L^1(G)$, $\int_G f_n(x) dx \rightarrow \int_G f(x) dx$.

Лемма 1.15. [132, с. 47] Пусть $u \in H^1(\Omega)$, $\nabla u = 0$ н.в. в Ω . Тогда $u = \text{const}$ в Ω .

Лемма 1.16. [12, с. 47] Пусть $u \in H^1(\Omega)$, $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$. Тогда $u^+, u^- \in H^1(\Omega)$,

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{если } u > 0, \\ 0, & \text{если } u \leq 0, \end{cases} \quad \nabla u^- = \begin{cases} \nabla u, & \text{если } u < 0, \\ 0, & \text{если } u \geq 0. \end{cases}$$

Лемма 1.17. [12, с. 50] Пусть $f(t), t \in \mathbb{R}$ — липшицева функция, производная которой существует всюду, за исключением, быть может, множества $\{a_1, \dots, a_M\}$, $u \in H^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^N$. Тогда $f(u) \in H^1(G)$, $\frac{\partial f(u)}{\partial x_i} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$, где обе части этого равенства считаются равными нулю, когда $x \in \bigcup_{j=1}^M \{y: u(y) = a_j\}$.

Лемма 1.18. [131, с. 1026] Вложение $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ непрерывно при $1 \leq p \leq 6$ и компактно при $1 \leq p < 6$.

Лемма 1.19. [130, с. 239] Оператор следа $\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ непрерывен.

Лемма 1.20. [68, с. 4] Образ оператора следа $\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ — плотное подпространство пространства $L^2(\Gamma)$.

Лемма 1.21. [46, proposition 1] Пусть $f(t), t \in \mathbb{R}$ — липшицева функция. Для любой функции $u \in H^1(\Omega)$ справедливо равенство $f(\gamma(u)) = \gamma(f(u))$, где

$\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ — оператор следа.

Лемма 1.22. Пусть $u \in H^1(\Omega)$, $u \geq 0$ п.в. в Ω . Тогда $u|_\Gamma \geq 0$ п.в. на Γ .

Доказательство. Применим лемму 1.21 для функции $f(t) = \max\{t, 0\}$:

$$\max\{u|_\Gamma, 0\} = \max\{u, 0\}|_\Gamma = u|_\Gamma.$$

Следовательно, $u|_\Gamma \geq 0$ п.в. на Γ . ■

Лемма 1.23. [70, с. 41] Для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_\varepsilon > 0$ такая, что для любой функции $u \in H^1(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \varepsilon \|\nabla u\|^2 + C_\varepsilon \|u\|^2.$$

Лемма 1.24 (Гронуолл). [6, с. 191] Пусть $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $b \geq 0$. Если

$$f(t) \leq a + b \int_0^t f(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T],$$

то $f(t) \leq ae^{bt} \quad \forall t \in [0, T]$.

Лемма 1.25. Оператор $A: V \rightarrow V'$, определяемый формулой $(Au, v) = a(\nabla u, \nabla v) + \int_\Gamma buv d\Gamma$, где $a > 0$, $b \in L^\infty(\Gamma)$, $b \geq b_0 > 0$, $b_0 = \text{const}$, непрерывен.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|Au\|_{V'} &= \sup_{\|v\|_V=1} (Au, v) \leq \sup_{\|v\|_V=1} (a\|\nabla u\| \|\nabla v\| + \|b\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)}) \leq \\ &\leq a\|u\|_V + \|b\|_{L^\infty(\Gamma)} C_1^2 \|u\|_V = C\|u\|_V, \end{aligned}$$

где C_1 — норма оператора следа $\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$. ■

Лемма 1.26. Пусть $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$, оператор $B(t): V \rightarrow V'$ определяется формулой $(B(t)u, v) = (\mathbf{v} \cdot \nabla u, v)$. Тогда $\exists C > 0: |(B(t)u, w)| \leq C\|u\|_V \|w\|_V \quad \forall u, w \in V, t \in (0, T)$.

Доказательство. Применяя неравенство Гёльдера с показателями 4, 2, 4,

получаем, что

$$\begin{aligned} |(B(t)u, w)| &= |(\mathbf{v} \cdot \nabla u, w)| \leq \|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla u\| \|w\|_{L^4(\Omega)} \leq \\ &\leq C_1^2 \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))} \|u\|_V \|w\|_V, \end{aligned}$$

где C_1 — норма оператора вложения $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$. ■

Лемма 1.27. [130, с. 238] Функционал $f(v) = (Av, v)^{1/2}$, где A — оператор из леммы 1.25, определяет норму в пространстве V , эквивалентную стандартной норме в V .

Лемма 1.28. [130, с. 411] Если X — рефлексивное и сепарабельное банахово пространство, то $L^p(0, T; X)$, $1 < p < \infty$ — рефлексивное и сепарабельное банахово пространство.

Лемма 1.29. [130, с. 449] Если X — рефлексивное и сепарабельное банахово пространство, то $L^1(0, T; X)$ — сепарабельное банахово пространство.

Лемма 1.30. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$. Тогда отображение $y \mapsto f(y)$ непрерывно отображает пространство $C([0, T]; H)$ в себя.

Доказательство. Пусть $y \in C([0, T]; H)$. Тогда $z = f(y) \in C([0, T]; H)$, так как $\|z(t_1) - z(t_2)\| \leq C\|y(t_1) - y(t_2)\|$. Поскольку $\|z_1(t) - z_2(t)\| \leq C\|y(t_1) - y(t_2)\|$, то

$$\begin{aligned} \|z_1 - z_2\|_{C([0,T];H)} &= \max_{t \in [0,T]} \|z_1(t) - z_2(t)\| \leq C \max_{t \in [0,T]} \|y_1(t) - y_2(t)\| = \\ &= C\|y_1 - y_2\|_{C([0,T];H)}. \end{aligned}$$
■

Лемма 1.31. [130, с. 423] Для любой функции $u \in W$ справедлива формула

$$\|u(t)\|^2 - \|u(0)\|^2 = 2 \int_0^t (u'(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.24)$$

Лемма 1.32. Для любой функции $u \in W$ справедливо равенство

$$\frac{d\|u(t)\|^2}{dt} = 2(u'(t), u(t)) \quad \text{н.в. на } (0, T).$$

Доказательство. Продифференцируем (1.24) по t согласно [15, с. 356]. ■

Лемма 1.33. Пусть $y \in W$, $k \geq 0$. Тогда $z_1 = \max\{y-k, 0\} \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H)$, $z_2 = \min\{y+k, 0\} \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H)$ и справедливы равенства

$$2 \int_0^t (y'(\tau), z_k(\tau)) d\tau = \|z_k(t)\|^2 - \|z_k(0)\|^2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2.$$

Доказательство. Пространство $H^1(Q)$ плотно в W [130, с. 423], поэтому существует последовательность $y_j \in H^1(Q)$, $y_j \rightarrow y$ в W . В силу непрерывности вложения $W \subset C([0, T]; H)$ имеем $y_j \rightarrow y$ в $C([0, T]; H)$.

Положим $z_{1j} = \max\{y_j - k, 0\}$. Отображение $y \mapsto \max\{y - k, 0\}$ непрерывно отображает пространство $C([0, T]; H)$ в себя (лемма 1.30), поэтому $z_{1j} \rightarrow z_1$ в $C([0, T]; H)$.

Поскольку $\|z_{1j}(t)\| \leq \|y_j(t)\|$ и $\|\nabla z_{1j}(t)\| \leq \|\nabla y_j(t)\|$, то $\|z_{1j}(t)\|_V \leq \|y_j(t)\|_V$, следовательно, последовательность z_{1j} ограничена в $L^2(0, T; V)$, поэтому в ней существует подпоследовательность $z_{1j} \rightharpoonup z_1$ слабо в $L^2(0, T; V)$.

По лемме 1.16 получаем, что

$$z'_{1j} = \begin{cases} y'_j, & \text{если } y_j > k \ (z_{1j} > 0), \\ 0, & \text{если } y_j \leq k \ (z_{1j} = 0). \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t (y'_j, z_{1j}) d\tau &= 2 \int_0^t (z'_{1j}, z_{1j}) d\tau = \int_{\Omega} \int_0^t \frac{d(z_{1j}^2)}{dt} d\tau dx = \\ &= \|z_{1j}(t)\|^2 - \|z_{1j}(0)\|^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Перейдем к пределу в (1.25) при $j \rightarrow \infty$. Примем во внимание, что $y'_j \rightarrow y'$ сильно в $L^2(0, T; V')$ и $z_{1j} \rightharpoonup z_1$ слабо в $L^2(0, T; V)$, а также $z_{1j} \rightarrow z_1$ в $C([0, T]; H)$, поэтому $\|z_{1j}(t)\| \rightarrow \|z_1(t)\|$, $t \in [0, T]$. Таким образом, получаем утверждение леммы для z_1 . Утверждение для z_2 доказывается аналогично. ■

Теорема 1.7. [130, с. 426] Пусть $A(t): V \rightarrow V'$ — линейный оператор, $\forall u, v \in V$ функция $t \mapsto (A(t)u, v)$ измерима на $(0, T)$, $\exists C, c > 0, d \geq 0: \forall u, v \in V, t \in (0, T): |(A(t)u, v)| \leq C\|u\|_V\|v\|_V, (A(t)u, u) \geq c\|u\|_V^2 - d\|u\|_H^2, f \in L^2(0, T; V'), u_0 \in H$. Тогда задача

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t) \quad \text{н.в. на } (0, T),$$

$$u(0) = u_0, \quad u \in W$$

имеет единственное решение.

Глава 2

Корректность моделей сложного теплообмена

2.1. Неоднородная нестационарная модель с заданным полем скоростей

2.1.1. Постановка начально-краевой задачи

Неоднородная нестационарная диффузионная модель, описывающая радиационный, кондуктивный и конвективный теплообмен в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = f, \quad (2.1)$$

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) = g, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (2.2)$$

$$a \frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - |\theta_b|^3) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2.3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (2.4)$$

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, \mathbf{v} — заданное поле скоростей, $a, b, \kappa_a, \alpha, \mu$ — положительные постоянные, $f = f(x, t)$, $g = g(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $\theta_b = \theta_b(x, t)$, $x \in \Gamma$, $t \in (0, T)$, $\beta = \beta(x)$, $\gamma = \gamma(x)$, $x \in \Gamma$, $\theta_0 = \theta_0(x)$, $\varphi_0 = \varphi_0(x)$, $x \in \Omega$ — заданные функции (физический смысл перечисленных параметров указан в разделе 1.1). В уравнениях (2.1), (2.2), (2.3) функция $\theta \mapsto \theta^4$ продолжена нечетным образом на отрицательную полуось, чтобы мы могли получить априорные оценки решения.

Обзор результатов о разрешимости систем диффузии-реакции со сходной структурой представлен в [96].

2.1.2. Формализация задачи

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют следующим условиям:

- (i) $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$;
- (ii) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $\beta_0, \gamma_0 = \text{const}$, $\theta_b \in L^8(\Sigma)$;
- (iii) $\beta + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq 0$;
- (iv) $f \in L^5(0, T; L^{15/11}(\Omega))$, $g \in L^2(0, T; V')$;
- (v) $\theta_0 \in L^5(\Omega)$, $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$.

Введем функции $h_p(s) = |s|^p \operatorname{sign} s$, $p > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Отметим, что $h'_p(s) = p|s|^{p-1}$.

Определим операторы и функционалы $A_{1,2}: V \rightarrow V'$, $f_{1,2} \in L^2(0, T; V')$, используя следующие равенства, справедливые для любых $\theta, \varphi, v \in V$:

$$\begin{aligned} (A_1\theta, v) &= a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v \, d\Gamma, & (A_2\varphi, v) &= \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma\varphi v \, d\Gamma, \\ (f_1, v) &= \int_{\Gamma} \beta\theta_b v \, d\Gamma, & (f_2, v) &= \int_{\Gamma} \gamma h_4(\theta_b) v \, d\Gamma \quad \text{п.в. на } (0, T). \end{aligned}$$

Определение 2.1. Пара $\{\theta, \varphi\} \in W \times W$ называется слабым решением задачи (2.1)–(2.4), если

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a(h_4(\theta) - \varphi) = f + f_1 \quad \text{н.в. на } (0, T), \quad (2.5)$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - h_4(\theta)) = g + f_2 \quad \text{н.в. на } (0, T), \quad (2.6)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (2.7)$$

В силу вложения $V \subset L^6(\Omega)$ выражение $(|u|u^3, v)$ имеет смысл для любых функций $u, v \in V$, поэтому $|u|u^3 \in V'$. Справедливо вложение $W \subset C([0, T]; H)$ [130, с. 422], поэтому начальные условия имеют смысл.

2.1.3. Существование и единственность решения

Введем обозначение

$$[u]_N = \begin{cases} u, & |u| < N, \\ N, & u \geq N, \\ -N, & u \leq -N, \end{cases}$$

где $N > 0$. При $N = +\infty$ считаем $[u]_N = u$.

Для доказательства разрешимости задачи (2.5)–(2.7) рассмотрим вспомогательную задачу с параметром $N > 0$: найти пару $\{\theta, \varphi\} \in W \times W$ такую, что

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + b\kappa_a(h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}) = f + f_1, \quad (2.8)$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a([\varphi]_{N^4} - h_4([\theta]_N)) = g + f_2, \quad (2.9)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (2.10)$$

При $N = +\infty$ задача (2.8)–(2.10) переходит в задачу (2.5)–(2.7).

Докажем, что задача (2.8)–(2.10) имеет решение, и затем сделаем предельный переход при $N \rightarrow +\infty$.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия (i)–(v), $N > 0$. Существует решение задачи (2.8)–(2.10).*

Доказательство. Определим в пространстве $L^2(Q) \times L^2(Q)$ с нормой $\|\{u, w\}\|_{L^2(Q) \times L^2(Q)} = \left(\|u\|_{L^2(Q)}^2 + \|w\|_{L^2(Q)}^2\right)^{1/2}$ оператор $S: B \rightarrow B$, где

$$B = \{\{u, w\} \in L^2(Q) \times L^2(Q) : \|\{u, w\}\|_{L^2(Q) \times L^2(Q)} \leq R\}.$$

Число $R > 0$ будет выбрано позже. Пусть $\{u, w\} \in B$. Положим $S(u, w) = \{\theta, \varphi\}$, где $\{\theta, \varphi\}$ — решение задачи

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + b\kappa_a(h_4([u]_N) - [w]_{N^4}) = f + f_1, \quad (2.11)$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a([w]_{N^4} - h_4([u]_N)) = g + f_2, \quad (2.12)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (2.13)$$

Линейная задача (2.11)–(2.13) однозначно разрешима (теорема 1.7). Заметим, что любая неподвижная точка оператора S является решением задачи (2.8)–(2.10).

Получим оценки решения задачи (2.11)–(2.13). Положим

$$k_1 = \inf \left\{ a \|\nabla v\|^2 + \int_{\Gamma} \left(\beta + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) v^2 d\Gamma : v \in V, \|v\|_V = 1 \right\},$$

$$k_2 = \inf \left\{ \alpha \|\nabla v\|^2 + \int_{\Gamma} \gamma v^2 d\Gamma : v \in V, \|v\|_V = 1 \right\}.$$

Отметим, что $k_1, k_2 > 0$ в силу леммы 1.27.

Умножим скалярно (2.11) и (2.12) на θ и φ соответственно, проинтегрируем по t и воспользуемся равенством $(\mathbf{v} \nabla \theta, \theta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \theta^2 d\Gamma$ и формулой (1.24). Получим

$$\begin{aligned} \int_0^T k_1 \|\theta\|_V^2 dt &\leq \int_0^T \left[a \|\nabla \theta\|^2 + \int_{\Gamma} \left(\beta + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) \theta^2 d\Gamma \right] dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|\theta_0\|^2 + \int_0^T [b\kappa_a([w]_{N^4} - h_4([u]_N), \theta) + (f + f_1, \theta)] dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|\theta_0\|^2 + \int_0^T \left[C_1 + \frac{k_1}{4} \|\theta\|^2 + C_2 \|f + f_1\|_{V'}^2 + \frac{k_1}{4} \|\theta\|_V^2 \right] dt, \end{aligned}$$

поэтому $\|\theta\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_3$. Аналогично

$$\begin{aligned} \int_0^T k_2 \|\theta\|_V^2 dt &\leq \int_0^T \left[\alpha \|\nabla \varphi\|^2 + \int_{\Gamma} \gamma \varphi^2 d\Gamma \right] dt \leq \\ &\leq \frac{\mu}{2} \|\varphi_0\|^2 + \int_0^T [\kappa_a(h_4([u]_N) - [w]_{N^4}, \varphi) + (g + f_2, \varphi)] dt \leq \\ &\leq \frac{\mu}{2} \|\varphi_0\|^2 + \int_0^T \left[C_4 + \frac{k_2}{4} \|\varphi\|^2 + C_5 \|g + f_2\|_{V'}^2 + \frac{k_2}{4} \|\varphi\|_V^2 \right] dt, \end{aligned}$$

отсюда $\|\varphi\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_6$. Здесь и далее $C_i > 0$ — постоянные, не зависящие от θ , φ , u и w , зависящие от N . Положим $R = \sqrt{2} \max\{C_3, C_6\}$, тогда оператор S действует из B в B .

Оценим производные по времени θ' , φ' :

$$\begin{aligned} \|\theta'\|_{V'} &= \sup_{\|v\|_V=1} (\theta', v) \leq \sup_{\|v\|_V=1} (C_7 \|\theta\|_V \|v\|_V + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla \theta\| \|v\|_{L^4(\Omega)} + \\ &\quad + 2b\kappa_a N^4 |\Omega|^{1/2} \|v\| + \|f + f_1\|_{V'} \|v\|_V) \leq \\ &\leq C_7 \|\theta\|_V + C_8 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\theta\|_V + 2b\kappa_a N^4 |\Omega|^{1/2} + \|f + f_1\|_{V'}. \end{aligned}$$

Отсюда $\|\theta'\|_{L^2(0,T;V')} \leq C_9$, и поэтому $\|\theta\|_W \leq C_{10}$. Аналогично $\|\varphi\|_W \leq C_{11}$.

Итак, всякое подмножество множества B оператор S переводит в ограниченное множество в пространстве $W \times W$, а в силу компактности вложения $W \subset L^2(Q)$ [16, глава 1, теорема 5.1] это множество относительно компактно в пространстве $L^2(Q) \times L^2(Q)$, поэтому оператор S компактен.

Докажем непрерывность оператора S . Пусть $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\} \in B$, $\{\theta_i, \varphi_i\} = S(u_i, w_i)$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Тогда

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + b\kappa_a((h_4([u_1]_N) - h_4([u_2]_N)) - ([w_1]_{N^4} - [w_2]_{N^4})) = 0, \quad (2.14)$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a((w_1]_{N^4} - [w_2]_{N^4}) - (h_4([u_1]_N) - h_4([u_2]_N))) = 0, \quad (2.15)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \varphi|_{t=0} = 0. \quad (2.16)$$

Заметим, что

$$|h_4([u_1]_N) - h_4([u_2]_N)| \leq 4N^3|u_1 - u_2|, \quad |[w_1]_{N^4} - [w_2]_{N^4}| \leq |w_1 - w_2|.$$

Умножив (2.14) на θ , (2.15) на φ , получим неравенства

$$\int_0^T k_1 \|\theta\|_V^2 dt \leq \int_0^T \left[C_{12} \|u_1 - u_2\|^2 + C_{13} \|w_1 - w_2\|^2 + \frac{k_1}{2} \|\theta\|^2 \right] dt,$$

$$\|\theta\|_{L^2(Q)}^2 \leq C_{14} \left(\|u_1 - u_2\|_{L^2(Q)}^2 + \|w_1 - w_2\|_{L^2(Q)}^2 \right),$$

$$\int_0^T k_2 \|\varphi\|_V^2 dt \leq \int_0^T \left[C_{15} \|w_1 - w_2\|^2 + C_{16} \|u_1 - u_2\|^2 + \frac{k_2}{2} \|\varphi\|^2 \right] dt,$$

$$\|\varphi\|_{L^2(Q)}^2 \leq C_{17} \left(\|u_1 - u_2\|_{L^2(Q)}^2 + \|w_1 - w_2\|_{L^2(Q)}^2 \right).$$

Следовательно, $\|\{\theta_1, \varphi_1\} - \{\theta_2, \varphi_2\}\|_{L^2(Q) \times L^2(Q)} \leq C_{18} \|\{u_1, v_1\} - \{u_2, v_2\}\|_{L^2(Q) \times L^2(Q)}$, откуда вытекает непрерывность оператора S .

Таким образом, оператор S вполне непрерывен, и из принципа Шаудера (теорема 1.1) вытекает существование неподвижной точки оператора S , которая является решением задачи (2.8)–(2.10). ■

Для получения оценок решений задачи (2.8)–(2.10) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть $y \in W$, $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $y_M = [y]_M$, $z = h_p(y_M)$, $p \geq 1$. Тогда $z \in L^2(0, T; V)$, $|y_M|^{p+1} \in C([0, T]; H)$ и при этом

$$\begin{aligned} \int_0^t (y'(\tau), z(\tau)) d\tau &\geq \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |y_M(t)|^{p+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |y_M(0)|^{p+1} dx - \\ &- \int_{y(0) > M} M^p (y(0) - M) dx + \int_{y(0) < -M} M^p (y(0) + M) dx, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Доказательство. Пространство $H^1(Q)$ плотно в W [130, с. 423], поэтому существует последовательность $y_j \in H^1(Q)$, $y_j \rightarrow y$ в W . Определим функции $y_{Mj} = [y_j]_M$, $z_j = h_p(y_{Mj})$, $u_{1j} = \max\{y_j - M, 0\}$, $u_{2j} = \min\{y_j + M, 0\}$. Отметим, что по лемме 1.17

$$y'_{Mj} = \begin{cases} y'_j, & |y_j| \leq M, \\ 0, & |y_j| \geq M, \end{cases} \quad u'_{1j} = \begin{cases} y'_j, & y_j \geq M, \\ 0, & y_j \leq M, \end{cases} \quad u'_{2j} = \begin{cases} y'_j, & y_j \leq -M, \\ 0, & y_j \geq -M. \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t (y'_j(\tau), z_j(\tau)) d\tau &= \int_0^t \int_{|y_j| < M} y'_j h_p(y_j) dx d\tau + \int_0^t \int_{y_j \geq M} M^p y'_j dx d\tau - \\ &- \int_0^t \int_{y_j \leq -M} M^p y'_j dx d\tau = \\ &= \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} \int_0^t (|y_{Mj}|^{p+1})' d\tau dx + \int_{\Omega} \int_0^t M^p u'_{1j} d\tau dx - \int_{\Omega} \int_0^t M^p u'_{2j} d\tau dx = \\ &= \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} (|y_{Mj}(t)|^{p+1} - |y_{Mj}(0)|^{p+1}) dx + \int_{\Omega} M^p (u_{1j}(t) - u_{1j}(0)) dx - \\ &- \int_{\Omega} M^p (u_{2j}(t) - u_{2j}(0)) dx \geq \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |y_{Mj}(t)|^{p+1} dx - \\ &- \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |y_{Mj}(0)|^{p+1} dx - \int_{\Omega} M^p u_{1j}(0) dx + \int_{\Omega} M^p u_{2j}(0) dx. \quad (2.17) \end{aligned}$$

В силу непрерывности вложения $W \subset C([0, T]; H)$ [130, с. 422] имеем $y_j \rightarrow y$ в $C([0, T]; H)$. Отображения $y \mapsto [y]_M$, $y \mapsto \max\{y - M, 0\}$, $y \mapsto \min\{y + M, 0\}$ непрерывно отображают пространство $C([0, T]; H)$ в себя (лемма 1.30), поэтому $y_{Mj} \rightarrow y_M$, $u_{1j} \rightarrow \max\{y - M, 0\}$, $u_{2j} \rightarrow \min\{y + M, 0\}$ в $C([0, T]; H)$.

Заметим, что $z_j \rightarrow z$ в $L^2(0, T; H)$, так как

$$|z_j - z| = |h_p(y_{Mj}) - h_p(y_M)| \leq pM^{p-1}|y_{Mj} - y_M|,$$

$$\int_0^T \|z_j - z\|^2 dt \leq p^2 M^{2p-2} \int_0^T \|y_{Mj} - y_M\|^2 dt \rightarrow 0.$$

Последовательность z_j ограничена в $L^2(0, T; V)$, поскольку

$$\int_0^T \|\nabla z_j\|^2 dt = \int_0^T \int_{|y_j| < M} (p|y_j|^{p-1} |\nabla y_j|)^2 dx dt \leq p^2 M^{2p-2} \int_0^T \|\nabla y_j\|^2 dt.$$

Следовательно, $z_j \rightharpoonup z$ слабо в $L^2(0, T; V)$, поэтому $\int_0^T (y'_j, z_j) dt \rightarrow \int_0^T (y', z) dt$.

Отметим, что в силу неравенства

$$\left| |[y_1]_M|^{p+1} - |[y_2]_M|^{p+1} \right| \leq (p+1)M^p |y_1 - y_2|$$

отображение $y \rightarrow |[y]_M|^{p+1}$ непрерывно отображает пространство $C([0, T]; H)$ в себя, поэтому $|y_M|^{p+1} \in C([0, T]; H)$, и след $|y_M|^{p+1}|_{t=t_0}$ имеет смысл. Также отсюда вытекает, что $|y_{Mj}(t)|^{p+1} \rightarrow |y_M(t)|^{p+1}$, $|y_{Mj}(0)|^{p+1} \rightarrow |y_M(0)|^{p+1}$ в H , поэтому

$$\int_{\Omega} |y_{Mj}(t)|^{p+1} dx \rightarrow \int_{\Omega} |y_M(t)|^{p+1} dx, \quad \int_{\Omega} |y_{Mj}(0)|^{p+1} dx \rightarrow \int_{\Omega} |y_M(0)|^{p+1} dx.$$

Аналогично

$$\int_{\Omega} u_{1j}(0) dx \rightarrow \int_{y(0) > M} (y(0) - M) dx, \quad \int_{\Omega} u_{2j}(0) dx \rightarrow \int_{y(0) < -M} (y(0) + M) dx.$$

Переходя в неравенстве (2.17) к пределу при $j \rightarrow \infty$, получаем утверждение леммы. ■

Теорема 2.2. Пусть выполняются условия (i)–(v), и $N > 0$ либо $N = +\infty$. Для любого решения задачи (2.8)–(2.10) справедливы оценки:

$$\|\theta\|_W + \|\varphi\|_W \leq C, \quad \|\eta\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \quad (2.18)$$

$$\|h_4([\theta]_N)\|_{L^2(Q)} \leq C, \quad (2.19)$$

$$\|\theta\|_{L^\infty(0, T; L^5(\Omega))} \leq C. \quad (2.20)$$

Здесь $\eta = h_{5/2}(\theta)$. Постоянная $C > 0$ зависит только от Ω , T , a , α , b , κ_a , β , γ , θ_b , \mathbf{v} , μ , f , g , θ_0 , φ_0 и не зависит от N .

Доказательство. Для любого $M > 0$ введем функции $\theta_M = [\theta]_M$, $\varphi_M = [\varphi]_{M^4}$. Умножим скалярно (2.8) и (2.9) на $h_4(\theta_M)$ и $b\varphi_M$ соответственно, проинтегрируем по t и сложим. Получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[(\theta', h_4(\theta_M)) + a(\nabla \theta, 4\theta_M^3 \nabla \theta_M) + \int_{\Gamma} \beta \theta h_4(\theta_M) d\Gamma + (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta, h_4(\theta_M)) + \right. \\ & \quad + b\mu(\varphi', \varphi_M) + b\alpha(\nabla \varphi, \nabla \varphi_M) + b \int_{\Gamma} \gamma \varphi \varphi_M d\Gamma + \\ & \quad \left. + b\kappa_a(h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M) \right] d\tau = \\ & = \int_0^t \left((f, h_4(\theta_M)) + b(g, \varphi_M) \right) d\tau + \int_{\Gamma} \beta \theta_b h_4(\theta_M) d\Gamma + b \int_{\Gamma} \gamma h_4(\theta_b) \varphi_M d\Gamma. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку функция $M \mapsto [\cdot]_M$ монотонна, то при $N > 0$ или $N = +\infty$ справедливы неравенства:

$$(h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4})(h_4(\theta_M) - \varphi_M) \geq 0 \quad \text{п.в. в } Q, \quad (2.22)$$

$$(h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M) \geq 0. \quad (2.23)$$

Введем функции $\eta = h_{5/2}(\theta)$, $\eta_M = h_{5/2}(\theta_M)$. В силу леммы 1.17 имеем $\nabla \eta_M = \frac{5}{2} \theta_M^{3/2} \nabla \theta_M$. Применим лемму 2.1:

$$\begin{aligned} \int_0^t (\theta', h_4(\theta_M)) d\tau & \geq \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_M(t)|^5 dx - \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_M(0)|^5 dx - \\ & \quad - \int_{\theta_0 > M} M^4(\theta_0 - M) dx + \int_{\theta_0 < -M} M^4(\theta_0 + M) dx \geq \\ & \geq \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_M(t)|^5 dx - \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_0|^5 dx - \int_{\Omega} |\theta_0|^5 dx - \int_{\Omega} |\theta_0|^5 dx = \\ & = \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_M(t)|^5 dx - \frac{11}{5} \int_{\Omega} |\theta_0|^5 dx, \end{aligned}$$

аналогично

$$\int_0^t (\varphi', \varphi_M) d\tau \geq -\frac{5}{2} \int_{\Omega} |\varphi_0|^2 dx.$$

Определим функцию $\eta_1 = F(\theta)$, где

$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{5}|s|^5, & |s| < M, \\ M^4|s| - \frac{4}{5}M^5, & |s| \geq M, \end{cases}$$

и заметим, что $F'(s) = h_4([s]_M)$, поэтому $\nabla \eta_1 = h_4(\theta_M) \nabla \theta$. В силу леммы 1.21 имеем $\eta_1|_\Gamma = F(\theta)|_\Gamma = F(\theta|_\Gamma)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) h_4(\theta_M) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \eta_1 dx = \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \eta_1 d\Gamma = \\ &= \frac{1}{5} \int_{|\theta| < M} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) |\theta|^5 d\Gamma + \int_{|\theta| \geq M} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \left(M^4 |\theta| - \frac{4}{5} M^5 \right) d\Gamma. \end{aligned}$$

Оценим граничные интегралы:

$$\int_{\Gamma} \beta \theta h_4(\theta_M) d\Gamma = \int_{|\theta| < M} \beta |\theta|^5 d\Gamma + \int_{|\theta| \geq M} \beta M^4 |\theta| d\Gamma, \quad \int_{\Gamma} \gamma \varphi \varphi_M d\Gamma \geq \int_{\Gamma} \gamma \varphi_M^2 d\Gamma.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) h_4(\theta_M) dx + \int_{\Gamma} \beta \theta h_4(\theta_M) d\Gamma &= \int_{|\theta| < M} \left(\beta + \frac{1}{5} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) |\theta|^5 d\Gamma + \\ &+ \int_{|\theta| \geq M} \left[\beta M^4 |\theta| + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \left(M^4 |\theta| - \frac{4}{5} M^5 \right) \right] d\Gamma. \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в правой части:

$$\int_{|\theta| < M} \left(\beta + \frac{1}{5} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) |\theta|^5 d\Gamma \geq \frac{4}{5} \int_{|\theta| < M} \beta |\theta|^5 d\Gamma = \frac{4}{5} \int_{|\theta| < M} \beta \eta_M^2 d\Gamma.$$

Оценим второе слагаемое. При $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ имеем $[\dots] \geq \beta M^4 |\theta| \geq \beta \eta_M^2$. При $-\beta/2 \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq 0$:

$$[\dots] \geq (\beta + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) M^4 |\theta| \geq \frac{1}{2} \beta M^4 |\theta| \geq \frac{1}{2} \beta \eta_M^2.$$

При $-\beta \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq -\beta/2$:

$$[\dots] \geq -\frac{4}{5} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) M^5 \geq \frac{2}{5} \beta M^5 = \frac{2}{5} \beta \eta_M^2.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) h_4(\theta_M) dx + \int_{\Gamma} \beta \theta h_4(\theta_M) d\Gamma \geq \frac{2}{5} \int_{\Gamma} \beta \eta_M^2 d\Gamma.$$

Таким образом, из (2.21) получаем, что при $N > 0$ или $N = +\infty$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_M(t)|^5 dx + \int_0^t \left[\frac{16}{25} a \|\nabla \eta_M\|^2 + \frac{2}{5} \int_{\Gamma} \beta \eta_M^2 d\Gamma + b\alpha \|\nabla \varphi_M\|^2 + b \int_{\Gamma} \gamma \varphi_M^2 d\Gamma + \right. \\ \left. + b\kappa_a(h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M) \right] d\tau \leq \\ \leq \frac{11}{5} \int_{\Omega} |\theta_0|^5 dx + \frac{5b\mu}{2} \int_{\Omega} |\varphi_0|^2 dx + \\ + \int_0^t \left[(f, h_4(\theta_M)) + b(g, \varphi_M) + \int_{\Gamma} \beta \theta_b h_4(\theta_M) d\Gamma + b \int_{\Gamma} \gamma h_4(\theta_b) \varphi_M d\Gamma \right] d\tau. \end{aligned}$$

С помощью неравенства Гёльдера, теоремы вложения и неравенства Юнга получаем оценки:

$$\begin{aligned} (f, h_4(\theta_M)) &\leq \int_{\Omega} |f| \theta_M^4 dx \leq \|f\|_{L^{15/11}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |\theta_M|^{15} dx \right)^{4/15} = \\ &= \|f\|_{L^{15/11}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} \eta_M^6 dx \right)^{4/15} \leq \\ &\leq \delta \left(\int_{\Omega} \eta_M^6 dx \right)^{1/3} + C_{\delta} \|f\|_{L^{15/11}(\Omega)}^5 \leq C_0 \delta \|\eta_M\|_V^2 + C_{\delta} \|f\|_{L^{15/11}(\Omega)}^5, \\ (g, \varphi_M) &\leq \|g\|_{V'} \|\varphi_M\|_V \leq \delta \|\varphi_M\|_V^2 + C_{\delta} \|g\|_{V'}^2. \end{aligned}$$

Здесь $\delta > 0$ — любое число, $C_0, C_{\delta} > 0$ — постоянные, не зависящие от M и N .

Оценим граничные интегралы:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \beta \theta_b h_4(\theta_M) d\Gamma &\leq \int_{\Gamma} \beta |\theta_b| |\eta_M|^{8/5} d\Gamma \leq \|\beta\|_{L^{\infty}(\Gamma)} \|\theta_b\|_{L^5(\Gamma)} \left(\int_{\Gamma} \eta_M^2 d\Gamma \right)^{4/5} \leq \\ &\leq \delta \int_{\Gamma} \eta_M^2 d\Gamma + C_{\delta} \|\theta_b\|_{L^5(\Gamma)}^5, \\ \int_{\Gamma} \gamma h_4(\theta_b) \varphi_M d\Gamma &\leq \|\gamma\|_{L^{\infty}(\Gamma)} \|\theta_b\|_{L^8(\Gamma)}^4 \|\varphi_M\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta \int_{\Gamma} \varphi_M^2 d\Gamma + C_{\delta} \|\theta_b\|_{L^8(\Gamma)}^8. \end{aligned}$$

Выбрав достаточное малое $\delta > 0$, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_M(t)|^5 dx + \int_0^T \left[C_1 \|\eta_M\|_V^2 + C_2 \|\varphi_M\|_V^2 + \right. \\
& \quad \left. + b\kappa_a(h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M) \right] d\tau \leq \\
& \leq \frac{11}{5} \int_{\Omega} |\theta_0|^5 dx + \frac{5b\mu}{2} \int_{\Omega} |\varphi_0|^2 dx + C_3 \|f\|_{L^5(0,T;L^{15/11}(\Omega))}^5 + C_4 \|g\|_{L^2(0,T;V')}^2 + \\
& \quad + C_5 \|\theta_b\|_{L^5(\Sigma)}^5 + C_6 \|\theta_b\|_{L^8(\Sigma)}^8.
\end{aligned}$$

Здесь $C_i > 0$ — постоянные, не зависящие от M и N .

Отсюда с учетом (2.23) вытекает, что при $N > 0$ или $N = +\infty$ справедливы оценки:

$$\int_0^T \|\eta_M\|_V^2 dt + \int_0^T \|\varphi_M\|_V^2 dt \leq C, \quad (2.24)$$

$$\int_{\Omega} |\theta_M(t)|^5 dx \leq C, \quad t \in [0, T], \quad (2.25)$$

$$\int_0^T (h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M) dt \leq C, \quad (2.26)$$

где $C > 0$ не зависит от M , N , t .

Получим оценку $\|\eta\|_{L^2(0,T;V)}$. Заметим, что

$$\eta_M - \eta = \begin{cases} 0, & |\eta| < M, \\ M - \eta, & \eta \geq M, \\ -M - \eta, & \eta \leq -M, \end{cases}$$

поэтому $\eta_M \rightarrow \eta$ п.в. в Q при $M \rightarrow +\infty$, при этом последовательность η_M^2 не убывает. Из (2.24) следует, что $\|\eta_M\|_{L^2(Q)}^2 \leq C$. По теореме 1.6 (Леви) получаем, что $\|\eta\|_{L^2(Q)}^2 \leq C$. Заметим, что $|\eta_M - \eta|^2 \leq \eta^2 \in L^1(Q)$, поэтому по теореме 1.5 (Лебега) имеем $\eta_M \rightarrow \eta$ в $L^2(Q)$. Из (2.24) вытекает, что $\|\eta_M\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C$, поэтому существует подпоследовательность $\eta_M \rightharpoonup \eta$ слабо в $L^2(0,T;V)$, и по лемме 1.6 получаем, что $\|\eta\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C$. Аналогично $\|\varphi\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C$.

Далее оценим $\|h_4([\theta]_N)\|_{L^2(Q)}$. Рассмотрим случай $N < +\infty$. Считая $M >$

N , получим в силу (2.22), (2.26) и неравенства

$$|h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}| \leq |h_4(\theta_M) - \varphi_M|$$

следующее неравенство:

$$\int_0^T \|h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}\|^2 dt \leq \int_0^T (h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, h_4(\theta_M) - \varphi_M) dt \leq C.$$

Тогда

$$\|h_4([\theta]_N)\|_{L^2(Q)} \leq \|h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}\|_{L^2(Q)} + \|[\varphi]_{N^4}\|_{L^2(Q)} \leq C_7.$$

Теперь рассмотрим случай $N = +\infty$. В этом случае (2.26) принимает вид

$$\int_0^T (h_4(\theta) - \varphi, h_4(\theta_M) - \varphi_M) dt \leq C.$$

Заметим, что $h_4(\theta_M) - \varphi_M \rightarrow h_4(\theta) - \varphi$ п.в. в Q . Так как последовательность $|h_4(\theta_M) - \varphi_M|$ не убывает по M п.в. в Q , то с учетом (2.22) получим, что последовательность $(h_4(\theta) - \varphi)(h_4(\theta_M) - \varphi_M)$ не убывает п.в. в Q . Следовательно, по теореме 1.6 (Леви) при $M \rightarrow +\infty$

$$\int_0^T (h_4(\theta) - \varphi, h_4(\theta_M) - \varphi_M) dt \rightarrow \int_0^T \|h_4(\theta) - \varphi\|^2 dt \leq C.$$

Отсюда

$$\|h_4([\theta]_N)\|_{L^2(Q)} = \|h_4(\theta)\|_{L^2(Q)} \leq \|h_4(\theta) - \varphi\|_{L^2(Q)} + \|\varphi\|_{L^2(Q)} \leq C_8.$$

Чтобы оценить $\|\theta\|_{L^2(0,T;V)}$, умножим скалярно уравнение (2.8) на θ и проинтегрируем по t . Получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[a \|\nabla \theta\|^2 + \int_{\Gamma} \left(\beta + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) \theta^2 d\Gamma + b \kappa_a (h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}, \theta) \right] dt \leq \\ \leq \frac{1}{2} \|\theta_0\|^2 + \int_0^T \left[(f, \theta) + \int_{\Gamma} \beta \theta_b \theta d\Gamma \right] dt, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}
k_1 \int_0^T \|\theta\|_V^2 dt &\leq b\kappa_a \|h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}\|_{L^2(Q)} \|\theta\|_{L^2(Q)} + \\
&+ \frac{1}{2} \|\theta_0\|^2 + \|f\|_{L^2(0,T;V')} \|\theta\|_{L^2(0,T;V)} + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\theta_b\|_{L^2(\Sigma)} \|\theta\|_{L^2(\Sigma)} \leq \\
&\leq \frac{k_1}{2} \|\theta\|_{L^2(0,T;V)}^2 + C_9 \|h_4([\theta]_N) - [\varphi]_{N^4}\|^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \|\theta_0\|^2 + C_{10} \|f\|_{L^2(0,T;V')}^2 + C_{11} \|\theta_b\|_{L^2(\Sigma)}^2.
\end{aligned}$$

Поэтому $\|\theta\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_{12}$.

Оценим производные θ' , φ' :

$$\begin{aligned}
\|\theta'(t)\|_{V'} &= \sup_{\|v\|_V=1} (\theta'(t), v) \leq a \|\nabla \theta(t)\| \|v\|_V + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\theta(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} + \\
&+ \|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\theta(t)\|_{L^4(\Omega)} \|v\| + b\kappa_a \|h_4([\theta(t)]_N) - [\varphi(t)]_{N^4}\| \|v\| + \\
&+ \|f(t)\|_{V'} \|v\|_V + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\theta_b(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq \\
&\leq a \|\theta(t)\|_V + C_{13} \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\theta(t)\|_V + C_{14} \|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\theta(t)\|_V + \\
&+ b\kappa_a \|h_4([\theta(t)]_N) - [\varphi(t)]_{N^4}\| + \|f(t)\|_{V'} + C_{15} \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\theta_b(t)\|_{L^2(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Отсюда $\|\theta'\|_{L^2(0,T;V')} \leq C_{16}$. Аналогично $\|\varphi'\|_{L^2(0,T;V')} \leq C_{17}$.

Наконец, оценим интеграл $\int_\Omega |\theta(t)|^5 dx$, $t \in [0, T]$. Обозначим через $\psi = \psi(x)$, $x \in \Omega$, след функции θ в момент времени t , $\psi = \theta(t)$. Заметим, что $\psi_M \equiv [\psi]_M = [\theta(t)]_M = [\theta]_M(t) = \theta_M(t)$. Из (2.25) следует, что

$$\int_\Omega |\psi_M|^5 dx \leq C.$$

Заметим, что $\psi_M \rightarrow \psi$ п.в. в Ω , причем последовательность $|\psi_M|^5$ не убывает по M п.в. в Ω . Следовательно, по теореме 1.6 (Леви) получаем

$$\int_\Omega |\theta(t)|^5 dx = \int_\Omega |\psi|^5 dx \leq C.$$

■

Теорема 2.3. Пусть выполняются условия (i)–(v). Существует решение задачи (2.5)–(2.7).

Доказательство. Перейдем в (2.8)–(2.10) к пределу при $N \rightarrow +\infty$. Обозначим решение задачи (2.8)–(2.10) через $\{\theta_N, \varphi_N\}$. Из (2.18) следует, что последовательности θ_N, φ_N ограничены в W , поэтому существуют подпоследовательности $\theta_N \rightharpoonup \theta_*, \varphi_N \rightharpoonup \varphi_*$ слабо в W , а в силу компактности вложения $W \subset L^2(Q)$ [16, глава 1, теорема 5.1] получаем, что $\theta_N \rightarrow \theta_*, \varphi_N \rightarrow \varphi_*$ сильно в $L^2(Q)$.

Докажем, что $[\theta_N]_N \rightarrow \theta_*$ в $L^2(Q)$. Справедливо неравенство:

$$\|[\theta_N]_N - \theta_*\|_{L^2(Q)} \leq \|[\theta_N]_N - [\theta_*]_N\|_{L^2(Q)} + \|[\theta_*]_N - \theta_*\|_{L^2(Q)}.$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\|[\theta_N]_N - [\theta_*]_N\|_{L^2(Q)} \leq \|\theta_N - \theta_*\|_{L^2(Q)} \rightarrow 0.$$

Для второго слагаемого:

$$\begin{aligned} \|[\theta_*]_N - \theta_*\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_0^T \int_{\theta_* > N} (\theta_* - N)^2 dx dt + \int_0^T \int_{\theta_* < -N} (\theta_* + N)^2 dx dt = \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} u_{1N}^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} u_{2N}^2 dx dt, \end{aligned}$$

где $u_{1N} = \max\{\theta_* - N, 0\}$, $u_{2N} = \min\{\theta_* + N, 0\}$. Заметим, что $u_{iN} \rightarrow 0$ п.в. в Q при $N \rightarrow +\infty$ ($i = 1, 2$), при этом $u_{iN}^2 \leq \theta_*^2 \in L^1(Q)$. Следовательно, по теореме 1.5 (Лебега) имеем

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_{iN}^2 dx dt \rightarrow 0.$$

Аналогично доказывается, что $[\varphi_N]_{N^4} \rightarrow \varphi_*$ в $L^2(Q)$.

Теперь докажем, что $h_4([\theta_N]_N) \rightharpoonup h_4(\theta_*)$ слабо в $L^2(Q)$. Заметим, что в силу (2.19) последовательность $h_4([\theta_N]_N)$ ограничена в $L^2(Q)$, поэтому последовательность $[\theta_N]_N$ ограничена в $L^8(Q)$. Отсюда подпоследовательность $[\theta_N]_N \rightharpoonup \eta$ слабо в $L^8(Q)$. Поскольку $[\theta_N]_N \rightarrow \theta_*$ в $L^2(Q)$, то $\eta = \theta_* \in L^8(Q)$. Докажем, что

$$\int_0^T \int_{\Omega} (h_4([\theta_N]_N) - h_4(\theta_*))v dx dt \rightarrow 0 \quad \forall v \in C(\overline{Q}). \quad (2.27)$$

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|h_4(a) - h_4(b)| \leq 4|a - b|(|a|^3 + |b|^3).$$

Действительно, при $a \geq 0, b \leq 0$

$$|h_4(a) - h_4(b)| = a^4 + b^4 \leq (a - b)^4 = |a - b|(|a| + |b|)^3 \leq 4|a - b|(|a|^3 + |b|^3),$$

а если числа a и b одного знака, то

$$|h_4(a) - h_4(b)| \leq |a - b|(|a| + |b|)(a^2 + b^2) \leq 2|a - b|(|a|^3 + |b|^3).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} (h_4([\theta_N]_N) - h_4(\theta_*))v \, dxdt \right| &\leq \\ &\leq 4 \int_0^T \int_{\Omega} |[\theta_N]_N - \theta_*| \left(|[\theta_N]_N|^3 + |\theta_*|^3 \right) |v| \, dxdt \leq \\ &\leq 4\|v\|_{L^\infty(Q)} \|[\theta_N]_N - \theta_*\|_{L^2(Q)} \left(\|[\theta_N]_N\|_{L^6(Q)}^3 + \|\theta_*\|_{L^6(Q)}^3 \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что последовательность $[\theta_N]_N$ ограничена в $L^8(Q)$, откуда следует, что выражение в скобках ограничено.

Учитывая (2.27) и пользуясь тем, что $C(\overline{Q})$ плотно в $L^2(Q)$ [19, с. 109] и последовательность $h_4([\theta_N]_N)$ ограничена в $L^2(Q)$, получаем, что $h_4([\theta_N]_N) \rightharpoonup h_4(\theta_*)$ слабо в $L^2(Q)$.

Переходя в (2.8)–(2.10) к пределу при $N \rightarrow +\infty$, получаем, что $\{\theta_*, \varphi_*\}$ — решение задачи (2.5)–(2.7). ■

Теорема 2.4. Пусть выполняются условия (i)–(v). Решение задачи (2.5)–(2.7) единственно.

Доказательство. Пусть $\{\theta_1, \varphi_1\}, \{\theta_2, \varphi_2\}$ — два решения задачи (2.5)–(2.7). Положим $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Тогда

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + b\kappa_a((h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2)) - \varphi) = 0, \quad (2.28)$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - (h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2))) = 0, \quad (2.29)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \varphi|_{t=0} = 0. \quad (2.30)$$

Умножим скалярно (2.28) на θ , (2.29) на φ , проинтегрируем по t и сложим. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 + \frac{\mu}{2}\|\varphi(t)\|^2 + \int_0^t \left[a\|\nabla\theta\|^2 + \int_{\Gamma} \left(\beta + \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) \theta^2 d\Gamma + \right. \\ \left. + \alpha\|\nabla\varphi\|^2 + \int_{\Gamma} \gamma\varphi^2 d\Gamma + \right. \\ \left. + b\kappa_a((h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2)) - \varphi, \theta) + \kappa_a(\varphi - (h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2)), \varphi) \right] d\tau = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $(h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2), \theta) \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 + \frac{\mu}{2}\|\varphi(t)\|^2 + k_1 \int_0^t \|\theta\|_V^2 d\tau + k_2 \int_0^t \|\varphi\|_V^2 d\tau \leq \\ \leq \int_0^t [C_1\|\varphi\|^2 + C_2\|\theta\|^2 + \kappa_a(h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2), \varphi)] d\tau. \quad (2.31) \end{aligned}$$

Оценим третье слагаемое в правой части:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\Omega} (h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2))\varphi dx d\tau \right| \leq 4 \int_0^t \int_{\Omega} |\theta| (|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3) |\varphi| dx d\tau \leq \\ \leq 4 \int_0^t \|\theta\|_{L^5(\Omega)} \|\varphi\|_{L^5(\Omega)} \left(\|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) d\tau. \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 1.8: для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_\varepsilon > 0$, не зависящая от θ , такая, что

$$\|\theta\|_{L^5(\Omega)} \leq \varepsilon \|\theta\|_V + C_\varepsilon \|\theta\|.$$

Учитывая (2.20), получим

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\Omega} (h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2))\varphi dx d\tau \right| \leq \varepsilon \int_0^t \|\varphi\|_V \|\theta\|_V d\tau + C_3 \int_0^t \|\varphi\|_V \|\theta\| d\tau \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t (\|\varphi\|_V^2 + \|\theta\|_V^2) d\tau + \varepsilon \int_0^t \|\varphi\|_V^2 d\tau + C_4 \int_0^t \|\theta\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, из (2.31) получаем

$$\|\theta(t)\|^2 + \|\varphi(t)\|^2 \leq C_5 \int_0^t (\|\theta(\tau)\|^2 + \|\varphi(\tau)\|^2) d\tau.$$

По лемме Гронуолла $\theta = \varphi = 0$, то есть $\theta_1 = \theta_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

2.2. Модель свободной конвекции с радиационным теплообменом

2.2.1. Постановка задачи

Уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска имеют вид [7, с. 11]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \beta T' \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p', \quad (2.32)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.33)$$

Здесь $P = p_0 + p'$ — давление, $T = T_0 + T'$ — температура, \mathbf{v} — скорость, ν — коэффициент кинематической вязкости, β — коэффициент теплового расширения, \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения, p_0 — гидростатическое давление, соответствующее равновесию при средней (постоянной) плотности ρ_0 и постоянной температуре T_0 и определяемое уравнением $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$.

Перепишем (2.32) в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \beta T \mathbf{g} = \beta T_0 \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p'.$$

Преобразуем правую часть:

$$\beta T_0 \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = -\frac{1}{\rho_0} \nabla (p' - \beta T_0 p_0).$$

Величину

$$p = \frac{1}{\rho_0} (p' - \beta T_0 p_0)$$

назовем приведенным давлением. Также положим, как и ранее, $T = T_{\max} \theta$.

Модель свободной конвекции примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \beta_0 \theta \mathbf{g} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.34)$$

Здесь $\beta_0 = T_{\max} \beta$. Для окончательного получения модели свободной конвекции с радиационным теплообменом добавим к уравнениям (2.34) соотношения

(2.1)–(2.4) для температуры θ и интенсивности излучения φ , а также граничное и начальное условия для скорости \mathbf{v} .

Нестационарная модель, описывающая процесс свободной конвекции вязкой несжимаемой жидкости с учетом радиационного и кондуктивного теплообмена в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ , имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \beta_0 \theta \mathbf{g} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + b \kappa_a (|\theta| \theta^3 - \varphi) = 0, \quad (2.36)$$

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta| \theta^3) = 0, \quad (2.37)$$

$$a \frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta (\theta - \theta_b) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \gamma (\varphi - \theta_b^4) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2.38)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{v}|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0. \quad (2.40)$$

2.2.2. Формализация задачи

Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{w} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{w} = 0\}$, \mathbf{H}_0 — замыкание \mathcal{V} в $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{V}_0 = \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{w} = 0\}$. Через $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в H либо в $\mathbf{L}^2(\Omega)$, а через (f, v) — значение функционала $f \in V'$ (соответственно \mathbf{V}'_0) на элементе $v \in V$ (соответственно \mathbf{V}_0), совпадающее со скалярным произведением в H (соответственно $\mathbf{L}^2(\Omega)$), если $f \in H$ (соответственно $\mathbf{L}^2(\Omega)$). Определим пространства

$$W = \{y \in L^2(0, T; V) : y' \in L^2(0, T; V')\},$$

$$\mathbf{W}_1 = \{\mathbf{w} \in L^2(0, T; \mathbf{V}_0) : \mathbf{w}' \in L^1(0, T; \mathbf{V}'_0)\}.$$

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют следующим условиям:

- (i) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $\beta_0, \gamma_0 = \text{const}$, $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$;
- (ii) $0 \leq \theta_0, \varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$;
- (iii) $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}_0$.

Определим операторы и функционалы $A_{1,2}: V \rightarrow V'$, $A: \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}'_0$, $f_{1,2} \in L^2(0, T; V')$, используя следующие равенства, справедливые для любых $\theta, \varphi, v \in V$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_0$:

$$\begin{aligned} (A_1\theta, v) &= a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v d\Gamma, & (A_2\varphi, v) &= \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma\varphi v d\Gamma, \\ (A\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{w}), & (f_1, v) &= \int_{\Gamma} \beta\theta_b v d\Gamma, & (f_2, v) &= \int_{\Gamma} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma. \end{aligned}$$

Определение 2.2. *Тройка $\{\theta, \varphi, \mathbf{v}\} \in W \times W \times \mathbf{W}_1$ называется слабым решением задачи (2.35)–(2.40), если*

$$\mathbf{v}' + \nu A\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \beta_0\theta\mathbf{g} = 0 \quad \text{н.в. на } (0, T), \quad (2.41)$$

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f_1 \quad \text{н.в. на } (0, T), \quad (2.42)$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = f_2 \quad \text{н.в. на } (0, T), \quad (2.43)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0. \quad (2.45)$$

Справедливы вложения $W \subset C([0, T]; H)$, $\mathbf{W}_1 \subset C([0, T]; \mathbf{V}'_0)$ [27, с. 201, с. 209], поэтому начальные условия имеют смысл.

2.2.3. Существование решения при заданном поле скоростей

Для получения оценок решения задачи (2.42)–(2.44) в пространстве $L^\infty(Q)$ потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть $y \in W$, $y(0) \leq k^4$, $k > 0$, $z = \begin{cases} y^{1/4} - k, & y > k^4, \\ 0, & y \leq k^4. \end{cases}$*

Тогда $z \in L^2(0, T; V)$, $\int_0^t (y'(\tau), z(\tau)) d\tau \geq 0$, $0 \leq t \leq T$.

Доказательство. Пространство $H^1(Q)$ плотно в W [130, с. 423], поэтому существует последовательность $y_j \in H^1(Q)$, $y_j \rightarrow y$ в W . Положим

$$z_j = \begin{cases} y_j^{1/4} - k, & \text{если } y_j > k^4, \\ 0, & \text{если } y_j \leq k^4. \end{cases}$$

Если $y_j > k^4$, $y > k^4$, то $|z_j - z| = |y_j^{1/4} - y^{1/4}| \leq \frac{1}{4\xi^{3/4}}|y_j - y| \leq \frac{1}{4k^3}|y_j - y|$, где ξ находится между y_j и y , поэтому $\xi > k^4$. Если $y_j \leq k^4 < y$, то $|z_j - z| = y^{1/4} - k \leq \frac{1}{4\xi^{3/4}}(y - k^4) \leq \frac{1}{4k^3}|y_j - y|$, где $k^4 < \xi < y$. Если $y \leq k^4 < y_j$, то аналогично $|z_j - z| \leq \frac{1}{4k^3}|y_j - y|$. Если $y_j \leq k^4, y \leq k^4$, то $|z_j - z| = 0$. Таким образом, $|z_j - z| \leq \frac{1}{4k^3}|y_j - y|$, поэтому

$$\int_0^T \|z_j - z\|^2 dt \leq \frac{1}{16k^6} \int_0^T \|y_j - y\|^2 dt,$$

следовательно, $z_j \rightarrow z$ в $L^2(0, T; H)$.

Заметим, что $z_j = \max\{y_j, k^4\}^{1/4} - k$, поэтому в силу леммы 1.16

$$\nabla z_j = \begin{cases} \nabla(y_j^{1/4}), & \text{если } y_j > k^4, \\ 0, & \text{если } y_j \leq k^4. \end{cases}$$

Поскольку $\nabla(y_j^{1/4}) = \frac{1}{4}y_j^{-3/4}\nabla y_j$, то

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla z_j(t)\|^2 dt &= \int_0^T \int_{y_j > k^4} |\nabla(y_j^{1/4})|^2 dx dt = \frac{1}{16} \int_0^T \int_{y_j > k^4} y_j^{-3/2} |\nabla y_j|^2 dx dt \leq \\ &\leq \frac{1}{16k^6} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla y_j|^2 dx dt = \frac{1}{16k^6} \|\nabla y_j\|_{L^2(0, T; H)}^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Итак, последовательность z_j ограничена в $L^2(0, T; V)$, поэтому существует подпоследовательность $z_j \rightharpoonup z$ слабо в $L^2(0, T; V)$. Поэтому $\int_0^t (y'_j, z_j) d\tau \rightarrow \int_0^t (y', z) d\tau$.

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t (y'_j, z_j) d\tau &= \int_0^t \int_{y_j > k^4} y'_j (y_j^{1/4} - k) dx d\tau = \\ &= \int_{y_j > k^4} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4}{5} (y_j^{5/4} - k^5) - k(y_j - k^4) \right) d\tau dx = \\ &= \int_{y_j > k^4} \left(\frac{4}{5} y_j^{5/4} + \frac{1}{5} k^5 - k y_j \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} dx - \\ &\quad - \int_{y_j > k^4} \left(\frac{4}{5} y_j^{5/4} + \frac{1}{5} k^5 - k y_j \right) \Big|_{\tau=0} dx. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Первое слагаемое в правой части неотрицательно в силу неравенства Юнга с показателями $p = 5/4$, $q = 5$: $ky_j \leq \frac{4}{5}y_j^{5/4} + \frac{1}{5}k^5$. Оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_{y_j(0) > k^4} \left(\frac{4}{5}y_j^{5/4}(0) + \frac{1}{5}k^5 - ky_j(0) \right) dx = \\ = \int_{y_j(0) > k^4} \left(\frac{4}{5}(y_j^{5/4}(0) - k^5) - k(y_j(0) - k^4) \right) dx \leq \\ \leq \frac{4}{5} \int_{y_j(0) > k^4} (y_j^{5/4}(0) - k^5) dx = \frac{4}{5} \int_{\Omega} (\bar{y}_j^{5/4}(0) - k^5) dx, \quad (2.48) \end{aligned}$$

где $\bar{y}_j = \max\{y_j, k^4\}$. В силу непрерывности вложения $W \subset C([0, T]; H)$ [130, с. 422] $y_j \rightarrow y$ в $C([0, T]; H)$, поэтому $y_j(0) \rightarrow y(0)$ в H . По лемме 1.12 имеем $\bar{y}_j(0) \rightarrow \bar{y}(0)$ в H , где $\bar{y} = \max\{y, k^4\}$. Из леммы 1.14 вытекает, что $\bar{y}_j^{5/4}(0) - k^5 \rightarrow \bar{y}^{5/4}(0) - k^5 = 0$ в $L^1(\Omega)$. Тогда из (2.48) следует, что второе слагаемое в (2.47) стремится к 0 при $j \rightarrow \infty$.

Переходя в (2.47) к пределу при $j \rightarrow \infty$, получим утверждение леммы. ■

Теорема 2.5. Пусть выполняются условия (i), (ii) и, кроме того, $\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{V}_0)$ (или выполняются условия (i), (iii) разд. 2.1). Тогда любое решение $\{\theta, \varphi\}$ задачи (2.42)–(2.44) принадлежит $L^\infty(Q) \times L^\infty(Q)$ и удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \theta \leq M, \quad 0 \leq \varphi \leq M^4, \quad M = \max \left\{ \|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/4} \right\}.$$

Доказательство. Пусть $\{\theta, \varphi\}$ — решение задачи (2.42)–(2.44), $M > 0$.

Положим $\eta = \max\{\theta - M, 0\} \geq 0$. В силу леммы 1.33 имеем $\eta \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H)$ и $\eta|_{t=0} = 0$. Умножая скалярно уравнение (2.42) на η , интегрируя по времени и применяя лемму 1.33, получим с учетом равенства

$$(\mathbf{v} \nabla \theta, \eta) = (\mathbf{v} \nabla \eta, \eta) = 0 \quad (\text{или} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \eta^2 d\Gamma)$$

оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\eta(t)\|^2 + \int_0^t \left(a\|\nabla\eta\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \eta^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \beta(\theta - \theta_b) \eta d\Gamma + \right. \\ \left. + b\kappa_a \int_{\theta > M} (\theta^4 - \varphi) \eta dx \right) d\tau = 0. \quad (2.49) \end{aligned}$$

(в случае $\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{V}_0)$ второе слагаемое под знаком интеграла отсутствует).

В силу условия (iii) разд. 2.1 сумма 1-го, 2-го и 3-го слагаемых под знаком интеграла в (2.49) неотрицательна, поскольку с учетом равенства $\theta - \theta_b = (\theta - M) + (M - \theta_b)$:

$$a\|\nabla\eta\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \eta^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \beta(\theta - \theta_b) \eta d\Gamma \geq \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \eta^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \beta \eta^2 d\Gamma \geq 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\theta > M} (\theta^4 - \varphi) \eta dx d\tau &= \int_0^t \int_{\theta > M} (\theta^4 - \varphi) (\theta - M) dx d\tau \geq \\ &\geq \int_0^t \int_{\theta > M, \varphi > M^4} (\theta^4 - \varphi) (\theta - M) dx d\tau, \end{aligned}$$

поскольку подынтегральная функция неотрицательна в точках (x, τ) , где $\varphi \leq M^4$. Тогда из (2.49) следует, что

$$\frac{1}{2}\|\eta(t)\|^2 + b\kappa_a \int_0^t \int_{\theta > M, \varphi > M^4} (\theta^4 - \varphi) (\theta - M) dx d\tau \leq 0. \quad (2.50)$$

Далее, пусть

$$\psi = \begin{cases} \varphi^{1/4} - M, & \varphi > M^4, \\ 0, & \varphi \leq M^4. \end{cases}$$

Тогда, умножая (2.43) скалярно на ψ , интегрируя по времени и учитывая, что

в силу леммы 2.2 имеем $\int_0^t (\varphi', \psi) d\tau \geq 0$, получаем, что

$$\int_0^t \left(\alpha \int_{\varphi > M^4} \nabla \varphi \cdot \nabla (\varphi^{1/4}) dx + \int_{\Gamma} \gamma (\varphi - \theta_b^4) \psi d\Gamma + \right. \\ \left. + \kappa_a \int_{\varphi > M^4} (\varphi - \theta^4) \psi dx \right) d\tau \leq 0. \quad (2.51)$$

Первое и второе слагаемые в (2.51) неотрицательны, так как

$$\int_{\varphi > M^4} \nabla \varphi \cdot \nabla (\varphi^{1/4}) dx = \frac{1}{4} \int_{\varphi > M^4} \frac{|\nabla \varphi|^2}{\varphi^{3/4}} dx \geq 0.$$

Таким образом,

$$\int_0^t \int_{\varphi > M^4, \theta > M} (\varphi - \theta^4) (\varphi^{1/4} - M) dx d\tau \leq \\ \leq \int_0^t \int_{\varphi > M^4} (\varphi - \theta^4) (\varphi^{1/4} - M) dx d\tau \leq 0. \quad (2.52)$$

Умножая (2.52) на $b\kappa_a$ и складывая с (2.50), получим неравенство

$$\frac{1}{2} \|\eta(t)\|^2 + b\kappa_a \int_0^t \int_{\theta > M, \varphi > M^4} (\theta^4 - \varphi) (\theta - \varphi^{1/4}) dx d\tau \leq 0.$$

Из неотрицательности второго слагаемого следует, что $\eta = 0$, т.е. $\theta \leq M$ п.в. в Q .

Аналогично, выбрав теперь $\psi = \max\{\varphi - M^4, 0\} \geq 0$, $\psi|_{t=0} = 0$, из (2.43) получим

$$\frac{\mu}{2} \|\psi(t)\|^2 + \int_0^t \left(\alpha \|\nabla \psi\|^2 + \int_{\Gamma} \gamma (\varphi - \theta_b^4) \psi d\Gamma + \kappa_a \int_{\varphi > M^4} (\varphi - \theta^4) \psi dx \right) d\tau = 0.$$

Последнее слагаемое неотрицательно, так как $\theta \leq M$. Следовательно, $\psi = 0$, т.е. $\varphi \leq M^4$ п.в. в Q .

Для оценок снизу положим $\eta = \min\{\theta + \varepsilon, 0\} \leq 0$, $\eta|_{t=0} = 0$, где $\varepsilon > 0$. Умножив (2.42) скалярно на η и проинтегрировав по t , получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\eta(t)\|^2 + \int_0^t \left(a\|\nabla\eta\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \eta^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \beta(\theta - \theta_b) \eta d\Gamma + \right. \\ \left. + b\kappa_a \int_{\theta < -\varepsilon} (|\theta|\theta^3 - \varphi) \eta dx \right) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Сумма 1-го, 2-го и 3-го слагаемых под знаком интеграла неотрицательна, так как

$$\int_{\Gamma} \beta(\theta - \theta_b) \eta d\Gamma = \int_{\theta < -\varepsilon} \beta(\theta + \varepsilon - \varepsilon - \theta_b) \eta d\Gamma \geq \int_{\Gamma} \beta \eta^2 d\Gamma.$$

Заметим, что подынтегральное выражение в последнем интеграле в (2.53) неотрицательно в точках (x, τ) , в которых $\varphi \geq -\varepsilon^4$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\|\eta(t)\|^2 + b\kappa_a \int_0^t \int_{\theta < -\varepsilon, \varphi < -\varepsilon^4} (|\theta|\theta^3 - \varphi) (\theta + \varepsilon) dx d\tau \leq 0. \quad (2.54)$$

Далее, пусть

$$\psi = \begin{cases} -|\varphi|^{1/4} + \varepsilon, & \varphi < -\varepsilon^4, \\ 0, & \varphi \geq -\varepsilon^4. \end{cases}$$

Поскольку $\psi = \min\{-|\varphi|^{1/4} + \varepsilon, 0\}$, то по лемме 1.16

$$\nabla\psi = \begin{cases} -\nabla(|\varphi|^{1/4}) = \frac{1}{4|\varphi|^{3/4}} \nabla\varphi, & \varphi < -\varepsilon^4, \\ 0, & \varphi \geq -\varepsilon^4, \end{cases}$$

так как $(-\sqrt[4]{-x})' = \frac{1}{4}(-x)^{-3/4}$, $x < 0$. Умножая (2.43) скалярно на ψ и интегри-

руя по времени, получаем, что

$$\int_0^t \left(\mu(\varphi', \psi) + \frac{\alpha}{4} \int_{\varphi < -\varepsilon^4} \frac{|\nabla \varphi|^2}{|\varphi|^{3/4}} dx + \int_{\Gamma} \gamma(\varphi - \theta_b^4) \psi d\Gamma + \right. \\ \left. + \kappa_a \int_{\varphi < -\varepsilon^4} (\varphi - |\theta| \theta^3) \psi dx \right) d\tau = 0. \quad (2.55)$$

Применим лемму 2.2 для функций $y = -\varphi$, $k = \varepsilon$. Тогда $z = -\psi$, $(y', z) = (\varphi', \psi)$, $\int_0^t (\varphi', \psi) d\tau \geq 0$. Второе и третье слагаемые в (2.55) также неотрицательны, и поэтому

$$\int_0^t \int_{\varphi < -\varepsilon^4, \theta < -\varepsilon} (\varphi - |\theta| \theta^3) (-|\varphi|^{1/4} + \varepsilon) dx d\tau \leq \\ \leq \int_0^t \int_{\varphi < -\varepsilon^4} (\varphi - |\theta| \theta^3) (-|\varphi|^{1/4} + \varepsilon) dx d\tau \leq 0. \quad (2.56)$$

Здесь мы учли, что в точках (x, τ) , в которых $\varphi < -\varepsilon^4$, $\theta \geq -\varepsilon$, подынтегральное выражение неотрицательно. Умножим (2.56) на $b\kappa_a$ и сложим с (2.54).

Получим

$$\frac{1}{2} \|\eta(t)\|^2 + b\kappa_a \int_0^t \int_{\theta < -\varepsilon, \varphi < -\varepsilon^4} (|\theta| \theta^3 - \varphi) (\theta + |\varphi|^{1/4}) dx d\tau \leq 0.$$

Из неотрицательности второго слагаемого следует, что $\eta = 0$, т.е. $\theta \geq -\varepsilon$ п.в. в Q . Так как $\varepsilon > 0$ произвольное, то $\theta \geq 0$ п.в. в Q .

Выберем $\psi = \min\{\varphi, 0\} \leq 0$, $\psi|_{t=0} = 0$, из (2.43) получим

$$\frac{\mu}{2} \|\psi(t)\|^2 + \int_0^t \left(\alpha \|\nabla \psi\|^2 + \int_{\Gamma} \gamma(\varphi - \theta_b^4) \psi d\Gamma + \kappa_a \int_{\varphi < 0} (\varphi - \theta^4) \psi dx \right) d\tau = 0.$$

Последнее слагаемое неотрицательно, так как $\theta \geq 0$. Следовательно, $\psi = 0$, т.е. $\varphi \geq 0$ п.в. в Q .

Таким образом,

$$0 \leq \theta \leq M, \quad 0 \leq \varphi \leq M^4. \quad (2.57)$$



Теорема 2.6. Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда при заданном поле скоростей $\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{V}_0)$ задача (2.42)–(2.44) имеет единственное решение $\{\theta, \varphi\} \in W \times W$, при этом $0 \leq \theta \leq M$, $0 \leq \varphi \leq M^4$, где $M = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/4}\}$.

Доказательство. Пространство $L^\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$ плотно в $L^2(0, T; \mathbf{V}_0)$ [130, с. 423], поэтому существует последовательность $\mathbf{v}_n \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$, $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ в $L^2(0, T; \mathbf{V}_0)$. В силу теорем 2.3, 2.4 задача (2.42)–(2.44) при $\mathbf{v} := \mathbf{v}_n$ имеет единственное решение $\{\theta_n, \varphi_n\}$, которое в силу теоремы 2.5 удовлетворяет неравенствам $0 \leq \theta_n \leq M$, $0 \leq \varphi_n \leq M^4$. Справедливы равенства:

$$\theta'_n + A_1\theta_n + \mathbf{v}_n \cdot \nabla \theta_n + b\kappa_a(\theta_n^4 - \varphi_n) = f_1 \quad \text{п.в. на } (0, T), \quad (2.58)$$

$$\mu\varphi'_n + A_2\varphi_n + \kappa_a(\varphi_n - \theta_n^4) = f_2 \quad \text{п.в. на } (0, T), \quad (2.59)$$

$$\theta_n|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi_n|_{t=0} = \varphi_0. \quad (2.60)$$

Чтобы перейти в уравнениях (2.58), (2.59) к пределу при $n \rightarrow \infty$, докажем, что последовательности θ_n , φ_n ограничены в W . Умножим скалярно уравнение (2.58) на θ_n , (2.59) на φ_n и проинтегрируем полученные равенства по t от 0 до T . Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|\theta_n(T)\|^2 - \frac{1}{2}\|\theta_0\|^2 + \\ & + \int_0^T \left(a\|\nabla \theta_n\|^2 + \int_\Gamma \beta(\theta_n - \theta_b)\theta_n d\Gamma + b\kappa_a(\theta_n^4 - \varphi_n, \theta_n) \right) dt = 0, \\ & \frac{\mu}{2}\|\varphi_n(T)\|^2 - \frac{\mu}{2}\|\varphi_0\|^2 + \\ & + \int_0^T \left(\alpha\|\nabla \varphi_n\|^2 + \int_\Gamma \gamma(\varphi_n - \theta_b^4)\varphi_n d\Gamma + \kappa_a(\varphi_n - \theta_n^4, \varphi_n) \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством $|\theta_n^4 - \varphi_n| \leq M^4$, получим

$$\begin{aligned} a \int_0^T \|\nabla \theta_n\|^2 dt &\leq \frac{1}{2} \|\theta_0\|^2 + b\kappa_a M^5 |\Omega| T + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} M^2 |\Gamma| T, \\ \alpha \int_0^T \|\nabla \varphi_n\|^2 dt &\leq \frac{\mu}{2} \|\varphi_0\|^2 + \kappa_a M^8 |\Omega| T + \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)} M^8 |\Gamma| T. \end{aligned}$$

Следовательно, последовательности θ_n, φ_n ограничены в $L^2(0, T; V)$.

Чтобы оценить производные θ'_n, φ'_n , умножим уравнения (2.42), (2.43) на произвольную функцию $z \in V$ и воспользуемся равенством $(\mathbf{v}_n \cdot \nabla \theta_n, z) = -(\mathbf{v}_n \cdot \nabla z, \theta_n)$. Получим

$$\begin{aligned} (\theta'_n, z) + a(\nabla \theta_n, \nabla z) + \int_\Gamma \beta(\theta_n - \theta_b) z d\Gamma - (\mathbf{v}_n \cdot \nabla z, \theta_n) + b\kappa_a(\theta_n^4 - \varphi_n, z) &= 0, \\ \mu(\varphi'_n, z) + \alpha(\nabla \varphi_n, \nabla z) + \int_\Gamma \gamma(\varphi_n - \theta_b^4) z d\Gamma + \kappa_a(\varphi_n - \theta_n^4, z) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенства $|\theta_n - \theta_b| \leq M, |\varphi_n - \theta_b^4| \leq M^4$, получаем

$$\begin{aligned} (\theta'_n, z) &\leq a\|\nabla \theta_n\| \|\nabla z\| + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} M |\Gamma|^{1/2} \|z\|_{L^2(\Gamma)} + M \|\mathbf{v}_n\| \|\nabla z\| + \\ &\quad + b\kappa_a M^4 |\Omega|^{1/2} \|z\|, \\ \mu(\varphi'_n, z) &\leq \alpha\|\nabla \varphi_n\| \|\nabla z\| + \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)} M^4 |\Gamma|^{1/2} \|z\|_{L^2(\Gamma)} + \kappa_a M^4 |\Omega|^{1/2} \|z\|. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\theta'_n\|_{V'} &= \sup_{\|z\|_V=1} (\theta'_n, z) \leq a\|\nabla \theta_n\| + C_1 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} M |\Gamma|^{1/2} + \\ &\quad + M \|\mathbf{v}_n\| + b\kappa_a M^4 |\Omega|^{1/2}, \\ \mu\|\varphi'_n\|_{V'} &= \mu \sup_{\|z\|_V=1} (\varphi'_n, z) \leq \alpha\|\nabla \varphi_n\| + C_1 \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)} M^4 |\Gamma|^{1/2} + \kappa_a M^4 |\Omega|^{1/2}, \end{aligned}$$

где C_1 — норма оператора следа $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$. Таким образом, используя неравенства $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\theta'_n\|_{V'}^2 dt &\leq 3a^2 \int_0^T \|\nabla \theta_n\|^2 dt + 3M^2 \int_0^T \|\mathbf{v}_n\|^2 dt + \\ &\quad + 3(C_1 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} M |\Gamma|^{1/2} + b\kappa_a M^4 |\Omega|^{1/2})^2 T, \end{aligned}$$

$$\mu \int_0^T \|\varphi'_n\|_{V'}^2 dt \leq 2\alpha^2 \int_0^T \|\nabla \varphi_n\|^2 dt + 2(C_1 \|\gamma\|_{L^\infty(\Gamma)} M^4 |\Gamma|^{1/2} + \kappa_a M^4 |\Omega|^{1/2})^2 T.$$

Следовательно, последовательности θ'_n , φ'_n ограничены в $L^2(0, T; V')$.

Таким образом, последовательности θ_n , φ_n ограничены в W , поэтому существуют подпоследовательности $\theta_n \rightharpoonup \theta$, $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ слабо в W , а в силу компактности вложения $W \subset L^2(Q)$ [16, глава 1, теорема 5.1] $\theta_n \rightarrow \theta$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ сильно в $L^2(Q)$. Следовательно, по лемме 1.13 получаем, что $0 \leq \theta \leq M$, $0 \leq \varphi \leq M^4$.

Перейдем в равенствах (2.58)–(2.60) к пределу при $n \rightarrow \infty$. Выше показано, что $\theta'_n \rightharpoonup \theta'$, $\varphi'_n \rightharpoonup \varphi'$ слабо в $L^2(0, T; V')$. В силу непрерывности операторов A_1 , A_2 из сходимости $\theta_n \rightharpoonup \theta$, $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ слабо в $L^2(0, T; V)$ вытекает, что $A_1 \theta_n \rightharpoonup A_1 \theta$, $A_2 \varphi_n \rightharpoonup A_2 \varphi$ слабо в $L^2(0, T; V')$. Из неравенства

$$\begin{aligned} \|\theta_n^4 - \theta^4\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_0^T \int_\Omega (\theta_n^4 - \theta^4)^2 dx dt \leq 16M^6 \int_0^T \int_\Omega (\theta_n - \theta)^2 dx dt = \\ &= 16M^6 \|\theta_n - \theta\|_{L^2(Q)}^2 \end{aligned}$$

вытекает, что $\theta_n^4 \rightarrow \theta^4$ в $L^2(0, T; H)$.

Чтобы доказать, что $\mathbf{v}_n \cdot \nabla \theta_n \rightharpoonup \mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ слабо в $L^2(0, T; V')$, докажем, что для любой функции $z \in L^2(0, T; V)$: $\int_0^T (\mathbf{v}_n \cdot \nabla \theta_n - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta, z) dt \rightarrow 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_n \cdot \nabla \theta_n - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta, z) &= ((\mathbf{v}_n - \mathbf{v}) \cdot \nabla \theta_n, z) + (\mathbf{v} \cdot \nabla (\theta_n - \theta), z) = \\ &= -((\mathbf{v}_n - \mathbf{v}) \cdot \nabla z, \theta_n) - (\mathbf{v} \cdot \nabla z, \theta_n - \theta). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Интеграл от первого слагаемого стремится к 0, так как

$$\begin{aligned} \int_0^T |((\mathbf{v}_n - \mathbf{v}) \cdot \nabla z, \theta_n)| dt &\leq M \int_0^T \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| \cdot \|\nabla z\| dt \leq \\ &\leq M \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}_0)} \|z\|_{L^2(0, T; V)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку последовательность θ_n ограничена в $L^\infty(Q)$, то существует подпоследовательность $\theta_n \rightharpoonup^* \theta$ *-слабо в $L^\infty(Q)$. Так как $\mathbf{v} \cdot \nabla z \in L^1(Q)$, то интеграл от второго слагаемого в (2.61) стремится к 0.

Итак, переходя в равенствах (2.58)–(2.60) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что пара $\{\theta, \varphi\}$ является решением задачи (2.42)–(2.44).

Докажем единственность решения. Пусть $\{\theta_1, \varphi_1\}$, $\{\theta_2, \varphi_2\}$ — решения задачи (2.42)–(2.44). Отметим, что в силу теоремы 2.5 справедливы неравенства $0 \leq \theta_i \leq M$, $0 \leq \varphi_i \leq M^4$, $i = 1, 2$. Положим $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $f = (\theta_1 + \theta_2)(\theta_1^2 + \theta_2^2)$. Тогда

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + b\kappa_a(f\theta - \varphi) = 0, \quad (2.62)$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - f\theta) = 0, \quad \{\theta, \varphi\}|_{t=0} = 0. \quad (2.63)$$

Умножим скалярно в $L^2(0, t; V)$ уравнение (2.62) на θ , (2.63) на φ и отбросим неотрицательные слагаемые. Получим

$$\frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2 \leq b\kappa_a \int_0^t (\varphi, \theta) d\tau \leq \frac{b\kappa_a}{2} \int_0^t (\|\varphi\|^2 + \|\theta\|^2) d\tau,$$

$$\frac{\mu}{2}\|\varphi(t)\|^2 \leq 4M^3\kappa_a \int_0^t (\theta, \varphi) d\tau \leq 2M^3\kappa_a \int_0^t (\|\theta\|^2 + \|\varphi\|^2) d\tau.$$

Складывая полученные неравенства, получаем оценку

$$\|\theta(t)\|^2 + \|\varphi(t)\|^2 \leq C \int_0^t (\|\theta(\tau)\|^2 + \|\varphi(\tau)\|^2) d\tau,$$

где $C = \max\{b\kappa_a, 4M^3\kappa_a/\mu\}$. В силу леммы Гронуолла $\theta = 0$, $\varphi = 0$ п.в. в Q .

■

2.2.4. Существование решения

В дальнейшем слабое решение задачи (2.36)–(2.39), соответствующее полю скоростей \mathbf{v} , будем обозначать $\theta(\mathbf{v})$, $\varphi(\mathbf{v})$.

Лемма 2.3. Пусть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in L^2(0, T; \mathbf{V}_0)$, $\theta_i = \theta(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{C([0, T]; H)} \leq C\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(0, T; \mathbf{H}_0)}.$$

Здесь C зависит только от Ω , T , M , a , β , b , κ_a , μ .

Доказательство. Положим $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. Справедливы равенства:

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_2 + b\kappa_a((\theta_1^4 - \theta_2^4) - \varphi) = 0, \quad (2.64)$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - (\theta_1^4 - \theta_2^4)) = 0, \quad (2.65)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad \varphi|_{t=0} = 0.$$

Умножим скалярно уравнение (2.64) на θ , а (2.64) — на φ . Получим

$$\frac{1}{2} \frac{d\|\theta\|^2}{dt} + a\|\nabla \theta\|^2 + \int_{\Gamma} \beta \theta^2 d\Gamma + (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_2, \theta) + b\kappa_a(\theta_1^4 - \theta_2^4, \theta) = b\kappa_a(\varphi, \theta),$$

$$\frac{\mu}{2} \frac{d\|\varphi\|^2}{dt} + \alpha\|\nabla \varphi\|^2 + \int_{\Gamma} \gamma \varphi^2 d\Gamma + \kappa_a\|\varphi\|^2 = \kappa_a(\theta_1^4 - \theta_2^4, \varphi).$$

Пусть

$$k_1 = \inf_{v \in V, \|v\|_V=1} \left(a\|\nabla v\|^2 + \int_{\Gamma} \beta v^2 d\Gamma \right).$$

Используя оценки

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_2, \theta)| = |(\mathbf{v} \cdot \nabla \theta, \theta_2)| \leq M\|\mathbf{v}\|\|\theta\|_V \leq k_1\|\theta\|_V^2 + C_1\|\mathbf{v}\|^2,$$

$$(\theta_1^4 - \theta_2^4, \theta) \geq 0, \quad |(\theta_1^4 - \theta_2^4, \varphi)| \leq 4M^3\|\theta\|\|\varphi\|,$$

где $C_i > 0$ — постоянные, не зависящие от $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, получаем

$$\frac{d\|\theta\|^2}{dt} \leq C_2\|\mathbf{v}\|^2 + C_3\|\theta\|^2 + C_4\|\varphi\|^2, \quad \frac{d\|\varphi\|^2}{dt} \leq C_5\|\theta\|^2 + C_6\|\varphi\|^2,$$

$$\|\theta(t)\|^2 + \|\varphi(t)\|^2 \leq C_2 \int_0^t \|\mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau + C_7 \int_0^t (\|\theta(\tau)\|^2 + \|\varphi(\tau)\|^2) d\tau.$$

Из леммы Гронуолла следует, что

$$\|\theta(t)\|^2 + \|\varphi(t)\|^2 \leq C_2 e^{C_7 T} \int_0^T \|\mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau, \quad t \in [0, T],$$

откуда получаем утверждение леммы. ■

Для доказательства разрешимости задачи (2.35)–(2.40) применим метод Галеркина. Рассмотрим собственные функции $\mathbf{w}_i \in \mathbf{V}_0$ оператора Стокса:

$$(\nabla \mathbf{w}_i, \nabla \mathbf{u}) = \lambda_i(\mathbf{w}_i, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0; \quad (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots$$

Функции \mathbf{w}_i являются собственными элементами оператора $S: \mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}_0$, определяемого равенством

$$((Sw, z)) = (w, z) \quad \forall w, z \in \mathbf{V}_0.$$

Здесь $((u, v)) = (\nabla u, \nabla v)$, $u, v \in \mathbf{V}_0$ — скалярное произведение в пространстве \mathbf{V}_0 . Оператор S самосопряжен, а в силу компактности вложения \mathbf{V}_0 в \mathbf{H}_0 будет компактным. Поэтому по теореме Гильберта — Шмидта функции $\{\mathbf{w}_i\}$ образуют базис в \mathbf{V}_0 . В силу плотности и непрерывности вложения \mathbf{V}_0 в \mathbf{H}_0 , $\{\mathbf{w}_i\}$ также является базисом в \mathbf{H}_0 .

Для каждого n определим приближенное решение задачи (2.35)–(2.40) следующим образом:

$$\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n c_{ni}(t) \mathbf{w}_i,$$

$$(\mathbf{v}'_n, \mathbf{w}_i) + \nu(\nabla \mathbf{v}_n, \nabla \mathbf{w}_i) + ((\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n + \beta_0 \theta_n \mathbf{g}, \mathbf{w}_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{v}_n(0) = \mathbf{v}_{n0}. \quad (2.67)$$

Здесь $\theta_n = \theta(\mathbf{v}_n)$, начальное условие имеет вид $\mathbf{v}_{n0} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_i) \mathbf{w}_i$. Запишем (2.66), (2.67) в следующем виде:

$$c'_{ni}(t) + \alpha_i c_{ni}(t) + \sum_{j,k=1}^n \alpha_{ijk} c_{nj}(t) c_{nk}(t) + (\beta_0 \theta_n \mathbf{g}, \mathbf{w}_i) = 0,$$

$$c_n(0) = c_{n0},$$

где $\alpha_i = \nu \lambda_i$, $\alpha_{ijk} = ((\mathbf{w}_j \cdot \nabla) \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_i)$, $[c_{n0}]_i = (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_i)$.

Определим операторы $F_{1,2,3}: C([0, T]; \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, T]; \mathbb{R}^n)$, $F = F_1 + F_2 + F_3$:

$$[F_1 c(t)]_i = \alpha_i c_i(t), \quad [F_2 c(t)]_i = \sum_{j,k=1}^n \alpha_{ijk} c_j(t) c_k(t), \quad [F_3 c]_i = (\beta_0 \theta(c) \mathbf{g}, \mathbf{w}_i), \quad i = \overline{1, n},$$

где $\theta(c) = \theta(\mathbf{v}(c))$, $\mathbf{v}(c) \equiv \sum_{i=1}^n c_i(t) \mathbf{w}_i$. Отметим, что оператор F является вольтерровым, то есть из равенства $c_1(s) = c_2(s)$ для всех $s \in [0, t]$, $t \in [0, T]$, следует, что $F c_1(s) = F c_2(s)$ для всех $s \in [0, t]$.

Докажем, что F удовлетворяет локальному условию Липшица: существуют $L, r > 0$ такие, что

$$\|Fc - F\bar{c}\|_{C([0,T];\mathbb{R}^n)} \leq L\|c - \bar{c}\|_{C([0,T];\mathbb{R}^n)} \quad \forall c, \bar{c} \in B_r(c_0), \quad (2.68)$$

где

$$B_r(c_0) = \{c \in C([0, T]; \mathbb{R}^n) : \|c - c_0\|_{C([0,T];\mathbb{R}^n)} \leq r\}.$$

Для линейного оператора F_1 и квадратичного оператора F_2 указанное условие очевидно. Проверим условие Липшица для оператора F_3 :

$$\begin{aligned} |F_3c(t) - F_3\bar{c}(t)|_n &= \max_{1 \leq i \leq n} |(\beta_0 \mathbf{g}(\theta(c)(t) - \theta(\bar{c})(t)), \mathbf{w}_i)| \leq \beta_0 |\mathbf{g}| \|\theta(c)(t) - \theta(\bar{c})(t)\|, \\ \|F_3c - F_3\bar{c}\|_{C([0,T];\mathbb{R}^n)} &\leq \beta_0 |\mathbf{g}| \|\theta(c) - \theta(\bar{c})\|_{C([0,T];H)} \leq C_1 \|\mathbf{v}(c) - \mathbf{v}(\bar{c})\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}_0)} \leq \\ &\leq C_2 \|c - \bar{c}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \sqrt{T} \|c - \bar{c}\|_{C([0,T];\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

где $|\cdot|_n$ обозначает норму в \mathbb{R}^n : $|c|_n = \max_{1 \leq i \leq n} |c_i|$; C_i — положительные постоянные, не зависящие от n .

Справедлив следующий результат о локальной разрешимости задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с вольтерровым оператором.

Лемма 2.4. Пусть $F: C([0, T_1]; \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, T_1]; \mathbb{R}^n)$ — вольтерров оператор, удовлетворяющий условию Липшица (2.68). Тогда задача Коши

$$\dot{c}(t) + Fc(t) = 0, \quad c(0) = c_0 \quad (2.69)$$

разрешима на интервале $(0, T_1)$, где $T_1 \leq r/M$, $M = \|Fc_0\|_{C([0,T_1];\mathbb{R}^n)} + Lr$.

Доказательство. Задача (2.69) эквивалентна интегральному уравнению $c = Gc$, где $G: C([0, T_1]; \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, T_1]; \mathbb{R}^n)$:

$$Gc(t) = c_0 - \int_0^t Fc(s) ds.$$

Заметим, что $\|Fc\|_{C([0,T_1];\mathbb{R}^n)} \leq \|Fc_0\|_{C([0,T_1];\mathbb{R}^n)} + Lr$, если $c \in B_r(c_0)$. Из того, что $T_1 \leq r/M$, сразу следует, что $G(B_r(c_0)) \subset B_r(c_0)$.

Повторяя рассуждения [6, теорема 1.2, с. 196], получим, что оператор G имеет ровно одну неподвижную точку в $B_r(c_0)$. \blacksquare

Из леммы 2.4 вытекает разрешимость задачи (2.66), (2.67) на интервале $(0, T_1)$. Априорные оценки, которые мы получим ниже, позволяют продолжить решение на весь интервал $(0, T)$.

Умножим уравнение (2.66) на $c_{ni}(t)$ и просуммируем по i от 1 до n . Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\|\mathbf{v}_n\|^2}{dt} + \nu \|\nabla \mathbf{v}_n\|^2 + (\beta_0 \mathbf{g} \theta_n, \mathbf{v}_n) &= 0, \\ \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_n\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}_n\|^2 d\tau &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_{n0}\|^2 + C_1 \int_0^t \|\mathbf{v}_n\|^2 d\tau + C_2, \end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$\|\mathbf{v}_n\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0)} \leq C_3, \quad \|\mathbf{v}_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}_0)} \leq C_4, \quad (2.70)$$

где $C_i > 0$ не зависят от n . Таким образом, задача (2.66), (2.67) разрешима на $(0, T)$.

Получим оценку равномерной непрерывности последовательности \mathbf{v}_n в $L^2(0, T; \mathbf{H}_0)$. Рассмотрим уравнение (2.66) в момент времени s , умножим на $\mathbf{v}_n(s) - \mathbf{v}_n(t)$, а затем проинтегрируем по s от t до $t+h$ и по t от 0 до $T-h$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{T-h} \|\mathbf{v}_n(t+h) - \mathbf{v}_n(t)\|^2 dt &+ \nu \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} (\nabla \mathbf{v}_n(s), \nabla \mathbf{v}_n(s) - \nabla \mathbf{v}_n(t)) ds dt + \\ &+ \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} ((\mathbf{v}_n(s) \cdot \nabla) \mathbf{v}_n(s), \mathbf{v}_n(s) - \mathbf{v}_n(t)) ds dt + \\ &+ \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} (\beta_0 \mathbf{g} \theta_n(s), \mathbf{v}_n(s) - \mathbf{v}_n(t)) ds dt = 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Оценим третье и четвертое слагаемые в (2.71):

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} ((\mathbf{v}_n(s) \cdot \nabla) \mathbf{v}_n(s), \mathbf{v}_n(s) - \mathbf{v}_n(t)) ds dt \right| \leq \\
& \leq \int_0^{T-h} \|\mathbf{v}_n(t)\| \int_t^{t+h} \|\mathbf{v}_n(s)\| \|\nabla \mathbf{v}_n(s)\| ds dt \leq \\
& \leq C_3^2 \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} \|\mathbf{v}_n(s)\|_{\mathbf{V}_0} ds dt \leq C_3^2 T \sqrt{h} \|\mathbf{v}_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}_0)} \leq C_5 \sqrt{h}, \\
& \left| \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} (\beta_0 \mathbf{g} \theta_n, \mathbf{v}_n(s) - \mathbf{v}_n(t)) ds dt \right| \leq \\
& \leq \beta_0 |\mathbf{g}| M \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} (\|\mathbf{v}_n(s)\| + \|\mathbf{v}_n(t)\|) ds dt \leq C_6 h.
\end{aligned}$$

Чтобы оценить второе слагаемое в (2.71), поменяем порядок интегрирования:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} \square ds dt = \\
& = \int_h^{T-h} \int_{s-h}^s \square dt ds + \int_0^h \int_0^s \square dt ds + \int_{T-h}^T \int_{s-h}^{T-h} \square dt ds. \quad (2.72)
\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
& \int_h^{T-h} \int_{s-h}^s (\nabla \mathbf{v}_n(s), \nabla \mathbf{v}_n(s) - \nabla \mathbf{v}_n(t)) dt ds \leq \\
& \leq \int_h^{T-h} \int_{s-h}^s \|\nabla \mathbf{v}_n(s)\|^2 dt ds + \int_h^{T-h} \|\nabla \mathbf{v}_n(s)\| \int_{s-h}^s \|\nabla \mathbf{v}_n(t)\| dt ds \leq \\
& \leq h \|\mathbf{v}_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}_0)}^2 + \sqrt{h} \sqrt{T} \|\mathbf{v}_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}_0)}^2 \leq C_7 \sqrt{h},
\end{aligned}$$

остальные слагаемые в (2.72) оцениваются аналогично.

Таким образом,

$$\int_0^{T-h} \|\mathbf{v}_n(t+h) - \mathbf{v}_n(t)\|^2 dt \leq C \sqrt{h}, \quad (2.73)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от n, h . Следовательно, по теореме 1.2 последовательность \mathbf{v}_n относительно компактна в $L^2(0, T; \mathbf{H}_0)$.

Из оценок (2.70), (2.73) вытекает, что из последовательности \mathbf{v}_n можно выделить подпоследовательность $\mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v}$ *-слабо в $L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0)$, слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}_0)$, $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ сильно в $L^2(0, T; \mathbf{H}_0)$, $\mathbf{v}_{n0} \rightarrow \mathbf{v}_0$ в \mathbf{H}_0 . Из леммы 2.3 вытекает, что $\theta_n \rightarrow \theta$ сильно в $L^2(0, T; H)$, где $\theta = \theta(\mathbf{v})$.

Полученные результаты о сходимости позволяют перейти к пределу в (2.66), (2.67) аналогично [27]. Пусть $\psi \in C^1[0, T]$, $\psi(T) = 0$. Домножим (2.66) на $\psi(t)$ и проинтегрируем по t . Тогда

$$\begin{aligned} - \int_0^T (\mathbf{v}_n(t), \mathbf{w}_i) \psi'(t) dt + \nu \int_0^T (\nabla \mathbf{v}_n(t), \nabla \mathbf{w}_i) \psi(t) dt + \int_0^T ((\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_i) \psi(t) dt + \\ + \int_0^T (\beta_0 \theta_n(t) \mathbf{g}, \mathbf{w}_i) \psi(t) dt = (\mathbf{v}_{n0}, \mathbf{w}_i) \psi(0). \end{aligned}$$

В линейных слагаемых переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ тривиален, для нелинейного слагаемого предельный переход делается, как в [27, с. 231]. В пределе получим, что уравнение

$$\begin{aligned} - \int_0^T (\mathbf{v}(t), \mathbf{w}) \psi'(t) dt + \nu \int_0^T (\nabla \mathbf{v}(t), \nabla \mathbf{w}) \psi(t) dt + \int_0^T ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) \psi(t) dt + \\ + \int_0^T (\beta_0 \theta(t) \mathbf{g}, \mathbf{w}) \psi(t) dt = (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}) \psi(0) \end{aligned} \quad (2.74)$$

выполняется для $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots$, по линейности и непрерывности (2.74) выполняется для любого $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_0$. Записывая (2.74) для произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(0, T)$, получим, что \mathbf{v} удовлетворяет (2.41) в смысле теории распределений.

Покажем, что \mathbf{v} удовлетворяет начальному условию. Для этого умножим (2.41) на $\mathbf{w}\psi(t)$, где $\psi \in C^1[0, T]$, $\psi(0) = 1$, $\psi(T) = 0$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_0$, и проинтегрируем по t . Получим

$$\begin{aligned} - \int_0^T (\mathbf{v}(t), \mathbf{w}) \psi'(t) dt + \nu \int_0^T (\nabla \mathbf{v}(t), \nabla \mathbf{w}) \psi(t) dt + \int_0^T ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) \psi(t) dt + \\ + \int_0^T (\beta_0 \theta(t) \mathbf{g}, \mathbf{w}) \psi(t) dt = (\mathbf{v}(0), \mathbf{w}) \psi(0). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Из (2.74), (2.75) вытекает, что $(\mathbf{v}(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{w}) = 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}_0$, поэтому $\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0$.

Отсюда следует, что тройка $\{\theta, \varphi, \mathbf{v}\}$, $\theta = \theta(\mathbf{v})$, $\varphi = \varphi(\mathbf{v})$, является решением задачи (2.41)–(2.45).

Теорема 2.7. Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует решение задачи (2.41)–(2.45).

2.2.5. Единственность решения

Для анализа условий единственности решения предположим, что выполняются следующие условия:

$$(iii') \mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}_0; \quad (iv) \Gamma \in C^2.$$

При выполнении условия (iv) для любой функции $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ справедливо неравенство [27, лемма 3.8, с. 250]:

$$\|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\| \leq C_1 \|\nabla \mathbf{u}\|^{3/2} \|A\mathbf{u}\|^{1/2}. \quad (2.76)$$

Далее через λ_1 обозначаем минимальное собственное значение оператора Стокса.

Теорема 2.8. Пусть выполняются условия (i), (ii), (iii'), (iv). Если

$$T < \frac{\nu^3}{2C_2 k^2},$$

где

$$C_2 = \frac{27C_1^4}{2}, \quad C_3 = 2\beta_0^2 |\mathbf{g}|^2 M^2 |\Omega|, \quad k = \max \left\{ \frac{C_3}{\nu^2 \lambda_1}, \|\nabla \mathbf{v}_0\|^2 \right\},$$

то существует решение $\{\theta, \varphi, \mathbf{v}\}$ задачи (2.41)–(2.45) такое, что $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$. В классе $W \times W \times (\mathbf{W}_1 \cap L^\infty(0, T; \mathbf{V}_0))$ решение единственно.

Доказательство. Рассмотрим галеркинские приближения, как в предыдущем параграфе. Умножим (2.66) на $\lambda_i c_i(t)$, просуммируем по i от 1 до n и воспользуемся тем, что $A\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i$. Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d\|\nabla \mathbf{v}_n\|^2}{dt} + \nu \|A\mathbf{v}_n\|^2 + ((\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n + \beta_0 \theta_n \mathbf{g}, A\mathbf{v}_n) = 0.$$

Учитывая неравенство (2.76), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\|\nabla \mathbf{v}_n\|^2}{dt} + \nu \|A\mathbf{v}_n\|^2 &\leq C_1 \|\nabla \mathbf{v}_n\|^{3/2} \|A\mathbf{v}_n\|^{3/2} + \beta_0 |\mathbf{g}| \|\theta_n\| \|A\mathbf{v}_n\| \leq \\ &\leq \frac{\nu}{4} \|A\mathbf{v}_n\|^2 + \frac{27C_1^4}{4\nu^3} \|\nabla \mathbf{v}_n\|^6 + \frac{\nu}{4} \|A\mathbf{v}_n\|^2 + \frac{1}{\nu} \beta_0^2 |\mathbf{g}|^2 M^2 |\Omega|. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\|A\mathbf{v}_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 c_i^2 \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 = \lambda_1 \|\nabla \mathbf{v}_n\|^2,$$

получаем

$$\frac{d\|\nabla \mathbf{v}_n\|^2}{dt} + \nu \lambda_1 \|\nabla \mathbf{v}_n\|^2 \leq \frac{27C_1^4}{2\nu^3} \|\nabla \mathbf{v}_n\|^6 + \frac{2}{\nu} \beta_0^2 |\mathbf{g}|^2 M^2 |\Omega|.$$

Введем обозначение $y(t) = \|\nabla \mathbf{v}_n(t)\|^2$. Тогда приходим к неравенству

$$y' + \nu \lambda_1 y \leq \frac{C_2}{\nu^3} y^3 + \frac{C_3}{\nu}, \quad y(0) = \|\nabla \mathbf{v}_{n0}\|^2.$$

Положим $z(t) = \max\{y(t), k\}$. Заметим, что $z'(t) = y'(t)$, если $y(t) > k$, и $z'(t) = 0$, если $y(t) \leq k$. Поскольку $\|\nabla \mathbf{v}_{n0}\| \leq \|\nabla \mathbf{v}_0\|$, то $z(0) = k$. Таким образом, получаем неравенство:

$$z' \leq \frac{C_2}{\nu^3} z^3, \quad z(0) = k.$$

Отсюда следует, что

$$\|\nabla \mathbf{v}_n(t)\|^2 \leq z(t) \leq \left(\frac{1}{k^2} - \frac{2C_2 T}{\nu^3} \right)^{-1/2},$$

причем выражение в скобках положительно и не зависит от n . Следовательно, последовательность \mathbf{v}_n ограничена в $L^\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$, и предельная функция \mathbf{v} принадлежит $L^\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$.

Докажем единственность. Пусть $\{\mathbf{v}_i, \theta_i, \varphi_i\}$, $\mathbf{v}_i \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}_0)$, $i = 1, 2$, — два решения задачи (2.41)–(2.45). Заметим, что $(\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \in L^2(0, T; \mathbf{V}'_0)$, так как

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i\|_{L^2(0, T; \mathbf{V}'_0)} &= \sup_{\|\mathbf{w}\|_{L^2(0, T; \mathbf{V}_0)}=1} \int_0^T ((\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i, \mathbf{w}) dt, \\ \int_0^T ((\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i, \mathbf{w}) dt &\leq \int_0^T \|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}_i\| \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} dt \leq \\ &\leq C \|\mathbf{v}_i\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{V}_0)} \|\mathbf{v}_i\|_{L^2(0, T; \mathbf{V}_0)} \|\mathbf{w}\|_{L^2(0, T; \mathbf{V}_0)}. \end{aligned}$$

Поэтому $\mathbf{v}'_i \in L^2(0, T; \mathbf{V}'_0)$. Обозначим $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Имеем:

$$\mathbf{v}' + \nu A \mathbf{v} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 + \beta_0 \theta \mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = 0.$$

Умножим это уравнение скалярно на \mathbf{v} и проинтегрируем по t :

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v}(t)\|^2 + \int_0^t (\nu\|\nabla\mathbf{v}\|^2 + ((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_2, \mathbf{v}) + (\beta_0\theta\mathbf{g}, \mathbf{v})) d\tau = 0. \quad (2.77)$$

Применяя мультипликативное неравенство [27, лемма 3.5, с. 236]

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leq C_4\|\mathbf{v}\|^{1/4}\|\nabla\mathbf{v}\|^{3/4},$$

получаем

$$|((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_2, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^2\|\nabla\mathbf{v}_2\| \leq C_4^2C_5\|\mathbf{v}\|^{1/2}\|\nabla\mathbf{v}\|^{3/2} \leq \nu\|\nabla\mathbf{v}\|^2 + C_6\|\mathbf{v}\|^2,$$

где $C_5 = \|\mathbf{v}_2\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{V}_0)}$. В силу леммы 2.3 имеем $\|\theta\|_{C([0,t];H)} \leq C\|\mathbf{v}\|_{L^2(0,t;\mathbf{H}_0)}$; можно считать, что C не зависит от t . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^t |(\beta_0\theta\mathbf{g}, \mathbf{v})| d\tau &\leq \beta_0|\mathbf{g}| \int_0^t \|\theta\|\|\mathbf{v}\| d\tau \leq \beta_0|\mathbf{g}|\|\theta\|_{L^2(0,t;H)}\|\mathbf{v}\|_{L^2(0,t;\mathbf{H}_0)} \leq \\ &\leq C_7\|\mathbf{v}\|_{L^2(0,t;\mathbf{H}_0)}^2. \end{aligned}$$

Из (2.77) получаем, что

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2 \leq 2(C_6 + C_7) \int_0^t \|\mathbf{v}(\tau)\|^2 d\tau.$$

По лемме Гронуолла имеем $\mathbf{v} = 0$, т.е. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. ■

Глава 3

Устойчивость стационарных решений

3.1. Асимптотическая устойчивость в однородной модели

Стационарное решение $\{\theta_s, \varphi_s\}$ эволюционной системы (2.1)–(2.3) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\|\theta_0 - \theta_s\|_{L^p(\Omega)} < \delta$, $\|\varphi_0 - \varphi_s\|_{L^p(\Omega)} < \delta$, то $\|\theta(t) - \theta_s\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$, $\|\varphi(t) - \varphi_s\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ для всех $t > 0$, где $\{\theta, \varphi\}$ — решение системы (2.1)–(2.4). Стационарное решение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и, кроме того, существует $\delta > 0$ такое, что если $\|\theta_0 - \theta_s\|_{L^p(\Omega)} < \delta$, $\|\varphi_0 - \varphi_s\|_{L^p(\Omega)} < \delta$, то $\|\theta(t) - \theta_s\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, $\|\varphi(t) - \varphi_s\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Асимптотическая устойчивость называется глобальной, если можно положить $\delta = +\infty$.

В настоящем разделе получено достаточное условие асимптотической устойчивости стационарного решения однородной (без источников тепла и излучения) модели, которое обеспечивается малым разбросом значений стационарного температурного поля.

Нестационарная однородная модель сложного теплообмена имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = 0, \quad (3.1)$$

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (3.2)$$

$$a \frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (3.3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (3.4)$$

Будем предполагать, что функция θ_b и поле скоростей \mathbf{v} не зависят от времени и выполняются условия:

- (i) $\mathbf{v} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$;
- (ii) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $\beta_0, \gamma_0 = \text{const}$, $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$;

(iii) $\beta + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq c_0 > 0$, $c_0 = \text{const}$;

(iv) $0 \leq \theta_0, \varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$.

Определим операторы $A_{1,2}: V \rightarrow V'$ и функционалы $f_{1,2} \in V'$, используя следующие равенства, справедливые для любых $\theta, \varphi, v \in V$:

$$\begin{aligned} (A_1\theta, v) &= a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v \, d\Gamma, & (A_2\varphi, v) &= \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma\varphi v \, d\Gamma, \\ (f_1, v) &= \int_{\Gamma} \beta\theta_b v \, d\Gamma, & (f_2, v) &= \int_{\Gamma} \gamma\theta_b^4 v \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Определение 3.1. Пара $\{\theta, \varphi\} \in W \times W$ называется слабым решением задачи (3.1)–(3.4), если

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f_1 \quad \text{н.в. на } (0, T), \quad (3.5)$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = f_2 \quad \text{н.в. на } (0, T), \quad (3.6)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (3.7)$$

В силу теорем 2.3, 2.4, 2.5 справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия (i)–(iv). Существует единственное решение задачи (3.5)–(3.7), причем $0 \leq \theta \leq M$, $0 \leq \varphi \leq M^4$, где $M = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/4}\}$.

Через $\{\theta_s, \varphi_s\} \in V \times V$ обозначим стационарное состояние эволюционной системы (3.5), (3.6), которое является решением задачи

$$A_1\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f_1, \quad (3.8)$$

$$A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = f_2. \quad (3.9)$$

Теорема 3.2. [125] Пусть выполняются условия (i)–(iii). Существует единственное решение $\{\theta_s, \varphi_s\}$ задачи (3.8), (3.9), причем $0 \leq \theta_s \leq \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}$, $0 \leq \varphi_s \leq \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}^4$.

Для анализа устойчивости рассмотрим функции $\{\theta, \varphi\}$, являющиеся решением задачи (3.5)–(3.7) на промежутке $(0, +\infty)$. Положим $\zeta = \theta - \theta_s$, $\xi = \varphi - \varphi_s$.

Тогда, используя (3.8), (3.9) и учитывая, что $\theta \geq 0$, получаем

$$\zeta' + A_1\zeta + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta + b\kappa_a(g(\zeta, \theta_s) - \xi) = 0, \quad (3.10)$$

$$\mu\xi' + A_2\xi + \kappa_a(\xi - g(\zeta, \theta_s)) = 0, \quad (3.11)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0 \equiv \theta_0 - \theta_s, \quad \xi|_{t=0} = \xi_0 \equiv \varphi_0 - \varphi_s. \quad (3.12)$$

Здесь $g(\zeta, \theta_s) = (\zeta + \theta_s)^4 - \theta_s^4$.

Применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем

$$g(\zeta, \theta_s) = g(0, \theta_s) + g'_\zeta(0, \theta_s)\zeta + \frac{1}{2}g''_{\zeta\zeta}(s, \theta_s)\zeta^2,$$

где s находится между 0 и ζ . Поскольку $g'_\zeta(0, \theta_s) = 4\theta_s^3$, $g''_{\zeta\zeta}(s, \theta_s) = 12(s + \theta_s)^2$, $0 \leq \theta_s \leq M$, $0 \leq \theta_s + \zeta \leq M$, то

$$g(\zeta, \theta_s) = 4\theta_s^3\zeta + h(\zeta, \theta_s)\zeta^2, \quad \text{где } 0 \leq h(\zeta, \theta_s) \leq 6M^2.$$

Обозначим $f(x) = 4\theta_s^3(x)$. Пусть $0 \leq M_1 = \text{ess inf } f$, $M_2 = \text{ess sup } f$. Покажем, что если значение $M_2 - M_1$ достаточно мало, то стационарное состояние $\{\theta_s, \varphi_s\}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Умножим скалярно (3.10) на $f_0\zeta$, (3.11) на $b\xi$ и сложим полученные равенства. Постоянная $f_0 > 0$ будет выбрана позже. С учетом леммы 1.32 будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{f_0}{2} \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 + f_0(A_1\zeta, \zeta) + f_0(\mathbf{v} \cdot \nabla \zeta, \zeta) + \frac{\mu b}{2} \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 + b(A_2\xi, \xi) + \\ & + b\kappa_a(f\zeta - \xi + h(\zeta, \theta_s)\zeta^2, f_0\zeta - \xi) = 0 \quad \text{п.в. на } (0, +\infty). \end{aligned}$$

Используя равенство $(\mathbf{v} \cdot \nabla \zeta, \zeta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \zeta^2 d\Gamma$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{f_0}{2} \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 + f_0 a \|\nabla \zeta\|^2 + f_0 \int_{\Gamma} \left(\beta + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) \zeta^2 d\Gamma + \frac{\mu b}{2} \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 + b\alpha \|\nabla \xi\|^2 + \\ & + b \int_{\Gamma} \gamma \xi^2 d\Gamma + b\kappa_a \int_{\Omega} (f\zeta - \xi)(f_0\zeta - \xi) dx \leq 6M^2 b\kappa_a \left(f_0 \int_{\Omega} |\zeta|^3 dx + \int_{\Omega} \zeta^2 |\xi| dx \right). \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} k_1 &= \inf_{v \in V, \|v\|=1} \left(a \|\nabla v\|^2 + \int_{\Gamma} \left(\beta + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) v^2 d\Gamma \right), \\ k_2 &= \inf_{v \in V, \|v\|=1} \left(\alpha \|\nabla v\|^2 + \int_{\Gamma} \gamma v^2 d\Gamma \right), \\ k_3 &= \inf_{v \in V, \|v\|_{L^6(\Omega)}=1} \left(a \|\nabla v\|^2 + \int_{\Gamma} \left(\beta + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) v^2 d\Gamma \right). \end{aligned}$$

Указанные постоянные положительны в силу условия (iii), леммы 1.27 и непрерывности вложений $V \subset H$, $V \subset L^6(\Omega)$.

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $4/3$ и 4 , получим

$$\int_{\Omega} |\zeta|^3 dx = \int_{\Omega} |\zeta|^{3/2} |\zeta|^{3/2} dx \leq \left(\int_{\Omega} \zeta^6 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \zeta^2 dx \right)^{3/4} = \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^{3/2} \|\zeta\|^{3/2}.$$

Аналогично применим неравенство Гёльдера с показателями 4 , 4 , 2 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \zeta^2 |\xi| dx &= \int_{\Omega} |\zeta|^{1/2} |\zeta|^{3/2} |\xi| dx \leq \left(\int_{\Omega} \zeta^6 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \zeta^2 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \xi^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^{3/2} \|\zeta\|^{1/2} \|\xi\|. \end{aligned}$$

Далее применим неравенство Юнга с показателями $4/3$ и 4 , в котором $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\zeta|^3 dx &\leq \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^{3/2} \|\zeta\|^{3/2} = \varepsilon^{3/4} \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^{3/2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{3/4}} \|\zeta\|^{3/2} \leq \\ &\leq \frac{3}{4} \varepsilon \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon^3} \|\zeta\|^6, \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \zeta^2 |\xi| dx \leq \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^{3/2} \|\zeta\|^{1/2} \|\xi\| \leq \frac{3}{4} \varepsilon \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon^3} \|\zeta\|^2 \|\xi\|^4. \quad (3.14)$$

Выберем параметр $\rho \in (0, 1)$ и воспользуемся оценкой

$$a \|\nabla \zeta\|^2 + \int_{\Gamma} \left(\beta + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) \zeta^2 d\Gamma \geq (1 - \rho) k_1 \|\zeta\|^2 + \rho k_3 \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_0 \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 + \mu b \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 + 2(1 - \rho) f_0 k_1 \|\zeta\|^2 + 2\rho f_0 k_3 \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^2 + 2bk_2 \|\xi\|^2 + \\ + 2b\kappa_a \int_{\Omega} (f\zeta - \xi)(f_0\zeta - \xi) dx \leq \\ \leq 3M^2 b\kappa_a \left(3(f_0 + 1)\varepsilon \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^2 + \frac{f_0}{\varepsilon^3} \|\zeta\|^6 + \frac{1}{\varepsilon^3} \|\zeta\|^2 \|\xi\|^4 \right). \end{aligned}$$

Поэтому если

$$\varepsilon \leq \varepsilon_1(\rho, f_0) \equiv \frac{2k_3 f_0 \rho}{9M^2 b\kappa_a (f_0 + 1)},$$

то

$$\begin{aligned} f_0 \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 + \mu b \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 + 2(1 - \rho) f_0 k_1 \|\zeta\|^2 + 2bk_2 \|\xi\|^2 + \\ + 2b\kappa_a \int_{\Omega} (f\zeta - \xi)(f_0\zeta - \xi) dx \leq C (\|\zeta\|^6 + \|\zeta\|^2 \|\xi\|^4), \quad (3.15) \end{aligned}$$

где $C = C(\varepsilon, f_0) = 3M^2 b\kappa_a \max\{f_0, 1\}/\varepsilon^3$.

Пусть C_1, C_2 — положительные постоянные такие, что

$$b\kappa_a C_1 < (1 - \rho)k_1, \quad \kappa_a C_2 < k_2. \quad (3.16)$$

Запишем неравенство (3.15) в виде

$$\begin{aligned} f_0 \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 + \mu b \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 + 2f_0((1 - \rho)k_1 - b\kappa_a C_1) \|\zeta\|^2 + 2b(k_2 - \kappa_a C_2) \|\xi\|^2 + \\ + 2b\kappa_a \int_{\Omega} (f_0 C_1 \zeta^2 + C_2 \xi^2 + (f\zeta - \xi)(f_0\zeta - \xi)) dx \leq C (\|\zeta\|^6 + \|\zeta\|^2 \|\xi\|^4). \quad (3.17) \end{aligned}$$

Для неотрицательности интеграла в (3.17) достаточно, чтобы квадратичное выражение под знаком интеграла

$$f_0 C_1 \zeta^2 + C_2 \xi^2 + (f\zeta - \xi)(f_0\zeta - \xi) = f_0(f + C_1)\zeta^2 + (C_2 + 1)\xi^2 - (f + f_0)\zeta\xi$$

было неотрицательным при любых ζ, ξ и для любого $f \in [M_1, M_2]$. Достаточное условие неотрицательности при любых ζ, ξ имеет вид

$$(f + f_0)^2 - 4f_0(f + C_1)(C_2 + 1) \leq 0,$$

или

$$f_0^2 - 2[(2C_2 + 1)f + 2C_1(C_2 + 1)]f_0 + f^2 \leq 0. \quad (3.18)$$

Левая часть неравенства (3.18) выпукла как функция переменной f . Поэтому неравенство (3.18) выполняется для любого числа $f \in [M_1, M_2]$, если

$$f_0^2 - 2[(2C_2 + 1)M_i + 2C_1(C_2 + 1)]f_0 + M_i^2 \leq 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.19)$$

Квадратный трехчлен в i -м неравенстве имеет дискриминант (деленный на 4)

$$D_i = [(2C_2 + 1)M_i + 2C_1(C_2 + 1)]^2 - M_i^2 = 4(C_2 + 1)(M_i + C_1)(C_2M_i + C_1(C_2 + 1)).$$

Поскольку $D_i > 0$, то множество решений каждого неравенства непусто. Пусть $[F_i^{\min}, F_i^{\max}]$ — решение i -го неравенства в (3.19),

$$F_i^{\min} = (2C_2 + 1)M_i + 2C_1(C_2 + 1) - \sqrt{D_i}, \quad F_i^{\max} = (2C_2 + 1)M_i + 2C_1(C_2 + 1) + \sqrt{D_i}.$$

Заметим, что $F_1^{\min} < F_2^{\max}$, так как

$$F_2^{\max} - F_1^{\min} = (2C_2 + 1)(M_2 - M_1) + \sqrt{D_1} + \sqrt{D_2} > 0.$$

Поэтому промежутки $[F_1^{\min}, F_1^{\max}]$ и $[F_2^{\min}, F_2^{\max}]$ имеют хотя бы одну общую точку, если $F_2^{\min} \leq F_1^{\max}$, и тогда $[F_2^{\min}, F_1^{\max}]$ — решение системы (3.19).

Отметим, что $F_1^{\max} > 0$. Докажем, что $F_2^{\min} \geq 0$, причем $F_2^{\min} = 0$, только если $M_2 = 0$. Воспользуемся неравенством $2\sqrt{ab} \leq a + b$, $a, b \geq 0$, равенство достигается только в случае $a = b$. Получим

$$\begin{aligned} F_2^{\min} &= (2C_2 + 1)M_2 + 2C_1(C_2 + 1) - 2\sqrt{(C_2 + 1)(M_2 + C_1)(C_2M_2 + C_1(C_2 + 1))} \geq \\ &\geq (2C_2 + 1)M_2 + 2C_1(C_2 + 1) - (C_2 + 1)(M_2 + C_1) - (C_2M_2 + C_1(C_2 + 1)) = 0, \end{aligned}$$

равенство достигается в случае

$$(C_2 + 1)(M_2 + C_1) = C_2M_2 + C_1(C_2 + 1) \Leftrightarrow M_2 = 0.$$

Таким образом, система неравенств (3.19) имеет решение $f_0 > 0$, если

$$F_2^{\min} = (2C_2 + 1)M_2 + 2C_1(C_2 + 1) - \sqrt{D_2} \leq (2C_2 + 1)M_1 + 2C_1(C_2 + 1) + \sqrt{D_1} = F_1^{\max}.$$

Поэтому при выполнении условия

$$(2C_2 + 1)(M_2 - M_1) \leq \sqrt{D_1} + \sqrt{D_2} \quad (3.20)$$

интеграл в (3.17) будет неотрицательным при любых $f \in [M_1, M_2]$, ζ, ξ при любом выборе $f_0 \in [F_2^{\min}, F_1^{\max}]$. Далее в качестве f_0 выберем, например, наибольшее возможное значение F_1^{\max} .

Можно получить более простые достаточные условия неотрицательности интеграла в (3.17). Для этого оценим D_i :

$$D_i = 4 \left[C_2(C_2 + 1)M_i^2 + C_1(C_2 + 1)(2C_2 + 1)M_i + C_1^2(C_2 + 1)^2 \right],$$

воспользуемся оценкой

$$2C_2 + 1 = C_2 + (C_2 + 1) \geq 2\sqrt{C_2(C_2 + 1)},$$

получим

$$\begin{aligned} D_i &\geq 4 \left[C_2(C_2 + 1)M_i^2 + 2M_i C_1(C_2 + 1)\sqrt{C_2(C_2 + 1)} + C_1^2(C_2 + 1)^2 \right] = \\ &= 4 \left(\sqrt{C_2(C_2 + 1)}M_i + C_1(C_2 + 1) \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для выполнения (3.20) достаточно, чтобы

$$(2C_2 + 1)(M_2 - M_1) \leq 2\sqrt{C_2(C_2 + 1)}(M_1 + M_2) + 4C_1(C_2 + 1).$$

Воспользовавшись неравенством $\sqrt{C_2(C_2 + 1)} \geq C_2$, получим другое достаточное условие неотрицательности интеграла:

$$M_2 - M_1 \leq 4(C_2 M_1 + C_1 C_2 + C_1). \quad (3.21)$$

Докажем, что если выполняется неравенство

$$M_2 - M_1 < \frac{4}{\kappa_a} \left(k_2 M_1 + \frac{k_1 k_2}{b \kappa_a} + \frac{k_1}{b} \right), \quad (3.22)$$

то существуют постоянные $C_1, C_2, \rho > 0$, удовлетворяющие (3.16), такие, что выполняется условие (3.21). Введем функцию

$$F(C_1, C_2) = 4(C_2 M_1 + C_1 C_2 + C_1).$$

Заметим, что

$$\lim_{\substack{C_1 \rightarrow k_1/b\kappa_a \\ C_2 \rightarrow k_2/\kappa_a}} F(C_1, C_2) = F\left(\frac{k_1}{b\kappa_a}, \frac{k_2}{\kappa_a}\right) = \frac{4}{\kappa_a} \left(k_2 M_1 + \frac{k_1 k_2}{b\kappa_a} + \frac{k_1}{b}\right).$$

Положим

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{\kappa_a} \left(k_2 M_1 + \frac{k_1 k_2}{b\kappa_a} + \frac{k_1}{b}\right) - (M_2 - M_1) > 0.$$

Тогда найдется $\delta_0 > 0$ такое, что при

$$\left|C_1 - \frac{k_1}{b\kappa_a}\right| < \delta_0, \quad \left|C_2 - \frac{k_2}{\kappa_a}\right| < \delta_0$$

имеем

$$F(C_1, C_2) > \frac{4}{\kappa_a} \left(k_2 M_1 + \frac{k_1 k_2}{b\kappa_a} + \frac{k_1}{b}\right) - \varepsilon_0,$$

то есть $M_2 - M_1 < F(C_1, C_2)$. Выберем C_1, C_2, ρ следующим образом:

$$C_1 = \frac{k_1}{b\kappa_a} - \frac{\delta_0}{2}, \quad C_2 = \frac{k_2}{\kappa_a} - \frac{\delta_0}{2}, \quad \rho = \min \left\{ \frac{b\kappa_a \delta_0}{4k_1}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Аналогичные условия на физические параметры и постоянные k_1, k_2 можно получить и для достаточного условия (3.20).

Вернемся к неравенству (3.17), в котором отбросим неотрицательный интеграл. Воспользовавшись неравенством $\|\zeta\|^2 \|\xi\|^4 \leq \|\zeta\|^6/3 + 2\|\xi\|^6/3$, получим

$$\begin{aligned} f_0 \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 + \mu b \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 + 2f_0((1-\rho)k_1 - b\kappa_a C_1) \|\zeta\|^2 + 2b(k_2 - \kappa_a C_2) \|\xi\|^2 &\leq \\ &\leq \frac{2C}{3} (2\|\zeta\|^6 + \|\xi\|^6). \end{aligned}$$

Пусть $p(t) = f_0 \|\zeta(t)\|^2 + \mu b \|\xi(t)\|^2$, $t \geq 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{2C}{3} (2\|\zeta\|^6 + \|\xi\|^6) &= \frac{2C}{3} \left(\frac{2}{f_0^3} (f_0 \|\zeta\|^2)^3 + \frac{1}{(\mu b)^3} (\mu b \|\xi\|^2)^3 \right) \leq \\ &\leq k_5 \left((f_0 \|\zeta\|^2)^3 + (\mu b \|\xi\|^2)^3 \right) \leq k_5 p^3, \end{aligned}$$

где $k_5 = \frac{2C}{3} \max \left\{ \frac{2}{f_0^3}, \frac{1}{(\mu b)^3} \right\}$. Следовательно,

$$p'(t) + 2k_4 p(t) \leq k_5 p^3(t), \quad t > 0, \quad (3.23)$$

где $k_4 = \min \{(1 - \rho)k_1 - b\kappa_a C_1, (k_2 - \kappa_a C_2)/\mu\}$.

Запишем неравенство (3.23) в виде

$$p'(t) + k_4 p(t) + k_5 p(t) (k_4/k_5 - p^2(t)) \leq 0. \quad (3.24)$$

Докажем, что если $p^2(0) < k_4/k_5$, то

$$p'(t) + k_4 p(t) \leq 0, \quad t > 0. \quad (3.25)$$

Для этого покажем, что если $p^2(0) < k_4/k_5$, то $p^2(t) < k_4/k_5$, $t \geq 0$.

Поскольку $\zeta, \xi \in C([0, T]; H)$, то функция $p(t)$ непрерывна. Докажем, что либо $p^2(t) < k_4/k_5$, $t \geq 0$, либо существует $t_0 > 0$ такое, что

$$p^2(t_0) = k_4/k_5, \quad p^2(t) < k_4/k_5, \quad t < t_0. \quad (3.26)$$

Предположим второй случай. Положим $t_0 = \sup\{t: p^2(t) < k_4/k_5\}$. Тогда если $t_0 < +\infty$, то существует последовательность $t_n \rightarrow t_0$: $p^2(t_n) < k_4/k_5$, тогда в силу непрерывности функции $p(t)$ имеем $p^2(t_0) \leq k_4/k_5$, и если $p^2(t_0) < k_4/k_5$, то существует $\delta > 0$ такое, что $p^2(t_0 + \delta) < k_4/k_5$, что противоречит определению t_0 . Итак, число t_0 удовлетворяет условиям (3.26). Из (3.24) вытекает, что на промежутке $(0, t_0)$ имеет место неравенство $p(t) \leq p(0)e^{-k_4 t}$, поэтому $p^2(t_0) < k_4/k_5$, что противоречит нашему предположению. А поскольку не существует $t_0 > 0$, удовлетворяющего условиям (3.26), то $p^2(t) < k_4/k_5$, $t \geq 0$.

Следовательно, из (3.25) получаем оценку асимптотической устойчивости:

$$p(t) \leq p(0)e^{-k_4 t}, \quad t > 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.3. Пусть выполняются условия (i)–(iv), $0 \leq M_1 \leq 4\theta_s^3 \leq M_2$, справедливо неравенство (3.22) и при этом

$$f_0 \|\theta_0 - \theta_s\|^2 + \mu b \|\varphi_0 - \varphi_s\|^2 < (k_4/k_5)^{1/2},$$

где $\{\theta_s, \varphi_s\}$ — решение стационарной системы (3.8), (3.9). Тогда для решения $\{\theta, \varphi\}$ задачи (3.5)–(3.7) справедлива оценка

$$f_0 \|\theta(t) - \theta_s\|^2 + \mu b \|\varphi(t) - \varphi_s\|^2 \leq (f_0 \|\theta_0 - \theta_s\|^2 + \mu b \|\varphi_0 - \varphi_s\|^2) e^{-k_4 t}, \quad t > 0.$$

3.2. Устойчивость по Ляпунову в неоднородной модели

Целью настоящего раздела является доказательство устойчивости по Ляпунову стационарных решений неоднородной нестационарной модели (2.1)–(2.4).

Предположим, что $\mathbf{v} = 0$ и выполняются следующие условия:

- (i) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $\beta_0, \gamma_0 = \text{const}$, $\theta_b \in L^8(\Gamma)$;
- (ii) $f \in L^{15/11}(\Omega)$, $g \in L^{6/5}(\Omega)$;
- (iii) $\theta_0 \in L^5(\Omega)$, $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$.

В силу теорем 2.2, 2.3, 2.4 для любого $T > 0$ существует единственная пара $\{\theta, \varphi\} \in W \times W$ такая, что

$$\theta' + A_1 \theta + b \kappa_a(h_4(\theta) - \varphi) = f + f_1 \quad \text{п.в. на } (0, T), \quad (3.27)$$

$$\mu \varphi' + A_2 \varphi + \kappa_a(\varphi - h_4(\theta)) = g + g_1 \quad \text{п.в. на } (0, T), \quad (3.28)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad (3.29)$$

и, кроме того, $h_4(\theta) \in L^2(Q)$.

Пусть $\{\theta_s, \varphi_s\}$ — стационарное решение системы (3.27), (3.28), которое является решением системы уравнений

$$A_1 \theta + b \kappa_a(h_4(\theta) - \varphi) = f + f_1, \quad (3.30)$$

$$A_2 \varphi + \kappa_a(\varphi - h_4(\theta)) = g + g_1. \quad (3.31)$$

Задача (3.30), (3.31) имеет единственное решение [144].

Для исследования устойчивости стационарного решения рассмотрим пару $\{\theta, \varphi\}$, которая является решением задачи (3.27)–(3.29) на интервале $(0, +\infty)$.

Положим $\zeta = \theta - \theta_s$, $\xi = \varphi - \varphi_s$, тогда

$$\zeta' + A_1\zeta + b\kappa_a(q(\zeta, x) - \xi) = 0, \quad \mu\xi' + A_2\xi + \kappa_a(\xi - q(\zeta, x)) = 0, \quad (3.32)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0 = \theta_0 - \theta_s, \quad \xi|_{t=0} = \xi_0 = \varphi_0 - \varphi_s. \quad (3.33)$$

Здесь $q(\zeta, x) = h_4(\theta_s(x) + \zeta) - h_4(\theta_s(x))$.

Для любого $\varepsilon > 0$ определим функцию $r_\varepsilon(s) = s/|s|$, если $|s| \geq \varepsilon$, $r_\varepsilon(s) = s/\varepsilon$, если $|s| < \varepsilon$. Также введем функцию

$$z_\varepsilon(s) = \begin{cases} -\varepsilon/2 - s, & s < -\varepsilon, \\ s^2/2\varepsilon, & |s| \leq \varepsilon, \\ -\varepsilon/2 + s, & s > \varepsilon. \end{cases}$$

Заметим, что $z'_\varepsilon(s) = r_\varepsilon(s)$.

Лемма 3.1. Пусть $y \in W$, $\varepsilon > 0$. Тогда $r_\varepsilon(y) \in L^2(0, T; V)$,

$$\int_0^t (y'(\tau), r_\varepsilon(y(\tau))) d\tau = \int_\Omega z_\varepsilon(y(t)) dx - \int_\Omega z_\varepsilon(y(0)) dx, \quad t \in [0, T].$$

Доказательство. Пространство $H^1(Q)$ плотно в W [130, с. 423], поэтому существует последовательность $y_j \in H^1(Q)$, $y_j \rightarrow y$ в W . Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_0^t (y'_j, r_\varepsilon(y_j)) d\tau = \int_\Omega \int_0^t (z_\varepsilon(y_j))' d\tau dx = \int_\Omega z_\varepsilon(y_j(t)) dx - \int_\Omega z_\varepsilon(y_j(0)) dx. \quad (3.34)$$

Заметим, что $r_\varepsilon(y_j) \rightarrow r_\varepsilon(y)$ в $L^2(0, T; H)$, поскольку

$$|r_\varepsilon(y_j) - r_\varepsilon(y)| \leq \frac{1}{\varepsilon} |y_j - y|, \quad \int_0^T \|r_\varepsilon(y_j) - r_\varepsilon(y)\|^2 dt \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \|y_j - y\|^2 dt \rightarrow 0.$$

Последовательность $r_\varepsilon(y_j)$ ограничена в $L^2(0, T; V)$, так как $\nabla(r_\varepsilon(y_j)) = r'_\varepsilon(y_j) \nabla y_j$ и

$$\int_0^T \|\nabla(r_\varepsilon(y_j))\|^2 dt = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_{|y_j| < \varepsilon} |\nabla y_j|^2 dx dt \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \|\nabla y_j\|^2 dt.$$

Следовательно, $r_\varepsilon(y_j) \rightharpoonup r_\varepsilon(y)$ слабо в $L^2(0, T; V)$. Таким образом,

$$\int_0^t (y'_j, r_\varepsilon(y_j)) d\tau \rightarrow \int_0^t (y', r_\varepsilon(y)) d\tau.$$

Вложение $W \subset C([0, T]; H)$ непрерывно [130, с. 422], поэтому имеет смысл след $y|_{t=t_0}$ и $y_j(t) \rightarrow y(t)$, $y_j(0) \rightarrow y(0)$ в H . Используя неравенство $|z_\varepsilon(y_j) - z_\varepsilon(y)| \leq |y_j - y|$, получаем, что $z_\varepsilon(y_j(t)) \rightarrow z_\varepsilon(y(t))$, $z_\varepsilon(y_j(0)) \rightarrow z_\varepsilon(y(0))$ в H .

Переходя к пределу в (3.34), получаем утверждение леммы. \blacksquare

Следующая теорема устанавливает устойчивость по Ляпунову стационарных решений модели (2.1)–(2.4).

Теорема 3.4. *Пусть выполняются условия (i)–(iii). Справедлива оценка устойчивости:*

$$\int_\Omega |\theta(t) - \theta_s| dx + b\mu \int_\Omega |\varphi(t) - \varphi_s| dx \leq \int_\Omega |\theta_0 - \theta_s| dx + b\mu \int_\Omega |\varphi_0 - \varphi_s| dx, \quad t > 0.$$

Доказательство. Из того, что $h_4(\theta) \in L^2(Q)$, вытекает, что $q(\zeta, x) \in L^1(Q)$. Умножая скалярно первое уравнение в (3.32) на $r_\varepsilon(\zeta)$ и второе уравнение в (3.32) на $br_\varepsilon(\xi)$, интегрируя полученные равенства по t и складывая их, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t & \left((\zeta', r_\varepsilon(\zeta)) + a(\nabla \zeta, r'_\varepsilon(\zeta) \nabla \zeta) + \int_\Gamma \beta \zeta r_\varepsilon(\zeta) d\Gamma + b\mu(\xi', r_\varepsilon(\xi)) + \right. \\ & \left. + b\alpha(\nabla \xi, r'_\varepsilon(\xi) \nabla \xi) + b \int_\Gamma \gamma \xi r_\varepsilon(\xi) d\Gamma + \right. \\ & \left. + b\kappa_a(q(\zeta, x) - \xi, r_\varepsilon(\zeta) - r_\varepsilon(\xi)) \right) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Заметим, что второе, третье, пятое и шестое слагаемые в (3.35) неотрицательны. Кроме того, $(q(\zeta, x) - \xi)(r_\varepsilon(\zeta) - r_\varepsilon(\xi)) \geq 0$, если $\zeta = 0$ или $\xi = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^t & \left((\zeta', r_\varepsilon(\zeta)) + b\mu(\xi', r_\varepsilon(\xi)) + \right. \\ & \left. + b\kappa_a \int_{\zeta, \xi \neq 0} (q(\zeta, x) - \xi)(r_\varepsilon(\zeta) - r_\varepsilon(\xi)) dx \right) d\tau \leq 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Перейдем в (3.36) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим первое слагаемое. По лемме 3.1

$$\int_0^t (\zeta'(\tau), r_\varepsilon(\zeta(\tau))) d\tau = \int_\Omega z_\varepsilon(\zeta(t)) dx - \int_\Omega z_\varepsilon(\zeta(0)) dx.$$

Поскольку $|z_\varepsilon(\zeta(t)) - |\zeta(t)|| \leq \varepsilon/2 \forall t$, то

$$\int_\Omega z_\varepsilon(\zeta(t)) dx \rightarrow \int_\Omega |\zeta(t)| dx, \quad \int_\Omega z_\varepsilon(\zeta(0)) dx \rightarrow \int_\Omega |\zeta(0)| dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^t (\zeta'(\tau), r_\varepsilon(\zeta(\tau))) d\tau \rightarrow \int_\Omega |\zeta(t)| dx - \int_\Omega |\zeta(0)| dx,$$

и аналогично

$$\int_0^t (\xi'(\tau), r_\varepsilon(\xi(\tau))) d\tau \rightarrow \int_\Omega |\xi(t)| dx - \int_\Omega |\xi(0)| dx.$$

Учитывая, что $r_\varepsilon(\zeta) \rightarrow \text{sign } \zeta$, $r_\varepsilon(\xi) \rightarrow \text{sign } \xi$ п.в. в Ω , и применяя теорему Лебега, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\zeta, \xi \neq 0} (q(\zeta, x) - \xi)(r_\varepsilon(\zeta) - r_\varepsilon(\xi)) dx d\tau &\rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^t \int_{\zeta, \xi \neq 0} (q(\zeta, x) - \xi)(\text{sign } \zeta - \text{sign } \xi) dx d\tau \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, переходя к пределу в (3.36) и отбрасывая неотрицательные слагаемые, получаем утверждение теоремы. ■

3.3. Вычислительные эксперименты

Вычислительные эксперименты показали существование наборов параметров, при которых достаточное условие устойчивости не выполняется, но при этом решение нестационарной задачи стабилизируется экспоненциально.

Рассмотрим одномерный аналог задачи (3.1)–(3.4), который моделирует процесс сложного теплообмена в плоскопараллельном слое толщиной L . Предполагается, что в плоскостях, параллельных границам слоя, физические поля

постоянны, и поэтому они зависят от одной пространственной переменной. Соответствующая одномерная задача имеет вид

$$\theta_t - a\theta_{xx} + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad \frac{1}{c}\varphi_t - \alpha\varphi_{xx} + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0 \text{ на } (0, L), \quad (3.37)$$

$$-a\theta_x + \beta(\theta - \theta_b)|_{x=0} = 0, \quad a\theta_x + \beta(\theta - \theta_b)|_{x=L} = 0, \quad (3.38)$$

$$-\alpha\varphi_x + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{x=0} = 0, \quad \alpha\varphi_x + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{x=L} = 0, \quad (3.39)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (3.40)$$

Считаем, что $\beta(0) = \beta(L)$, $\gamma(0) = \gamma(L)$.

Перепишем достаточное условие (3.20) в виде

$$F(C_1, C_2) \equiv \sqrt{D_1(C_1, C_2)} + \sqrt{D_2(C_1, C_2)} - (2C_2 + 1)(M_2 - M_1) \geq 0. \quad (3.41)$$

Если выполняется неравенство $F\left(\frac{k_1}{b\kappa_a}, \frac{k_2}{\kappa_a}\right) > 0$, то существуют постоянные $C_1, C_2, \rho > 0$, удовлетворяющие (3.16), такие, что выполняется условие (3.41).

Поскольку $F(C_1, C_2) = F_{1\max} - F_{2\min}$, то из определения функций $F_{1\max}$, $F_{2\min}$ следует, что $F(C_1, C_2)$ не убывает по C_1, C_2 . Поэтому при выполнении неравенства $F\left(\frac{k_1}{b\kappa_a}, \frac{k_2}{\kappa_a}\right) < 0$ достаточное условие (3.41) не выполняется ни при каких постоянных $C_1, C_2, \rho > 0$, удовлетворяющих (3.16).

Пусть $\underline{k}_1 \leq k_1 \leq \overline{k}_1$, $\underline{k}_2 \leq k_2 \leq \overline{k}_2$. Тогда если $F\left(\frac{\underline{k}_1}{b\kappa_a}, \frac{\underline{k}_2}{\kappa_a}\right) > 0$, то достаточное условие (3.41) выполнено, а если $F\left(\frac{\overline{k}_1}{b\kappa_a}, \frac{\overline{k}_2}{\kappa_a}\right) < 0$, то достаточное условие (3.41) не выполнено. Отметим, что для проверки достаточного условия нужно найти постоянные M_1, M_2 , для нахождения которых нужно вычислить стационарное поле θ_s .

Оценим k_1, k_2 снизу. Рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^L x(u^2)' dx &= xu^2|_0^L - \int_0^L u^2 dx = Lu^2(L) - \|u\|^2, \\ \int_0^L (x-L)(u^2)' dx &= (x-L)u^2|_0^L - \int_0^L u^2 dx = Lu^2(0) - \|u\|^2 \end{aligned}$$

и сложим данные равенства:

$$\begin{aligned} 2\|u\|^2 &= L(u^2(0) + u^2(L)) - \int_0^L (2x - L)uu' dx \leq L(u^2(0) + u^2(L)) + L\|u\| \cdot \|u'\| \leq \\ &\leq L(u^2(0) + u^2(L)) + \|u\|^2 + \frac{L^2}{4}\|u'\|^2, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq \frac{L^2}{4}\|u'\|^2 + L(u^2(0) + u^2(L)) \leq \\ &\leq \max\left\{\frac{L^2}{4\alpha}, \frac{L}{\gamma}\right\} (\alpha\|u'\|^2 + \gamma(u^2(0) + u^2(L))). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Следовательно, $k_2 \geq \underline{k}_2 \equiv \min\left\{\frac{4\alpha}{L^2}, \frac{\gamma}{L}\right\}$, и аналогично $k_1 \geq \underline{k}_1 \equiv \min\left\{\frac{4a}{L^2}, \frac{\beta}{L}\right\}$.

Чтобы оценить k_2 сверху, рассмотрим функции $u_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L}$, $u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$, $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$. Поскольку $(A_2 u_1, u_1) = \frac{\pi^2 \alpha}{L^2}$, $(A_2 u_2, u_2) = \frac{2\gamma}{L}$, то $k_2 \leq \overline{k}_2 \equiv \min\left\{\frac{\pi^2 \alpha}{L^2}, \frac{2\gamma}{L}\right\}$, и аналогично $k_1 \leq \overline{k}_1 \equiv \min\left\{\frac{\pi^2 a}{L^2}, \frac{2\beta}{L}\right\}$.

Для вычислительных экспериментов положим $L = 50$ см и возьмем физические параметры из [125], термодинамические характеристики соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400 °С, максимальная температура $T_{\max} = 500$ °С, так что $a = 0.92$ см²/с, $b = 18.7$ см/с. Положим $\mathbf{v} = 0$, $\kappa = 0.1$ см⁻¹ ($\alpha = 3.3 \dots$ см), $\kappa_a = 0.01$ см⁻¹, $A = 0$, $\beta = 10$ см/с, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Обозначим $\theta_b(0) = \theta_{b1}$, $\theta_b(L) = \theta_{b2}$. Рассмотрим три варианта значений параметров:

- 1) $\gamma = 0.3$, $\theta_{b1} = 0.4$, $\theta_{b2} = 0.6$;
- 2) $\gamma = 0.01$, $\theta_{b1} = 0.4$, $\theta_{b2} = 0.6$;
- 3) $\gamma = 0.1$, $\theta_{b1} = 0.2$, $\theta_{b2} = 0.6$.

Для варианта 1 достаточное условие устойчивости выполняется, для вариантов 2 и 3 оно не выполняется.

На рисунках 3.1, 3.2 представлены графики стационарных полей θ_s , φ_s .

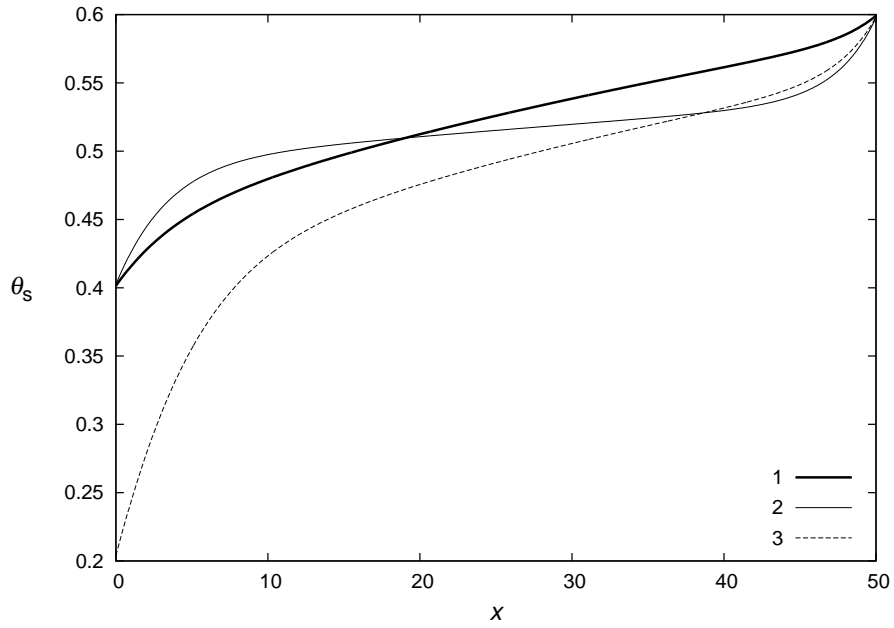


Рис. 3.1. Стационарное распределение температуры θ_s .

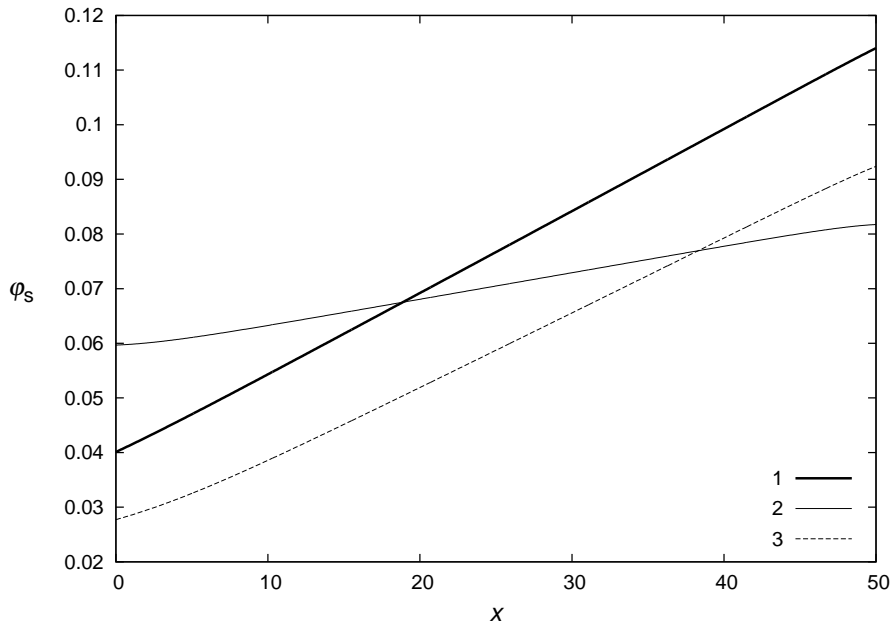


Рис. 3.2. Стационарное распределение интенсивности излучения φ_s .

В качестве начальных условий возьмем

$$\zeta_0(x) = \xi_0(x) = 0.1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right). \quad (3.43)$$

Проведем расчет на временном интервале $T = 30$ [с] на равномерной сетке с 1001 точкой по пространству и 1001 точкой по времени. Для дискретизации по времени используем неявную схему Эйлера.

На следующих рисунках изображены графики отклонений ζ , ξ в централь-

ном сечении слоя ($x = L/2$).

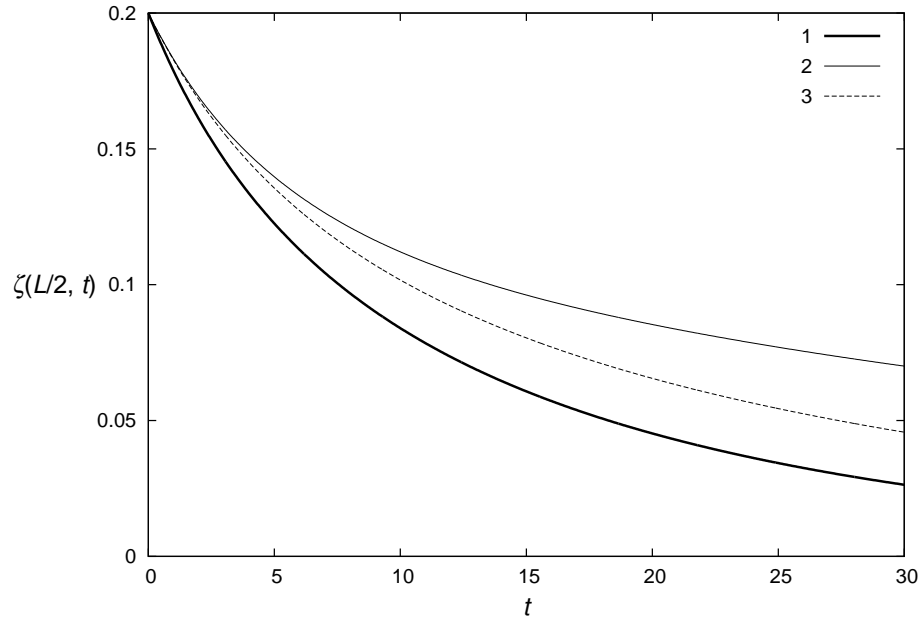


Рис. 3.3. Отклонение температуры (ζ) от стационарного распределения при $x = L/2$ для трех вариантов.

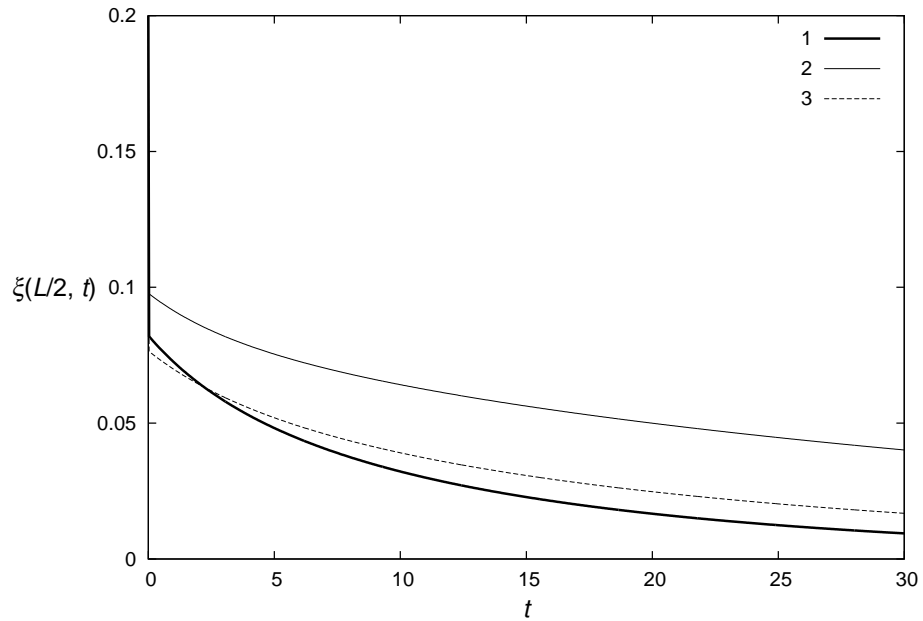


Рис. 3.4. Отклонение интенсивности излучения (ξ) от стационарного распределения при $x = L/2$ для трех вариантов.

При $t \approx 0$ происходит резкое изменение ξ с начального значения 0.2 до другого значения. В разд. 3.4 показано, что при большом значении скорости света поле интенсивности излучения становится в некоторый момент времени $t \approx 0$ близким к решению стационарного уравнения при $\theta := \theta_0$.

На рисунках 3.5, 3.6 представлены графики квадратов норм $\|\zeta\|^2$, $\|\xi\|^2$ в логарифмической шкале.

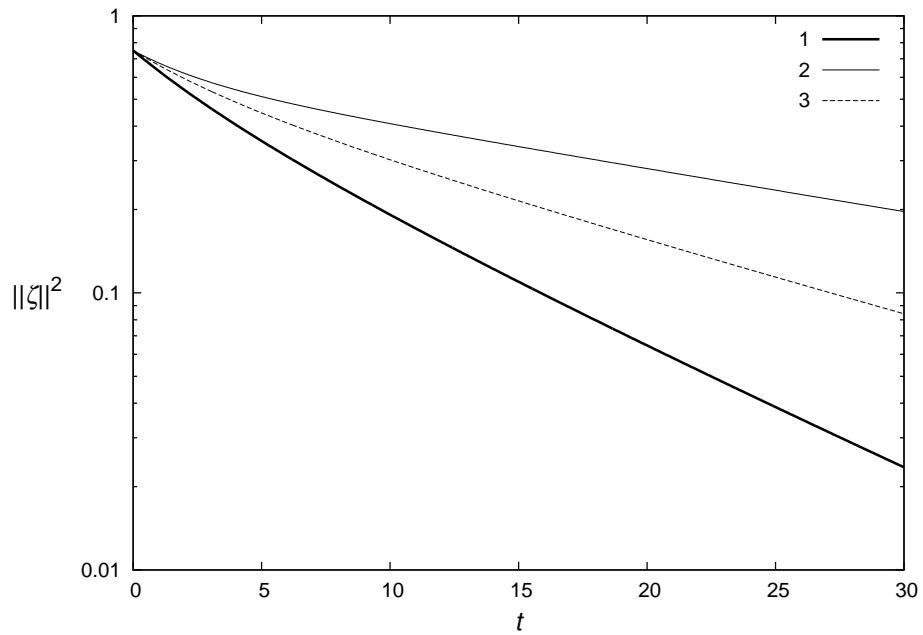


Рис. 3.5. Квадрат нормы $\|\zeta\|^2$ в зависимости от времени для трех вариантов.

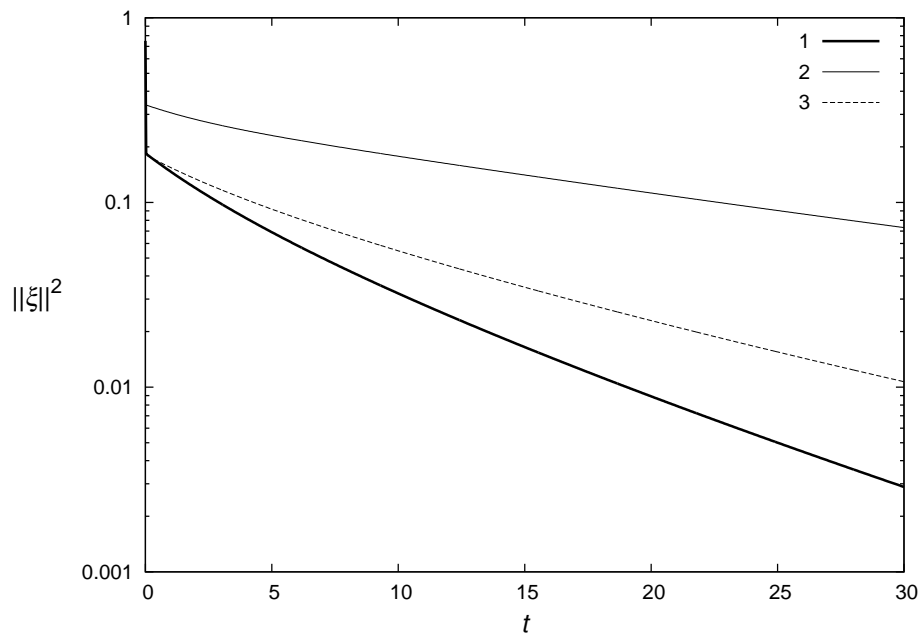


Рис. 3.6. Квадрат нормы $\|\xi\|^2$ в зависимости от времени для трех вариантов.

На графиках можно видеть, что при больших t логарифм от квадрата нормы близок к линейной функции, и это означает, что стабилизация решения происходит экспоненциально.

Найдем скорость стабилизации по формулам

$$\text{speed } \zeta = -\frac{\ln \|\zeta^M\|^2 - \ln \|\zeta^{M-1}\|^2}{\tau}, \quad \text{speed } \xi = -\frac{\ln \|\xi^M\|^2 - \ln \|\xi^{M-1}\|^2}{\tau},$$

где через ζ^k, ξ^k обозначено приближенное решение на k -м временном слое, M — номер последнего временного слоя. В таблице 3.1 приведены значения скорости стабилизации при $T = 100$.

Таблица 3.1. Скорость стабилизации при $T = 100$ для трех вариантов.

Вариант	speed ζ	speed ξ
1	0.0932	0.0937
2	0.0322	0.0342
3	0.0554	0.0569

Далее возьмем данные из примера 3 с начальными условиями (3.43) и будем варьировать по очереди каждый параметр и строить графики скорости стабилизации speed ζ при $T = 100$. Используем равномерную сетку с 1001 точкой по пространству и 1001 точкой по времени.

Следующий график показывает, что зависимость скорости стабилизации от параметра b близка к линейной функции.

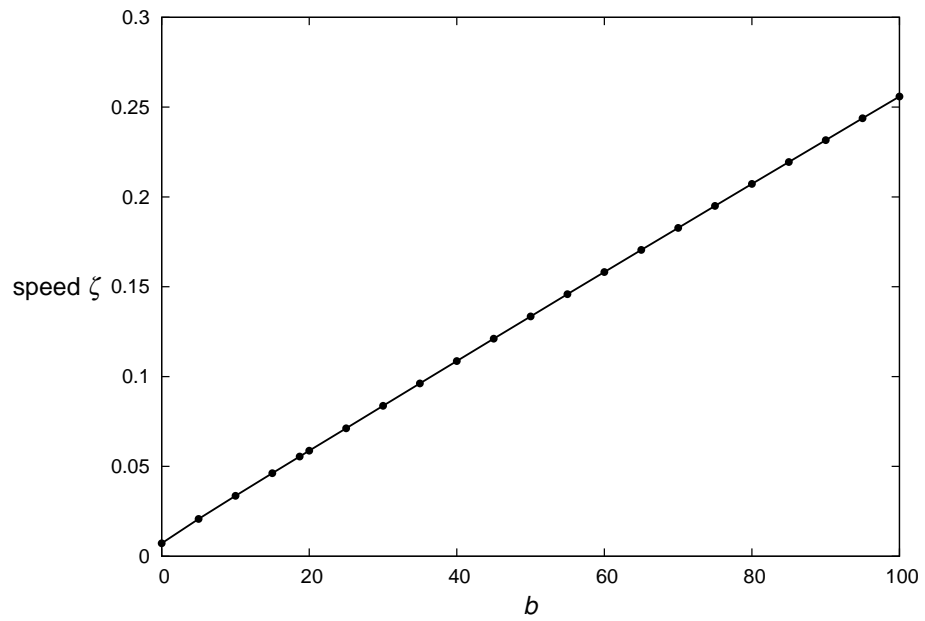


Рис. 3.7. Зависимость скорости стабилизации от b .

На следующем рисунке приведен график зависимости speed ζ от κ_a .

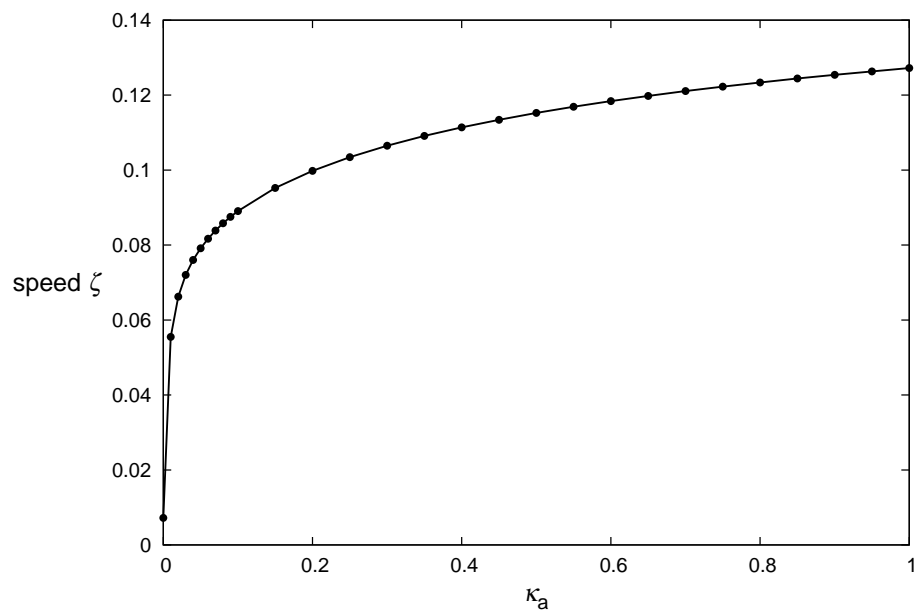


Рис. 3.8. Зависимость скорости стабилизации от κ_a .

Как показывает следующий график, при увеличении κ_a величина speed ζ практически стабилизируется.

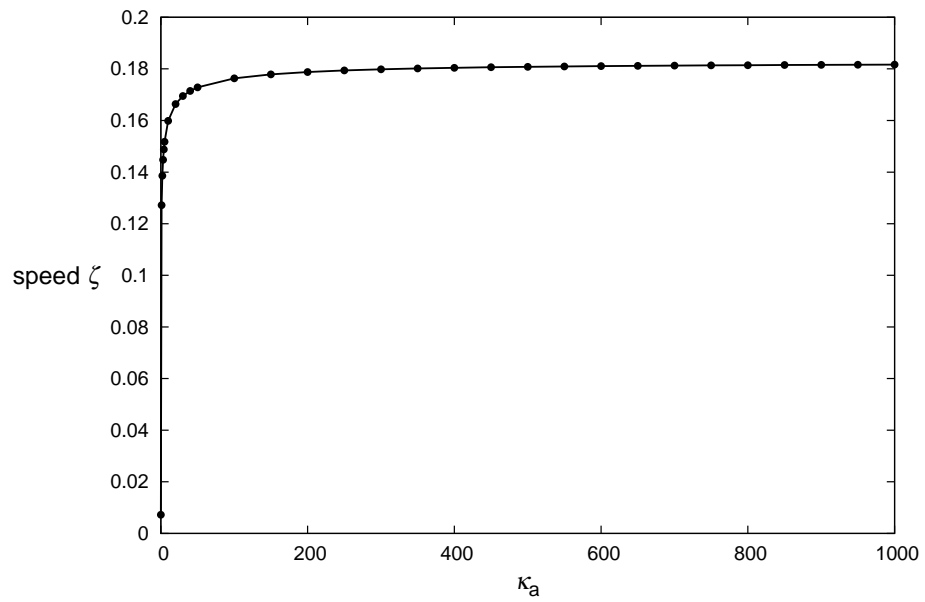


Рис. 3.9. Зависимость скорости стабилизации от κ_a .

Следующие графики демонстрируют, как меняется скорость стабилизации с изменением θ_{b1} и θ_{b2} .

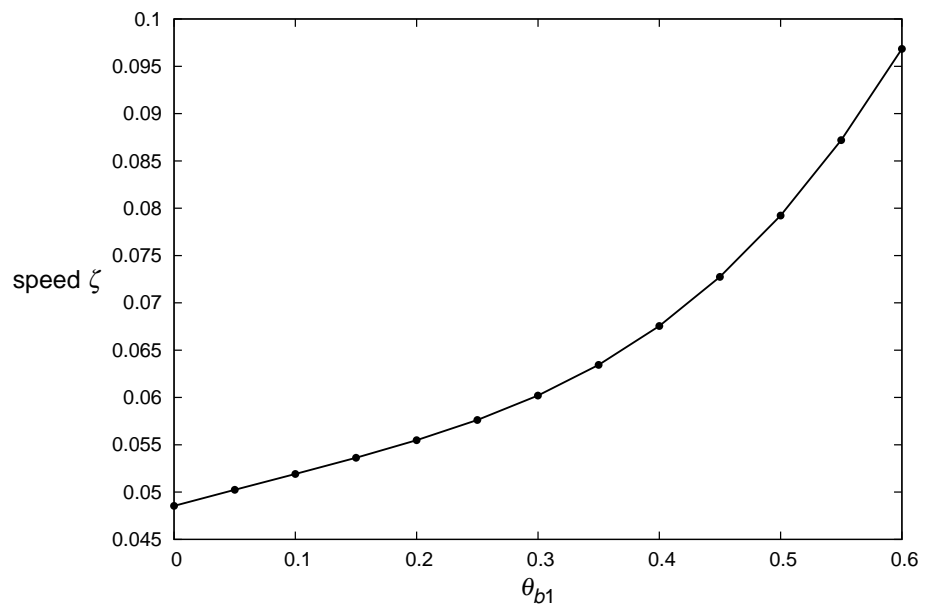


Рис. 3.10. Зависимость скорости стабилизации от θ_{b1} .

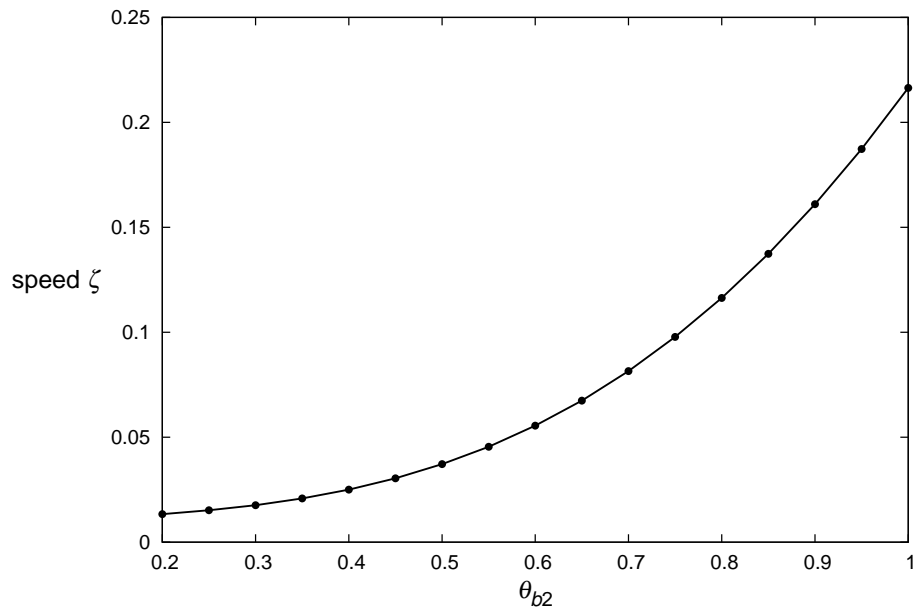


Рис. 3.11. Зависимость скорости стабилизации от θ_{b2} .

На следующем рисунке приведен график зависимости speed ζ от параметра a . При больших значениях a зависимость близка к линейной функции.

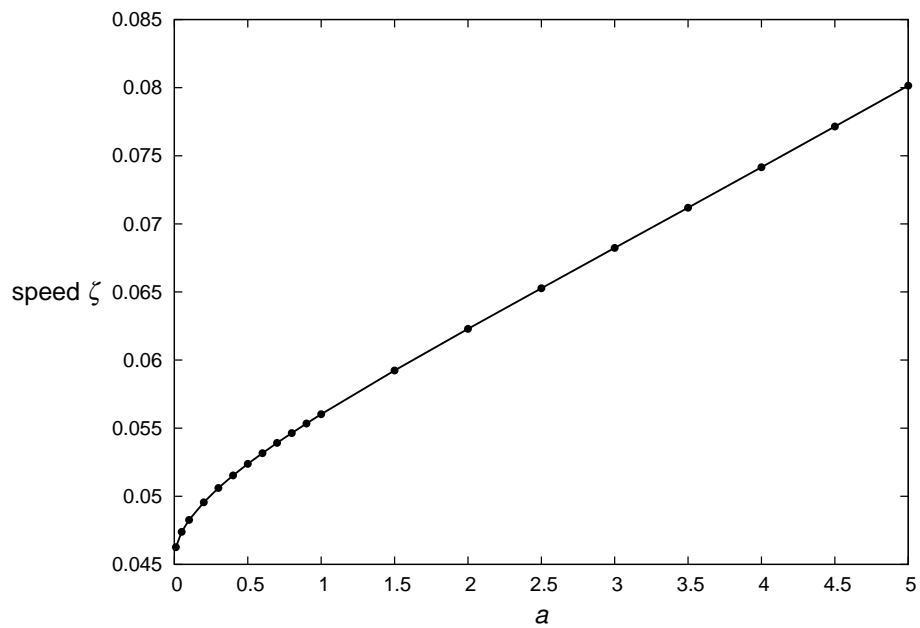


Рис. 3.12. Зависимость скорости стабилизации от a .

На рисунке 3.13 представлен график зависимости speed ζ от α .

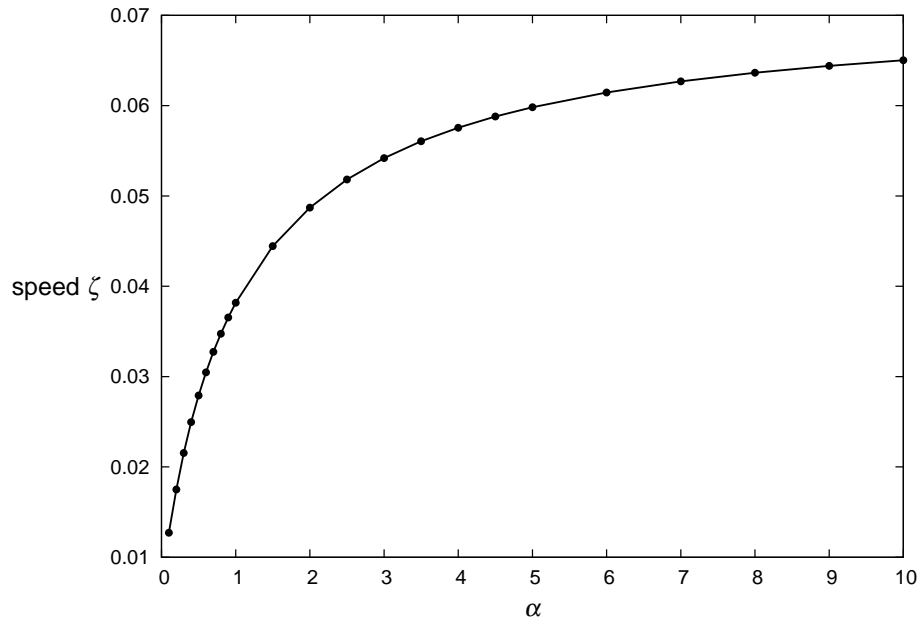


Рис. 3.13. Зависимость скорости стабилизации от α .

Далее приведен график зависимости speed ζ от β . Используем $T = 300$, так как при $T = 100$ заметна разница между speed ζ и speed ξ . При больших β величина speed ζ практически стабилизируется.

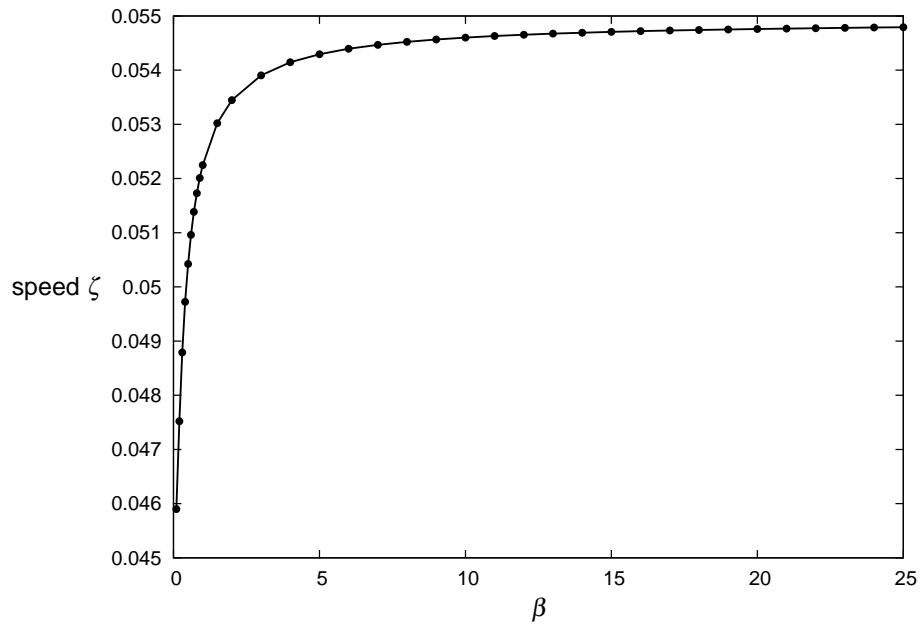


Рис. 3.14. Зависимость скорости стабилизации от β .

При вычислении зависимости speed ζ от γ также используем $T = 300$.

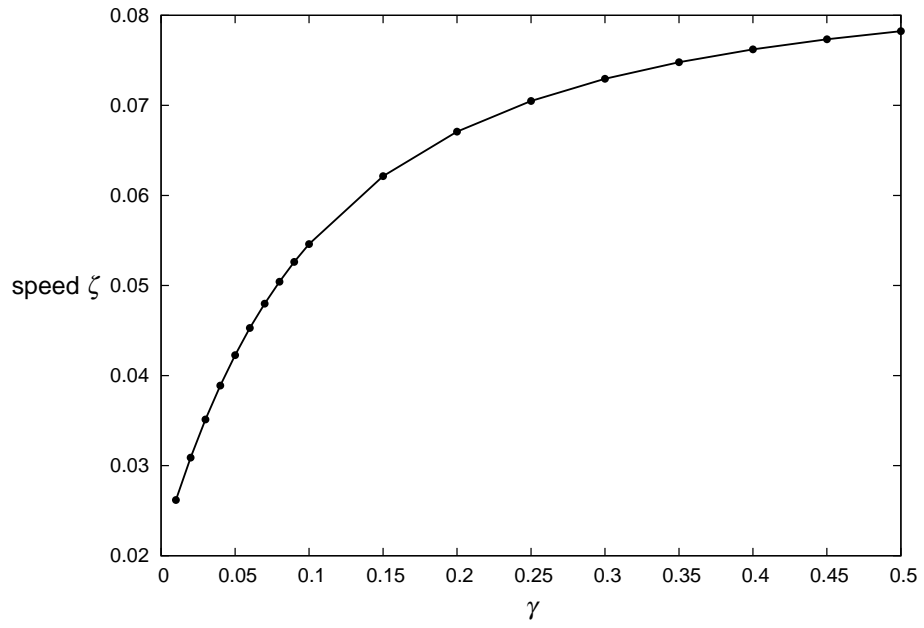


Рис. 3.15. Зависимость скорости стабилизации от γ .

Рассмотрим зависимость скорости стабилизации от толщины слоя L . Используем $T = 200$.

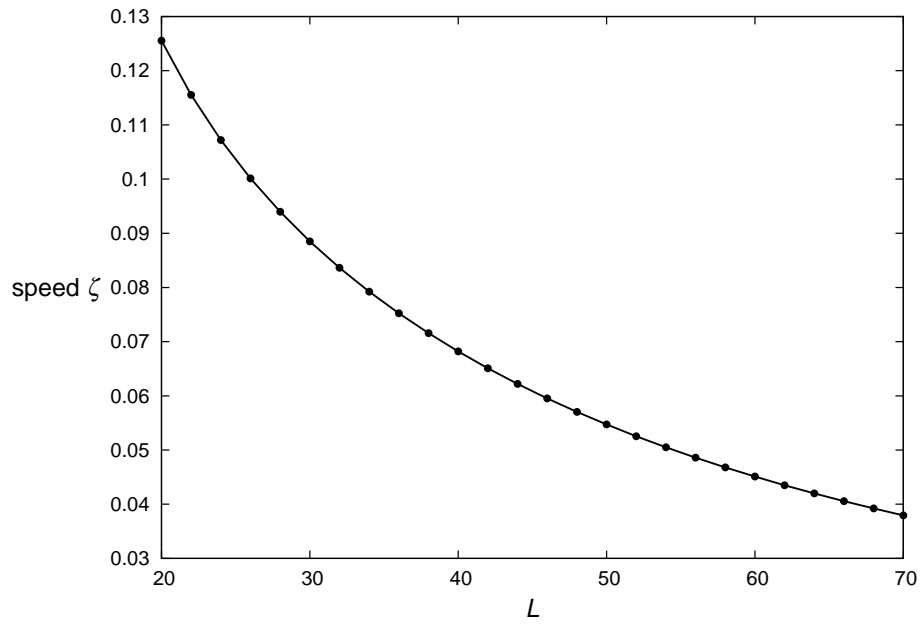


Рис. 3.16. Зависимость скорости стабилизации от L .

На следующем рисунке представлен график зависимости speed ζ от μ при $T = 500$.

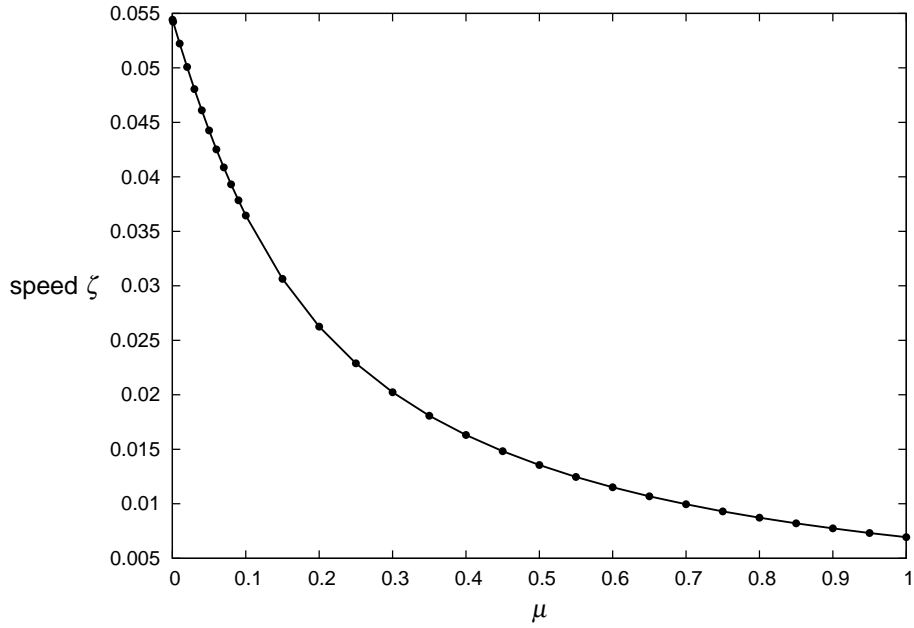


Рис. 3.17. Зависимость скорости стабилизации от μ .

Таким образом, вычислительные эксперименты показали, что температура и интенсивность излучения стабилизируются примерно с одинаковой скоростью (табл. 3.1). В рассмотренном примере скорость стабилизации растет при увеличении одного из параметров: b , κ_a , θ_{b1} , θ_{b2} , a , α , β , γ — и уменьшается при увеличении L или μ . Несмотря на то, что достаточное условие устойчивости перестает выполняться при больших значениях κ_a , b и θ_{b2} , при увеличении этих параметров скорость стабилизации увеличивается.

3.4. Поведение решения нестационарной модели при $t \approx 0$

3.4.1. Постановка задачи

Как правило, вместо нестационарного уравнения (3.2) используют стационарное уравнение

$$-\alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta| \theta^3) = 0. \quad (3.44)$$

Такая замена основана на предположении, что при большом значении s скорость стабилизации интенсивности излучения значительно выше, чем скорость стабилизации температуры. Однако вычислительные эксперименты свидетель-

ствуют о том, что температура и интенсивность излучения стабилизируются примерно с одинаковой скоростью. Тем не менее, вычислительные эксперименты показывают, что при большом значении c поле $\varphi(x, t)$ становится при малом $t = t_* \approx 0$ близким к решению уравнения (3.44), в котором функция $\theta(x, t)$ берется из решения задачи (3.1)–(3.4). Цель настоящего раздела — объяснить такое поведение решения и тем самым показать, что для приближенного описания поля интенсивности излучения можно использовать стационарное уравнение.

В этом разделе считаем $\mathbf{v} = 0$. Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $\beta_0, \gamma_0 = \text{const}$, $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$.
- (ii) $0 \leq \theta_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$.

3.4.2. Оценки решения

В силу теоремы 3.1 при выполнении условий (i), (ii) задача (3.5)–(3.7) имеет единственное решение $\{\theta, \varphi\}$, причем $0 \leq \theta \leq M$, $0 \leq \varphi \leq M^4$, где $M = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/4}\}$.

Обозначим через $\{\theta_s, \varphi_s\} \in V \times V$ стационарное решение эволюционной системы (3.5), (3.6), которое является решением задачи (3.8), (3.9). По теореме 3.2 при выполнении условия (i) существует единственное решение $\{\theta_s, \varphi_s\}$ задачи (3.8), (3.9), причем $0 \leq \theta_s \leq \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}$, $0 \leq \varphi_s \leq \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}^4$.

Введем функцию $\zeta = \theta - \theta_s$, тогда

$$\zeta' + A_1 \zeta = f, \quad (3.45)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0 \equiv \theta_0 - \theta_s,$$

где $f = b\kappa_a((\varphi - \varphi_s) - (\theta^4 - \theta_s^4))$, $|f| \leq 2b\kappa_a M^4$. Из результатов [115, с. 72] следует, что $\zeta \in C([0, T]; V)$, поэтому корректно определен след $\zeta|_{t=t_0} \in V$.

Обозначим

$$k_1 = \inf_{v \in V, \|v\|_V=1} (A_1 v, v), \quad k_2 = \inf_{v \in V, \|v\|=1} (A_2 v, v).$$

Отметим, что $k_1, k_2 > 0$ в силу леммы 1.27 и непрерывности вложения $V \subset H$.

Лемма 3.2. Пусть выполняются условия (i), (ii). Для решения задачи (3.5)–(3.7) справедлива оценка:

$$\|\theta(t) - \theta(t_0)\|^2 \leq C_1(t - t_0), \quad t > t_0,$$

$$\text{где } C_1 = C_1(\|\zeta(t_0)\|_V) = \frac{1}{2k_1} \|A_1\|^2 \|\zeta(t_0)\|_V^2 + 4b\kappa_a M^5 |\Omega|.$$

Доказательство. Умножим скалярно уравнение (3.45) на $\zeta(t) - \zeta(t_0)$:

$$\begin{aligned} ((\zeta(t) - \zeta(t_0))', \zeta(t) - \zeta(t_0)) + (A_1(\zeta(t) - \zeta(t_0)), \zeta(t) - \zeta(t_0)) + (A_1\zeta(t_0), \zeta(t) - \zeta(t_0)) = \\ = (f, \zeta(t) - \zeta(t_0)). \end{aligned}$$

Проинтегрировав данное равенство по t от t_0 до t , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\zeta(t) - \zeta(t_0)\|^2 + k_1 \int_{t_0}^t \|\zeta(\tau) - \zeta(t_0)\|_V^2 d\tau \leq \\ \leq \int_{t_0}^t \left(\|A_1\zeta(t_0)\|_{V'} \|\zeta(\tau) - \zeta(t_0)\|_V + 2b\kappa_a M^4 \int_{\Omega} |\zeta(\tau) - \zeta(t_0)| dx \right) d\tau. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенствами:

$$\|A_1\zeta(t_0)\|_{V'} \|\zeta(\tau) - \zeta(t_0)\|_V \leq k_1 \|\zeta(\tau) - \zeta(t_0)\|_V^2 + \frac{1}{4k_1} \|A_1\zeta(t_0)\|_{V'}^2,$$

$$|\zeta(\tau) - \zeta(t_0)| = |\theta(\tau) - \theta(t_0)| \leq M,$$

тогда

$$\frac{1}{2} \|\zeta(t) - \zeta(t_0)\|^2 \leq \left(\frac{1}{4k_1} \|A_1\|^2 \|\zeta(t_0)\|_V^2 + 2b\kappa_a M^5 |\Omega| \right) (t - t_0),$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Определим функцию $\tilde{\varphi}(t) \in V$ как решение стационарного уравнения (3.9), в котором функция θ берется из решения задачи (3.5)–(3.7) в момент времени t . Соответствующая линейная задача имеет единственное решение в силу теоремы Лакса – Мильграма.

Следующая теорема показывает, что, если s велико, в некоторый момент времени $t_* \approx 0$ интенсивность излучения становится близкой к решению стационарного уравнения (3.9) при $\theta := \theta_0$.

Теорема 3.5. Пусть выполняются условия (i), (ii), $\|\varphi(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 \leq d$, $d \geq \frac{C_2}{2k_2c}$. Для решения задачи (3.5)–(3.7) справедлива оценка:

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 \leq g(t) \equiv de^{2k_2c(t_0-t)} + C_2(t - t_0), \quad t > t_0, \quad (3.46)$$

где $C_2 = C_2(\|\zeta(t_0)\|_V) = 4M^6\kappa_a C_1(\|\zeta(t_0)\|_V)/k_2$. Функция $g(t)$ убывает на (t_0, t_*) и достигает минимума в точке $t_* = t_0 + \frac{1}{2k_2c} \ln \frac{2k_2cd}{C_2}$, $g(t_*) = \frac{C_2}{2k_2c} + \frac{C_2}{2k_2c} \ln \frac{2k_2cd}{C_2}$.

Доказательство. Введем функцию $\psi(t) = \varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)$, тогда

$$\frac{1}{c}\psi'(t) + A_2\psi(t) + \kappa_a\psi(t) = \kappa_a(\theta^4(t) - \theta^4(t_0)), \quad \psi(t_0) = \varphi(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0).$$

Умножив это равенство скалярно на ψ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}(\psi'(t), \psi(t)) + (A_2\psi(t), \psi(t)) + \kappa_a\|\psi(t)\|^2 &= \kappa_a(\theta^4(t) - \theta^4(t_0), \psi(t)), \\ \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \|\psi(t)\|^2 + k_2\|\psi(t)\|^2 + \kappa_a\|\psi(t)\|^2 &\leq \kappa_a\|\psi(t)\|^2 + \frac{\kappa_a}{4} \|\theta^4(t) - \theta^4(t_0)\|^2. \end{aligned}$$

Отметим, что $|\theta^4(t) - \theta^4(t_0)| \leq 4M^3|\theta(t) - \theta(t_0)|$. Итак,

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \|\psi(t)\|^2 + 2k_2\|\psi(t)\|^2 \leq 8M^6\kappa_a\|\theta(t) - \theta(t_0)\|^2,$$

отсюда

$$\|\psi(t)\|^2 \leq \|\psi(t_0)\|^2 e^{2k_2c(t_0-t)} + 8cM^6\kappa_a \int_{t_0}^t \|\theta(\tau) - \theta(t_0)\|^2 e^{2k_2c(\tau-t)} d\tau.$$

В силу леммы 3.2

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|\theta(\tau) - \theta(t_0)\|^2 e^{2k_2c(\tau-t)} d\tau &\leq C_1 \int_{t_0}^t (\tau - t_0) e^{2k_2c(\tau-t)} d\tau = \\ &= C_1 \left(\frac{1}{2k_2c}(t - t_0) - \frac{1}{4k_2^2c^2} (1 - e^{2k_2c(t_0-t)}) \right) \leq \frac{C_1}{2k_2c}(t - t_0), \end{aligned}$$

поэтому

$$\|\psi(t)\|^2 \leq \|\psi(t_0)\|^2 e^{2k_2c(t_0-t)} + \frac{4M^6\kappa_a C_1}{k_2}(t - t_0),$$

откуда следует оценка (3.46).

Чтобы получить второе утверждение теоремы, заметим, что $g'(t) < 0$ на $(0, t_*)$, $g'(t_*) = 0$, $g'(t) > 0$ при $t > t_*$. ■

Замечание 3.1. Если $t_0 = 0$, то $t_* \rightarrow 0$ и $\|\varphi(t_*) - \tilde{\varphi}(0)\| \rightarrow 0$ при $c \rightarrow +\infty$.

Далее оценим $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2$. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 3.3. Пусть выполняются условия (i), (ii). Для решения задачи (3.5)–(3.7) справедлива оценка:

$$\|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 \leq C_2(t - t_0), \quad t > t_0.$$

Доказательство. Обозначим $\psi = \tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)$, тогда

$$A_2\psi + \kappa_a\psi = \kappa_a(\theta^4(t) - \theta^4(t_0)).$$

Умножив равенство скалярно на ψ , получим

$$(A_2\psi, \psi) + \kappa_a\|\psi\|^2 = \kappa_a(\theta^4(t) - \theta^4(t_0), \psi),$$

$$k_2\|\psi\|^2 + \kappa_a\|\psi\|^2 \leq \kappa_a\|\psi\|^2 + \frac{\kappa_a}{4}\|\theta^4(t) - \theta^4(t_0)\|^2 \leq \kappa_a\|\psi\|^2 + 4M^6\kappa_a\|\theta(t) - \theta(t_0)\|^2,$$

отсюда по лемме 3.2

$$\|\psi\|^2 \leq \frac{4M^6\kappa_a C_1}{k_2}(t - t_0).$$

■

Следующая теорема показывает, что при $t = t_* \approx 0$, если $t_0 = 0$, интенсивность излучения становится близкой к решению стационарного уравнения при заданной температуре.

Теорема 3.6. Пусть выполняются условия (i), (ii), $\|\varphi(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 \leq d$, $s > 0$ — любое число, $d \geq \frac{C_2(2 + s + 1/s)}{2k_2c}$. Для решения задачи (3.5)–(3.7) справедлива оценка:

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq g_s(t) \equiv (1 + s)de^{2k_2c(t_0 - t)} + C_2(2 + s + 1/s)(t - t_0), \quad t > t_0.$$

Функция $g_s(t)$ убывает на (t_0, t_*) и достигает минимума в точке

$$t_* = t_0 + \frac{1}{2k_2c} \ln \frac{2(1 + s)k_2cd}{C_2(2 + s + 1/s)},$$

$$g_s(t_*) = \frac{C_2(2 + s + 1/s)}{2k_2c} + \frac{C_2(2 + s + 1/s)}{2k_2c} \ln \frac{2(1 + s)k_2cd}{C_2(2 + s + 1/s)}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 &\leq (\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\| + \|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|)^2 = \\ &= \|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 + \|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 + 2\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\| \cdot \|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\| \leq \\ &\leq (1+s)\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 + (1+1/s)\|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2. \end{aligned}$$

Применяя теорему 3.5 и лемму 3.3, получим, что

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq (1+s)de^{2k_2c(t_0-t)} + C_2(2+s+1/s)(t-t_0).$$

Чтобы получить второе утверждение теоремы, заметим, что $g'_s(t) < 0$ на $(0, t_*)$, $g'_s(t_*) = 0$, $g'_s(t) > 0$ при $t > t_*$. ■

Чтобы получить оценку $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2$ при всех t , нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3.4. Пусть выполняются условия (i), (ii). Справедлива оценка $\|\zeta(t)\|_V^2 \leq C_3$, $t > 0$, где $C_3 = \frac{1}{k_1}(A_1\zeta_0, \zeta_0) + 2b\kappa_a M^5|\Omega|/k_1$.

Доказательство. Из результатов [115, с. 73] следует, что

$$\frac{d}{dt}(A_1\zeta, \zeta) + \|A_1\zeta\|^2 \leq \|f\|^2, \quad |f| \leq 2b\kappa_a M^4.$$

Для любого $C > 0$ справедливо неравенство $(A_1\zeta, \zeta) \leq \frac{C}{2}\|A_1\zeta\|^2 + \frac{1}{2C}\|\zeta\|^2$, отсюда $\|A_1\zeta\|^2 \geq \frac{2}{C}(A_1\zeta, \zeta) - \frac{1}{C^2}\|\zeta\|^2$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(A_1\zeta, \zeta) + \frac{2}{C}(A_1\zeta, \zeta) \leq \|f\|^2 + \frac{1}{C^2}\|\zeta\|^2.$$

Заметим, что $\|f\|^2 + \frac{1}{C^2}\|\zeta\|^2 \leq 4b^2\kappa_a^2 M^8|\Omega| + \frac{M^2}{C^2}|\Omega|$, поэтому

$$\begin{aligned} (A_1\zeta, \zeta) &\leq (A_1\zeta_0, \zeta_0)e^{-2t/C} + \frac{C}{2} \left(4b^2\kappa_a^2 M^8|\Omega| + \frac{M^2}{C^2}|\Omega| \right) (1 - e^{-2t/C}) \leq \\ &\leq (A_1\zeta_0, \zeta_0)e^{-2t/C} + 2Cb^2\kappa_a^2 M^8|\Omega| + \frac{M^2}{2C}|\Omega| = (A_1\zeta_0, \zeta_0)e^{-4b\kappa_a M^3 t} + 2b\kappa_a M^5|\Omega|, \end{aligned}$$

здесь выбрано $C = \frac{1}{2b\kappa_a M^3}$. Используя неравенство $k_1\|\zeta\|_V^2 \leq (A_1\zeta, \zeta)$, получаем утверждение леммы. ■

Следующая теорема показывает, что при $t > t_*$, если $t_0 = 0$, интенсивность излучения остается близкой к решению стационарного уравнения.

Теорема 3.7. Пусть выполняются условия (i), (ii), $s > 0$ — любое число. Для решения задачи (3.5)–(3.7) справедлива оценка:

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq \frac{C_4(2 + s + 1/s)y_*(s)}{2k_2c} + \varepsilon(t), \quad t > 0, \quad (3.47)$$

где $C_4 = C_2(\sqrt{C_3}) = \frac{4M^6\kappa_a}{k_2} \left(\frac{1}{2k_1} \|A_1\|^2 C_3 + 4b\kappa_a M^5 |\Omega| \right)$, $y_*(s)$ — правый корень уравнения $(1 + s)(1 + \ln y) = y$, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. По теореме 3.6 если $\|\varphi(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 \leq d$, $d \geq \tilde{d} = \frac{C_4(2 + s + 1/s)}{2k_2c}$, то $\|\varphi(t_*) - \tilde{\varphi}(t_*)\|^2 \leq f(d)$, $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq (1 + s)d$, $t \in (t_0, t_*)$,

где $f(x) = (1 + s)q \left(1 + \ln \frac{x}{q} \right)$, $q = \frac{C_4(2 + s + 1/s)}{2k_2c(1 + s)}$, $t_* = t_0 + \frac{1}{2k_2c} \ln \frac{d}{q}$.

Заметим, что $\left(\frac{f(x)}{x} \right)' < 0$ при $x > q$, $\frac{f(x)}{x} \Big|_{x=q} = 1 + s > 1$, $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, существует единственное $x^* > q$ такое, что $f(x_*) = x_*$, причем $x < f(x) < x_*$ при $x \in (q, x_*)$ и $x_* < f(x) < x$ при $x > x_*$. Отметим, что $y_* = x_*/q$ является правым корнем уравнения $(1 + s)(1 + \ln y) = y$.

Положим $d_0 = \max \left\{ \|\varphi_0 - \tilde{\varphi}(0)\|^2, \tilde{d} \right\}$. Заметим, что $d_0 > q$. Определим рекуррентную последовательность $d_{n+1} = f(d_n)$, $n = 0, 1, \dots$. Если $d_0 < x_*$, то $d_0 < d_n < x_*$, $n = 1, 2, \dots$. Если $d_0 \geq x_*$, то $x_* \leq d_{n+1} < d_n$, $n = 0, 1, \dots$, поэтому последовательность d_n сходится к решению уравнения $x = f(x)$, $x \geq x_*$, следовательно, $d_n \rightarrow x_*$.

Применим теорему 3.6 бесконечное число раз, полагая t_0 равным t_* с предыдущего шага, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2k_2c} \ln \frac{d_n}{q}$, $n = 0, 1, \dots$. Заметим, что $f(\tilde{d}) > \tilde{d}$, поэтому $\tilde{d} < x_*$, значит, $d_n \geq \tilde{d} > q$, $n = 0, 1, \dots$. Последовательность d_n ограничена снизу числом, большим q , поэтому $t_n \rightarrow +\infty$.

Итак, если $\|\varphi(t_n) - \tilde{\varphi}(t_n)\|^2 \leq d_n$, то $\|\varphi(t_{n+1}) - \tilde{\varphi}(t_{n+1})\|^2 \leq d_{n+1}$, $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq (1 + s)d_n$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Поскольку $d_n < x_*$ либо $d_n \geq x_*$, $d_n \rightarrow x_*$, то $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq (1 + s)x_* + \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. ■

Замечание 3.2. Оценка (3.47) будет наилучшей при значении s , доставляющем минимум функции $\psi(s) = (2 + s + 1/s)y_*(s)$. Оптимальное значение, найденное численно: $s_* \approx 0.328$, $y_*(s_*) \approx 2.594$.

3.4.3. Числовой пример

Проиллюстрируем полученный результат на примере для одномерной задачи (3.37)–(3.40).

Найдем числовые значения полученных оценок, чтобы сравнить их с данными вычислительного эксперимента. Для оценки сверху постоянных C_1 , C_2 , C_3 , C_4 нам понадобятся оценки величин k_1 , k_2 , $\|A_1\|$.

В разд. 3.3 показано, что $\underline{k}_2 \leq k_2 \leq \overline{k}_2$, где

$$\underline{k}_2 = \min \left\{ \frac{4\alpha}{L^2}, \frac{\gamma}{L} \right\}, \quad \overline{k}_2 = \min \left\{ \frac{\pi^2\alpha}{L^2}, \frac{2\gamma}{L} \right\}.$$

Из (3.42) следует, что

$$\begin{aligned} \|u\|_V^2 &= \|u\|^2 + \|u'\|^2 \leq \left(\frac{L^2}{4} + 1 \right) \|u'\|^2 + L(u^2(0) + u^2(L)) \leq \\ &\leq \max \left\{ \frac{L^2/4 + 1}{a}, \frac{L}{\beta} \right\} (a\|u'\|^2 + \beta(u^2(0) + u^2(L))). \end{aligned}$$

Следовательно, $k_1 \geq \underline{k}_1 \equiv \min \left\{ \frac{a}{L^2/4 + 1}, \frac{\beta}{L} \right\}$.

Чтобы оценить k_1 сверху, рассмотрим функции $u_1(x) = \left(\frac{L}{2} + \frac{\pi^2}{2L} \right)^{-1/2} \sin \frac{\pi x}{L}$, $u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$, $\|u_1\|_V = \|u_2\|_V = 1$. Поскольку $(A_1 u_1, u_1) = \frac{\pi^2 a}{L^2 + \pi^2}$, $(A_1 u_2, u_2) = \frac{2\beta}{L}$, то $k_1 \leq \overline{k}_1 \equiv \min \left\{ \frac{\pi^2 a}{L^2 + \pi^2}, \frac{2\beta}{L} \right\}$.

Далее оценим $\|A_1\|$ сверху. Из результатов [130, с. 244] следует, что для любой функции $u \in V$:

$$u(x) = \int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_0^L u(\xi) d\xi, \quad \text{где } x_0 \in [0, L],$$

отсюда, используя неравенство $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \|u\|_{C[0,L]} &\leq \int_0^L |u'(x)| dx + \frac{1}{L} \int_0^L |u(x)| dx \leq \sqrt{L}\|u'\| + \frac{1}{\sqrt{L}}\|u\| \leq \\ &\leq \left(2L\|u'\|^2 + \frac{2}{L}\|u\|^2\right)^{1/2} \leq (2\max\{L, 1/L\})^{1/2}\|u\|_V. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|A_1\| &= \sup_{\|v\|_V=1} (A_1v, v) = \sup_{\|v\|_V=1} (a\|v'\|^2 + \beta(v^2(0) + v^2(L))) \leq \\ &\leq \sup_{\|v\|_V=1} \left(a\|v\|_V^2 + 2\beta\|v\|_{C[0,L]}^2\right) \leq \overline{N}_1 \equiv a + 4\beta\max\{L, 1/L\}. \end{aligned}$$

Чтобы оценить $\|A_1\|$ снизу, рассмотрим функции $u_1(x) = \left(\frac{L}{2} + \frac{\pi^2}{2L}\right)^{-1/2} \sin \frac{\pi x}{L}$, $u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$, $\|u_1\|_V = \|u_2\|_V = 1$. Поскольку $(A_1u_1, u_1) = \frac{\pi^2 a}{L^2 + \pi^2}$, $(A_1u_2, u_2) = \frac{2\beta}{L}$, то $\|A_1\| \geq \underline{N}_1 \equiv \max\left\{\frac{\pi^2 a}{L^2 + \pi^2}, \frac{2\beta}{L}\right\}$.

Тогда при $t_0 = 0$: $\underline{C}_1 \leq C_1 \leq \overline{C}_1$, $\underline{C}_2 \leq C_2 \leq \overline{C}_2$, $C_3 \leq \overline{C}_3$, $C_4 \leq \overline{C}_4$, где

$$\begin{aligned} \underline{C}_1 &= \frac{1}{2\underline{k}_1} \underline{N}_1^2 \|\zeta_0\|_V^2 + 4b\kappa_a M^5 L, \quad \overline{C}_1 = \frac{1}{2\underline{k}_1} \overline{N}_1^2 \|\zeta_0\|_V^2 + 4b\kappa_a M^5 L, \\ \underline{C}_2 &= 4M^6 \kappa_a \underline{C}_1 / \underline{k}_2, \quad \overline{C}_2 = 4M^6 \kappa_a \overline{C}_1 / \underline{k}_2, \quad \overline{C}_3 = \frac{1}{\underline{k}_1} (A_1 \zeta_0, \zeta_0) + 2b\kappa_a M^5 L / \underline{k}_1, \\ \overline{C}_4 &= \frac{4M^6 \kappa_a}{\underline{k}_2} \left(\frac{1}{2\underline{k}_1} \overline{N}_1^2 \overline{C}_3 + 4b\kappa_a M^5 L \right). \end{aligned}$$

По теореме 3.6 при $t_0 = 0$, $s = 1$:

$$\|\varphi(t_*) - \tilde{\varphi}(t_*)\|^2 \leq \frac{2\overline{C}_2}{\underline{k}_2 c} + \frac{2\overline{C}_2}{\underline{k}_2 c} \ln \frac{\overline{k}_2 c d}{\underline{C}_2}, \quad t_* \leq \frac{1}{2\underline{k}_2 c} \ln \frac{\overline{k}_2 c d}{\underline{C}_2}. \quad (3.48)$$

По теореме 3.7 имеем

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq \frac{\overline{C}_4(2 + s + 1/s)y_*(s)}{2\underline{k}_2 c} + \varepsilon(t), \quad t > 0, \quad (3.49)$$

где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

В качестве физических постоянных выберем параметры воздуха при температуре 400 °С и нормальном атмосферном давлении [20, с. 319]: $k = 0.0521$

Вт/(м·К), $\rho = 0.524$ кг/м³, $c_p = 1068$ Дж/(кг·К). Положим $L = 0.5$ м, $T_{\max} = 773$ К, $\kappa_a = 1$ м⁻¹, $\kappa = 10$ м⁻¹, $A = 0$, $n = 1$, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $h = 10$ Вт/(м²·К), $\varepsilon = 0.8$, $\theta_b = 0.4$.

Начальные функции $\zeta_0 = \theta_0 - \theta_s$, $\xi_0 = \varphi_0 - \varphi_s$, где $\theta_s = \theta_b$, $\varphi_s = \theta_b^4$ — стационарное решение, имеют вид $\zeta_0(x) = \xi_0(x) = A \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right)$, где $A = 0.3$. Отметим, что $M = 1$, $\|\zeta_0\|_V^2 = 3LA^2/2 + 2\pi^2 A^2/L$, $(A_1 \zeta_0, \zeta_0) = 2\pi^2 A^2 a/L$.

Расчет полей температуры и интенсивности излучения проведен на временном интервале длины $T = 6 \cdot 10^{-8}$ с. Использована разностная схема второго порядка точности по x и неявная схема Эйлера по t . Выбрана равномерная сетка с 1001 точками по пространству и 10001 точками по времени. Программная реализация выполнена с помощью общего конечноразностного решателя (разд. 5.6).

На рис. 3.18 представлен график функции $r(t) = (\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2/L)^{1/2}$ в логарифмической шкале по оси ординат. На графике видно, что величина $r(t)$ экспоненциально убывает с большим показателем экспоненты примерно до момента времени $t = 4 \cdot 10^{-8}$, затем скорость убывания становится меньше.

Из вычислительного эксперимента получаем оценку $\|\varphi_0 - \tilde{\varphi}(0)\|^2 \leq d$, где $d = 0.0113$. Из оценки (3.48) получаем, что $r(t_*) \leq 0.029$, где $t_* \leq 3 \cdot 10^{-8}$. Для сравнения: по данным вычислительного эксперимента $r(3 \cdot 10^{-8}) \approx 2.4 \cdot 10^{-8}$. Из оценки (3.49) при $s = 0.328$ получаем, что при $t > 0$ справедливо неравенство $r(t) \leq 0.41 + \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

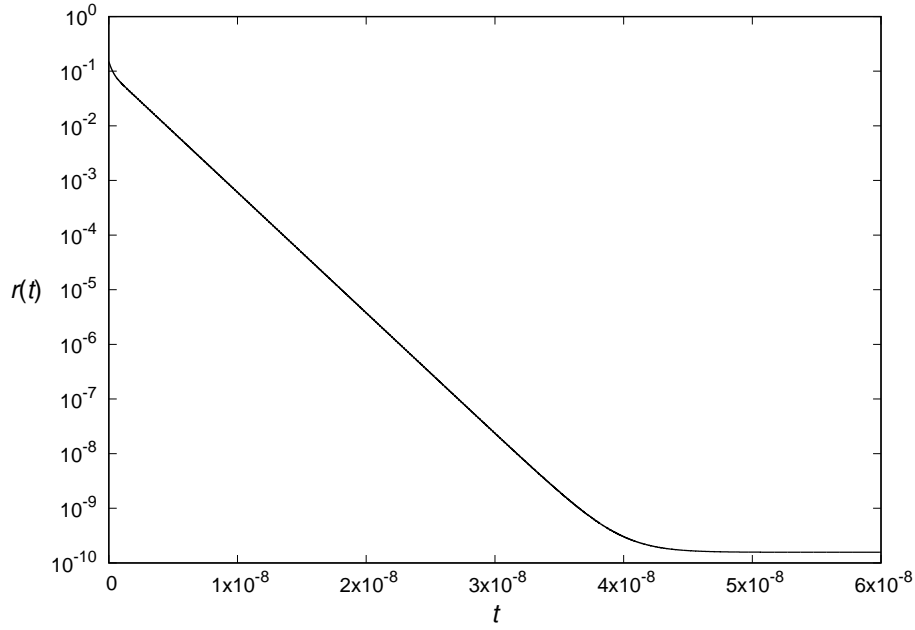


Рис. 3.18. График функции $r(t)$.

Таким образом, в данном разделе показано, что при большом значении скорости света величина $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|$ достигает малого значения за короткий промежуток времени $(0, t_*)$ и при $t > t_*$ остается малой.

Проведенный анализ объясняет резкое изменение интенсивности излучения в нестационарной модели при $t \approx 0$ и обосновывает применимость стационарного уравнения для интенсивности излучения при моделировании процесса сложного теплообмена.

3.5. Асимптотическая устойчивость в квазистационарной модели

Квазистационарная модель сложного теплообмена имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad (3.50)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (3.51)$$

$$a\frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad (3.52)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (3.53)$$

Цель настоящего раздела — доказать глобальную асимптотическую устойчивость по Ляпунову стационарных решений системы (3.50)–(3.52).

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

(i) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $\beta_0, \gamma_0 = \text{const}$, $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$.

(ii) $0 \leq \theta_0 \in L^\infty(\Omega)$.

Определение 3.2. Пара $\{\theta, \varphi\} \in W \times L^2(0, T; V)$ называется слабым решением задачи (3.50)–(3.53), если

$$\theta' + A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f_1 \quad \text{н.в. на } (0, T), \quad (3.54)$$

$$A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = f_2 \quad \text{н.в. на } (0, T), \quad (3.55)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (3.56)$$

Обозначим через $\{\theta_s, \varphi_s\} \in V \times V$ стационарное решение эволюционной системы (3.54), (3.55), которое является решением задачи

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f_1, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = f_2. \quad (3.57)$$

Следующая теорема доказана в [97] для случая, когда $\beta, \gamma = \text{const}$ и θ_b зависит только от t . Для более общего случая доказательство можно провести аналогично.

Теорема 3.8. Пусть выполняются условия (i), (ii). Существует единственное решение $\{\theta, \varphi\}$ задачи (3.54)–(3.56), причем $0 \leq \theta \leq M$, $0 \leq \varphi \leq M^4$, где $M = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$.

В силу теоремы 3.2 при выполнении условия (i) существует единственное решение $\{\theta_s, \varphi_s\}$ задачи (3.57), причем $0 \leq \theta_s \leq \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}$, $0 \leq \varphi_s \leq \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}^4$.

В силу произвольности интервала времени $(0, T)$ решение $\{\theta, \varphi\}$ задачи (3.54)–(3.56) можно рассматривать на $(0, +\infty)$. Положим $\zeta = \theta - \theta_s$, $\xi = \varphi - \varphi_s$.

Тогда для п.в. $t > 0$

$$\zeta' + A_1\zeta + b\kappa_a(g(\zeta, \theta_s) - \xi) = 0, \quad (3.58)$$

$$A_2\xi + \kappa_a(\xi - g(\zeta, \theta_s)) = 0, \quad (3.59)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0 := \theta_0 - \theta_s. \quad (3.60)$$

Здесь $g(\zeta, \theta_s) = (\theta_s + \zeta)^4 - \theta_s^4$.

Цель состоит в получении оценок экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (3.58), (3.59),

$$\|\zeta(t)\| \leq C\|\zeta_0\|e^{-kt}, \quad \|\xi(t)\| \leq C\|\zeta_0\|e^{-kt}, \quad \text{где } k, C > 0.$$

Для задачи (3.58)–(3.60) докажем предварительно теорему сравнения относительно начальных данных.

Теорема 3.9. Пусть выполняется условие (i). Если $\{\zeta_i, \xi_i\}$ — решения задачи (3.58)–(3.60) при начальных условиях $\zeta_0 := \zeta_{0i}$, $i = 1, 2$, таких, что

$$\zeta_{0i} \in L^\infty(\Omega), \quad \theta_s + \zeta_{0i} \geq 0, i = 1, 2; \quad \zeta_{01} \leq \zeta_{02},$$

то $\zeta_1 \leq \zeta_2$, $\xi_1 \leq \xi_2$ п.в. в области $\Omega \times (0, +\infty)$.

Доказательство. Обозначим $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$, $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\zeta_0 = \zeta_{01} - \zeta_{02} \leq 0$.

Тогда

$$\zeta' + A_1\zeta + b\kappa_a[(g(\zeta_1, \theta_s) - g(\zeta_2, \theta_s)) - \xi] = 0, \quad (3.61)$$

$$A_2\xi + \kappa_a[\xi - (g(\zeta_1, \theta_s) - g(\zeta_2, \theta_s))] = 0, \quad (3.62)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0. \quad (3.63)$$

Пусть $\eta = \max\{\zeta, 0\}$, $\psi = \max\{\xi, 0\}$. Умножив скалярно уравнение (3.61) на η , а уравнение (3.62) на ψ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\eta(t)\|^2 + \int_0^t \left\{ a\|\nabla\eta\|^2 + \int_\Gamma \beta\eta^2 d\Gamma + \right. \\ \left. + b\kappa_a[(g(\zeta_1, \theta_s) - g(\zeta_2, \theta_s), \eta) - (\xi, \eta)] \right\} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\alpha \|\nabla \psi\|^2 + \int_{\Gamma} \gamma \psi^2 d\Gamma + \kappa_a [\|\psi\|^2 - (g(\zeta_1, \theta_s) - g(\zeta_2, \theta_s), \psi)] = 0. \quad (3.65)$$

Заметим, что

$$\text{sign}(g(\zeta_1, \theta_s) - g(\zeta_2, \theta_s)) = \text{sign } \zeta$$

и в силу теоремы 1

$$|g(\zeta_1, \theta_s) - g(\zeta_2, \theta_s)| \leq 4C_1^3 |\zeta|,$$

где $C_1 = \max\{\|\theta_s + \zeta_{01}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\theta_s + \zeta_{02}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} (g(\zeta_1, \theta_s) - g(\zeta_2, \theta_s), \psi) &\leq \int_{\zeta_1 > \zeta_2} (g(\zeta_1, \theta_s) - g(\zeta_2, \theta_s)) \psi dx \leq 4C_1^3(\eta, \psi) \leq \\ &\leq 2C_1^3 \left(\frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|^2 + \varepsilon \|\psi\|^2 \right) \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из равенства (3.65) следует неравенство

$$\|\psi\|^2 \leq 2C_1^3 \left(\frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|^2 + \varepsilon \|\psi\|^2 \right).$$

Полагая $\varepsilon = 1/4C_1^3$, получаем

$$\|\psi\|^2 \leq 16C_1^6 \|\eta\|^2. \quad (3.66)$$

Отметим, что

$$(\xi, \eta) \leq (\psi, \eta) \leq \frac{1}{2}(\|\psi\|^2 + \|\eta\|^2).$$

Тогда из (3.64) следует оценка

$$\frac{1}{2} \|\eta(t)\|^2 \leq \frac{b\kappa_a}{2} \int_0^t (\|\psi(\tau)\|^2 + \|\eta(\tau)\|^2) d\tau \leq b\kappa_a (16C_1^6 + 1) \int_0^t \|\eta(\tau)\|^2 d\tau.$$

В силу неравенства Гронуолла заключаем, что $\eta = 0$ и тогда из (3.66) получаем $\psi = 0$. Следовательно, $\zeta_1 \leq \zeta_2$, $\xi_1 \leq \xi_2$, что и требовалось доказать. ■

Представим начальные данные в виде $\zeta_0 = \zeta_0^+ + \zeta_0^-$, $\zeta_0^- = \min\{\zeta_0, 0\} \leq 0$, $\zeta_0^+ = \max\{\zeta_0, 0\} \geq 0$, $\zeta_0^- \leq \zeta_0 \leq \zeta_0^+$. Если для начальных данных $\zeta_0 := \zeta_0^-$ и $\zeta_0 := \zeta_0^+$ будет доказана экспоненциальная устойчивость, то в силу теоремы

3.9 она будет доказана и для ζ_0 . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случаи $\zeta_0 \geq 0$ и $\zeta_0 \leq 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу и докажем, что при неотрицательных (соответственно неположительных) начальных данных решение $\{\zeta, \xi\}$ задачи (3.58)–(3.60) не больше (соответственно не меньше) решения вспомогательной задачи, а затем докажем, что решение вспомогательной задачи экспоненциально стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$.

Положим $h_0(x, t) = h(\zeta(x, t), x)$, $x \in \Omega, t > 0$. Здесь $h(\zeta, x) = g(\zeta, \theta_s)/\zeta = 4\theta_s^3(x) + 6\theta_s^2(x)\zeta + 4\theta_s(x)\zeta^2 + \zeta^3$, $x \in \Omega$, где $\{\zeta, \xi\}$ — решение задачи (3.58)–(3.60) при начальном условии $\zeta_0 \in L^\infty(\Omega)$. Заметим, что функция h_0 неотрицательна и ограничена в силу ограниченности решения задачи (3.58)–(3.60). Определим оператор

$$A : V \rightarrow V', \quad (Au, v) = (\nabla u, \nabla v) + \int_{\Gamma} ruvd\Gamma \quad \forall v \in V. \quad (3.67)$$

Здесь $r = \min\{\beta/a, \gamma/\alpha\}$. Указанная вспомогательная задача имеет вид:

$$\tilde{\zeta}' + aA\tilde{\zeta} + b\kappa_a(h_0\tilde{\zeta} - \tilde{\xi}) = 0, \quad (3.68)$$

$$\alpha A\tilde{\xi} + \kappa_a(\tilde{\xi} - h_0\tilde{\zeta}) = 0, \quad (3.69)$$

$$\tilde{\zeta}|_{t=0} = \zeta_0. \quad (3.70)$$

Теорема 3.10. Пусть выполняется условие (i), $\zeta_0 \in L^\infty(\Omega)$. Тогда задача (3.68)–(3.70) имеет единственное решение.

Доказательство. Согласно теореме Лакса – Мильграма, оператор $L = \alpha A + \kappa_a I : V \rightarrow V'$ непрерывно обратим и задача (3.68)–(3.70) эквивалентна следующей:

$$\tilde{\zeta}' + aA\tilde{\zeta} + b\kappa_a(h_0\tilde{\zeta} - L^{-1}(h_0\tilde{\zeta})) = 0, \quad \tilde{\zeta}|_{t=0} = \zeta_0. \quad (3.71)$$

Оператор $L_1 : V \rightarrow V'$, определяемый формулой

$$(L_1 u, v) = a(A_1 u, v) + b\kappa_a(h_0 u - L^{-1}(h_0 u), v) \quad \forall u, v \in V,$$

обладает свойством

$$(L_1(t)u, u) \geq C_1 \|u\|_V^2 - C_2 \|u\|^2,$$

где C_1, C_2 — постоянные, не зависящие от $u \in V$. Следовательно, по теореме 1.7 задача (3.71) однозначно разрешима. \blacksquare

Теорема 3.11. Пусть выполняется условие (i), $\zeta_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\theta_s + \zeta_0 \geq 0$ и $\zeta_0 \geq 0$ (соответственно $\zeta_0 \leq 0$). Тогда $\zeta \leq \tilde{\zeta}$, $\xi \leq \tilde{\xi}$ (соответственно $\zeta \geq \tilde{\zeta}$, $\xi \geq \tilde{\xi}$) п.в. в области $\Omega \times (0, +\infty)$. Здесь $\{\zeta, \xi\}$ — решение задачи (3.58)–(3.60), $\{\tilde{\zeta}, \tilde{\xi}\}$ — решение задачи (3.68)–(3.70).

Доказательство. Рассмотрим случай $\zeta_0 \geq 0$. Сравнивая решение задачи (3.58)–(3.60) с решением $\zeta = 0, \xi = 0$, получаем по теореме 3.9, что $\zeta \geq 0, \xi \geq 0$. Обозначим $\bar{\zeta} = \zeta - \tilde{\zeta}$, $\bar{\xi} = \xi - \tilde{\xi}$, $\bar{\beta} = \alpha r \leq \beta$, $\bar{\gamma} = \alpha r \leq \gamma$. Тогда для любого $v \in V$ п.в. на $(0, +\infty)$ справедливы тождества

$$\begin{aligned} (\bar{\zeta}', v) + a(\nabla \bar{\zeta}, \nabla v) + \int_{\Gamma} \bar{\beta} \bar{\zeta} v d\Gamma + \int_{\Gamma} (\beta - \bar{\beta}) \zeta v d\Gamma + \\ + b\kappa_a((h_0 \bar{\zeta}, v) - (\bar{\xi}, v)) = 0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\alpha(\nabla \bar{\xi}, \nabla v) + \int_{\Gamma} \bar{\gamma} \bar{\xi} v d\Gamma + \int_{\Gamma} (\gamma - \bar{\gamma}) \xi v d\Gamma + \kappa_a((\bar{\xi}, v) - (h_0 \bar{\zeta}, v)) = 0, \quad (3.73)$$

и при этом $\bar{\zeta}|_{t=0} = 0$. Пусть $\eta = \max\{\bar{\zeta}, 0\}$, $\psi = \max\{\bar{\xi}, 0\}$. Полагая в (3.72) $v = \eta$, в (3.73) $v = \psi$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\eta(t)\|^2 + \int_0^t \left\{ a \|\nabla \eta\|^2 + \int_{\Gamma} \bar{\beta} \eta^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} (\beta - \bar{\beta}) \zeta \eta d\Gamma + \right. \\ \left. + b\kappa_a((h_0 \eta, \eta) - (\bar{\xi}, \eta)) \right\} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\alpha \|\nabla \psi\|^2 + \int_{\Gamma} \bar{\gamma} \psi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} (\gamma - \bar{\gamma}) \xi \psi d\Gamma + \kappa_a(\|\psi\|^2 - (h_0 \bar{\zeta}, \psi)) = 0. \quad (3.75)$$

Заметим, что третье слагаемое под знаком интеграла в (3.74) и третье слагаемое в (3.75) неотрицательны. Рассуждая далее, как при доказательстве теоремы

3.9, получим $\eta = \psi = 0$, отсюда $\zeta \leq \tilde{\zeta}$, $\xi \leq \tilde{\xi}$. Случай $\zeta_0 \leq 0$ рассматривается аналогично. ■

Теорема 3.12. Пусть выполняется условие (i), $\zeta_0 \in L^\infty(\Omega)$. Для решения задачи (3.68)–(3.70) справедлива оценка глобальной асимптотической устойчивости:

$$\|\tilde{\zeta}(t)\|^2 \leq \left(1 + \frac{\kappa_a}{\alpha\lambda_1}\right) \|\zeta_0\|^2 e^{-2a\lambda_1 t}.$$

Здесь λ_1 — минимальное собственное значение оператора A .

Доказательство. Из уравнения (3.69) следует, что

$$\tilde{\xi} = (\alpha A + \kappa_a I)^{-1}(h_0 \tilde{\zeta}), \quad \kappa_a(h_0 \tilde{\zeta} - \tilde{\xi}) = \alpha A \tilde{\xi} = \alpha A(\alpha A + \kappa_a I)^{-1}(h_0 \tilde{\zeta}).$$

Умножим скалярно уравнение (3.68) на $A^{-1}(\alpha A + \kappa_a I)\tilde{\zeta}$. Тогда

$$(\tilde{\zeta}', A^{-1}(\alpha A + \kappa_a I)\tilde{\zeta}) + a(A\tilde{\zeta}, A^{-1}(\alpha A + \kappa_a I)\tilde{\zeta}) + b\kappa_a(h_0 \tilde{\zeta} - \tilde{\xi}, A^{-1}(\alpha A + \kappa_a I)\tilde{\zeta}) = 0,$$

$$\begin{aligned} &(\tilde{\zeta}', A^{-1}(\alpha A + \kappa_a I)\tilde{\zeta}) + a((\alpha A + \kappa_a I)\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}) + \\ &+ b\alpha(A(\alpha A + \kappa_a I)^{-1}(h_0 \tilde{\zeta}), A^{-1}(\alpha A + \kappa_a I)\tilde{\zeta}) = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что третье слагаемое равно $b\alpha(h_0 \tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}) \geq 0$. Поэтому

$$(\tilde{\zeta}', A^{-1}(\alpha A + \kappa_a I)\tilde{\zeta}) + a((\alpha A + \kappa_a I)\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}) \leq 0. \quad (3.76)$$

В силу теоремы Гильберта–Шмидта и компактности вложения $V \subset H$ собственные функции оператора A ,

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (w_i, w_j) = \delta_{ij}, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

образуют базис пространств H и V . Переходя в (3.76) к разложениям в ряды Фурье, $\tilde{\zeta} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t)w_j$, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{\kappa_a}{\lambda_j}\right) c_j'(t)c_j(t) + \sum_{j=1}^{\infty} a(\alpha\lambda_j + \kappa_a)c_j^2(t) \leq 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{\kappa_a}{\lambda_j} \right) c_j^2(t) + a\lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{\kappa_a}{\lambda_j} \right) c_j^2(t) \leq 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha \|\tilde{\zeta}(t)\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{\kappa_a}{\lambda_j} \right) c_j^2(t) \leq e^{-2a\lambda_1 t} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{\kappa_a}{\lambda_j} \right) c_j^2(0) \leq \\ &\leq e^{-2a\lambda_1 t} \left(\alpha + \frac{\kappa_a}{\lambda_1} \right) \|\zeta_0\|^2. \end{aligned}$$

Из полученных неравенств вытекает утверждение теоремы. ■

Рассмотрим решения задачи (3.58)–(3.60) с начальными данными ζ_0 , $\zeta_0^+ = \max\{\zeta_0, 0\}$, $\zeta_0^- = \min\{\zeta_0, 0\}$, которые обозначим, соответственно, через $\{\zeta, \xi\}$, $\{\zeta^+, \xi^+\}$, $\{\zeta^-, \xi^-\}$. Решения вспомогательной задачи (3.68)–(3.70) с начальными данными ζ_0^+ , ζ_0^- обозначим через $\{\tilde{\zeta}^+, \tilde{\xi}^+\}$, $\{\tilde{\zeta}^-, \tilde{\xi}^-\}$. Заметим, что в силу теорем 3, 5, 6

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}^- &\leq \zeta^- \leq \zeta \leq \zeta^+ \leq \tilde{\zeta}^+, \quad \|\zeta_0\|^2 = \|\zeta_0^-\|^2 + \|\zeta_0^+\|^2, \\ \|\zeta(t)\|^2 &\leq \|\tilde{\zeta}^-(t)\|^2 + \|\tilde{\zeta}^+(t)\|^2 \leq \left(1 + \frac{\kappa_a}{\alpha\lambda_1} \right) (\|\zeta_0^-\|^2 + \|\zeta_0^+\|^2) e^{-2a\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Далее, заметим, что из уравнения (3.59) вытекает оценка $\|\xi\| \leq \|g(\zeta, \theta_s)\|$. Если выполняются условия (i), (ii), то в силу теоремы 1 $|g(\zeta, \theta_s)| \leq 4M^3|\zeta|$, где $M = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$. Поэтому $\|\xi\| \leq 4M^3\|\zeta\|$. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 3.13. Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда для решения задачи (3.50)–(3.53) справедливы оценки глобальной асимптотической устойчивости:

$$\begin{aligned} \|\theta(t) - \theta_s\|^2 &\leq \left(1 + \frac{\kappa_a}{\alpha\lambda_1} \right) \|\theta_0 - \theta_s\|^2 e^{-2a\lambda_1 t}, \\ \|\varphi(t) - \varphi_s\|^2 &\leq 16M^6 \left(1 + \frac{\kappa_a}{\alpha\lambda_1} \right) \|\theta_0 - \theta_s\|^2 e^{-2a\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

где λ_1 — минимальное собственное значение оператора (3.67), $M = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$.

Глава 4

Анализ задач оптимального управления

4.1. Оптимальное управление граничным коэффициентом
в нестационарной модели

4.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу создания заданной структуры температурного поля за счет динамического изменения коэффициента $u = \gamma$, зависящего от коэффициента излучения границы области, в рамках модели (3.1)–(3.4). Задача оптимального управления заключается в определении функции $u \in L^2(\Sigma)$ и пары $y = \{\theta, \varphi\}$, удовлетворяющих (3.1)–(3.4), таких, что выполняется условие

$$u_1(x, t) \leq u(x, t) \leq u_2(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma$$

и функционал

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\theta - \theta_d)^2 dx dt$$

достигает минимального значения. Здесь θ_d, u_1, u_2 — заданные функции.

Будем предполагать, что выполняются условия:

- (i) $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$;
- (ii) $\beta \in L^\infty(\Gamma)$, $u_1, u_2, \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$, $0 < \beta_0 \leq \beta$, $0 < u_0 \leq u_1 \leq u_2$, $\beta_0, u_0 = \text{const}$, $\theta_b \geq 0$;
- (iii) $\beta + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq 0$;
- (iv) $0 \leq \theta_0, \varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$.

В дальнейшем будем использовать пространства вида $X \times Z$ с нормой $\|y\|_{X \times Z} = (\|y_1\|_X^2 + \|y_2\|_Z^2)^{1/2}$ для $y = \{y_1, y_2\}$, обозначим $\mathbf{H} = H \times H$, $\mathbf{V} = V \times V$, $\mathbf{V}' = V' \times V'$, $\mathbf{W} = W \times W$. Обозначим через $U = L^2(\Sigma)$ пространство управлений, $U_{ad} = \{u \in U : u_1 \leq u \leq u_2\}$ — множество допустимых управлений.

Определим операторы $D: \mathbf{V}' \rightarrow \mathbf{V}'$, $A_{1,3,4}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$, $A_2(t): \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$, $F(t): \mathbf{V} \times L^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{V}'$, $B(t): L^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{V}'$ и функционал $f \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ при помощи следующих равенств, справедливых для любых $y = \{\theta, \varphi\}$, $z = \{v, w\} \in \mathbf{V}$, $y' = \{\theta', \varphi'\} \in \mathbf{V}'$:

$$\begin{aligned} (Dy', z) &= (\theta', v) + \mu(\varphi', w), \quad A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \\ (A_1y, z) &= a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v \, d\Gamma + \alpha(\nabla\varphi, \nabla w) + \kappa_a(\varphi, w), \\ (A_2(t)y, z) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla\theta, v), \quad (A_3y, z) = -b\kappa_a(\varphi, v), \quad (A_4y, z) = \kappa_a(|\theta|\theta^3, bv - w), \\ (F(t)(y, u), z) &= \int_{\Gamma} u\varphi w \, d\Gamma, \quad (B(t)u, z) = \int_{\Gamma} u\theta_b^4 w \, d\Gamma, \quad (f, z) = \int_{\Gamma} \beta\theta_b v \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Определение 4.1. Пара $y = \{\theta, \varphi\} \in \mathbf{W}$ называется слабым решением задачи (3.1)–(3.4), соответствующим управлению $u \in U_{ad}$, если

$$Dy' + Ay + F(y, u) = Bu + f \quad \text{н.в. на } (0, T), \quad y|_{t=0} = y_0 \equiv \{\theta_0, \varphi_0\}. \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда для любого $u \in U_{ad}$ задача (4.1) имеет единственное решение $y = \{\theta, \varphi\}$, и справедливы неравенства

$$0 \leq \theta \leq M, \quad 0 \leq \varphi \leq M^4, \quad (4.2)$$

где $M = \max \left\{ \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/4} \right\}$. Кроме того, справедлива оценка

$$\|y\|_{\mathbf{W}} \leq C, \quad (4.3)$$

где C зависит только от Ω , T , M , $\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}$, $\|u\|_{L^\infty(\Sigma)}$, $\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))}$, a , α , b , κ_a , μ .

Доказательство. Однозначная разрешимость задачи (4.1) и справедливость неравенств (4.2) вытекает из теорем 2.3, 2.4, 2.5 (случай, когда функция γ зависит от времени, рассматривается аналогично).

Чтобы получить оценку (4.3), умножим скалярно уравнение (4.1) на $\{\theta, 0\}$

и $\{0, \varphi\}$ и проинтегрируем полученные равенства по t от 0 до T . Будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|\theta(T)\|^2 - \frac{1}{2}\|\theta_0\|^2 + \\ & + \int_0^T \left(a\|\nabla\theta\|^2 + \int_{\Gamma} \beta(\theta - \theta_b)\theta d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\theta^2 d\Gamma + b\kappa_a(\theta^4 - \varphi, \theta) \right) dt = 0, \\ & \frac{\mu}{2}\|\varphi(T)\|^2 - \frac{\mu}{2}\|\varphi_0\|^2 + \int_0^T \left(\alpha\|\nabla\varphi\|^2 + \int_{\Gamma} u(\varphi - \theta_b^4)\varphi d\Gamma + \kappa_a(\varphi - \theta^4, \varphi) \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством $|\theta^4 - \varphi| \leq M^4$, получим

$$a \int_0^T \|\nabla\theta\|^2 dt \leq \frac{1}{2}\|\theta_0\|^2 + b\kappa_a M^5 |\Omega| T + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} M^2 |\Gamma| T, \quad (4.4)$$

$$\alpha \int_0^T \|\nabla\varphi\|^2 dt \leq \frac{\mu}{2}\|\varphi_0\|^2 + \kappa_a M^8 |\Omega| T + \|u\|_{L^\infty(\Gamma)} M^8 |\Gamma| T. \quad (4.5)$$

Для получения оценки производной y' в пространстве $L^2(0, T; \mathbf{V}')$ умножим уравнение (4.1) на функции $\{v, 0\}, \{0, w\} \in \mathbf{V}$. Будем иметь

$$\begin{aligned} (\theta', v) + a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta(\theta - \theta_b)v d\Gamma + (\mathbf{v} \cdot \nabla\theta, v) + b\kappa_a(\theta^4 - \varphi, v) &= 0, \\ \mu(\varphi', w) + \alpha(\nabla\varphi, \nabla w) + \int_{\Gamma} u(\varphi - \theta_b^4)w d\Gamma + \kappa_a(\varphi - \theta^4, w) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера и неравенства $|\theta - \theta_b| \leq M$, $|\varphi - \theta_b^4| \leq M^4$, получим

$$\begin{aligned} (\theta', v) &\leq a\|\nabla\theta\|\|\nabla v\| + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} M |\Gamma|^{1/2} \|v\|_{L^2(\Gamma)} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla\theta\| \|v\|_{L^4(\Omega)} + \\ &+ b\kappa_a M^4 |\Omega|^{1/2} \|v\|, \end{aligned}$$

$$\mu(\varphi', w) \leq \alpha\|\nabla\varphi\|\|\nabla w\| + \|u\|_{L^\infty(\Gamma)} M^4 |\Gamma|^{1/2} \|w\|_{L^2(\Gamma)} + \kappa_a M^4 |\Omega|^{1/2} \|w\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\theta'\|_{V'} &= \sup_{\|v\|_V=1} (\theta', v) \leq a\|\nabla\theta\| + C_1 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} M |\Gamma|^{1/2} + \\ &+ C_2^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\nabla\theta\| + b\kappa_a M^4 |\Omega|^{1/2}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\mu \|\varphi'\|_{V'} = \mu \sup_{\|w\|_V=1} (\varphi', w) \leq \alpha \|\nabla \varphi\| + C_1 \|u\|_{L^\infty(\Gamma)} M^4 |\Gamma|^{1/2} + \kappa_a M^4 |\Omega|^{1/2}. \quad (4.7)$$

Здесь через C_1 и C_2 обозначены нормы оператора следа $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ и оператора вложения $H^1(\Omega) \rightarrow L^4(\Omega)$.

Из неравенств (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) вытекает оценка (4.3). ■

Для заданной функции $\theta_d \in L^2(0, T; H)$ определим целевой функционал

$$J(y) = \int_0^T \|\theta - \theta_d\|^2 dt, \quad y = \{\theta, \varphi\} \in L^2(0, T; \mathbf{H}).$$

Рассмотрим множество \mathcal{U} допустимых пар $\{y, u\}$, для которых $u \in U_{ad}$ и $y \in \mathbf{W}$ есть решение задачи (4.1). Задача оптимального управления заключается в минимизации функционала J на множестве допустимых пар:

$$J(y) \rightarrow \inf, \quad \{y, u\} \in \mathcal{U}. \quad (4.8)$$

Решение $\{y, u\}$ будем называть оптимальной парой, а его компоненты y, u — оптимальным состоянием и оптимальным управлением соответственно.

4.1.2. Существование оптимальных управлений

Теорема 4.2. Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда существует решение задачи (4.8).

Доказательство. Положим $j = \inf\{J(y) : \{y, u\} \in \mathcal{U}\}$. Тогда существует последовательность $\{y_k, u_k\} \in \mathcal{U}$ такая, что $J(y_k) \rightarrow j$. Последовательность u_k ограничена в U , и из оценки (4.3) вытекает, что последовательность y_k ограничена в \mathbf{W} . По лемме 1.4 существуют подпоследовательности: $u_k \rightharpoonup u$ слабо в U , $y_k \rightharpoonup y$ слабо в \mathbf{W} . В силу компактности вложения $W \subset L^2(0, T; H)$ [16, глава 1, теорема 5.1], $y_k \rightarrow y$ сильно в $L^2(0, T; \mathbf{H})$.

Докажем, что $\{y, u\} \in \mathcal{U}$. Поскольку множество U_{ad} выпукло и замкнуто, то по лемме 1.7 получаем, что $u \in U_{ad}$. Остается доказать, что y — решение задачи (4.1). Так как $y'_k \rightharpoonup y'$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$, то $Dy'_k \rightharpoonup Dy'$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$. Поскольку A_1, A_3 — линейные непрерывные операторы, то

$A_1 y_k \rightharpoonup A_1 y$, $A_3 y_k \rightharpoonup A_3 y$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$. Так как $\|B(t)u\|_{V'} \leq C\|u\|_{L^2(\Gamma)}$, где $C = \text{const} > 0$ не зависит от t , то оператор $B: U \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{V}')$ непрерывен, поэтому $Bu_k \rightharpoonup Bu$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$. Аналогично $A_2 y_k \rightharpoonup A_2 y$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$.

Чтобы доказать, что $A_4 y_k \rightharpoonup A_4 y$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$, докажем, что $\int_0^T (\theta_k^4, v) dt \rightarrow \int_0^T (\theta^4, v) dt$ для любого $v \in L^2(0, T; V)$, где $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$, $y = \{\theta, \varphi\}$. Так как $0 \leq \theta_k \leq M$, то по лемме 1.13 получаем, что $0 \leq \theta \leq M$, тогда

$$\left| \int_0^T (\theta_k^4 - \theta^4, v) dt \right| \leq 4M^3 \int_0^T \|\theta_k - \theta\| \|v\| dt \leq 4M^3 \|\theta_k - \theta\|_{L^2(0, T; H)} \|v\|_{L^2(0, T; H)} \rightarrow 0,$$

так как $\theta_k \rightarrow \theta$ сильно в $L^2(0, T; H)$.

Докажем, что $F(y_k, u_k) \rightarrow F(y, u)$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$, т.е.

$$\int_0^T \int_{\Gamma} u_k \varphi_k v d\Gamma dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Gamma} u \varphi v d\Gamma dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V).$$

Достаточно доказать, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$ сильно в $L^2(\Sigma)$. По лемме 1.23 для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_\varepsilon > 0$ такая, что для всех k справедливо неравенство

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \varepsilon \|\varphi_k - \varphi\|_V^2 + C_\varepsilon \|\varphi_k - \varphi\|^2,$$

отсюда

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq \varepsilon \|\varphi_k - \varphi\|_{L^2(0, T; V)}^2 + C_\varepsilon \|\varphi_k - \varphi\|_{L^2(0, T; H)}^2. \quad (4.9)$$

Так как $\varphi_k \rightharpoonup \varphi$ слабо в $L^2(0, T; V)$ и $\varphi_k \rightarrow \varphi$ сильно в $L^2(0, T; H)$, то из неравенства (4.9) вытекает, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$ сильно в $L^2(\Sigma)$. Действительно, последовательность $\|\varphi_k - \varphi\|_{L^2(0, T; V)}^2$ ограничена, и для любого $\varepsilon_1 > 0$ существуют $\varepsilon > 0$ и $K > 0$ такие, что $\varepsilon \|\varphi_k - \varphi\|_{L^2(0, T; V)}^2 < \varepsilon_1/2$, $C_\varepsilon \|\varphi_k - \varphi\|_{L^2(0, T; H)}^2 < \varepsilon_1/2$ при $k > K$, следовательно, $\|\varphi_k - \varphi\|_{L^2(\Sigma)}^2 < \varepsilon_1$ при $k > K$.

Полученные результаты о сходимости позволяют утверждать, что пара $\{y, u\}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.1). В силу непрерывности оператора следа $y \in \mathbf{W} \rightarrow y|_{t=0} \in \mathbf{H}$ имеем $y|_{t=0} = y_0$. Поэтому $\{y, u\}$ — допустимая пара.

Так как функционал J слабо полунепрерывен снизу, то $J(y) = j$, т.е. $\{y, u\}$ — оптимальная пара. ■

4.1.3. Система оптимальности

Вывод системы оптимальности задачи (4.8) с применением классического принципа Лагранжа затруднителен, так как оператор ограничений, действующий на функции из пространства W , не определен в окрестности оптимальной пары за счет нелинейности θ^4 . Получение условий оптимальности основано на оценках производной отображения «управление \rightarrow состояние».

Пусть $\{\hat{y}, \hat{u}\}$ — оптимальная пара. Выберем произвольный элемент $u \in U_{ad}$. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ положим

$$u_\varepsilon = \hat{u} + \varepsilon(u - \hat{u}), \quad g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(y_\varepsilon - \hat{y}),$$

где y_ε — решение задачи (4.1), соответствующее управлению u_ε . Так как U_{ad} выпукло, то $u_\varepsilon \in U_{ad}$.

Пары $\{y_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ и $\{\hat{y}, \hat{u}\}$ удовлетворяют уравнениям

$$Dy'_\varepsilon + Ay_\varepsilon + F(y_\varepsilon, u_\varepsilon) = Bu_\varepsilon + f, \quad y_\varepsilon|_{t=0} = y_0, \quad (4.10)$$

$$D\hat{y}' + A\hat{y} + F(\hat{y}, \hat{u}) = B\hat{u} + f, \quad \hat{y}|_{t=0} = y_0. \quad (4.11)$$

Вычтем из уравнения (4.10) уравнение (4.11) и разделим на ε , получим

$$\begin{aligned} Dg'_\varepsilon + A_1g_\varepsilon + A_2g_\varepsilon + A_3g_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(A_4y_\varepsilon - A_4\hat{y}) + \\ + F(g_\varepsilon, \hat{u}) + \varepsilon F(g_\varepsilon, u - \hat{u}) + F(\hat{y}, u - \hat{u}) = B(u - \hat{u}), \quad g_\varepsilon|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (A_4y_\varepsilon - A_4\hat{y}, z) &= \kappa_a(\theta_\varepsilon^4 - \hat{\theta}^4, bv - w) = \kappa_a((\hat{\theta} + \varepsilon g_{\varepsilon 1})^4 - \hat{\theta}^4, bv - w) = \\ &= \varepsilon \kappa_a(4\hat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1} + 6\varepsilon \hat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2 + 4\varepsilon^2 \hat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3 + \varepsilon^3 g_{\varepsilon 1}^4, bv - w), \end{aligned}$$

где $z = \{v, w\} \in \mathbf{V}$, $g_\varepsilon = \{g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 2}\}$, $y_\varepsilon = \{\theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\}$.

Лемма 4.1. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H})} + \|g_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})} + \|g'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}')} \leq C,$$

где постоянная C не зависит от ε .

Доказательство. Перепишем уравнение (4.12) в виде двух тождеств, которые справедливы п.в. на $(0, T)$ для любого $v \in V$:

$$\begin{aligned} (g'_{\varepsilon 1}, v) + a(\nabla g_{\varepsilon 1}, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta g_{\varepsilon 1} v d\Gamma + (\mathbf{v} \cdot \nabla g_{\varepsilon 1}, v) - b\kappa_a(g_{\varepsilon 2}, v) + \\ + b\kappa_a \left(4(\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, v) + 6\varepsilon(\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, v) + 4\varepsilon^2(\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, v) + \varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, v) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \mu(g'_{\varepsilon 2}, v) + \alpha(\nabla g_{\varepsilon 2}, \nabla v) + \int_{\Gamma} \widehat{u} g_{\varepsilon 2} v d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} (u - \widehat{u}) g_{\varepsilon 2} v d\Gamma + \int_{\Gamma} (u - \widehat{u}) \widehat{\varphi} v d\Gamma + \\ + \kappa_a(g_{\varepsilon 2}, v) - \kappa_a \left(4(\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, v) + 6\varepsilon(\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, v) + 4\varepsilon^2(\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, v) + \varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, v) \right) = \\ = \int_{\Gamma} (u - \widehat{u}) \theta_b^4 v d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Положим в (4.13) $v = g_{\varepsilon 1}$, а в (4.14) $v = g_{\varepsilon 2}$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|g_{\varepsilon 1}\|^2 + a \|\nabla g_{\varepsilon 1}\|^2 + \int_{\Gamma} \beta g_{\varepsilon 1}^2 d\Gamma + (\mathbf{v} \cdot \nabla g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 1}) - b\kappa_a(g_{\varepsilon 2}, g_{\varepsilon 1}) + \\ + b\kappa_a \left(4(\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 1}) + 6\varepsilon(\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, g_{\varepsilon 1}) + 4\varepsilon^2(\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, g_{\varepsilon 1}) + \varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, g_{\varepsilon 1}) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \|g_{\varepsilon 2}\|^2 + \alpha \|\nabla g_{\varepsilon 2}\|^2 + \int_{\Gamma} \widehat{u} g_{\varepsilon 2}^2 d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} (u - \widehat{u}) g_{\varepsilon 2}^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} (u - \widehat{u}) \widehat{\varphi} g_{\varepsilon 2} d\Gamma + \\ + \kappa_a \|g_{\varepsilon 2}\|^2 - \kappa_a \left(4(\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 2}) + 6\varepsilon(\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, g_{\varepsilon 2}) + 4\varepsilon^2(\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, g_{\varepsilon 2}) + \varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, g_{\varepsilon 2}) \right) = \\ = \int_{\Gamma} (u - \widehat{u}) \theta_b^4 g_{\varepsilon 2} d\Gamma. \end{aligned}$$

Введем положительные постоянные

$$k_1 = \inf_{v \in V, \|v\|_V=1} \left(a \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \beta v^2 d\Gamma \right), \quad k_2 = \inf_{v \in V, \|v\|_V=1} \left(\alpha \|\nabla v\|^2 + \int_{\Gamma} u_0 v^2 d\Gamma \right).$$

Справедливы оценки:

$$\begin{aligned} a\|\nabla g_{\varepsilon 1}\|^2 + \int_{\Gamma} \beta g_{\varepsilon 1}^2 d\Gamma + (\mathbf{v} \cdot \nabla g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 1}) = \\ = a\|\nabla g_{\varepsilon 1}\|^2 + \int_{\Gamma} \beta g_{\varepsilon 1}^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) g_{\varepsilon 1}^2 d\Gamma \geq k_1 \|g_{\varepsilon 1}\|_V^2, \end{aligned}$$

$$\alpha\|\nabla g_{\varepsilon 2}\|^2 + \int_{\Gamma} \hat{u} g_{\varepsilon 2}^2 d\Gamma \geq k_2 \|g_{\varepsilon 2}\|_V^2, \quad |(g_{\varepsilon 2}, g_{\varepsilon 1})| \leq \frac{1}{2}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2),$$

$$|(\hat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 1})| = \left| \int_{\Omega} \hat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}^2 dx \right| \leq M^3 \|g_{\varepsilon 1}\|^2.$$

Так как $\varepsilon g_{\varepsilon} = y_{\varepsilon} - \hat{y}$, то $|\varepsilon g_{\varepsilon 1}| \leq M$, $|\varepsilon g_{\varepsilon 2}| \leq M^4$, поэтому

$$|\varepsilon(\hat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, g_{\varepsilon 1})| = \left| \int_{\Omega} \hat{\theta}^2 \varepsilon g_{\varepsilon 1} g_{\varepsilon 1}^2 dx \right| \leq M^3 \|g_{\varepsilon 1}\|^2,$$

аналогично

$$\begin{aligned} |\varepsilon^2(\hat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, g_{\varepsilon 1})| &\leq M^3 \|g_{\varepsilon 1}\|^2, \quad |\varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, g_{\varepsilon 1})| \leq M^3 \|g_{\varepsilon 1}\|^2, \\ |(\hat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 2})| &= \left| \int_{\Omega} \hat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1} g_{\varepsilon 2} dx \right| \leq M^3 \|g_{\varepsilon 1}\| \|g_{\varepsilon 2}\| \leq \frac{M^3}{2}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2), \\ |\varepsilon(\hat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, g_{\varepsilon 2})| &= \left| \int_{\Omega} \hat{\theta}^2 \varepsilon g_{\varepsilon 1} g_{\varepsilon 1} g_{\varepsilon 2} dx \right| \leq M^3 \|g_{\varepsilon 1}\| \|g_{\varepsilon 2}\| \leq \frac{M^3}{2}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2), \\ |\varepsilon^2(\hat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, g_{\varepsilon 2})| &\leq \frac{M^3}{2}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2), \quad |\varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, g_{\varepsilon 2})| \leq \frac{M^3}{2}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2). \end{aligned}$$

Оценим граничные интегралы:

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon \int_{\Gamma} (u - \hat{u}) g_{\varepsilon 2}^2 d\Gamma \right| &\leq C_1 \left| \int_{\Gamma} \varepsilon g_{\varepsilon 2} g_{\varepsilon 2} d\Gamma \right| \leq C_1 M^4 \left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 2} d\Gamma \right| \leq \\ &\leq C_2 \|g_{\varepsilon 2}\|_V \leq \delta \|g_{\varepsilon 2}\|_V^2 + C_{\delta}, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\Gamma} (u - \hat{u}) \hat{\varphi} g_{\varepsilon 2} d\Gamma \right| \leq \delta \|g_{\varepsilon 2}\|_V^2 + C_{\delta}, \quad \left| \int_{\Gamma} (u - \hat{u}) \theta_b^4 g_{\varepsilon 2} d\Gamma \right| \leq \delta \|g_{\varepsilon 2}\|_V^2 + C_{\delta}.$$

Данные неравенства справедливы для любого $\delta > 0$ с некоторой константой $C_\delta > 0$. Здесь и далее C_i — положительные постоянные, не зависящие от ε .

Выбрав достаточно малое $\delta > 0$, получим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + C_3\|g_{\varepsilon 1}\|_V^2 &\leq C_4\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + C_5\|g_{\varepsilon 2}\|^2, \\ \frac{d}{dt}\|g_{\varepsilon 2}\|^2 + C_6\|g_{\varepsilon 2}\|_V^2 &\leq C_7\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + C_8\|g_{\varepsilon 2}\|^2 + C_9.\end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{d}{dt}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2) + C_{10}(\|g_{\varepsilon 1}\|_V^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|_V^2) \leq C_{11}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2) + C_{12}. \quad (4.15)$$

Отсюда

$$\|g_{\varepsilon 1}(t)\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}(t)\|^2 \leq C_{11} \int_0^t (\|g_{\varepsilon 1}(\tau)\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}(\tau)\|^2) d\tau + C_{12}T.$$

По лемме Гронуолла

$$\|g_{\varepsilon 1}(t)\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}(t)\|^2 \leq C_{12}Te^{C_{11}t}.$$

Следовательно, $\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H})} \leq C_{13}$.

Из (4.15) получаем, что

$$\|g_{\varepsilon 1}(t)\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}(t)\|^2 + C_{10} \int_0^t (\|g_{\varepsilon 1}(\tau)\|_V^2 + \|g_{\varepsilon 2}(\tau)\|_V^2) d\tau \leq C_{14}.$$

Таким образом,

$$\|g_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})} \leq C_{15}. \quad (4.16)$$

Оценим производные по t :

$$\begin{aligned}\|g'_{\varepsilon 1}\|_{V'} &= \sup_{\|v\|_V=1} (g'_{\varepsilon 1}, v) \leq \sup_{\|v\|_V=1} (a\|\nabla g_{\varepsilon 1}\|\|\nabla v\| + C_{16}\|g_{\varepsilon 1}\|_V\|v\|_V + \\ &+ \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla g_{\varepsilon 1}\|\|v\|_{L^4(\Omega)} + b\kappa_a\|g_{\varepsilon 2}\|\|v\| + C_{17}\|g_{\varepsilon 1}\|\|v\|) \leq C_{18}\|g_{\varepsilon 1}\|_V + C_{19}\|g_{\varepsilon 2}\|,\end{aligned}$$

аналогично

$$\|g'_{\varepsilon 2}\|_{V'} \leq C_{20}\|g_{\varepsilon 2}\|_V + C_{21}\|g_{\varepsilon 1}\| + C_{22}.$$

Из полученных неравенств и оценки (4.16) получим $\|g'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}')} \leq C_{23}$. ■

Лемма 4.2. Пусть $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ — оптимальная пара. Тогда для каждого элемента $u \in U_{ad}$ существует решение $g = \{g_1, g_2\} \in \mathbf{W}$ задачи

$$Dg' + A_1g + A_2g + A_3g + A_5(g, \widehat{y}) + F(g, \widehat{u}) + F(\widehat{y}, u - \widehat{u}) = B(u - \widehat{u}),$$

$$g|_{t=0} = 0, \quad (4.17)$$

где

$$(A_5(g, \widehat{y}), z) = 4\kappa_a(\widehat{\theta}^3 g_1, bv - w),$$

такое, что

$$\int_0^T (\widehat{\theta} - \theta_d, g_1) dt \geq 0. \quad (4.18)$$

Доказательство. Сделаем предельный переход в уравнении (4.12) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как последовательность g_ε ограничена в \mathbf{W} , то существует подпоследовательность $g_\varepsilon \rightharpoonup g$ слабо в \mathbf{W} , и поэтому $g_\varepsilon \rightarrow g$ сильно в $L^2(0, T; \mathbf{H})$. Так как D, A_1, A_2, A_3, F — линейные непрерывные операторы, то $Dg'_\varepsilon \rightharpoonup Dg', A_1g_\varepsilon \rightharpoonup A_1g, A_2g_\varepsilon \rightharpoonup A_2g, A_3g_\varepsilon \rightharpoonup A_3g, F(g_\varepsilon, \widehat{u}) \rightharpoonup F(g, \widehat{u}), F(g_\varepsilon, u - \widehat{u}) \rightharpoonup F(g, u - \widehat{u})$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$.

Чтобы сделать предельный переход в пятом слагаемом в (4.12), нужно показать, что $\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1} \rightarrow \widehat{\theta}^3 g_1, \varepsilon \widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2 \rightarrow 0, \varepsilon^2 \widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3 \rightarrow 0, \varepsilon^3 g_{\varepsilon 1}^4 \rightarrow 0$ слабо в $L^2(0, T; V')$.

Проверим, что

$$\int_0^T (\widehat{\theta}^3 (g_{\varepsilon 1} - g_1), v) dt \rightarrow 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; V).$$

В самом деле,

$$\left| \int_0^T (\widehat{\theta}^3 (g_{\varepsilon 1} - g_1), v) dt \right| \leq M^3 \int_0^T \|g_{\varepsilon 1} - g_1\| \|v\| dt \leq$$

$$\leq M^3 \|g_{\varepsilon 1} - g_1\|_{L^2(0, T; H)} \|v\|_{L^2(0, T; H)} \rightarrow 0,$$

так как $g_{\varepsilon 1} \rightarrow g_1$ сильно в $L^2(0, T; H)$.

Последовательность $\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2$ ограничена в $L^2(0, T; V')$, так как

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2\|_{V'}^2 dt &= \int_0^T \left(\sup_{\|v\|_V=1} \left| \int_{\Omega} \widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2 v dx \right| \right)^2 dt \leq \\ &\leq M^4 \int_0^T \left(\sup_{\|v\|_V=1} \|g_{\varepsilon 1}\| \|g_{\varepsilon 1}\|_{L^4(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)} \right)^2 dt \leq C_1 \int_0^T \|g_{\varepsilon 1}\|_V^2 dt \leq C_2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varepsilon \widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2 \rightarrow 0$ сильно в $L^2(0, T; V')$.

Докажем, что $\varepsilon^2 \widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3 \rightarrow 0$ в $L^2(0, T; V')$. По аналогии можно показать, что $\varepsilon \widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^2 \rightarrow 0$ сильно в $L^2(0, T; V')$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon^2 \widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3 \right\|_{L^2(0, T; V')}^2 &= \int_0^T \left(\sup_{\|v\|_V=1} \left| (\varepsilon g_{\varepsilon 1} \widehat{\theta} \varepsilon g_{\varepsilon 1}^2, v) \right| \right)^2 dt \leq \\ &\leq M^2 \int_0^T \left(\sup_{\|v\|_V=1} \left| (\widehat{\theta} \varepsilon g_{\varepsilon 1}^2, v) \right| \right)^2 dt = M^2 \left\| \varepsilon \widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^2 \right\|_{L^2(0, T; V')}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким же образом доказывается утверждение $\varepsilon^3 g_{\varepsilon 1}^4 \rightarrow 0$. Итак, в результате предельного перехода получаем (4.17).

Для получения (4.18) рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\varepsilon} (J(y_{\varepsilon}) - J(\widehat{y})) = \int_0^T (\theta_{\varepsilon} + \widehat{\theta} - 2\theta_d, g_{\varepsilon 1}) dt.$$

Поскольку $g_{\varepsilon 1} \rightarrow g_1$, $\theta_{\varepsilon} = \widehat{\theta} + \varepsilon g_{\varepsilon 1} \rightarrow \widehat{\theta}$ сильно в $L^2(0, T; H)$,

$$\frac{1}{\varepsilon} (J(y_{\varepsilon}) - J(\widehat{y})) \rightarrow 2 \int_0^T (\widehat{\theta} - \theta_d, g_1) dt.$$

Так как $J(y_{\varepsilon}) \geq J(\widehat{y})$, то $\int_0^T (\widehat{\theta} - \theta_d, g_1) dt \geq 0$. ■

Перейдем к выводу системы оптимальности.

Лемма 4.3. Пусть $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ — оптимальная пара. Существует единственное решение $p \in \mathbf{W}$ сопряженной системы

$$-Dp' + A_1 p + A_6 p + A_7(p, \widehat{y}) + F(p, \widehat{u}) = G(\widehat{y}), \quad p|_{t=T} = 0, \quad (4.19)$$

где

$$(A_6 p, z) = (\mathbf{v} \cdot \nabla v, p_1), \quad (A_7(p, \hat{y}), z) = 4b\kappa_a(\hat{\theta}^3 p_1, v) - b\kappa_a(p_1, w) - 4\kappa_a(\hat{\theta}^3 p_2, v),$$

$$(G(\hat{y}), z) = (\hat{\theta} - \theta_d, v), \quad p = \{p_1, p_2\}, \quad z = \{v, w\}.$$

Доказательство. Сделаем замену $\tilde{p}(t) = p(T - t)$, получим

$$D\tilde{p}' + A_1\tilde{p} + A_6\tilde{p} + A_7(\tilde{p}, \hat{y}) + F(\tilde{p}, \hat{u}) = G(\hat{y}), \quad \tilde{p}|_{t=0} = 0.$$

Нетрудно получить оценки

$$(A_1 y + A_6 y + F(y, \hat{u}), y) \geq C_1 \|y\|_{\mathbf{V}}^2, \quad |(A_7(y, \hat{y}), y)| \leq C_2 \|y\|_{\mathbf{H}}^2,$$

из которых вытекает неравенство

$$(A_1 y + A_6 y + A_7(y, \hat{y}) + F(y, \hat{u}), y) \geq C_1 \|y\|_{\mathbf{V}}^2 - C_2 \|y\|_{\mathbf{H}}^2.$$

Следовательно [130, с. 426], решение задачи (4.19) существует и единственно. ■

Теорема 4.3. *Для любой оптимальной пары $\{\hat{y}, \hat{u}\}$ существует единственный элемент $p \in \mathbf{W}$ такой, что*

$$-Dp' + A_1 p + A_6 p + A_7(p, \hat{y}) + F(p, \hat{u}) = G(\hat{y}), \quad p|_{t=T} = 0,$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 d\Gamma dt \leq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Доказательство. Пусть $\{\hat{y}, \hat{u}\}$ — оптимальная пара, $u \in U_{ad}$. В силу леммы 4.2 существует $g \in \mathbf{W}$ такой, что

$$Dg' + A_1 g + A_2 g + A_3 g + A_5(g, \hat{y}) + F(g, \hat{u}) + F(\hat{y}, u - \hat{u}) = B(u - \hat{u}),$$

$$g|_{t=0} = 0, \quad (4.20)$$

$$\int_0^T (\hat{\theta} - \theta_d, g_1) dt \geq 0.$$

По лемме 4.3 существует $p \in \mathbf{W}$ такой, что

$$-Dp' + A_1 p + A_6 p + A_7(p, \hat{y}) + F(p, \hat{u}) = G(\hat{y}), \quad p|_{t=T} = 0. \quad (4.21)$$

Умножим скалярно (4.20) на p , (4.21) на g , вычтем одно из другого и проинтегрируем по t . В силу формулы интегрирования по частям [130, с. 423]

$$\int_0^T (Dg', p) dt = (Dg, p)|_0^T - \int_0^T (Dg, p') dt,$$

поэтому

$$\int_0^T (Dg', p) dt + \int_0^T (Dp', g) dt = 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (A_1g, p) &= (A_1p, g), & (A_2g, p) &= (A_6p, g), & (F(g, \hat{y}), p) &= (F(p, \hat{y}), g), \\ (A_3g, p) + (A_5(g, \hat{y}), p) &= (A_7(p, \hat{y}), g). \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\int_0^T (F(\hat{y}, u - \hat{u}), p) dt = \int_0^T [(B(u - \hat{u}), p) - (G(\hat{y}), g)] dt.$$

Так как

$$\int_0^T (G(\hat{y}), g) dt = \int_0^T (\hat{\theta} - \theta_d, g_1) dt \geq 0,$$

то

$$\int_0^T [(F(\hat{y}, u - \hat{u}), p) - (B(u - \hat{u}), p)] dt \leq 0,$$

или

$$\int_0^T \int_{\Gamma} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 d\Gamma dt \leq 0.$$

■

Выведем принцип bang-bang для оптимальной пары. Докажем, что

$$(\xi - \hat{u})(\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 \leq 0 \quad \forall \xi(x, t) \in [u_1(x, t), u_2(x, t)] \text{ п.в. на } \Sigma. \quad (4.22)$$

Предположим противное, что существует функция $\xi_0(x, t) \in [u_1(x, t), u_2(x, t)]$, для которой

$$(\xi_0 - \hat{u})(\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 > 0 \text{ на } E \subset \Sigma, \quad \mu(E) > 0.$$

Положим

$$u = \begin{cases} \xi_0, & x \in E, \\ \hat{u}, & x \notin E. \end{cases}$$

Очевидно, что $u \in U_{ad}$. Тогда

$$\int_0^T \int_{\Gamma} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 d\Gamma dt = \int_E (\xi_0 - \hat{u})(\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 d\Gamma > 0.$$

Приходим к противоречию.

Из неравенства (4.22) вытекает принцип bang-bang:

$$\hat{u} = \begin{cases} u_1, & \text{если } (\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 < 0, \\ u_2, & \text{если } (\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 > 0. \end{cases}$$

Замечание 4.1. Функции $p_1, p_2 \in W$ для заданных $\hat{\theta}$ и \hat{u} являются слабыми решениями следующей сопряженной начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p_1}{\partial t} - a\Delta p_1 - \mathbf{v} \cdot \nabla p_1 + 4\kappa_a \hat{\theta}^3 (bp_1 - p_2) &= \hat{\theta} - \theta_d, \\ -\mu \frac{\partial p_2}{\partial t} - \alpha \Delta p_2 + \kappa_a (p_2 - bp_1) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ a \frac{\partial p_1}{\partial n} + (\beta + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) p_1 = 0, \quad \alpha \frac{\partial p_2}{\partial n} + \hat{u} p_2 &= 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ p_1|_{t=T} = 0, \quad p_2|_{t=T} &= 0. \end{aligned}$$

4.2. Управление сложным теплообменом при создании экстремальных полей

4.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу нахождения коэффициента излучения границы области, обеспечивающего минимальные (максимальные) значения полей температуры и интенсивности излучения во всей области теплообмена. Отметим, что такие коэффициенты являются решениями задач оптимального управления для

уравнений сложного теплообмена, если целевой функционал монотонный, т.е. при увеличении функций, описывающих состояние системы, почти всюду в области определения значение функционала также растет. Примером такого функционала является квадратичный функционал, рассмотренный в разд. 4.1, при $\theta_d = 0$.

Рассматривается такая же начально-краевая задача, как в разд. 4.1, при $\mathbf{v} = 0$. Сформулируем задачи нахождения экстремальных полей на множестве допустимых пар \mathcal{U} .

Задача 1. Найти $\{\hat{y}, \hat{u}\} \in \mathcal{U}$, где $\hat{y} = \{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$, такую, что

$$\hat{\theta} \leq \theta, \quad \hat{\varphi} \leq \varphi \quad \text{п.в. в } Q$$

для всех $\{y, u\} \in \mathcal{U}$, $y = \{\theta, \varphi\}$.

Задача 2. Найти $\{\hat{y}, \hat{u}\} \in \mathcal{U}$, где $\hat{y} = \{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$, такую, что

$$\hat{\theta} \geq \theta, \quad \hat{\varphi} \geq \varphi \quad \text{п.в. в } Q$$

для всех $\{y, u\} \in \mathcal{U}$, $y = \{\theta, \varphi\}$.

Управления \hat{u} , определяющие решения задач 1, 2, будем называть сильными оптимальными управлениями.

Замечание 4.2. Рассмотрим функционал $J: [W \cap L^\infty(Q)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, обладающий свойством монотонности: если $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2$, $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2$ п.в. в Q , то $J(\theta_1, \varphi_1) \leq J(\theta_2, \varphi_2)$. Нетрудно видеть, что сильное оптимальное управление, соответствующее задаче 1 (задаче 2), является решением задачи оптимального управления $J(y) \rightarrow \inf$ (соответственно \sup), $\{y, u\} \in \mathcal{U}$.

4.2.2. Условия оптимальности

Обозначим через $\{\theta(u), \varphi(u)\}$ решение задачи (4.1), соответствующее управлению $u \in U_{ad}$.

Лемма 4.4. Пусть $u, \tilde{u} \in U_{ad}$, $\theta = \theta(u)$, $\varphi = \varphi(u)$, $\tilde{\theta} = \theta(\tilde{u})$, $\tilde{\varphi} = \varphi(\tilde{u})$ и выполняется одно из двух условий:

$$a) u = \begin{cases} u_1, & \text{если } \varphi - \theta_b^4 < 0, \\ u_2, & \text{если } \varphi - \theta_b^4 > 0; \end{cases} \quad b) u = \begin{cases} u_1, & \text{если } \tilde{\varphi} - \theta_b^4 < 0, \\ u_2, & \text{если } \tilde{\varphi} - \theta_b^4 > 0. \end{cases}$$

Тогда $\varphi \leq \tilde{\varphi}$, $\theta \leq \tilde{\theta}$ п.в. в Q .

Доказательство. Для любого $v \in V$ справедливы тождества п.в. на $(0, T)$:

$$\mu(\varphi', v) + \alpha(\nabla \varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma} u(\varphi - \theta_b^4) v d\Gamma + \kappa_a(\varphi, v) - \kappa_a(\theta^4, v) = 0,$$

$$(\theta', v) + a(\nabla \theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta(\theta - \theta_b) v d\Gamma + b\kappa_a(\theta^4, v) - b\kappa_a(\varphi, v) = 0,$$

$$\mu(\tilde{\varphi}', v) + \alpha(\nabla \tilde{\varphi}, \nabla v) + \int_{\Gamma} \tilde{u}(\tilde{\varphi} - \theta_b^4) v d\Gamma + \kappa_a(\tilde{\varphi}, v) - \kappa_a(\tilde{\theta}^4, v) = 0,$$

$$(\tilde{\theta}', v) + a(\nabla \tilde{\theta}, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta(\tilde{\theta} - \theta_b) v d\Gamma + b\kappa_a(\tilde{\theta}^4, v) - b\kappa_a(\tilde{\varphi}, v) = 0.$$

Обозначим $\bar{\theta} = \theta - \tilde{\theta}$, $\bar{\varphi} = \varphi - \tilde{\varphi}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(\bar{\varphi}', v) + \alpha(\nabla \bar{\varphi}, \nabla v) + \int_{\Gamma} [u(\varphi - \theta_b^4) - \tilde{u}(\tilde{\varphi} - \theta_b^4)] v d\Gamma + \\ + \kappa_a(\bar{\varphi}, v) - \kappa_a(\theta^4 - \tilde{\theta}^4, v) = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$(\bar{\theta}', v) + a(\nabla \bar{\theta}, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta \bar{\theta} v d\Gamma + b\kappa_a(\theta^4 - \tilde{\theta}^4, v) - b\kappa_a(\bar{\varphi}, v) = 0. \quad (4.24)$$

Обозначим $\psi = \max\{\bar{\varphi}, 0\}$, $\eta = \max\{\bar{\theta}, 0\}$, положим в (4.23) $v = \psi$, а в (4.24) $v = \eta$ и проинтегрируем полученные равенства по t . Воспользуемся равенством

$$u(\varphi - \theta_b^4) - \tilde{u}(\tilde{\varphi} - \theta_b^4) = \tilde{u}\bar{\varphi} + (u - \tilde{u})(\varphi - \theta_b^4) = u\bar{\varphi} + (u - \tilde{u})(\tilde{\varphi} - \theta_b^4).$$

Используя лемму 1.33, получим равенства

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \|\psi(t)\|^2 + \int_0^t \left[\alpha \|\nabla \psi\|^2 + \int_{\Gamma} \tilde{u} \psi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} (u - \tilde{u})(\varphi - \theta_b^4) \psi d\Gamma + \kappa_a \|\psi\|^2 \right] d\tau = \\ = \kappa_a \int_0^t \left((\theta + \tilde{\theta})(\theta^2 + \tilde{\theta}^2) \bar{\theta}, \psi \right) d\tau, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \|\psi(t)\|^2 + \int_0^t \left[\alpha \|\nabla \psi\|^2 + \int_{\Gamma} u \psi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} (u - \tilde{u})(\tilde{\varphi} - \theta_b^4) \psi d\Gamma + \kappa_a \|\psi\|^2 \right] d\tau = \\ = \kappa_a \int_0^t \left((\theta + \tilde{\theta})(\theta^2 + \tilde{\theta}^2) \bar{\theta}, \psi \right) d\tau, \quad (4.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\eta(t)\|^2 + \int_0^t \left[a \|\nabla \eta\|^2 + \int_{\Gamma} \beta \eta^2 d\Gamma + b \kappa_a \left((\theta + \tilde{\theta})(\theta^2 + \tilde{\theta}^2) \eta, \eta \right) \right] d\tau = \\ = b \kappa_a \int_0^t (\bar{\varphi}, \eta) d\tau. \end{aligned}$$

В случае а) получим, что если $\varphi < \theta_b^4$, то $u = u_1$, поэтому $u - \tilde{u} \leq 0$; если $\varphi > \theta_b^4$, то $u = u_2$, и $u - \tilde{u} \geq 0$. Следовательно, третье слагаемое под знаком интеграла в (4.25) неотрицательно. Аналогично в случае б), если $\tilde{\varphi} < \theta_b^4$, то $u = u_1$, поэтому $u - \tilde{u} \leq 0$; если $\tilde{\varphi} > \theta_b^4$, то $u = u_2$, и $u - \tilde{u} \geq 0$. Поэтому третье слагаемое под знаком интеграла в (4.26) неотрицательно. Заметим, что

$$\left((\theta + \tilde{\theta})(\theta^2 + \tilde{\theta}^2) \bar{\theta}, \psi \right) \leq \left((\theta + \tilde{\theta})(\theta^2 + \tilde{\theta}^2) \eta, \psi \right), \quad (\bar{\varphi}, \eta) \leq (\psi, \eta).$$

Следовательно,

$$\|\psi(t)\|^2 \leq C_1 \int_0^t (\|\psi(\tau)\|^2 + \|\eta(\tau)\|^2) d\tau, \quad \|\eta(t)\|^2 \leq C_2 \int_0^t (\|\psi(\tau)\|^2 + \|\eta(\tau)\|^2) d\tau.$$

По лемме Гронуолла получаем $\eta = \psi = 0$, т.е. $\theta \leq \tilde{\theta}$, $\varphi \leq \tilde{\varphi}$ п.в. в Q . ■

Теорема 4.4. *Для того, чтобы функция $u \in U_{ad}$ была сильным оптимальным управлением в задаче 1, достаточно, чтобы*

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{если } \varphi - \theta_b^4 < 0, \\ u_2, & \text{если } \varphi - \theta_b^4 > 0, \end{cases} \quad (4.27)$$

где $\varphi = \varphi(u)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{u} \in U_{ad}$ — произвольный элемент, $\theta = \theta(u)$, $\varphi = \varphi(u)$, $\tilde{\theta} = \theta(\tilde{u})$, $\tilde{\varphi} = \varphi(\tilde{u})$. Из леммы 4.4 вытекает, что $\theta \leq \tilde{\theta}$, $\varphi \leq \tilde{\varphi}$ п.в. в Q , что и требовалось доказать. ■

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4.5. Для того, чтобы функция $u \in U_{ad}$ была сильным оптимальным управлением в задаче 2, достаточно, чтобы

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{если } \varphi - \theta_b^4 > 0, \\ u_2, & \text{если } \varphi - \theta_b^4 < 0, \end{cases}$$

где $\varphi = \varphi(u)$.

Теорема 4.6. Пусть u, \tilde{u} — два сильных оптимальных управления. Тогда $u = \tilde{u}$ в точках Σ , где $\varphi \neq \theta_b^4$.

Доказательство. Из определения сильного оптимального управления имеем $\varphi(u) = \varphi(\tilde{u}) = \varphi$, $\theta(u) = \theta(\tilde{u}) = \theta$ п.в. в Q .

Из (4.23) получаем, что п.в. на $(0, T)$ выполняется тождество

$$\int_{\Gamma} [u(\varphi - \theta_b^4) - \tilde{u}(\varphi - \theta_b^4)]v \, d\Gamma = \int_{\Gamma} (u - \tilde{u})(\varphi - \theta_b^4)v \, d\Gamma = 0 \quad \forall v \in V. \quad (4.28)$$

Применяя лемму 1.20, получаем, что тождество (4.28) справедливо для любой функции $v \in L^2(\Gamma)$. Отсюда $(u - \tilde{u})(\varphi - \theta_b^4) = 0$ п.в. на Σ . Следовательно, $u = \tilde{u}$ в точках Σ , где $\varphi \neq \theta_b^4$. ■

Замечание 4.3. Если \hat{u} — сильное оптимальное управление, то при произвольном изменении значений функции $\hat{u} \in U_{ad}$ на множестве точек Σ , в которых $\varphi(\hat{u}) = \theta_b^4$, вновь получаем сильное оптимальное управление.

Замечание 4.4. Достаточные условия оптимальности (4.27) в задаче 1 имеют следующую физическую интерпретацию: на участке границы, где поток излучения направлен внутрь области, оптимальный коэффициент излучения равен минимальному значению, а на участке границы, где поток излучения направлен вне области, оптимальный коэффициент излучения равен максимальному значению.

4.3. Оптимальное управление граничным коэффициентом в квазистационарной модели

4.3.1. Постановка задачи

Квазистационарная модель сложного теплообмена имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad (4.29)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (4.30)$$

$$a\frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial n} + u(\varphi - \theta_b^4)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4.31)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (4.32)$$

Задача оптимального управления заключается в нахождении функции $u \in \Gamma$ и пары $y = \{\theta, \varphi\}$, удовлетворяющих (4.29)–(4.32), таких, что выполняется условие

$$u_1(x) \leq u(x) \leq u_2(x), \quad x \in \Gamma,$$

где u_1, u_2 — заданные функции, и некоторый целевой функционал $J(y)$ достигает минимального значения.

Будем предполагать, что выполняются условия:

- (i) $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$;
- (ii) $\beta, u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma)$, $\theta_b \in L^\infty(\Sigma)$, $0 < \beta_0 \leq \beta$, $0 < u_0 \leq u_1 \leq u_2$, $\beta_0, u_0 = \text{const}$, $\theta_b \geq 0$;
- (iii) $\beta + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq 0$;
- (iv) $0 \leq \theta_0 \in L^\infty(\Omega)$;
- (v) $\frac{d\theta_b}{dt} \in L^2(\Sigma)$.

Обозначим через $Y = W \times L^2(0, T; V)$ пространство состояний, через $U = L^2(\Gamma)$ — пространство управлений, $U_{ad} = \{u \in U : u_1 \leq u \leq u_2\}$ — множество допустимых управлений.

Определим оператор $D: Y \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{V}')$ по формуле $(Dy, z) = (\theta', v)$, где $y = \{\theta, \varphi\} \in Y$, $z = \{v, w\} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$. Операторы $A_{1,3,4}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$,

$A_2(t): \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$, $F: \mathbf{V} \times U \rightarrow \mathbf{V}'$, $B(t): U \rightarrow \mathbf{V}'$ и функционал $f \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ определены так же, как в разд. 4.1. Положим $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

Определение 4.2. Пара $y = \{\theta, \varphi\} \in Y$ называется слабым решением задачи (4.29)–(4.32), соответствующим управлению $u \in U_{ad}$, если

$$Dy + Ay + F(y, u) = Bu + f \text{ н.в. на } (0, T), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (4.33)$$

Следующая теорема доказана в [97] для случая, когда $\mathbf{v} = 0$, $\beta, \gamma = \text{const}$ и θ_b зависит только от t . Для более общего случая доказательство можно провести аналогично.

Теорема 4.7. Пусть выполняются условия (i)–(iv). Существует единственное решение $y = \{\theta, \varphi\}$ задачи (4.33), причем $0 \leq \theta \leq M$, $0 \leq \varphi \leq M^4$, где $M = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$. Кроме того, справедлива оценка

$$\|y\|_Y \leq C, \quad (4.34)$$

где C зависит только от Ω , T , M , $\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}$, $\|u\|_{L^\infty(\Gamma)}$, $\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))}$, a , α , b , κ_a .

Предположим, что целевой функционал $J: Y \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид $J(\theta, \varphi) = J_1(\theta, \varphi) + J_2(\theta|_{t=T})$, где функционалы $J_1: L^2(0, T; \mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ и $J_2: H \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы по Фреше, ограничены снизу и слабо полунепрерывны снизу. Заметим, что функционал J также обладает перечисленными свойствами, причем

$$\langle J'(\theta, \varphi), h \rangle = \langle J'_{1\theta}(\theta, \varphi), v \rangle + \langle J'_{1\varphi}(\theta, \varphi), w \rangle + (J'_2(\theta|_{t=T}), v|_{t=T}) \quad \forall h = \{v, w\} \in Y.$$

Здесь $J'_{1\theta}(\theta, \varphi), J'_{1\varphi}(\theta, \varphi) \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$, $J'_2(\theta|_{t=T}) \in H$.

Рассмотрим множество \mathcal{U} допустимых пар $\{y, u\}$, для которых $u \in U_{ad}$ и $y \in Y$ есть решение задачи (4.33). Задача оптимального управления заключается в минимизации функционала J на множестве допустимых пар:

$$J(y) \rightarrow \inf, \quad \{y, u\} \in \mathcal{U}. \quad (4.35)$$

4.3.2. Существование оптимальных управлений

Теорема 4.8. Пусть выполняются условия (i)–(v). Тогда существует решение задачи (4.35).

Доказательство. Положим $j = \inf\{J(y) : \{y, u\} \in \mathcal{U}\}$. Тогда существует последовательность $\{y_k, u_k\} \in \mathcal{U}$ такая, что $J(y_k) \rightarrow j$. Последовательность u_k ограничена в U , и из оценки (4.34) вытекает, что последовательность y_k ограничена в Y . По лемме 1.4 существуют подпоследовательности: $u_k \rightharpoonup u$ слабо в U , $y_k \rightharpoonup y$ слабо в Y . В силу компактности вложения $W \subset L^2(0, T; H)$ [16, глава 1, теорема 5.1], $\theta_k \rightarrow \theta$ сильно в $L^2(0, T; H)$.

Докажем, что $\{y, u\} \in \mathcal{U}$. Поскольку множество U_{ad} выпукло и замкнуто, то по лемме 1.7 получаем, что $u \in U_{ad}$. Остается доказать, что y — решение задачи (4.33). Так как $\theta'_k \rightharpoonup \theta'$ слабо в $L^2(0, T; V')$, то $Dy_k \rightharpoonup Dy$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$. Аналогично доказательству теоремы 4.1 получаем, что $A_1 y_k \rightharpoonup A_1 y$, $A_2 y_k \rightharpoonup A_2 y$, $A_3 y_k \rightharpoonup A_3 y$, $A_4 y_k \rightharpoonup A_4 y$, $Bu_k \rightharpoonup Bu$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$.

Докажем, что существует подпоследовательность $\varphi_k \rightarrow \varphi$ сильно в $L^2(0, T; H)$, для этого покажем, что последовательность φ_k относительно компактна в $L^2(0, T; H)$. Последнее в силу теоремы 1.2 с учетом ограниченности последовательности φ_k в $L^2(0, T; V)$ будет следовать из оценки

$$\int_0^{T-h} \|\varphi_k(t+h) - \varphi_k(t)\|^2 dt \leq Ch^{1/2}, \quad (4.36)$$

где $C > 0$ не зависит от k, h .

Чтобы получить оценку (4.36), рассмотрим уравнение (4.33) в моменты времени $t+h$ и t , вычтем одно равенство из другого, умножим скалярно разность на $z = \{0, \psi\}$, где $\psi(t) = \varphi_k(t+h) - \varphi_k(t)$, и проинтегрируем по t до 0 до

$T - h$. Получим

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^{T-h} \|\nabla \psi(t)\|^2 dt + \int_0^{T-h} \int_{\Gamma} u_k \psi^2(t) d\Gamma dt + \kappa_a \int_0^{T-h} \|\psi(t)\|^2 dt = \\ = \int_0^{T-h} (\theta_k^4(t+h) - \theta_k^4(t), \psi(t)) dt + \\ + \int_0^{T-h} \int_{\Gamma} u_k (\theta_b^4(t+h) - \theta_b^4(t)) \psi(t) d\Gamma dt. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Второе слагаемое в левой части (4.37) неотрицательно, поэтому

$$\begin{aligned} c \int_0^{T-h} \|\psi(t)\|_V^2 dt \leq \int_0^{T-h} (\theta_k^4(t+h) - \theta_k^4(t), \psi(t)) dt + \\ + \int_0^{T-h} \int_{\Gamma} u_k (\theta_b^4(t+h) - \theta_b^4(t)) \psi(t) d\Gamma dt, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $c = \min\{\alpha, \kappa_a\}$.

Оценим первое слагаемое в правой части (4.38), воспользовавшись оценкой

$$\begin{aligned} (\theta_k^4(t+h) - \theta_k^4(t), \psi(t)) \leq 4M^3 \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t)\| \|\psi(t)\| \leq \\ \leq C_1 \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t)\|^2 + \frac{c}{3} \|\psi(t)\|^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Здесь и далее $C_i > 0$ — постоянные, не зависящие от k и h .

Чтобы оценить интеграл по времени от первого слагаемого в правой части (4.39), рассмотрим уравнение (4.33) в момент времени s и умножим скалярно на $\{\theta_k(s) - \theta_k(t), 0\}$ и затем проинтегрируем по s от t до $t+h$ и по t от 0 до $T-h$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{T-h} \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t)\|^2 dt + a \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} (\nabla \theta_k(s), \nabla (\theta_k(s) - \theta_k(t))) ds dt + \\ + \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} \int_{\Gamma} \beta (\theta_k(s) - \theta_b(s)) (\theta_k(s) - \theta_k(t)) d\Gamma ds dt \\ + \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_k(s), \theta_k(s) - \theta_k(t)) ds dt + \\ + b\kappa_a \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} (\theta_k^4(s) - \varphi_k(s), \theta_k(s) - \theta_k(t)) ds dt = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Оценим третье и пятое слагаемые в (4.40):

$$\left| \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} \int_{\Gamma} \beta (\theta_k(s) - \theta_b(s)) (\theta_k(s) - \theta_k(t)) d\Gamma ds dt \right| \leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)} M^2 |\Gamma| Th,$$

$$\left| \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} (\theta_k^4(s) - \varphi_k(s), \theta_k(s) - \theta_k(t)) ds dt \right| \leq M^5 |\Omega| Th.$$

Для оценки второго слагаемого в (4.40) поменяем порядок интегрирования:

$$\int_0^{T-h} \int_t^{t+h} \square ds dt = \int_h^{T-h} \int_{s-h}^s \square dt ds + \int_0^h \int_0^s \square dt ds + \int_{T-h}^T \int_{s-h}^{T-h} \square dt ds. \quad (4.41)$$

Оценим первое слагаемое в (4.41):

$$\begin{aligned} \left| \int_h^{T-h} \int_{s-h}^s (\nabla \theta_k(s), \nabla(\theta_k(s) - \theta_k(t))) dt ds \right| &\leq h \int_h^{T-h} \|\theta_k(s)\|_V^2 ds + \\ &+ \int_h^{T-h} \|\theta_k(s)\|_V \int_{s-h}^s \|\theta_k(t)\|_V dt ds \leq h \|\theta_k\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \sqrt{h} \sqrt{T} \|\theta_k\|_{L^2(0,T;V)}^2. \end{aligned}$$

Остальные слагаемые в (4.41) оцениваются аналогично. Точно так же оценивается четвертое слагаемое в (4.40):

$$\left| \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_k(s), \theta_k(s) - \theta_k(t)) ds dt \right| \leq C_2 h.$$

Таким образом, из (4.40) получаем, что

$$\int_0^{T-h} \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t)\|^2 dt \leq C_3 \sqrt{h}. \quad (4.42)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (4.38):

$$\begin{aligned} &\int_0^{T-h} \int_{\Gamma} u_k(\theta_b^4(t+h) - \theta_b^4(t)) \psi(t) d\Gamma dt \\ &\leq \|u_2\|_{L^\infty(\Gamma)} \int_0^{T-h} \|\theta_b^4(t+h) - \theta_b^4(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|\psi(t)\|_{L^2(\Gamma)} dt \\ &\leq \frac{c}{3} \int_0^{T-h} \|\psi(t)\|_V^2 dt + C_4 \int_0^{T-h} \|\theta_b^4(t+h) - \theta_b^4(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Из условия (v) следует, что $(\theta_b^4)' = 4\theta_b^3\theta_b' \in L^2(\Sigma)$, и поэтому

$$\begin{aligned} \|\theta_b^4(t+h) - \theta_b^4(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \int_{\Gamma} \left(\int_t^{t+h} (\theta_b^4(\tau))' d\tau \right)^2 d\Gamma \\ &\leq h \int_{\Gamma} \int_t^{t+h} ((\theta_b^4)')^2 d\tau d\Gamma \leq h \|(\theta_b^4)'\|_{L^2(\Sigma)}^2. \end{aligned}$$

Проинтегрировав полученное неравенство по t , получим

$$\int_0^{T-h} \|\theta_b^4(t+h) - \theta_b^4(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \leq hT \|(\theta_b^4)'\|_{L^2(\Sigma)}^2. \quad (4.44)$$

Наконец, из (4.38), (4.39), (4.42), (4.43), (4.44) вытекает оценка

$$\int_0^{T-h} \|\psi(t)\|^2 dt \leq C_5 \sqrt{h},$$

из которой следует, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$ сильно в $L^2(0, T; H)$.

Аналогично разд. 4.1 получаем, что $F(y_k, u_k) \rightharpoonup F(y, u)$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$.

Полученные результаты о сходимости позволяют утверждать, что пара $\{y, u\}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.33). В силу непрерывности оператора следа $y \in W \rightarrow y|_{t=0} \in H$ имеем $\theta|_{t=0} = \theta_0$. Следовательно, $\{y, u\}$ — допустимая пара.

Так как функционал J слабо полунепрерывен снизу, то $J(y) = j$, т.е. $\{y, u\}$ — оптимальная пара. ■

4.3.3. Система оптимальности

Пусть $\{\hat{y}, \hat{u}\}$ — оптимальная пара. Выберем произвольный элемент $u \in U_{ad}$. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ положим

$$u_\varepsilon = \hat{u} + \varepsilon(u - \hat{u}), \quad g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(y_\varepsilon - \hat{y}),$$

где y_ε — решение задачи (4.33), соответствующее управлению u_ε . Так как U_{ad} выпукло, то $u_\varepsilon \in U_{ad}$.

Лемма 4.5. *Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ справедлива оценка*

$$\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H})} + \|g_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbf{V})} + \|g'_{1\varepsilon}\|_{L^2(0, T; \mathbf{V}')} \leq C,$$

где постоянная C не зависит от ε .

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4.1, подробности см. в [137]. ■

Лемма 4.6. Пусть $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ — оптимальная пара. Тогда для каждого элемента $u \in U_{ad}$ существует решение $g = \{g_1, g_2\} \in Y$ задачи

$$Dg + A_1g + A_2g + A_3g + A_5(g, \widehat{y}) + F(g, \widehat{u}) + F(\widehat{y}, u - \widehat{u}) = B(u - \widehat{u}),$$

$$g_1|_{t=0} = 0,$$

где

$$(A_5(g, \widehat{y}), z) = 4\kappa_a(\widehat{\theta}^3 g_1, bv - w),$$

такое, что

$$\langle J'_{1\theta}(\widehat{y}), g_1 \rangle + \langle J'_{1\varphi}(\widehat{y}), g_2 \rangle + (J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T}), g_1|_{t=T}) \geq 0. \quad (4.45)$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4.2, подробности см. в [137].

Чтобы получить соотношение (4.45), заметим, что

$$\frac{1}{\varepsilon}(J(y_\varepsilon) - J(\widehat{y})) = \langle J'_{1\theta}(\widehat{y}), g_1 \rangle + \langle J'_{1\varphi}(\widehat{y}), g_2 \rangle + (J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T}), g_1|_{t=T}) + r(\varepsilon), \quad (4.46)$$

где $g = \{g_1, g_2\}$ — предел последовательности g_ε , и $r(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу дифференцируемости функционала J .

Так как $J(y_\varepsilon) \geq J(\widehat{y})$, то, переходя в (4.46) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем (4.45). ■

Лемма 4.7. Пусть $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ — оптимальная пара. Существует единственное решение сопряженной системы:

$$-Dp + A_1p + A_6p + A_7(p, \widehat{y}) + F(p, \widehat{u}) = G(\widehat{y}), \quad p_1|_{t=T} = J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T}), \quad (4.47)$$

где

$$(A_6p, z) = (\mathbf{v} \cdot \nabla v, p_1), \quad (A_7(p, \widehat{y}), z) = 4b\kappa_a(\widehat{\theta}^3 p_1, v) - b\kappa_a(p_1, w) - 4\kappa_a(\widehat{\theta}^3 p_2, v),$$

$$(G(\widehat{y}), z) = (J'_{1\theta}(\widehat{y}), v) + (J'_{1\varphi}(\widehat{y}), w), \quad p = \{p_1, p_2\}, \quad z = \{v, w\}.$$

Доказательство. Определим оператор $L: V \rightarrow V'$ следующим образом:

$$(Lw, v) = \alpha(\nabla w, \nabla v) + \int_{\Gamma} \widehat{u} w v d\Gamma + \kappa_a(w, v) \quad \forall v \in V.$$

Согласно теореме Лакса–Мильграма, L непрерывно обратим, поэтому $q = L^{-1}(J'_{1\varphi}(\widehat{y})) \in L^2(0, T; V)$. Заметим, что если $p = \{p_1, p_2\}$ — решение задачи (4.47), то

$$p_2 = L^{-1}(b\kappa_a p_1 + J'_{1\varphi}(\widehat{y})).$$

Следовательно, задача (4.47) сводится к следующей:

$$-p'_1 + L_1(t)p_1 = J'_{1\theta}(\widehat{y}) + 4\kappa_a \widehat{\theta}^3 q, \quad p_1|_{t=T} = J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T}) \in H, \quad (4.48)$$

где оператор $L_1(t): V \rightarrow V'$ определяется соотношением

$$(L_1(t)p_1, v) = a(\nabla p_1, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta p_1 v d\Gamma + (\mathbf{v} \cdot \nabla v, p_1) + \\ + 4b\kappa_a(\widehat{\theta}^3(p_1 - \kappa_a L^{-1}p_1), v) \quad \forall v \in V.$$

Заметим, что

$$(L_1(t)w, w) \geq C_1 \|w\|_V^2 - C_2 \|w\|^2 \quad \forall w \in V,$$

где постоянные $C_{1,2} > 0$ не зависят от w . Следовательно, по теореме 1.7 существует единственное решение задачи (4.48), значит, существует единственное решение задачи (4.47). ■

Теорема 4.9. *Для любой оптимальной пары $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ существует единственный элемент $p \in Y$ такой, что*

$$-Dp + A_1 p + A_6 p + A_7(p, \widehat{y}) + F(p, \widehat{u}) = G(\widehat{y}), \quad p_1|_{t=T} = J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T}), \\ \int_0^T \int_{\Gamma} (u - \widehat{u})(\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 d\Gamma dt \leq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (4.49)$$

Доказательство. Пусть $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ — оптимальная пара, $u \in U_{ad}$. По лемме 4.6 существует $g \in Y$ такой, что

$$Dg + A_1 g + A_2 g + A_3 g + A_5(g, \widehat{y}) + F(g, \widehat{u}) + F(\widehat{y}, u - \widehat{u}) = B(u - \widehat{u}), \\ g_1|_{t=0} = 0, \quad (4.50)$$

$$\langle J'_{1\theta}(\widehat{y}), g_1 \rangle + \langle J'_{1\varphi}(\widehat{y}), g_2 \rangle + (J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T}), g_1|_{t=T}) \geq 0.$$

По лемме 4.7 существует $p \in Y$ такой, что

$$-Dp + A_1p + A_6p + A_7(p, \widehat{y}) + F(p, \widehat{u}) = G(\widehat{y}), \quad p|_{t=T} = J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T}). \quad (4.51)$$

Умножим скалярно (4.50) на p , (4.51) на g , вычтем одно равенство из другого и проинтегрируем разность по t . В силу формулы интегрирования по частям

$$\int_0^T (Dg, p) dt + \int_0^T (Dp, g) dt = (J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T}), g_1|_{t=T}).$$

Заметим, что

$$(A_1g, p) = (A_1p, g), \quad (A_2g, p) = (A_6p, g), \quad (F(g, \widehat{y}), p) = (F(p, \widehat{y}), g), \\ (A_3g, p) + (A_5(g, \widehat{y}), p) = (A_7(p, \widehat{y}), g).$$

В итоге получаем

$$\int_0^T (F(\widehat{y}, u - \widehat{u}), p) dt - (g_1|_{t=T}, J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T})) = \int_0^T (B(u - \widehat{u}), p) dt - \langle G(\widehat{y}), g \rangle.$$

Так как

$$\langle G(\widehat{y}), g \rangle + (J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T}), g_1|_{t=T}) = \langle J'_{1\theta}(\widehat{y}), g_1 \rangle + \langle J'_{1\varphi}(\widehat{y}), g_2 \rangle + (J'_2(\widehat{\theta}|_{t=T}), g_1|_{t=T}) \geq 0,$$

то

$$\int_0^T [(F(\widehat{y}, u - \widehat{u}), p) - (B(u - \widehat{u}), p)] dt \leq 0,$$

или

$$\int_0^T \int_{\Gamma} (u - \widehat{u})(\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 d\Gamma dt \leq 0.$$

■

Выведем принцип bang-bang для оптимальной пары. Положим

$$\psi(x) = \int_0^T (\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 dt, \quad x \in \Gamma. \quad (4.52)$$

Аналогично разд. 4.1 получаем из (4.49), что

$$\psi(\xi - \widehat{u}) \leq 0 \quad \forall \xi \in [u_1(x), u_2(x)] \quad \text{п.в. на } \Gamma. \quad (4.53)$$

Отсюда вытекает принцип bang-bang:

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} u_1(x), & \text{если } \psi(x) < 0, \\ u_2(x), & \text{если } \psi(x) > 0. \end{cases} \quad (4.54)$$

4.3.4. Примеры сопряженных систем для некоторых целевых функционалов

Пусть $\theta_d, \varphi_d \in L^2(0, T; H)$ — заданные функции. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_1(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (r_1(\theta - \theta_d)^2 + r_2(\varphi - \varphi_d)^2) \, dxdt,$$

где $r_1, r_2 \in L^\infty(Q)$ — заданные положительные функции.

Производные функционала J_1 :

$$\langle J'_{1\theta}(\theta, \varphi), v \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} r_1(\theta - \theta_d)v \, dxdt,$$

$$\langle J'_{1\varphi}(\theta, \varphi), w \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} r_2(\varphi - \varphi_d)w \, dxdt, \quad v, w \in L^2(0, T; V).$$

Сопряженная система имеет вид:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t} - a\Delta p_1 - \mathbf{v} \cdot \nabla p_1 + 4\kappa_a \widehat{\theta}^3(bp_1 - p_2) = r_1(\widehat{\theta} - \theta_d),$$

$$-\alpha\Delta p_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = r_2(\widehat{\varphi} - \varphi_d) \quad \text{в } \Omega,$$

$$a\frac{\partial p_1}{\partial n} + (\beta + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})p_1 = 0, \quad \alpha\frac{\partial p_2}{\partial n} + \widehat{u}p_2 = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

$$p_1|_{t=T} = 0.$$

Пусть $\theta_d \in L^2(\Omega)$ — заданная функция. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(\theta, \varphi) = J_2(\theta|_{t=T}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} r(\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 \, dxdt,$$

где $r \in L^\infty(\Omega)$ — заданная положительная функция.

Производная функционала J_2 :

$$(J'_2(\theta|_{t=T}), v) = \int_{\Omega} r(\theta|_{t=T} - \theta_d) v \, dx dt, \quad v \in L^2(\Omega).$$

Сопряженная система имеет вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p_1}{\partial t} - a\Delta p_1 - \mathbf{v} \cdot \nabla p_1 + 4\kappa_a \widehat{\theta}^3 (bp_1 - p_2) &= 0, \\ -\alpha\Delta p_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ a\frac{\partial p_1}{\partial n} + (\beta + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})p_1 = 0, \quad \alpha\frac{\partial p_2}{\partial n} + \widehat{u}p_2 &= 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ p_1|_{t=T} &= r(\widehat{\theta}|_{t=T} - \theta_d). \end{aligned}$$

4.4. Оптимальное управление граничным коэффициентом в стационарной модели

Цель настоящего раздела — доказательство регулярности условий оптимальности в задаче оптимального управления граничным коэффициентом в стационарной модели сложного теплообмена. Ранее в [13, 117] были получены достаточные условия регулярности системы оптимальности, которые выполняются при достаточно большой скорости движения среды и малых размерах области. В данном разделе регулярность условий оптимальности при нулевой скорости движения среды доказана без ограничений на исходные данные.

Стационарная модель сложного теплообмена имеет следующий вид:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = 0, \quad (4.55)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = 0, \quad (4.56)$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + u(\varphi - \theta_b^4)\Big|_{\Gamma} = 0. \quad (4.57)$$

Задача оптимального управления состоит в нахождении функции $u \in L^2(\Gamma)$ и пары $\{\theta, \varphi\}$, удовлетворяющих (4.55)–(4.57), таких, что выполняется условие

$$u_1(x) \leq u(x) \leq u_2(x), \quad x \in \Gamma,$$

где u_1, u_2 — заданные функции, и некоторый целевой функционал $J(\theta, \varphi)$ достигает минимального значения.

Будем предполагать, что выполняются условия:

- (i) $\theta_b, \beta, u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma)$, $\theta_b > 0$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $u_{1,2} \geq u_0 > 0$;
- (ii) функционал $J: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу;
- (iii) функционал J дифференцируем по Фреше.

Обозначим через $U = L^2(\Gamma)$ пространство управлений, $U_{ad} = \{u \in U: u_1 \leq u \leq u_2\}$ — множество допустимых управлений.

Определим операторы $A_{1,2}: V \rightarrow V'$, $F: V \times U \rightarrow V'$ и функционалы $f_1 \in V'$, $f_2(u) \in V'$ по следующим формулам, которые справедливы для любых $\theta, \varphi, v \in V$:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v),$$

$$(F(\varphi, u), v) = \int_{\Gamma} u\varphi v d\Gamma, \quad (f_1, v) = \int_{\Gamma} \beta\theta_b v d\Gamma, \quad (f_2(u), v) = \int_{\Gamma} u\theta_b^4 v d\Gamma.$$

Определение 4.3. Пара $\{\theta, \varphi\} \in V \times V$ называется слабым решением задачи (4.55)–(4.57), если

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f_1, \quad (4.58)$$

$$A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) + F(\varphi, u) = f_2(u). \quad (4.59)$$

Задача оптимального управления заключается в минимизации функционала J , определенного на решениях системы (4.58), (4.59) при $u \in U_{ad}$.

В [140] доказана разрешимость поставленной задачи управления. Доказательство регулярности условий оптимальности основано на следующей лемме.

Лемма 4.8. Пусть $h \in L^\infty(\Omega)$, $h > 0$. Если функции $q_{1,2} \in V$ удовлетворяют уравнениям

$$A_1q_1 + b\kappa_a(hq_1 - q_2) = 0, \quad (4.60)$$

$$A_3q_2 + \kappa_a(q_2 - hq_1) = 0, \quad (4.61)$$

то $q_1 = q_2 = 0$. Здесь оператор $A_3: V \rightarrow V'$ определяется формулой

$$A_3 w = A_2 w + F(w, u) \quad \forall w \in V,$$

где $u \in U_{ad}$ — произвольный элемент.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ определим функцию $r_\varepsilon(s) = s/|s|$, если $|s| \geq \varepsilon$, $r_\varepsilon(s) = s/\varepsilon$, если $|s| < \varepsilon$.

Умножим скалярно уравнение (4.60) на $r_\varepsilon(q_1)$, уравнение (4.61) на $br_\varepsilon(q_2)$ и сложим полученные равенства. Будем иметь

$$(A_1 q_1, r_\varepsilon(q_1)) + b(A_3 q_2, r_\varepsilon(q_2)) + b\kappa_a(hq_1 - q_2, r_\varepsilon(q_1) - r_\varepsilon(q_2)) = 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (A_1 q_1, r_\varepsilon(q_1)) &= a(\nabla q_1, r'_\varepsilon(q_1) \nabla q_1) + \int_{\Gamma} \beta q_1 r_\varepsilon(q_1) d\Gamma \geq \int_{\Gamma} \beta q_1 r_\varepsilon(q_1) d\Gamma, \\ (A_3 q_2, r_\varepsilon(q_2)) &= \alpha(\nabla q_2, r'_\varepsilon(q_2) \nabla q_2) + \int_{\Gamma} u q_2 r_\varepsilon(q_2) d\Gamma \geq \int_{\Gamma} u q_2 r_\varepsilon(q_2) d\Gamma. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma} \beta q_1 r_\varepsilon(q_1) d\Gamma + b \int_{\Gamma} u q_2 r_\varepsilon(q_2) d\Gamma + b\kappa_a(hq_1 - q_2, r_\varepsilon(q_1) - r_\varepsilon(q_2)) \leq 0. \quad (4.62)$$

Заметим, что $r_\varepsilon(q_1) \rightarrow \text{sign } q_1$, $r_\varepsilon(q_2) \rightarrow \text{sign } q_2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ п.в. в Ω , а значит, и в $L^2(\Omega)$. Аналогично $r_\varepsilon(q_1)|_{\Gamma} \rightarrow \text{sign } q_1|_{\Gamma}$, $r_\varepsilon(q_2)|_{\Gamma} \rightarrow \text{sign } q_2|_{\Gamma}$ в $L^2(\Gamma)$. Переходя в (4.62) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\int_{\Gamma} \beta |q_1| d\Gamma + b \int_{\Gamma} u |q_2| d\Gamma + b\kappa_a(hq_1 - q_2, \text{sign } q_1 - \text{sign } q_2) \leq 0. \quad (4.63)$$

Заметим, что $\text{sign } q_1 = \text{sign}(hq_1)$, поскольку $h > 0$. Следовательно, в силу монотонности функции sign третье слагаемое в (4.63) неотрицательно. Отсюда $q_1|_{\Gamma} = q_2|_{\Gamma} = 0$.

Умножим уравнение (4.61) на b и сложим с (4.60), получим $A_1 q_1 + bA_3 q_2 = 0$. Умножая скалярно это равенство на $aq_1 + \alpha bq_2$ и принимая во внимание, что $q_1|_{\Gamma} = q_2|_{\Gamma} = 0$, получим, что $\|\nabla(aq_1 + \alpha bq_2)\|^2 = 0$, следовательно, по лемме 1.15 имеем $aq_1 + \alpha bq_2 = 0$.

Из (4.60) получаем, что

$$a(\nabla q_1, \nabla v) + b\kappa_a((h + a/\alpha b)q_1, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Полагая $v = q_1$, получим $q_1 = 0$, следовательно, $q_2 = 0$. ■

С помощью леммы 4.8 в [140] доказана следующая теорема.

Теорема 4.10. Пусть $\{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}\} \in V \times V$, $\widehat{u} \in U_{ad}$ — решение задачи оптимального управления. Тогда существует пара $p = \{p_1, p_2\} \in V \times V$ такая, что

$$\begin{aligned} A_1 p_1 + 4\widehat{\theta}^3 \kappa_a(bp_1 - p_2) &= -J'_\theta(\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}), \\ A_2 p_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) + F(p_2, \widehat{u}) &= -J'_\varphi(\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}), \\ p_2(\widehat{\varphi} - \theta_b^4)(\xi - \widehat{u}) &\geq 0 \quad \forall \xi \in [u_1, u_2] \text{ п.в. на } \Gamma. \end{aligned}$$

Глава 5

Численные методы и комплексы программ**5.1. Разностные схемы решения нестационарных уравнений**

Нестационарное уравнение для интенсивности излучения содержит малый параметр при производной по времени. В связи с этим дискретизация по времени по схеме Кранка – Николсон дает осциллирующее приближенное решение, так как эта схема не является L -устойчивой (ср. [82, с. 173]). Для вычисления решения нестационарной модели можно использовать неявную схему Эйлера первого порядка точности или схему TR-BDF2 [58] второго порядка точности. Для вычисления решения квазистационарной модели можно использовать схему Кранка – Николсон.

На каждом временном слое решается система нелинейных алгебраических уравнений. Для линейаризации данной системы хорошо подходит метод Ньютона.

5.2. Сходимость метода Ньютона для стационарных уравнений**5.2.1. Постановка задачи**

Стационарная модель сложного теплообмена имеет следующий вид:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|^3\theta = b\kappa_a\varphi, \quad (5.1)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a|\theta|^3\theta, \quad (5.2)$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)\Big|_{\Gamma} = 0. \quad (5.3)$$

В работах [39, 125] для теоретического анализа и численного решения задачи (5.1)–(5.3) применялся метод простой итерации. В этом методе строятся две последовательности функций θ_k, φ_k , монотонно сходящиеся к точному решению [125]. Однако реализация данного алгоритма на ЭВМ затруднена, так как на одном из его этапов необходимо решить нелинейное эллиптическое уравнение (5.1) при заданном φ . Например, в [39] для преодоления данного недостатка в нелинейное уравнение включалось приближение с предыдущего шага так, что уравнение становилось линейным, и вводился малый параметр для усреднения старого и нового приближений, что затрудняло сходимость метода.

На практике свою эффективность для рассматриваемой задачи показал метод Ньютона, в котором нелинейное слагаемое θ^4 аппроксимируется выражением $\tilde{\theta}^4 + 4\tilde{\theta}^3(\theta - \tilde{\theta})$:

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a \left((4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4) - \varphi \right) &= 0, & -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a \left(\varphi - (4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4) \right) &= 0, \\ a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) \Big|_{\Gamma} &= 0, & \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) \Big|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\theta}$ — приближение для температуры на предыдущей итерации метода Ньютона.

В данном разделе мы рассмотрим упрощение данного метода и докажем его глобальную монотонную сходимость. Упрощенный метод Ньютона имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -a\Delta\theta + b\kappa_a \left((4\tilde{\theta}^3\theta - 3\tilde{\theta}^4) - \varphi \right) &= 0, & -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a \left(\varphi - \tilde{\theta}^4 \right) &= 0, \\ a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) \Big|_{\Gamma} &= 0, & \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) \Big|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Исследование монотонной сходимости метода Ньютона для эллиптического уравнения с монотонным и выпуклым нелинейным слагаемым проводилось в [21, 104].

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям

- (i) $\theta_b, \beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $0 \leq \theta_b \leq M$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$.

Определим операторы $A_{1,2}: V \rightarrow V'$ и функционалы $f_{1,2} \in V'$, как в разд. 3.1.

Определение 5.1. Пара $\{\theta, \varphi\} \in V \times V$ называется слабым решением задачи (5.1)–(5.3), если

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = f_1, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = f_2.$$

В силу теоремы 3.2 задача (5.1)–(5.3) имеет единственное слабое решение $\{\theta, \varphi\}$, причем $0 \leq \theta \leq M$, $0 \leq \varphi \leq M^4$.

Сформулируем упрощенный метод Ньютона. Зададим начальное приближение $\theta_0 = M$. Последовательности θ_k , φ_k определяются следующим образом:

$$A_2\varphi_k + \kappa_a(\varphi_k - \theta_k^4) = f_2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.4)$$

$$A_1\theta_{k+1} + b\kappa_a(\theta_k^4 + 4\theta_k^3(\theta_{k+1} - \theta_k) - \varphi_k) = f_1, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.5)$$

Линейные задачи (5.4), (5.5) имеют единственное решение, если $\theta_k \geq 0$ [130, с. 334].

5.2.2. Сходимость алгоритма

Определим оператор $\Phi: L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega) \cap V$ следующим образом: $\varphi = \Phi(\theta)$, если

$$A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = f_2.$$

Лемма 5.1. [125] Если $0 \leq \theta \leq M$ н.в. в Ω , то $0 \leq \varphi \leq M^4$ н.в. в Ω , где $\varphi = \Phi(\theta)$.

Лемма 5.2. [125] Если $\theta_1 \leq \theta_2$ н.в. в Ω , то $\varphi_1 \leq \varphi_2$ н.в. в Ω , где $\varphi_i = \Phi(\theta_i)$.

Лемма 5.3. $0 \leq \theta_{k+1} \leq \theta_k \leq M$, $0 \leq \varphi_{k+1} \leq \varphi_k \leq M^4$ н.в. в Ω , $k = 0, 1, \dots$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Сначала докажем, что $0 \leq \theta_1 \leq \theta_0 = M$. Отметим, что $0 \leq \varphi_0 \leq M^4$ в силу леммы 5.1.

Функция θ_1 удовлетворяет уравнению

$$A_1\theta_1 + b\kappa_a(M^4 + 4M^3(\theta_1 - M) - \varphi_0) = f_1 \quad (5.6)$$

Умножая уравнение (5.6) на $\eta = \max\{\theta_1 - M, 0\}$, получаем

$$a\|\nabla\eta\|^2 + \int_{\Gamma} \beta\eta(\eta + M - \theta_b) d\Gamma + (4M^3\eta + M^4 - \varphi_0, \eta) = 0.$$

Поскольку все слагаемые неотрицательны, то $\eta = 0$, т.е. $\theta_1 \leq M$.

Докажем неотрицательность θ_1 . Умножая уравнение (5.6) на $\psi = \min\{\theta_1, 0\}$, получаем

$$a\|\nabla\psi\|^2 + \int_{\Gamma} \beta\psi^2 d\Gamma + 4b\kappa_a M^3\|\psi\|^2 = b\kappa_a(3M^4 + \varphi_0, \psi) + \int_{\Gamma} \beta\theta_b\psi d\Gamma \leq 0.$$

Следовательно, $\psi = 0$, поэтому $\theta_1 \geq 0$.

Для доказательства утверждения при $k \geq 1$ запишем уравнение (5.5) для k и $k-1$ и вычтем одно уравнение из другого. Получим

$$A_1\theta + b\kappa_a[\theta_k^4 - \theta_{k-1}^4 + 4\theta_k^3\theta - 4\theta_{k-1}^3(\theta_k - \theta_{k-1}) - (\varphi_k - \varphi_{k-1})] = 0, \quad (5.7)$$

где $\theta = \theta_{k+1} - \theta_k$. Согласно гипотезе индукции, $0 \leq \theta_k \leq \theta_{k-1}$, тогда по лемме 5.2 $0 \leq \varphi_k \leq \varphi_{k-1}$.

Умножим уравнение (5.7) на функцию $\eta = \max\{\theta, 0\}$. Получим

$$(A_1\eta, \eta) + (4\theta_k^3\eta, \eta) + b\kappa_a(\theta_k^4 - \theta_{k-1}^4 - 4\theta_{k-1}^3(\theta_k - \theta_{k-1}), \eta) = b\kappa_a(\varphi_k - \varphi_{k-1}, \eta) \leq 0.$$

В силу выпуклости функции $x \mapsto x^4$:

$$\theta_{k-1}^4 + 4\theta_{k-1}^3(\theta_k - \theta_{k-1}) \leq \theta_k^4,$$

поэтому третье слагаемое неотрицательно. Следовательно, $\eta = 0 \Rightarrow \theta_{k+1} \leq \theta_k$.

Докажем неотрицательность θ_{k+1} . Умножая уравнение (5.5) на $\psi = \min\{\theta_{k+1}, 0\}$, получаем

$$a\|\nabla\psi\|^2 + \int_{\Gamma} \beta\psi^2 d\Gamma + b\kappa_a(4\theta_k^3\psi, \psi) = b\kappa_a(3\theta_k^4 + \varphi_k, \psi) + \int_{\Gamma} \beta\theta_b\psi d\Gamma \leq 0.$$

Следовательно, $\psi = 0$, поэтому $\theta_{k+1} \geq 0$. ■

Теорема 5.1. *Упрощенный метод Ньютона сходится: $\theta_k \rightarrow \theta$, $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в V , где $\{\theta, \varphi\}$ — слабое решение задачи (5.1)–(5.3).*

Доказательство. Последовательности θ_k, φ_k монотонно убывают и ограничены снизу, следовательно, $\theta_k \rightarrow \theta$, $\varphi_k \rightarrow \varphi$ п.в. в Ω . По теореме Лебега $\theta_k \rightarrow \theta$, $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в H . Из уравнений (5.4), (5.5) вытекает, что последовательности θ_k, φ_k ограничены в V , поэтому можно выделить подпоследовательности $\theta_k \rightharpoonup \theta$, $\varphi_k \rightharpoonup \varphi$ слабо в V .

Сделаем предельный переход в уравнениях (5.4), (5.5). В силу непрерывности операторов A_1, A_2 получаем $A_1\theta_k \rightharpoonup A_1\theta$, $A_2\varphi_k \rightharpoonup A_2\varphi$. Сходимость $\theta_k^4 \rightarrow \theta^4$ в H вытекает из оценки

$$\int_{\Omega} (\theta_k^4 - \theta^4)^2 dx \leq 16M^6 \|\theta_k - \theta\|^2 \rightarrow 0.$$

Так как $\theta \leq \theta_{k+1} \leq \theta_k$, то

$$\int_{\Omega} (\theta_k^3 \theta_{k+1} - \theta^4)^2 dx \leq \int_{\Omega} (\theta_k^4 - \theta^4)^2 dx \rightarrow 0,$$

следовательно, $\theta_k^3 \theta_{k+1} \rightarrow \theta^4$ в H .

Полученные предельные переходы позволяют утверждать, что $\{\theta, \varphi\}$ — слабое решение задачи (5.1)–(5.3).

Из монотонности и ограниченности последовательностей θ_k, φ_k вытекает в силу леммы 1.22 монотонность и ограниченность последовательностей следов $\theta_k|_{\Gamma}, \varphi_k|_{\Gamma}$, поэтому $\theta_k|_{\Gamma} \rightarrow \theta|_{\Gamma}$, $\varphi_k|_{\Gamma} \rightarrow \varphi|_{\Gamma}$ п.в. на Γ и в $L^2(\Gamma)$.

Умножим уравнения (5.4), (5.5) на произвольные функции $v, w \in V$:

$$\alpha(\nabla \varphi_k, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma \varphi_k v d\Gamma + \kappa_a(\varphi_k - \theta_k^4, v) = \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 v d\Gamma, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} a(\nabla \theta_{k+1}, \nabla w) + \int_{\Gamma} \beta \theta_{k+1} w d\Gamma + b\kappa_a(\theta_k^4 + 4\theta_k^3(\theta_{k+1} - \theta_k) - \varphi_k, w) = \\ = \int_{\Gamma} \beta \theta_b w d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Делая предельный переход в (5.8), (5.9) и учитывая определение слабого решения задачи (5.1)–(5.3), получим, что $(\nabla\varphi_k, \nabla v) \rightarrow (\nabla\varphi, \nabla v)$, $(\nabla\theta_k, \nabla w) \rightarrow (\nabla\theta, \nabla w)$, следовательно, $\nabla\varphi_k \rightharpoonup \nabla\varphi$, $\nabla\theta_k \rightharpoonup \nabla\theta$ слабо в H .

Умножая уравнения (5.4), (5.5) на φ_k и θ_{k+1} соответственно и учитывая определение слабого решения задачи (5.1)–(5.3), нетрудно показать, что $\|\nabla\varphi_k\| \rightarrow \|\nabla\varphi\|$, $\|\nabla\theta_k\| \rightarrow \|\nabla\theta\|$, отсюда $\nabla\varphi_k \rightarrow \nabla\varphi$, $\nabla\theta_k \rightarrow \nabla\theta$ сильно в H , поэтому $\varphi_k \rightarrow \varphi$, $\theta_k \rightarrow \theta$ в V . ■

5.2.3. Вычислительные эксперименты

Вычислительные эксперименты показали, что упрощенный метод Ньютона сходится значительно медленнее, чем полный метод Ньютона.

Рассмотрим пример квадратной области со стороной $L = 0.25$ м. Можно считать, что стационарное уравнение для температуры и граничное условие для температуры умножены на ρc_p , поэтому a имеет смысл коэффициента теплопроводности, $b = 4\sigma n^2 T_{\max}^3$, β — коэффициент теплоотдачи. Значения параметров: $a = 1.2$ Вт/(м · К), $\alpha = 0.00333$ м, $\kappa_a = 100$ м⁻¹, $b = 226.4$ Вт/(м² · К), $\beta = 10$ Вт/(м² · К), $\gamma = 0.3$. Коэффициенты соответствуют физическим параметрам стекла. Граничная температура θ_b имеет следующий вид: $\theta_b(x, 0) = 0.5$, $\theta_b(x, L) = 1$, $\theta_b(0, y) = \theta_b(L, y) = 0.5 + y/(2L)$.

Приведем зависимость от количества итераций погрешностей (в L^∞ -норме) упрощенного и полного методов Ньютона. При вычислении погрешностей вместо точного решения, которое нам неизвестно, используем приближенное решение, вычисленное полным методом Ньютона.

Для вычислений используется пакет FreeFem++. При построении конечно-элементной сетки стороны квадрата разбиваются на 300 частей, используются сплайны P_1 . В методе Ньютона возьмем $M = 1$.

В табл. 5.1а представлена погрешность полного метода Ньютона, на рис. 5.1 приведен график зависимости погрешности упрощенного метода Ньютона от количества итераций. Точность 10^{-4} достигается за 4 итерации в полном

методе Ньютона и за 626 итераций в упрощенном методе Ньютона.

Таблица 5.1. Погрешность полного метода Ньютона: а) на первом тесте; б) на втором тесте.

1	0.20
2	0.054
3	0.0046
4	0.000033

а)

1	0.20
2	0.056
3	0.0052
4	0.000046

б)

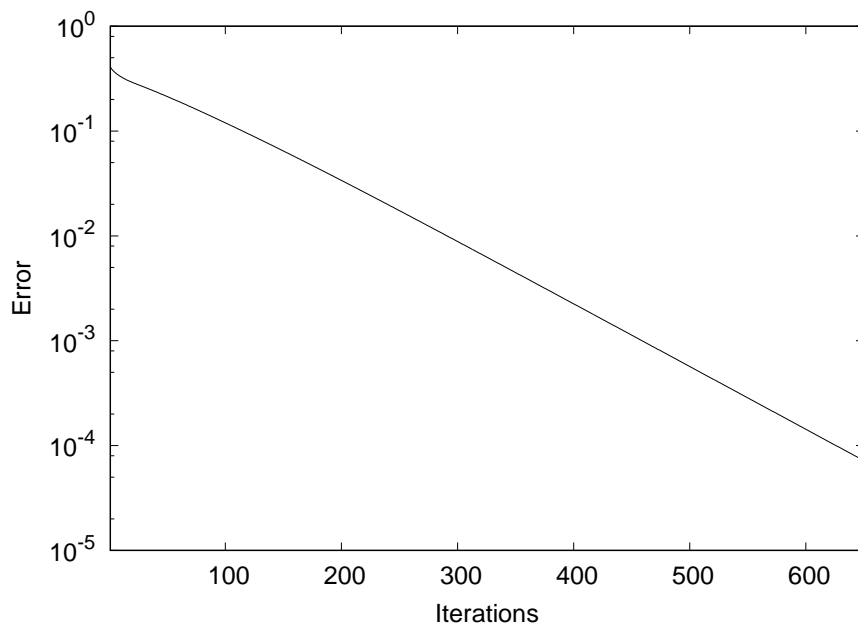


Рис. 5.1. Погрешность упрощенного метода Ньютона на первом тесте.

Рассмотрим еще один пример: квадратная область со стороной $L = 1$ м, $a = 0.0515$ Вт/(м·К), $\alpha = 0.0333$ м, $\kappa_a = 1$ м⁻¹, $b = 104.8$ Вт/(м²·К). Функция θ_b и параметры β , γ такие же, как в предыдущем примере. Коэффициенты соответствуют физическим параметрам воздуха.

В табл. 5.1б представлена погрешность полного метода Ньютона, на рис. 5.2 приведен график зависимости погрешности упрощенного метода Ньютона от количества итераций. Точность 10^{-4} достигается за 4 итерации в полном методе Ньютона и за 23 итерации в упрощенном методе Ньютона.

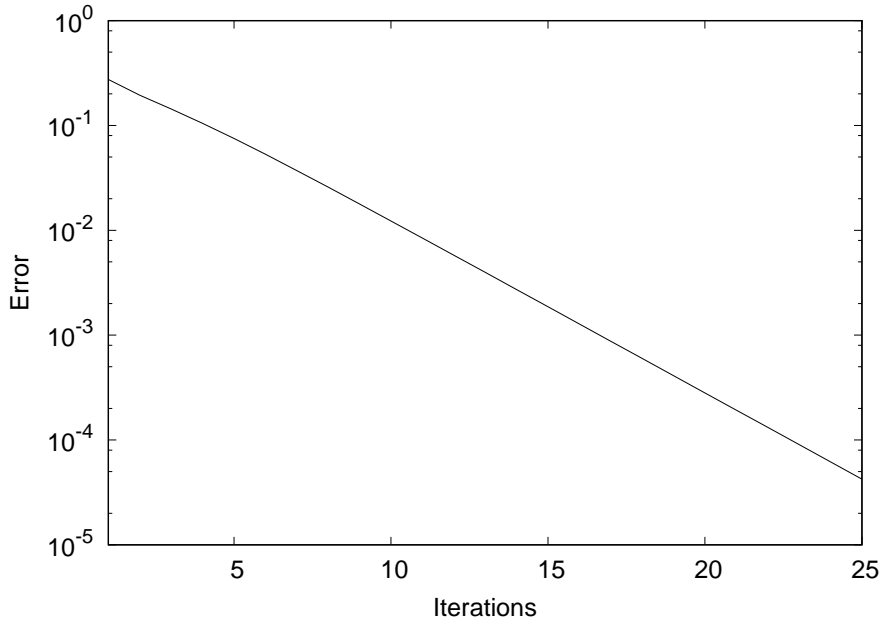


Рис. 5.2. Погрешность упрощенного метода Ньютона на втором тесте.

Графики иллюстрируют, что упрощенный метод Ньютона имеет линейную скорость сходимости. На примерах можно наблюдать как крайне медленную (тест 1), так и умеренную (тест 2) сходимость.

5.3. Метод простой итерации для решения задачи создания экстремальных полей

5.3.1. Итерационный алгоритм

Вернемся к задаче, рассмотренной в разд. 4.2, и построим итерационный процесс, сходящийся к решению уравнения (4.27), и тем самым докажем существование сильного оптимального управления. Рассуждения приводятся для задачи 1, для задачи 2 алгоритм строится аналогично.

Определим оператор $U: L^\infty(\Sigma) \rightarrow L^\infty(\Sigma)$:

$$U(\varphi) = \begin{cases} u_1, & \varphi - \theta_b^4 < 0, \\ u_2, & \varphi - \theta_b^4 \geq 0. \end{cases}$$

В силу теоремы 4.4 функция $u \in U_{ad}$, для которой $U(\varphi(u)) = u$, является силь-

ным оптимальным управлением. Используем метод простой итерации. Пусть $u^0 \in U_{ad}$. Тогда $u^{k+1} = U(\varphi^k)$, $\varphi^k = \varphi(u^k)$, $k = 0, 1, \dots$

Положив $\tilde{u} = u^k$, $u = u^{k+1}$ в лемме 4.4, получим, что $\varphi^{k+1} \leq \varphi^k$, $k = 0, 1, \dots$, п.в. в Q . Поэтому $u^{k+1} \leq u^k$, $k = 1, 2, \dots$, п.в. на Σ . Учитывая ограниченность указанных последовательностей, получаем $u^k \rightarrow u^*$ п.в. на Σ , $\varphi^k \rightarrow \varphi^*$ п.в. в Q .

Лемма 5.4. *Справедливо соотношение $\varphi^* = \varphi(u^*)$ п.в. в Q .*

Доказательство. По теореме Лебега имеем $u^k \rightarrow u^*$ в $L^2(\Sigma)$, $\varphi^k \rightarrow \varphi^*$ в $L^2(Q)$. Для доказательства леммы достаточно доказать непрерывность оператора $\varphi = \varphi(u)$, $\varphi: L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(Q)$. Пусть $u, \tilde{u} \in L^2(\Sigma)$, $\varphi_1 = \varphi(u)$, $\varphi_2 = \varphi(\tilde{u})$, $\theta_1 = \theta(u)$, $\theta_2 = \theta(\tilde{u})$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Тогда

$$\mu(\varphi', v) + \alpha(\nabla \varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma} u \varphi v d\Gamma + \int_{\Gamma} (u - \tilde{u}) \varphi_2 v d\Gamma + \kappa_a(\varphi - (\theta_1^4 - \theta_2^4), v) = 0.$$

Положим $v = \varphi$, проинтегрируем по t и воспользуемся неравенствами

$$\alpha \|\nabla \varphi\|^2 + \kappa_a \|\varphi\|^2 \geq C_1 \|\varphi\|_V^2,$$

$$\left| \int_{\Gamma} (u - \tilde{u}) \varphi_2 \varphi d\Gamma \right| \leq M \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Gamma)} \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_\varepsilon \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \varepsilon \|\varphi\|_V^2,$$

где $\varepsilon > 0$ — любое число, $C_\varepsilon > 0$, $C_i > 0$. Отсюда следует, что

$$\|\varphi(t)\|^2 \leq \int_0^t \left[C_2 \|\theta\|^2 + C_3 \|\varphi\|^2 + C_4 \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right] d\tau.$$

Аналогично

$$\|\theta(t)\|^2 \leq \int_0^t \left[C_5 \|\theta\|^2 + C_6 \|\varphi\|^2 \right] d\tau.$$

Следовательно,

$$\|\varphi(t)\|^2 + \|\theta(t)\|^2 \leq C_7 \int_0^t \left[\|\varphi\|^2 + \|\theta\|^2 \right] d\tau + C_8 \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Sigma)}^2.$$

По лемме Гронуолла имеем

$$\|\varphi(t)\|^2 + \|\theta(t)\|^2 \leq C_8 \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Sigma)}^2 \cdot e^{C_7 t},$$

отсюда получаем, что

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(Q)}^2 \leq C_9 \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Sigma)}^2.$$

■

Лемма 5.5. *Имеет место соотношение $u^* = U(\varphi^*)$ п.в. на Σ .*

Доказательство. Так как функция $\mathbb{R} \ni z \mapsto g(z)$,

$$g(z) = \begin{cases} u_1, & z - \theta_b^4 < 0, \\ u_2, & z - \theta_b^4 \geq 0, \end{cases}$$

непрерывна справа и $\varphi^{k+1} \leq \varphi^k$ п.в. в Q , то $u^{k+1} = U(\varphi^k) \rightarrow U(\varphi^*)$ п.в. на Σ . ■

Из лемм 5.4 и 5.5 вытекает, что $U(\varphi(u^*)) = u^*$, поэтому u^* — сильное оптимальное управление.

Теорема 5.2. *Задача 1 (задача 2) разрешима.*

5.3.2. Числовой пример

В качестве примера рассмотрим решение задачи 1 и задачи 2 для одномерной модели (3.37)–(3.40), описывающей сложный теплообмен в плоскопараллельном слое толщиной $L = 50$ см. Физические параметры соответствуют данным из [125]. Считаем, что $\theta_b = 0.3$ при $x = 0$ и $\theta_b = 0.8$ при $x = L$. Термодинамические характеристики соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400°C , максимальная температура $T_{\max} = 500^\circ\text{C}$, так что $a = 0.92$ см²/с, $b = 18.7$ см/с. Положим $T = 30$ с, $\kappa = 0.1$ см⁻¹ ($\alpha = 3.3 \dots$ см), $\kappa_a = 0.01$ см⁻¹, $A = 0$, $\beta = 10$ см/с, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. В качестве границ для управления возьмем $u_1 = 0.01$, $u_2 = 0.5$. Начальные условия: $\theta_0 = \varphi_0 = 1$.

Алгоритм реализован с помощью общего конечноразностного решателя (разд. 5.6). Расчет производился по неявной схеме Эйлера на равномерной сетке с 501 точками по пространству и 5001 точкой по времени. Сильное оптимальное управление в задаче 1 при $x = 0$ равно 0.5, график сильного оптимального

управления в задаче 1 при $x = L$ представлен на рис. 5.3. Сильное оптимальное управление в задаче 2 при $x = 0$ равно 0.01, график сильного оптимального управления в задаче 2 при $x = L$ представлен на рис. 5.4.

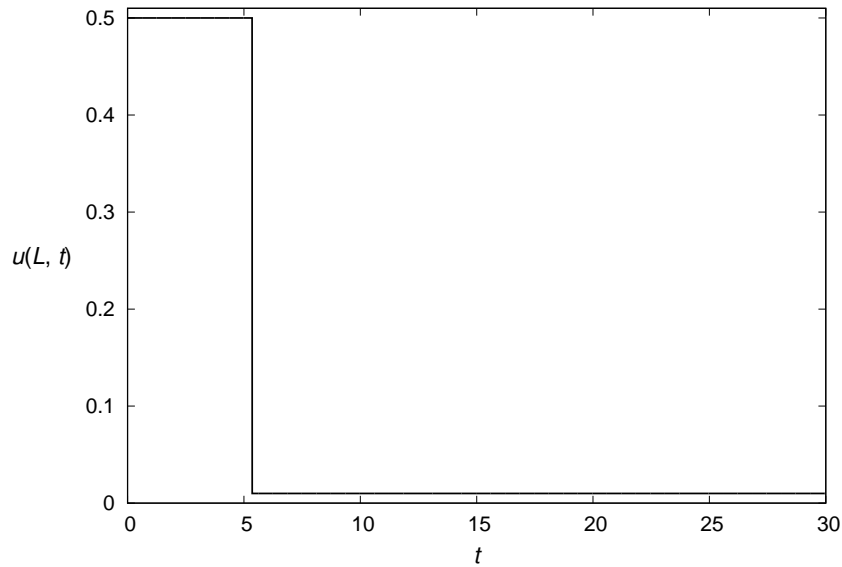


Рис. 5.3. Сильное оптимальное управление в задаче 1 при $x = L$.

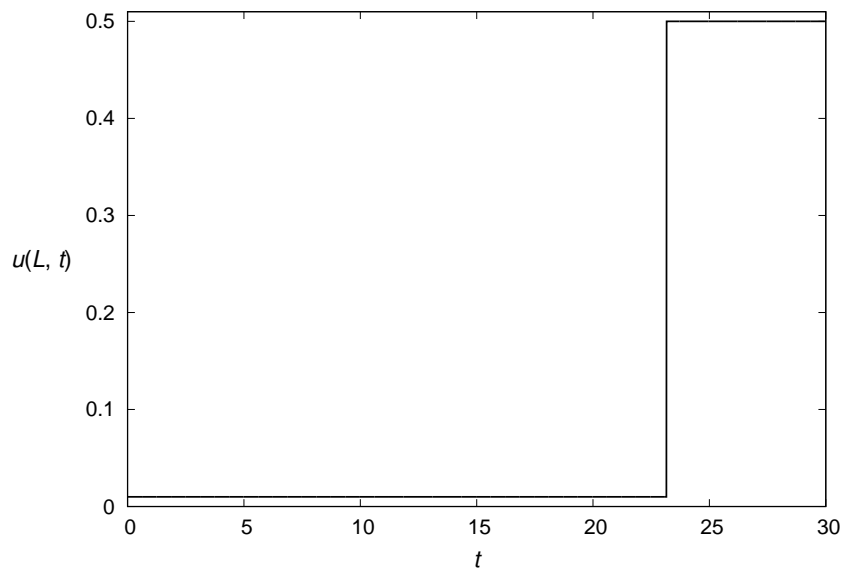


Рис. 5.4. Сильное оптимальное управление в задаче 2 при $x = L$.

Переключение оптимального управления на рис. 5.3, 5.4 соответствует уменьшению интенсивности излучения $\varphi|_{x=L}$ до величины θ_b^4 . В дальнейшем происходит стабилизация процесса теплообмена. Подчеркнем, что найденное управление является оптимальным для всех монотонных функционалов.

На рис. 5.5, 5.6 представлены графики оптимальных распределений температуры и интенсивности излучения в момент времени $t = T$ в задачах 1 и 2.

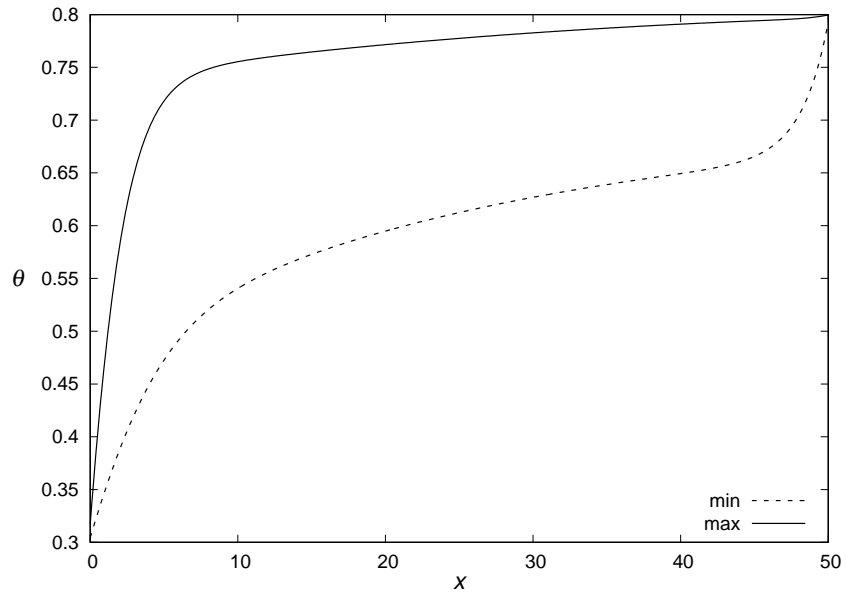


Рис. 5.5. Оптимальное распределение температуры в момент времени $t = T$ в задачах 1 (min) и 2 (max).

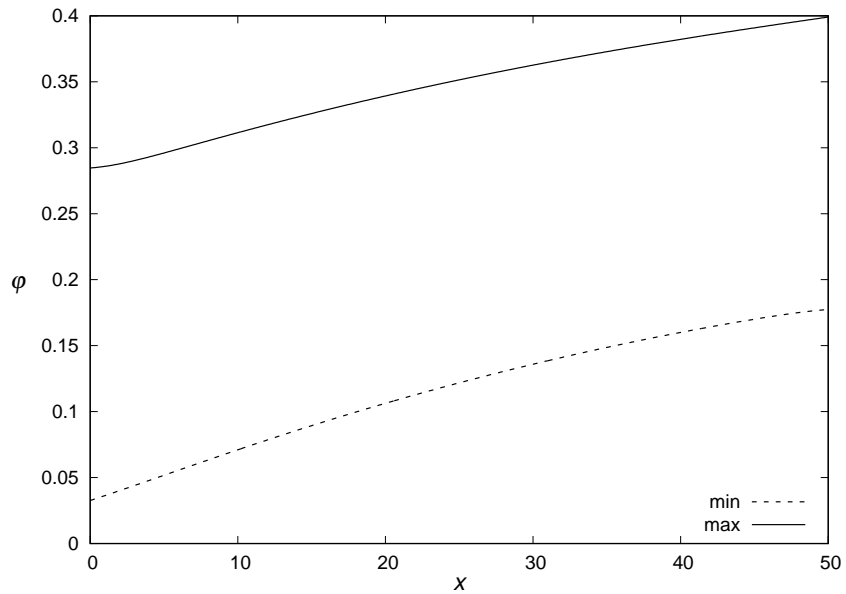


Рис. 5.6. Оптимальное распределение интенсивности излучения в момент времени $t = T$ в задачах 1 (min) и 2 (max).

5.4. Алгоритм решения задачи управления граничным коэффициентом

5.4.1. Постановка задачи

В данном разделе предложен алгоритм решения задачи оптимального управления, рассмотренной в разд. 4.3. Аналогичный алгоритм ранее применялся в [43, раздел 4.3], [113] для задачи управления системой ОДУ (одномерное управление). В нашем случае управление будет двумерным (граничное управление для трехмерной области).

Существующие алгоритмы вычисления оптимального bang-bang управления разработаны главным образом для одномерных управлений, например, зависящих от времени. Так, в [90] применен алгоритм градиентного спуска, когда управление на каждой итерации не обязательно имеет тип bang-bang. В [69] использован вариант градиентного метода, когда управление на каждом шаге имеет тип bang-bang, при этом после вычисления градиента функционала новое и старое приближения усредняются посредством вычисления выпуклых комбинаций точек переключения. В [53] для нахождения оптимального управления применялся метод простой итерации. Обзор алгоритмов решения задач управления с одномерным bang-bang управлением содержится в [73, 112]. В [84, 85] задачи управления с одномерным и двумерным управлением решались путем сведения к дискретной задаче оптимизации. В [49] для решения задачи с двумерным управлением применен многосеточный метод.

Определим приведенный целевой функционал следующим образом: $\hat{J}(u) = J(\theta(u), \varphi(u))$. Здесь $\{\theta(u), \varphi(u)\}$ — решение задачи (4.33), соответствующее управлению u . Задача оптимального управления заключается в минимизации функционала \hat{J} на множестве U_{ad} :

$$\hat{J}(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad}. \quad (5.10)$$

Определим целевые функционалы:

$$J_1(\theta) = \int_0^T \int_{\Omega} (\theta - \theta_d)^2 dx dt, \quad J_2(\theta) = \int_{\Omega} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx, \quad (5.11)$$

где $\theta_d \in L^2(0, T; H)$ (соответственно $\theta_d \in H$) — заданная функция.

5.4.2. Оптимизационный алгоритм

Действуя формально в соответствии с принципом Лагранжа [93, с. 63], получаем следующую формулу для градиента приведенного целевого функционала:

$$\hat{\mathcal{J}}(u) = -\psi, \quad \psi(x) = \int_0^T (\varphi(u) - \theta_b^4) p_2(u) dt, \quad x \in \Gamma. \quad (5.12)$$

Здесь $\{p_1(u), p_2(u)\}$ — решение сопряженной задачи, соответствующей управлению $u \in U_{ad}$.

Численный алгоритм решения задачи управления (5.10) основан на системе оптимальности, которая включает уравнение состояния (4.33), сопряженную задачу (4.47) и соотношение (4.54), выражающее принцип bang-bang. Поскольку система оптимальности представляет собой необходимые условия минимума функционала $\hat{\mathcal{J}}$, то найденное решение системы оптимальности гарантированно будет решением задачи (5.10) в том случае, если система оптимальности имеет единственное решение. Вопрос о единственности решения системы оптимальности, так же, как и вопрос о единственности решения задачи (5.10), является открытым.

Простейшим алгоритмом нахождения оптимального управления в задаче (5.10) является метод простой итерации, который заключается в следующем. Выбирается начальное приближение для управления u^0 . На каждой итерации вычисляется решение $\{\theta^j, \varphi^j\}$ задачи (4.33) при $u = u^j$, затем находится решение $\{p_1^j, p_2^j\}$ сопряженной задачи, и следующее приближение u^{j+1} вычисляется

по формуле

$$u^{j+1}(x) = \begin{cases} u_1(x), & \text{если } \psi(x) < 0, \\ u_2(x), & \text{если } \psi(x) > 0, \end{cases}$$

$$\text{где } \psi(x) = \int_0^T (\varphi^j - \theta_b^4) p_2^j dt, \quad x \in \Gamma.$$

Однако ожидать сходимости метода простой итерации можно лишь в отдельных случаях, например, $\theta_d = 0$. На каждой итерации данный метод обновляет управление во всех точках границы, что может привести к тому, что приближения u^j будут поочередно равны крайним значениям u_1 и u_2 , т.е. $u^j \equiv u_1$, $u^{j+1} \equiv u_2$, $u^{j+2} \equiv u_1, \dots$. Поэтому можно предложить обобщение метода простой итерации, в котором управление обновляется лишь на некотором подмножестве границы Γ .

Разобьем границу $\Gamma = \partial\Omega$ на ячейки γ_i приблизительно одинаковой площади. На каждой ячейке выберем точку (узел) x_i . Нас будет интересовать множество управлений, для которых а) $u(x) = u(x_i)$ на γ_i ; б) управление имеет вид bang-bang: $u(x_i) = u_1(x_i)$ или $u_2(x_i)$. Узлы, в которых имеется несоответствие между управлением и знаком функции переключения $\psi(x)$, т.е. не выполняется равенство (4.54), назовем *критическими*. На каждой итерации алгоритм изменяет управление в k критических узлах либо во всех критических узлах, если их число меньше k .

Остановимся на вопросе выбора критических узлов, в которых нужно изменить управление. Если функционал \hat{J} дифференцируем по Фреше, то

$$\hat{J}(u + v) - \hat{J}(u) = -(\psi, v)_{L^2(\Gamma)} + o(\|v\|_{L^2(\Gamma)}),$$

где функция ψ определяется по формуле (5.12). Поэтому при изменении управления на малом подмножестве границы Γ главная часть приращения функционала \hat{J} будет определяться слагаемым $-(\psi, v)_{L^2(\Gamma)}$, где v — приращение управления.

Допустим, что $v(x) = u^{\text{new}}(x_i) - u(x_i)$ на γ_i и $v(x) = 0$ на $\Gamma \setminus \gamma_i$. Тогда

$$-(\psi, v)_{L^2(\Gamma)} \approx -\psi(x_i)(u^{\text{new}}(x_i) - u(x_i))|\gamma_i| \equiv d_i,$$

где $|\gamma_i|$ — площадь γ_i . Поэтому если $u(x_i) = u_1(x_i)$ и $\psi(x_i) < 0$ либо $u(x_i) = u_2(x_i)$ и $\psi(x_i) > 0$, то при изменении $u(x_i)$ величина d_i будет положительной. В противном случае, когда в узле x_i имеется несоответствие между управлением и знаком функции ψ , величина d_i будет отрицательной:

$$d_i = -(u_2(x_i) - u_1(x_i))|\psi(x_i)||\gamma_i|,$$

если $u^{\text{new}}(x_i) = u(x_i) + (u_2(x_i) - u_1(x_i)) \text{sign } \psi(x_i)$.

Таким образом, для того чтобы приближенное приращение функционала \hat{J} было отрицательным и минимальным, нужно выбрать k критических узлов с наибольшими значениями выражения $|\psi(x_i)|(u_2(x_i) - u_1(x_i))$ и изменить управление в этих узлах на противоположное крайнее значение.

Параметр k будем изменять динамически. Вначале k равно общему количеству узлов, что соответствует методу простой итерации. Пока $\hat{J}(u^{j+s}) \geq \hat{J}(u^j)$, $s = 1, 2, \dots$, возвращаемся к управлению u^j , уменьшаем k вдвое и получаем новое приближение u^{j+s+1} описанным выше способом из управления u^j . Если $\hat{J}(u^{j+s}) < \hat{J}(u^j)$, то не изменяем k и получаем новое приближение u^{j+s+1} из управления u^{j+s} . При $k = 1$ условие уменьшения k не проверяется.

Условием окончания итераций является либо отсутствие критических узлов, либо заикливание алгоритма при $k = 1$. Заикливание означает, что приближение управления u^j совпало с прежним приближением u^{j-s} , $s \geq 1$, если на $(j - s)$ -й итерации k равнялось 1.

Отметим, что рассмотренный алгоритм является вариантом метода градиентного спуска, и роль параметра шага играет параметр k .

5.4.3. Вычислительные эксперименты

В этом разделе считаем, что $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x, y, z \leq L\}$ — куб со стороной L , $\mathbf{v} = 0$ и $\theta_0, \theta_b, \beta, u_1, u_2$ — положительные постоянные, не зависящие от x и t . Предполагается, что целевой функционал J — это J_1 либо J_2 , см. (5.11), причем $\theta_d = \text{const}$.

Определение 5.2. Назовем функцию $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ симметричной, если для почти всех $x, y \in (0, L)$:

$$f(x, y, 0) = f(x, y, L) = f(x, 0, y) = f(x, L, y) = f(0, x, y) = f(L, x, y),$$

$$f(x, y, 0) = f(L - x, y, 0) = f(x, L - y, 0) = f(y, x, 0).$$

Для упрощения численных экспериментов будем рассматривать только симметричные управления. Пусть U_0 — множество симметричных управлений из множества U_{ad} . Рассмотрим задачу оптимального управления на множестве U_0 :

$$\widehat{J}(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_0. \quad (5.13)$$

Так как множество U_0 выпукло и замкнуто, справедлива следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 4.8.

Лемма 5.6. Существует решение задачи (5.13).

Сопряженная задача для задачи управления (5.13) определяется так же, как и для задачи управления (5.10) (см. (4.47)).

Лемма 5.7. Для любого $u \in U_0$ функции $\theta(u)|_\Gamma$, $\varphi(u)|_\Gamma$, $p_1(u)|_\Gamma$, $p_2(u)|_\Gamma$ симметричны.

Доказательство. Рассмотрим функции $\widetilde{\theta}(x, y, z) = \theta(L - x, y, z)$, $\widetilde{\varphi}(x, y, z) = \varphi(L - x, y, z)$. Нетрудно проверить, что $\{\widetilde{\theta}, \widetilde{\varphi}\}$ — решение задачи (4.33). В силу того, что слабое решение единственно, получаем, что $\widetilde{\theta} = \theta$, $\widetilde{\varphi} = \varphi$. Следовательно, решение $\{\theta, \varphi\}$ симметрично относительно плоскости $x = L/2$, аналогично доказывается симметрия относительно плоскостей $y = L/2$ и $z = L/2$.

Таким образом, на каждой грани куба решение $\{\theta, \varphi\}$ симметрично относительно средних линий соответствующей грани. Остается доказать, что решение на грани куба симметрично относительно диагоналей грани. Для этого достаточно рассмотреть функции $\tilde{\theta}(x, y, z) = \theta(y, x, z)$, $\tilde{\varphi}(x, y, z) = \varphi(y, x, z)$ и проделать выкладки так же, как и выше.

Рассуждения, касающиеся решения сопряженной задачи, проводятся аналогично. ■

Лемма 5.8. *Для любого решения \hat{u} задачи (5.13) справедлив принцип bang-bang (4.54).*

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4.9, получим, что для любого $u \in U_0$ выполняется неравенство

$$\int_0^T \int_{\Gamma} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 d\Gamma dt \leq 0,$$

где $\hat{\varphi} = \varphi(\hat{u})$, $p_2 = p_2(\hat{u})$.

Рассмотрим подмножество $\Gamma_0 = \{(x, y, 0) : 0 \leq x \leq L/2, 0 \leq y \leq x\}$ границы Γ . По лемме 5.7 функции $\hat{\varphi}|_{\Gamma}$ и $p_2|_{\Gamma}$ симметричны, следовательно,

$$\int_0^T \int_{\Gamma} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 d\Gamma dt = 48 \int_{\Gamma_0} (u - \hat{u}) \int_0^T (\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 dt d\Gamma \leq 0,$$

поэтому

$$\psi(\xi - \hat{u}) \leq 0 \quad \forall \xi \in [u_1, u_2] \text{ п.в. на } \Gamma_0,$$

где функция ψ определяется по формуле (4.52). Отсюда следует принцип bang-bang (4.54). ■

Из лемм 5.6 и 5.8 вытекает

Следствие 5.1. *Существует симметричное решение системы оптимальности для задачи (5.10).*

Для тестирования оптимизационного алгоритма будем использовать симметричные тесты, в которых на каждой итерации приближение управления сим-

метрично, и поэтому граничные значения решений задачи (4.33) и сопряженной задачи также симметричны.

Для решения прямой и сопряженной задач применим метод конечных разностей. Введем в кубе равномерную сетку, разделив стороны куба на N равных частей. Узлы, в которых задаются значения управления, совпадают с узлами расчетной сетки. Зададим управление на треугольнике — восьмой части грани куба, т.е. в узлах (x_i, y_j) , $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq i$, где $n = \lfloor N/2 \rfloor$. На остальные граничные узлы управление распространяется согласно симметрии, указанной в определении 5.2.

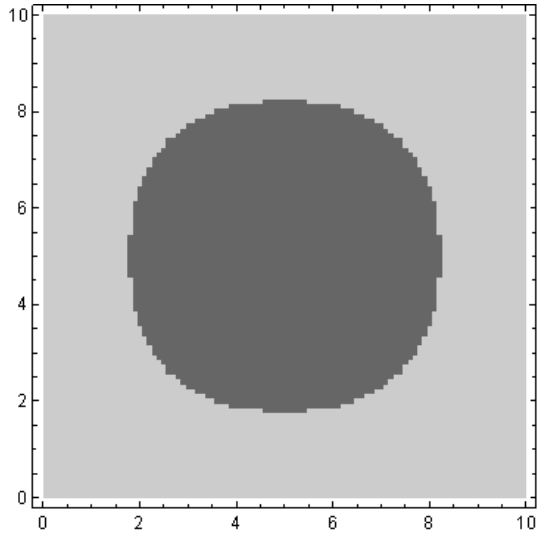
В соответствии с проведенным вычислительным экспериментом, есть основания полагать, что при использовании метода конечных разностей численные решения прямой и сопряженной задач обладают симметрией, и поэтому управление на следующей итерации будет сохранять свойство симметрии.

Применим схему Кранка – Николсон (метод трапеций). Для решения нелинейной системы (4.29)–(4.32) используем линеаризацию методом Ньютона. Граничные условия третьего рода аппроксимируем со вторым порядком, аппроксимация граничных условий может быть получена методом фиктивных точек [11, с. 306]. Программная реализация описана в разд. 5.5.

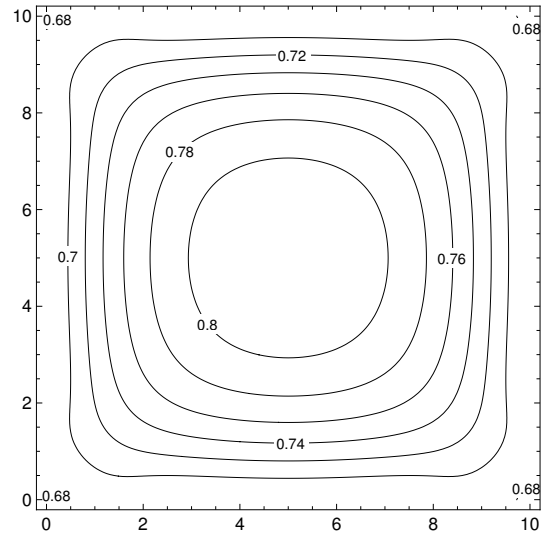
В качестве примера возьмем данные, соответствующие параметрам стеклянного кубика. Положим $L = 10$ см, $T = 300$ с, $T_{max} = 1000$ К, $a = 0.006$ см²/с, $\alpha = 0.333 \dots$ см, $b = 0.025$ см/с, $\kappa_a = 1$ см⁻¹, $\beta = 0.00005$ см/с, $\theta_b = 0.3$, $\theta_0 = 1$. Границы для управления выберем следующим образом: $u_1 = 0.1$, $u_2 = 0.4$. Введем равномерную сетку с $101 \times 101 \times 101$ узлами по пространству ($N = 100$) и 301 узлом по времени.

Проведем вычисления для функционалов (5.11). Рассмотрим пример задачи с функционалом J_1 , $\theta_d = 0.8$. Начальным приближением в этом и последующих тестах будет u_1 . На рис. 5.7а приведен график оптимального управления на стороне куба. Светлая область соответствует значению u_1 , темная — u_2 . На рис. 5.7б изображен график оптимальной температуры в центральном сечении

куба $z = L/2$ в конечный момент времени $t = T$. Рисунок 5.8 показывает значения целевого функционала, количество критических узлов и значения параметра k на разных итерациях алгоритма. Конечное значение функционала равно 2452.49, конечное число критических узлов равно 2.

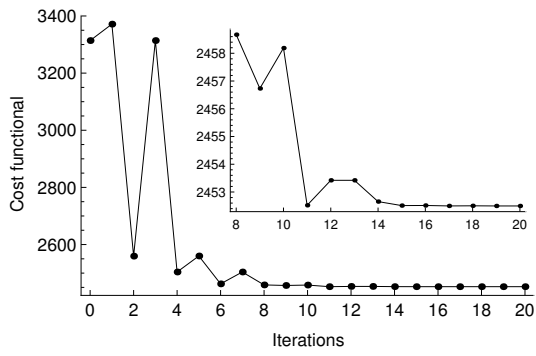


а)

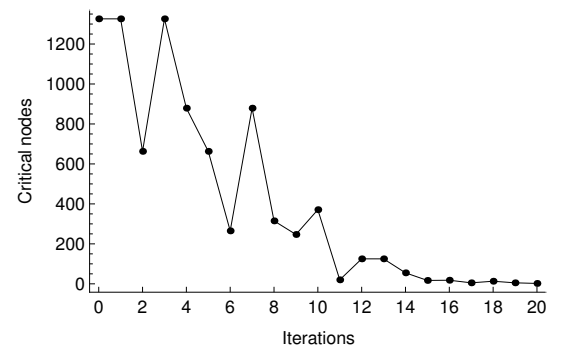


б)

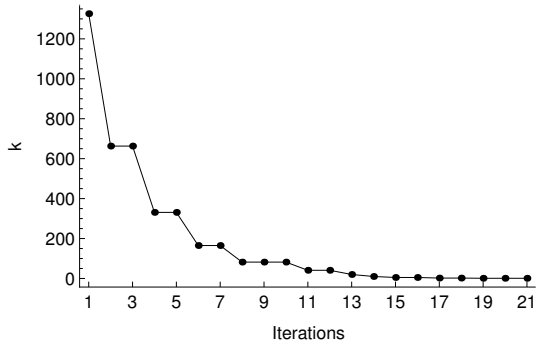
Рис. 5.7. а) Оптимальное управление. б) Оптимальная температура в центральном сечении куба в конечный момент времени.



a)



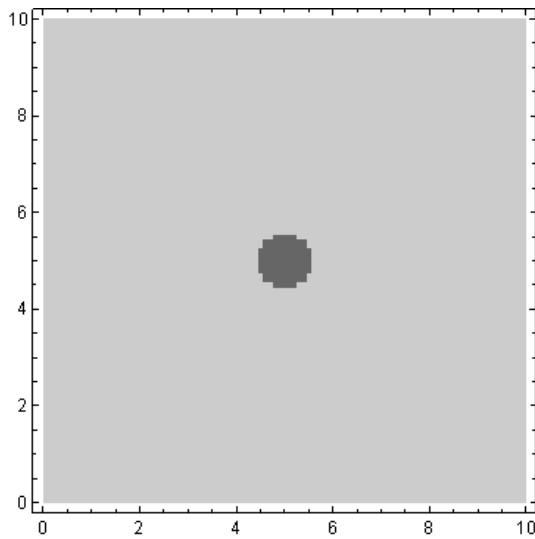
б)



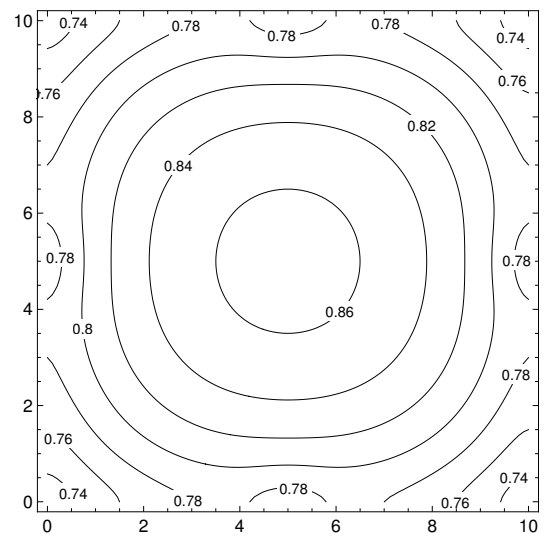
в)

Рис. 5.8. а) Целевой функционал. б) Количество критических узлов. в) Параметр k .

Далее рассмотрим пример задачи с функционалом J_2 , $\theta_d = 0.8$. Результаты вычислений показаны на рисунках 5.9, 5.10. Конечное значение функционала равно 1.349, конечное число критических узлов равно 0.

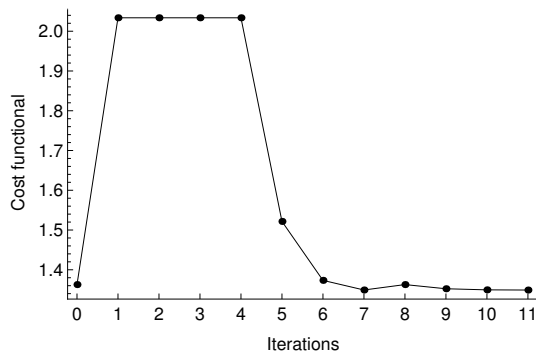


а)

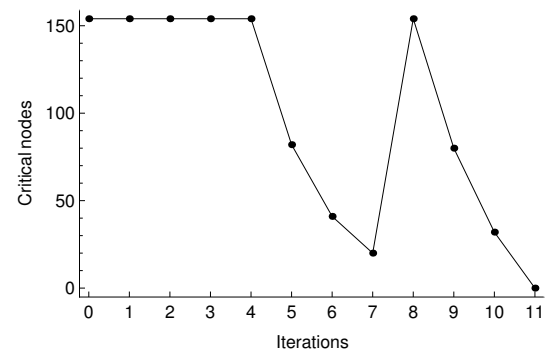


б)

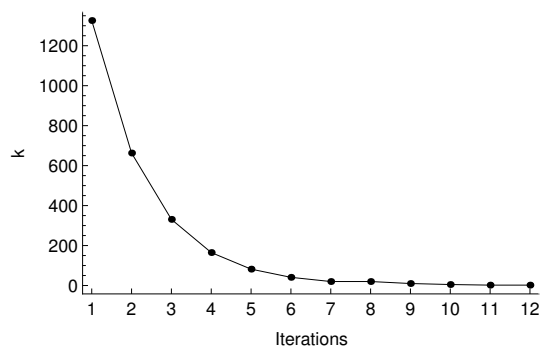
Рис. 5.9. а) Оптимальное управление. б) Оптимальная температура в центральном сечении куба в конечный момент времени.



а)



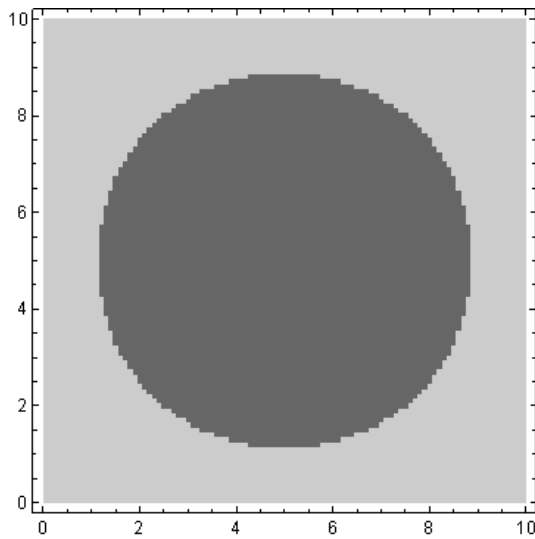
б)



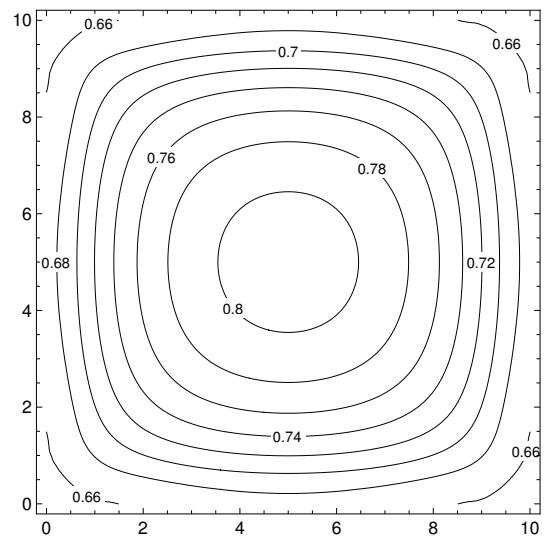
в)

Рис. 5.10. а) Целевой функционал. б) Количество критических узлов. в) Параметр k .

Наконец, рассмотрим пример задачи с функционалом J_2 , $\theta_d = 0.7$. Результаты вычислений показаны на рисунках 5.11, 5.12. Конечное значение функционала равно 1.739, конечное число критических узлов равно 1.

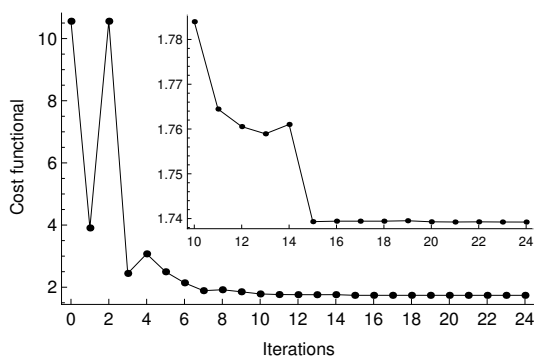


а)

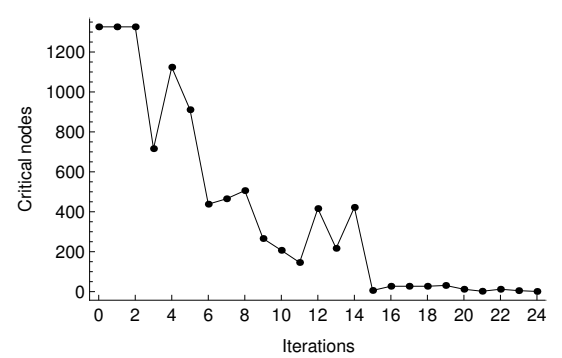


б)

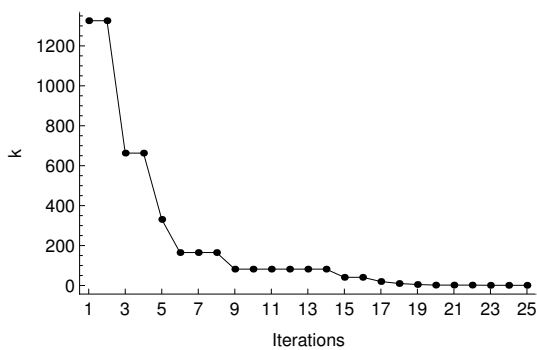
Рис. 5.11. а) Оптимальное управление. б) Оптимальная температура в центральном сечении куба в конечный момент времени.



а)



б)



в)

Рис. 5.12. а) Целевой функционал. б) Количество критических узлов. в) Параметр k .

Отметим особенность задачи: при изменении управления в малом числе узлов знак функции переключения может измениться в большом числе узлов,

поэтому не во всех случаях удастся получить полное соответствие управления и знака функции переключения, т.е. получить управление с отсутствием критических точек.

Возможно использовать многосеточный метод, когда оптимальное управление сначала вычисляется на более грубой сетке и затем выбирается в качестве начального приближения на более мелкой сетке.

В проведенных тестах алгоритм находит управление с достаточно малым количеством критических точек, что означает, что найденное управление приближенно удовлетворяет системе оптимальности. Поскольку для решения задачи требуется небольшое число итераций, алгоритм можно считать эффективным.

Аналогичный алгоритм применялся автором для решения задачи оптимального управления тепловыми источниками внутри двумерной области [152].

5.5. Программа для решения задачи управления граничным коэффициентом

Оптимизационный алгоритм решения задачи управления граничным коэффициентом описан в разд. 5.4. При решении прямой и сопряженной задач получаем 27 групп разностных уравнений, которые можно разделить на 4 типа: 1) для внутренних узлов; 2) для граней; 3) для ребер; 4) для вершин. При программировании, учитывая симметрию задачи, достаточно записать 4 группы уравнений.

Для решения СЛАУ используем алгоритм Bi-CGSTAB [116] с предобусловливателем ILU (неполное LU-разложение), реализованный в библиотеке ITL. Значение целевого функционала вычисляется с помощью формулы трапеций.

Программа принимает на вход текстовый файл, содержащий входные параметры в виде **имя = значение**.

Программа выводит информацию по каждой итерации в отдельных тексто-

вых файлах: значения управления и функции переключения, значение целевого функционала, количество критических точек, значение параметра k , поля температуры и интенсивности излучения в сечении куба и информация об уменьшении параметра k и возврате к управлению на предыдущей итерации.

Программа может быть запущена несколько раз, при повторном запуске из файлов считывается информация о предыдущих итерациях, и итерационный процесс продолжается.

Программная реализация выполнена на языке C++, исходный код доступен по ссылке https://github.com/grenkin/opt_control3d.

5.6. Общий решатель систем диффузии-реакции методом конечных разностей

5.6.1. Постановка задачи

Рассматривается прямоугольная область. Горизонтальная сторона прямоугольника разделяется на M_x промежутков, вертикальная — на M_y промежутков. Таким образом, весь прямоугольник разделяется на $M_x M_y$ прямоугольных подобластей.

В каждой j -й подобласти, $j = (j_x, j_y)$, задается система дифференциальных уравнений диффузии-реакции

$$-a_{ij}\Delta u_i(x, y) + \sum_{k=1}^N f_{ijk}(u_k(x, y)) = g_{ij}(x, y), \quad i = 1, \dots, N$$

с граничными условиями Дирихле, Неймана или Робена и условиями сопряжения типа неидеального контакта либо идеального контакта.

Обобщение постановки задачи упрощает программирование и тестирование. Во-первых, общий решатель позволяет решать целый класс однотипных задач, поэтому для каждой новой вариации постановки задачи не нужно писать новую программу. Во-вторых, тестирование конечноразностных алгоритмов за-

труднено, так как точное решение часто неизвестно, но общий решатель можно протестировать на задачах с заданным точным решением.

5.6.2. Описание алгоритма и программы

В области вводится сетка: каждый x - и y -промежуток разбивается на равные части. Применяется разностная схема 2-го порядка, описанная в [25]. Для линеаризации нелинейных уравнений используется метод Ньютона.

Разностные уравнения записываются в виде суммы одномерных разностных операторов по x и y и нелинейного точечного оператора. Реализация общего алгоритма через сумму одномерных операторов позволяет не рассматривать большое количество типов узлов (внутренние, на стороне прямоугольника, в угловой точке, на границе раздела подобластей, на стороне прямоугольника и на границе раздела, в угловой точке на границах раздела). Для записи уравнений используется понятный синтаксис с перегрузкой операций.

Для решения СЛАУ применяется итерационный метод из библиотеки MTL4.

При тестировании проверяется, что при удвоенном измельчении сетки погрешность уменьшается примерно в 4 раза — это свидетельствует о том, что разностная схема сходится со 2-м порядком.

Разработаны программы для решения 1-мерных (на языках Octave и C++) и 2-мерных (на языке C++) задач. Исходный код доступен по ссылке <https://github.com/grenkin/joker-fdm>.

5.6.3. Моделирование радиационных и тепловых процессов в кожном покрове

Приведем пример приложения общего решателя. В работе автора с соавторами [142] рассмотрена модель радиационно-кондуктивного теплообмена в кожном покрове, находящемся под воздействием солнечного излучения. Эта модель является модификацией стационарной модели сложного теплообмена в

многослойной среде, рассмотренной в разд. 1.2.

С помощью общего конечноразностного решателя проведены вычислительные эксперименты для изучения влияния различных факторов на распределения температурных и радиационных полей (эффекты отражения и преломления, внутреннее тепловое излучение, наличие наночастиц в верхнем слое кожи).

Вычислительный эксперимент показывает, что температурное поле в модели с учетом эффектов отражения и преломления близко к температурному полю в модели без учета этих эффектов вследствие слабого изменения показателя преломления. Также вычислительный эксперимент демонстрирует важность учета эффектов внутреннего теплового излучения. Внесение в модель слоя с наночастицами вызвало небольшое уменьшение температурного поля.

Заключение

В диссертации доказаны существование и единственность решений начально-краевых задач для нестационарных уравнений сложного теплообмена. Установлена устойчивость стационарных решений, что служит обоснованием адекватности стационарной диффузионной модели. Таким образом, получены важные с теоретической точки зрения результаты, которые могут быть полезны при дальнейшем использовании стационарных моделей сложного теплообмена и анализе обратных задач в рамках нестационарных моделей сложного теплообмена. Разработанные методы исследования начально-краевых задач могут применяться для изучения различных моделей, описываемых нелинейными уравнениями со сходной структурой.

Построены эффективные численные алгоритмы решения задач оптимизации сложного теплообмена при выборе коэффициента излучения границы области. Эти алгоритмы могут использоваться для выбора оптимальных характеристик внутренней поверхности инженерной установки, при которых улучшается процесс теплообмена.

Разработан комплекс программ для проведения вычислительных экспериментов. Разработка общего решателя краевых задач методом конечных разностей может быть продолжена, чтобы охватить более широкий круг решаемых задач.

В дальнейшем исследование диффузионных моделей сложного теплообмена может быть направлено на учет эффектов отражения и преломления на границе раздела сред в нестационарной модели и учет зависимости коэффициентов поглощения и рассеяния от частоты излучения.

Список литературы

1. Амосов А. А. Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением // *Дифференц. уравнения.* — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 93–104.
2. Амосов А. А. Разрешимость стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в системе серых тел // *Вестник МЭИ.* — 2009. — № 6. — С. 72–93.
3. Амосов А. А. Нестационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения // *Современная математика. Фундаментальные направления.* — 2016. — Т. 59. — С. 5–34.
4. Амосов А. А. Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2017. — Т. 57, № 3. — С. 510–535.
5. Борисов В. М., Иванков А. А. Применение P_1 - и P_2 -приближений метода сферических гармоник к расчету лучистого теплообмена с учетом сильного вдува с поверхности тел при движении в атмосфере Юпитера // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1692–1703.
6. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М. : Мир, 1978.
7. Гершуни Г. З., Жуковичский Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М. : Наука, 1972.
8. Домбровский Л. А. Приближенные методы расчета теплообмена излучением в дисперсных системах // *Теплоэнергетика.* — 1996. — № 3. — С. 50–57.
9. Домбровский Л. А., Тимченко В. М. Лазерная гипертермия поверхностных опухолей: модели переноса излучения, сложного теплообмена и деградации биологических тканей // *Тепловые процессы в технике.* — 2015. —

- Т. 7, № 1. — С. 24–36.
10. *Зверев В. Г., Гольдин В. Д., Назаренко В.* Радиационно-кондуктивный теплоперенос в волокнистой термостойкой изоляции при тепловом воздействии // *Теплофизика высоких температур*. — 2008. — Т. 46, № 1. — С. 119–125.
 11. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М. : Наука, 1978.
 12. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М. : Мир, 1983.
 13. *Ковтанюк А. Е.* Стационарные модели переноса излучения и сложного теплообмена : дисс. д-ра физ.-мат. наук / А. Е. Ковтанюк. — 2014.
 14. *Ковтанюк А. Е., Чеботарев А. Ю.* Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2016. — Т. 56, № 5. — С. 816–823.
 15. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.
 16. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М. : Мир, 1972.
 17. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа: Учеб. пособие. — М. : Высш. школа, 1982.
 18. *Месенев П. Р., Чеботарев А. Ю.* Граничная обратная задача для уравнений сложного теплообмена // *Дальневост. матем. журн.* — 2018. — Т. 18, № 1. — С. 75–84.
 19. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М. : Наука, 1976.
 20. *Михеев М. А., Михеева И. М.* Основы теплопередачи. — М. : Энергия, 1977.
 21. *Мухамадиев Э. М., Стеценко В. Я.* Достаточные условия сходимости метода Ньютона-Канторовича при решении краевых задач для квазилинейных уравнений эллиптического типа // *Сиб. матем. журн.* — 1971. —

- Т. 12, № 3. — С. 576–582.
22. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М. : Мир, 1977.
 23. *Оцисик М. Н.* Сложный теплообмен. — М. : Мир, 1976.
 24. *Садыков А. В.* К совместному решению уравнений энергии и переноса излучения // *Вестник Казанского технологического университета.* — 2013. — Т. 16, № 12. — С. 62–66.
 25. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. — М. : Наука, 1976.
 26. *Спэрроу Э. М., Сэсс Р. Д.* Теплообмен излучением. — Л. : Энергия, 1971.
 27. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. — М. : Наука, 1981.
 28. *Чеботарев А. Ю., Гренкин Г. В., Ковтанюк А. Е.* Однозначная разрешимость субдифференциальной краевой задачи для уравнений сложного теплообмена // *Дальневост. матем. журн.* — 2016. — Т. 16, № 2. — С. 229–236.
 29. *Addam M., Bouhamidi A., Seaid M.* A frequency-domain approach for the P_1 approximation of time-dependent radiative transfer // *J. Sci. Comput.* — 2015. — Vol. 62, no. 3. — P. 623–651.
 30. *Amosov A. A.* Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative–conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency // *J. Math. Sci.* — 2010. — Vol. 165, no. 1. — P. 1–41.
 31. *Amosov A. A.* Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative–conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency // *J. Math. Sci.* — 2010. — Vol. 164, no. 3. — P. 309–344.
 32. *Amosov A. A.* Unique solvability of a nonstationary problem of radiative–conductive heat exchange in a system of semitransparent bodies // *Russ. J. Math. Phys.* — 2016. — Vol. 23, no. 3. — P. 309–334.

33. *Amosov A. A.* Unique solvability of stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system of semitransparent bodies // *J. Math. Sci.* — 2017. — Vol. 224, no. 5. — P. 618–646.
34. Analysis of a fractional-step scheme for the P_1 radiative diffusion model / T. Gallouët, R. Herbin, A. Larcher, J.-C. Latché // *Comput. Appl. Math.* — 2016. — Vol. 35, no. 1. — P. 135–151.
35. *Andrienko D. A., Surzhikov S. T.* P_1 approximation applied to the radiative heating of descent spacecraft // *Journal of Spacecraft and Rockets.* — 2012. — Vol. 49, no. 6. — P. 1088–1098.
36. *Andrienko D. A., Surzhikov S. T., Shang J. S.* Spherical harmonics method applied to the multi-dimensional radiation transfer // *Comput. Phys. Comm.* — 2013. — Vol. 184, no. 10. — P. 2287–2298.
37. *Asllanaj F., Jeandel G., Roche J. R.* Convergence of a numerical scheme for a nonlinear coupled system of radiative-conductive heat transfer equations // *Math. Models Methods Appl. Sci.* — 2004. — Vol. 14, no. 7. — P. 943–974.
38. *Asllanaj F., Parent G., Jeandel G.* Transient radiation and conduction heat transfer in a gray absorbing-emitting medium applied on two-dimensional complex-shaped domains // *Numerical Heat Transfer, Part B.* — 2007. — Vol. 52, no. 2. — P. 179–200.
39. *Astrakhantseva A., Kovtanyuk A.* Numerical modeling the radiative-convective-conductive heat transfer // 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCT-PEA). — 2014. — P. 106–107.
40. *Astrakhantseva A. A., Chebotarev A. Y., Kovtanyuk A. E.* Analysis of the radiative-conductive heat transfer equations with unknown intensity of heat sources // 2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium – Spring (PIERS). — 2017. — P. 1359–1361.
41. *Astrakhantseva A. A., Chebotarev A. Y., Kovtanyuk A. E.* Design of the boundary reflection properties to minimize the energy flows // 2017 Progress

- In Electromagnetics Research Symposium – Spring (PIERS). — 2017. — P. 1332–1336.
42. Asymptotic derivation and numerical investigation of time-dependent simplified P_N equations / E. Olbrant, E. W. Larsen, M. Frank, B. Seibold // *J. Comput. Phys.* — 2013. — Vol. 238. — P. 315–336.
 43. Bang-bang control and singular arcs in reservoir flooding / M. J. Zandvliet, O. H. Bosgra, J. D. Jansen et al. // *J. Pet. Sci. Eng.* — 2007. — Vol. 58, no. 1–2. — P. 186–200.
 44. Banoczy J. M., Kelley C. T. A fast multilevel algorithm for the solution of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations in two space dimensions // *SIAM J. Sci. Comput.* — 1999. — Vol. 20, no. 4. — P. 1214–1228.
 45. Belmiloudi A., Mahé F. On nonlinear inverse problems of heat transfer with radiation boundary conditions: application to dehydration of gypsum plasterboards exposed to fire // *Adv. Numer. Anal.* — 2014. — Vol. 2014.
 46. Berninger H. Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators. — Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII. Springer, 2009. — P. 169–176.
 47. Bilir S., Ateş A. Transient conjugated heat transfer in thick walled pipes with convective boundary conditions // *Int. J. Heat Mass Tran.* — 2003. — Vol. 46, no. 14. — P. 2701–2709.
 48. Birgelis K. Optimal control in models with conductive-radiative heat transfer // *Math. Model. Anal.* — 2003. — Vol. 8, no. 1. — P. 1–12.
 49. Borzi A., Kunisch K. A multigrid scheme for elliptic constrained optimal control problems // *Comput. Optim. Appl.* — 2005. — Vol. 31, no. 3. — P. 309–333.
 50. Clever D., Lang J. Optimal control of radiative heat transfer in glass cooling with restrictions on the temperature gradient // *Optimal Control Appl. Methods.* — 2012. — Vol. 33, no. 2. — P. 157–175.

51. *Clever D., Lang J., Schröder D.* Model hierarchy-based optimal control of radiative heat transfer // *Int. J. Computational Science and Engineering*. — 2014. — Vol. 9, no. 5/6. — P. 509–525.
52. A comparison of approximate models for radiation in gas turbines / M. Frank, M. Seaïd, A. Klar et al. // *Prog. Comput. Fluid Dyn.* — 2004. — Vol. 4, no. 3–5. — P. 191–197.
53. *Deckelnick K., Hinze M.* A note on the approximation of elliptic control problems with bang-bang controls // *Comput. Optim. Appl.* — 2012. — Vol. 51, no. 2. — P. 931–939.
54. *Dombrovsky L. A.* P1 approximation of spherical harmonics method // *Thermopedia*. — URL: <http://www.thermopedia.com/content/129> (online; accessed: 25.04.2018).
55. *Dombrovsky L. A.* The use of transport approximation and diffusion-based models in radiative transfer calculations // *Computational Thermal Sciences*. — 2012. — Vol. 4, no. 4. — P. 297–315.
56. *Druet P.-E.* Weak solutions to a stationary heat equation with nonlocal radiation boundary condition and right-hand side in L_p ($p \geq 1$) // *Math. Methods Appl. Sci.* — 2009. — Vol. 32, no. 2. — P. 135–166.
57. *Druet P.-E.* Weak solutions to a time-dependent heat equation with nonlocal radiation boundary condition and arbitrary p-summable right-hand side // *Appl. Math.* — 2010. — Vol. 55, no. 2. — P. 111–149.
58. *Edwards J. D., Morel J. E., Knoll D. A.* Nonlinear variants of the TR/BDF2 method for thermal radiative diffusion // *J. Comp. Phys.* — 2011. — Vol. 320, no. 4. — P. 1198–1214.
59. Efficient numerical methods for radiation in gas turbines / M. Seaïd, M. Frank, A. Klar et al. // *J. Comput. Appl. Math.* — 2004. — Vol. 170, no. 1. — P. 217–239.
60. Elliptic formulation of the simplified spherical harmonics method in radiative heat transfer / M. F. Modest, J. Cai, W. Ge, E. Lee // *Int. J. Heat Mass*

- Tran.* — 2014. — Vol. 76. — P. 459–466.
61. *End T.* On optimization of the full radiative heat transfer system // *Proc. Appl. Math. Mech.* — 2010. — Vol. 10, no. 1. — P. 533–534.
 62. *End T.* On analytical results for the optimal control of the quasi-stationary radiative heat transfer system // *Proc. Appl. Math. Mech.* — 2011. — Vol. 11, no. 1. — P. 793–794.
 63. Existence and uniqueness of a steady state solution of a coupled radiative-conductive heat transfer problem for a non-grey anisotropically and participating medium / F. Asllanaj, G. Jeandel, J. R. Roche, D. Schmitt // *Transport Theory Statist. Phys.* — 2003. — Vol. 32, no. 1. — P. 1–35.
 64. *Frank M., Klar A., Pinnau R.* Optimal control of glass cooling using simplified P_N theory // *Transport Theory Statist. Phys.* — 2010. — Vol. 39, no. 2–4. — P. 282–311.
 65. *Frank M., Lang J., Schäfer M.* Adaptive finite element simulation of the time-dependent simplified P_N equations // *J. Sci. Comput.* — 2011. — Vol. 49, no. 3. — P. 332–350.
 66. Galerkin method for solving combined radiative and conductive heat transfer / M. Ghattassi, J. R. Roche, F. Asllanaj, M. Boutayeb // *International Journal of Thermal Sciences.* — 2016. — Vol. 102. — P. 122–136.
 67. *Ghattassi M., Roche J. R., Schmitt D.* Existence and uniqueness of a transient state for the coupled radiative-conductive heat transfer problem // *Comput. Math. Appl.* — 2018. — Vol. 75, no. 11. — P. 3918–3928.
 68. *Girault V., Raviart P.-A.* Finite element approximation of the Navier-Stokes equations. — Berlin : Springer-Verlag, 1979.
 69. *Glashoff K., Sachs E.* On theoretical and numerical aspects of the bang-bang-principle // *Numer. Math.* — 1977. — Vol. 29, no. 1. — P. 93–113.
 70. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. — Pitman, 1985.
 71. *Howell J. R., Siegel R., Mengüç M. P.* Thermal radiation heat transfer. — CRC Press, 2010.

72. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange / A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk et al. // *J. Math. Anal. Appl.* — 2018. — Vol. 460, no. 2. — P. 737–744.
73. Kaya C. Y., Lucas S. K., Simakov S. T. Computations for bang-bang constrained optimal control using a mathematical programming formulation // *Optimal Control Appl. Methods.* — 2004. — Vol. 25, no. 6. — P. 295–308.
74. Kelley C. T. Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations // *Transport Theory Statist. Phys.* — 1996. — Vol. 25, no. 2. — P. 249–260.
75. Klar A., Lang J., Seaid M. Adaptive solutions of SP_N -approximations to radiative heat transfer in glass // *Int. J. Therm. Sci.* — 2005. — Vol. 44, no. 11. — P. 1013–1023.
76. Klein O., Philip P. Transient conductive-radiative heat transfer: Discrete existence and uniqueness for a finite volume scheme // *Math. Models Methods Appl. Sci.* — 2005. — Vol. 15, no. 2. — P. 227–258.
77. Klose A. D., Larsen E. W. Light transport in biological tissue based on the simplified spherical harmonics equations // *J. Comput. Phys.* — 2006. — Vol. 220, no. 1. — P. 441–470.
78. Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H. Numerical simulations of a coupled radiative-conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method // *Int. J. Heat. Mass Transf.* — 2012. — Vol. 55, no. 4. — P. 649–654.
79. Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Y. An iterative method for solving a complex heat transfer problem // *Appl. Math. Comput.* — 2013. — Vol. 219, no. 17. — P. 9356–9362.
80. Laitinen M., Tiihonen T. Conductive-radiative heat transfer in grey materials // *Quart. Appl. Math.* — 2001. — Vol. 59. — P. 737–768.
81. Lang J. Adaptive computation for boundary control of radiative heat transfer

- in glass // *J. Comput. Appl. Math.* — 2005. — Vol. 183, no. 2. — P. 312–326.
82. *LeVeque R. J.* Finite difference methods for ordinary and partial differential equations. — SIAM, 2007.
 83. Mathematical models in the manufacturing of glass / A. Farina, A. Klar, R. M. M. Mattheij et al. — Springer, 2011.
 84. *Maurer H., Mittelman H. D.* Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints: Part 1. Boundary control // *Comput. Optim. Appl.* — 2000. — Vol. 16, no. 1. — P. 29–55.
 85. *Maurer H., Mittelman H. D.* Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints: Part 2. Distributed control // *Comput. Optim. Appl.* — 2001. — Vol. 18, no. 2. — P. 141–160.
 86. *Metzger M.* Existence for a time-dependent heat equation with non-local radiation terms // *Math. Methods Appl. Sci.* — 1999. — Vol. 22, no. 13. — P. 1101–1119.
 87. *Meyer C., Philip P., Tröltzsch F.* Optimal control of a semilinear PDE with nonlocal radiation interface conditions // *SIAM J. Control Optim.* — 2006. — Vol. 45, no. 2. — P. 699–721.
 88. *Meyer C., Yousept I.* State-constrained optimal control of semilinear elliptic equations with nonlocal radiation interface conditions // *SIAM J. Control Optim.* — 2009. — Vol. 48, no. 2. — P. 734–755.
 89. *Modest M. F.* Radiative heat transfer. — Academic Press, 2013.
 90. *Münch A., Periago F.* Numerical approximation of bang-bang controls for the heat equation: An optimal design approach // *Systems Control Lett.* — 2013. — Vol. 62, no. 8. — P. 643–655.
 91. Numerical methods and optimal control for glass cooling processes / G. Thömmes, R. Pinnau, M. Seaïd et al. // *Transport Theory Statist. Phys.* — 2002. — Vol. 31, no. 4–6. — P. 513–529.
 92. Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects / A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin,

- K.-H. Hoffmann // *J. Math. Anal. Appl.* — 2016. — Vol. 439, no. 2. — P. 678–689.
93. Optimization with PDE constraints / M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich. — Springer, 2009.
 94. *Pereverzyev S. S., Pinnau R., Siedow N.* Initial temperature reconstruction for nonlinear heat equation: application to a coupled radiative-conductive heat transfer problem // *Inverse Probl. Sci. Eng.* — 2008. — Vol. 16, no. 1. — P. 55–67.
 95. *Philip P.* Analysis, optimal control, and simulation of conductive-radiative heat transfer // *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.* — 2010. — Vol. 2. — P. 171–204.
 96. *Pierre M.* Global existence in reaction-diffusion systems with control of mass: a survey // *Milan J. Math.* — 2010. — Vol. 78, no. 2. — P. 417–455.
 97. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by SP_1 system // *Commun. Math. Sci.* — 2007. — Vol. 5, no. 4. — P. 951–969.
 98. *Pinnau R., Schulze A.* Newton's method for optimal temperature-tracking of glass cooling processes // *Inverse Probl. Sci. Eng.* — 2007. — Vol. 15, no. 4. — P. 303–323.
 99. *Pinnau R., Seaïd M.* Simplified P_N models and natural convection-radiation // *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006.* — Springer, 2008. — P. 397–401.
 100. *Pinnau R., Thömmes G.* Optimal boundary control of glass cooling processes // *Math. Methods Appl. Sci.* — 2004. — Vol. 27, no. 11. — P. 1261–1281.
 101. *Pinnau R., Tse O.* Optimal control of a simplified natural convection-radiation model // *Commun. Math. Sci.* — 2013. — Vol. 11, no. 3. — P. 679–707.
 102. *Porzio M. M., López-Pouso O.* Application of accretive operators theory

- to evolutive combined conduction, convection and radiation // *Rev. Mat. Iberoamericana*. — 2004. — Vol. 20, no. 1. — P. 257–275.
103. Radiative heat transfer analysis in modern rocket combustion chambers / F. Goebel, B. Kniesner, M. Frey et al. // *CEAS Space J.* — 2014. — Vol. 6, no. 2. — P. 79–98.
 104. *Schryer N. L.* Newton's method for convex nonlinear elliptic boundary value problems // *Numer. Math.* — 1971. — Vol. 17, no. 4. — P. 284–300.
 105. *Seaïd M.* Multigrid Newton-Krylov method for radiation in diffusive semi-transparent media // *J. Comput. Appl. Math.* — 2007. — Vol. 203, no. 2. — P. 498–515.
 106. *Seaïd M., Klar A., Pinnau R.* Numerical solvers for radiation and conduction in high temperature gas flows // *Flow, Turbulence and Combustion*. — 2005. — Vol. 75, no. 1-4. — P. 173–190.
 107. *Siewert C., Thomas J.* A computational method for solving a class of coupled conductive-radiative heat transfer problems // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. — 1991. — Vol. 45, no. 5. — P. 273–281.
 108. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ // *Ann. Mat. Pura Appl.* — 1986. — Vol. 146, no. 1. — P. 65–96.
 109. Simplified P_N approximations to the equations of radiative heat transfer and applications / E. W. Larsen, G. Thömmes, A. Klar et al. // *J. Comput. Phys.* — 2002. — Vol. 183, no. 2. — P. 652–675.
 110. SP_N -approximations of internal radiation in crystal growth of optical materials / R. Backofen, T. Bilz, A. Ribalta, A. Voigt // *J. Cryst. Growth*. — 2004. — Vol. 266, no. 1–3. — P. 264–270.
 111. Strong optimal controls in a steady-state problem of complex heat transfer / A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann // IFIP Conference on System Modeling and Optimization / Springer. — 2015. — P. 209–219.
 112. *Taleshian T., Noei A. R., Ghaderi R.* IPSO-SQP algorithm for solving time

- optimal bang-bang control problems and its application on autonomous underwater vehicle // *Journal of Advances in Computer Research*. — 2014. — Vol. 5, no. 2. — P. 69–88.
113. *Tamura K., Ichikawa K.* New method based on gradient function for solving bang-bang control problems // *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*. — 1970. — Vol. 6, no. 5. — P. 454–458.
 114. *Teleaga I., Seaid M.* Simplified radiative models for low-Mach number reactive flows // *Appl. Math. Model.* — 2008. — Vol. 32, no. 6. — P. 971–991.
 115. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — New York : Springer, 1998.
 116. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods / R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan et al. — Philadelphia : SIAM Press, 1994.
 117. Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer / A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann // *J. Math. Anal. Appl.* — 2014. — Vol. 412, no. 1. — P. 520–528.
 118. *Thompson M., Segatto C., de Vilhena M.* Existence theory for the solution of a stationary nonlinear conductive-radiative heat-transfer problem in three space dimensions // *Transport Theory Statist. Phys.* — 2004. — Vol. 33, no. 5–7. — P. 563–576.
 119. *Tiihonen T.* A nonlocal problem arising from heat radiation on non-convex surfaces // *European J. Appl. Math.* — 1997. — Vol. 8, no. 4. — P. 403–416.
 120. *Tiihonen T.* Stefan-Boltzmann radiation on non-convex surfaces // *Math. Methods Appl. Sci.* — 1997. — Vol. 20, no. 1. — P. 47–57.
 121. Time-dependent simplified P_N approximation to the equations of radiative transfer / M. Frank, A. Klar, E. W. Larsen, S. Yasuda // *J. Comput. Phys.* — 2007. — Vol. 226, no. 2. — P. 2289–2305.
 122. *Tröltzsch F.* Optimal control of partial differential equations: theory, meth-

- ods and applications. — AMS, 2010.
123. *Tse O., Pinnau R., Siedow N.* Identification of temperature-dependent parameters in laser-interstitial thermo therapy // *Math. Models Methods Appl. Sci.* — 2012. — Vol. 22, no. 9. — P. 1250019.
 124. The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem / A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann // *J. Math. Anal. Appl.* — 2014. — Vol. 409, no. 2. — P. 808–815.
 125. Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model / A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* — 2015. — Vol. 20, no. 3. — P. 776–784.
 126. Validation of a mathematical model for laser-induced thermotherapy in liver tissue / F. Hübner, C. Leithäuser, B. Bazrafshan et al. // *Lasers Med. Sci.* — 2017. — Vol. 32, no. 6. — P. 1399–1409.
 127. Validation of simplified P_N models for radiative transfer in combustion systems / E. Schneider, M. Seaïd, J. Janicka, A. Klar // *Commun. Numer. Meth. Engng.* — 2008. — Vol. 24, no. 2. — P. 85–96.
 128. *Wu C.-Y., Liou B.-T.* Radiative transfer in a two-layer slab with Fresnel interfaces // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* — 1996. — Vol. 56, no. 4. — P. 573–589.
 129. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications. I: Fixed-point theorems. — Springer, 1986.
 130. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications. II/A: Linear monotone operators. — Springer, 1990.
 131. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications. II/B: Nonlinear monotone operators. — Springer, 1990.
 132. *Ziemer W. P.* Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation. — New York : Springer, 1989.
 133. *Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю.* Устойчивость стационарных решений диффузионной модели сложного теплообмена // *Дальневост. матем.*

- журн.* — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 18–32.
134. Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю. Нестационарная задача сложного теплообмена // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2014. — Т. 54, № 11. — С. 1806–1816.
 135. Гренкин Г. В. Оптимальное управление в нестационарной задаче сложного теплообмена // *Дальневост. матем. журн.* — 2014. — Т. 14, № 2. — С. 160–172.
 136. Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю. Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2015. — Т. 12. — С. 562–576.
 137. Boundary optimal control problem of complex heat transfer model / G. V. Grenkin, A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk et al. // *J. Math. Anal. Appl.* — 2016. — Vol. 433, no. 2. — P. 1243–1260.
 138. Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю. Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2016. — Т. 56, № 2. — С. 275–282.
 139. Гренкин Г. В. Алгоритм решения задачи граничного оптимального управления в модели сложного теплообмена // *Дальневост. матем. журн.* — 2016. — Т. 16, № 1. — С. 24–38.
 140. Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model / A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk, G. V. Grenkin et al. // *Appl. Math. Comput.* — 2016. — Vol. 289. — P. 371–380.
 141. Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю. Управление сложным теплообменом при создании экстремальных полей // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2016. — Т. 56, № 10. — С. 1725–1732.
 142. Ковтанюк А. Е., Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю. Использование диффузионного приближения для моделирования радиационных и тепловых процессов в кожном покрове // *Оптика и спектроскопия.* — 2017. — Т.

- 123, № 2. — С. 194–199.
143. Гренкин Г. В. Сходимость метода Ньютона для уравнений сложного теплообмена // *Дальневост. матем. журн.* — 2017. — Т. 17, № 1. — С. 3–10.
 144. Chebotarev A. Y., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E. Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* — 2017. — Vol. 51, no. 6. — P. 2511–2519.
 145. Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions / A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk et al. // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* — 2018. — Vol. 57. — P. 290–298.
 146. Гренкин Г. В. Свойства решений нестационарной модели сложного теплообмена // *Дальневост. матем. журн.* — 2018. — Т. 18, № 1. — С. 23–33.
 147. Grenkin G. V., Chebotarev A. Y. Stability of stationary solutions of the radiative heat transfer equations // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2018. — Vol. 58, no. 9. — P. 1420–1425.
 148. Temnenko E., Grenkin G. Stabilization of complex heat transfer process // International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA). — 2014. — P. 185–186.
 149. Analysis of a diffraction problem for equations of complex heat transfer / A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, I. V. Prokhorov // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2016”, St. Petersburg, Russia. — 2016. — P. 101–105.
 150. Numerical analysis of the complex heat transfer in a layered medium / A. A. Astrakhantseva, A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2016”, St. Petersburg, Russia. — 2016. — P. 21–24.
 151. Grenkin G., Chebotarev A. Optimal control for radiative heat transfer model with monotonic cost functional // Proc. DOOR 2016, Vladivostok, Russia, September 19–23, 2016. — CEUR-WS, 2016. — Vol. 1623. — P. 210–217.

152. *Chebotarev A., Grenkin G., Kovtanyuk A.* Optimal control algorithm for complex heat transfer model // Proc. DOOR 2016, Vladivostok, Russia, September 19–23, 2016. — CEUR-WS, 2016. — Vol. 1623. — P. 165–177.
153. *Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю.* Граничное оптимальное управление в модели сложного теплообмена // Торическая топология, теория чисел и их приложения: материалы Международной конференции, Хабаровск, 6–12 сентября 2015 г. — Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2015. — С. 72–73.
154. *Гренкин Г. В.* Исследование устойчивости по Ляпунову стационарных решений модели сложного теплообмена // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по естественным наукам. Владивосток, 15–30 апреля 2016 г. [Электронный ресурс]. — Владивосток : Дальневост. федерал. ун-т, 2016. — С. 221–222.
155. *Гренкин Г. В.* Сходимость метода Ньютона для уравнений сложного теплообмена // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по естественным наукам. Владивосток, 11–30 апреля 2017 г. [Электронный ресурс]. — Владивосток : Дальневост. федерал. ун-т, 2017. — С. 275.
156. *Гренкин Г. В.* Программирование метода конечных разностей // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по естественным наукам. Владивосток, 11–30 апреля 2017 г. [Электронный ресурс]. — Владивосток : Дальневост. федерал. ун-т, 2017. — С. 105.
157. Modeling of radiation-conductive heat transfer in a two-layered medium / A. A. Astrakhantseva, A. E. Kovtanyuk, G. V. Grenkin, A. Yu. Chebotarev // Математическое моделирование и компьютерные технологии: молодежная конференция-школа, Владивосток, 25–29 сентября 2017 г.: сборник материалов [Электронный ресурс]. — Владивосток : Изд-во Дальневост. федерал. ун-та, 2017. — С. 9–18.

158. *Grenkin G. V., Chebotarev A. Y.* Lyapunov stability analysis of a radiative heat transfer model // Математическое моделирование и компьютерные технологии: молодежная конференция-школа, Владивосток, 25–29 сентября 2017 г.: сборник материалов [Электронный ресурс]. — Владивосток : Изд-во Дальневост. федерал. ун-та, 2017. — С. 25–31.
159. *Гренкин Г. В.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, Владивосток, 15–30 апреля 2014 г. [Электронный ресурс]. — Владивосток : Дальневост. федерал. ун-т, 2014. — С. 121–123.
160. *Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // VII Международная конференция по математическому моделированию: Тез. докл. — Якутск : ООО «Компания «Дани-Алмаc», 2014. — С. 134–135.
161. *Chebotarev A. Y., Grenkin G. V., Temnenko E. I.* Stabilization of complex heat transfer process // Dynamics and Structure of Combustion Waves: 2nd International Conference, July, 23–27, 2014, Vladivostok: abstracts [Electronic publication]. — Vladivostok : Far Eastern Federal University, 2014. — P. 40.
162. *Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю.* Анализ и управление для уравнений сложного теплообмена // XXXVIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова, 1–5 сентября 2014 г., Владивосток: сб. материалов [Электронный ресурс]. — Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2014. — С. 216–222.
163. *Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю.* Оптимальное управление в нестационарной задаче сложного теплообмена // Современные проблемы математики: Материалы Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, приуроченной к 105-летию педагогического образования на Дальнем Востоке. — Владивосток : Дальневосточный

- федеральный университет, 2014. — С. 4–5.
164. *Гренкин Г. В.* Граничное оптимальное управление в модели сложного теплообмена // Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по естественным наукам. Владивосток, 15–30 апреля 2015 г. [Электронный ресурс]. — Владивосток : Дальневост. федерал. ун-т, 2015. — С. 169–171.
 165. *Grenkin G. V., Chebotarev A. Y.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // Proceedings of the Academic Conference in English of School of Natural Sciences Students, Vladivostok, 27 April – 08 May 2015. — Vladivostok : Far Eastern Federal University, 2015. — P. 41–43.
 166. *Grenkin G. V.* Algorithm for boundary optimal control of radiative heat transfer model // Материалы конкурса научных докладов на английском языке среди студентов Инженерной школы ДВФУ, Владивосток, 9–11 декабря 2015 г. [Электронный ресурс]. — Владивосток : Дальневост. федерал. ун-т, 2015. — С. 23.
 167. *Chebotarev A. Y., Grenkin G. V., Danilenko E. A.* Exponential stability of stationary solutions of radiation heat transfer equations // Proc. International conference “Numbers, forms and geometry”, August 21–26, 2017. Sochi, Russia. — P. 17–18.
 168. *Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю., Ковтанюк А. Е.* Оптимальное управление граничным коэффициентом в полустационарной модели радиационно-кондуктивного теплообмена в двумерной области // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015614304 (дата регистрации 14.04.2015).
 169. *Гренкин Г. В., Чеботарев А. Ю.* Оптимальное управление граничным коэффициентом в полустационарной модели сложного теплообмена в трехмерной области // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016611950 (дата регистрации 15.02.2016).
 170. Моделирование радиационных и тепловых процессов в двухслойной среде

/ Г. В. Гренкин, А. Е. Ковтанюк, А. А. Астраханцева, А. Ю. Чеботарев
// Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2016663376 (дата регистрации 06.12.2016).

171. *Гренкин Г.* Программирование метода конечных разностей // *Хабр.* —
URL: <http://habr.com/post/320070> (дата обращения: 25.04.2018).