UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Apresentação de Projeto

Métodos Numéricos

Luis Felipe Batista Pereira
Marcos Heitor Carvalho de Oliveira
Thalisson Moura Tavares

Questao 1

Ao vermos o Modelo de Crescimento Exponencial, isto é, a taxa de variação da população em relação ao tempo, aqui denotada por dP/dt, é proporcional à população presente. Em outras palavras, se P=P(t) mede a população, nós temos

$$\frac{dP}{dt} = -k.P(t)$$

, onde a taxa k é uma constante

a) Durante a caçada pelas joias do infinito, após conseguir todas elas, Thanos dizimou metade do Universo. Sabe-se que a população de determinada cidade cresce a uma taxa proporcional ao número de habitantes existentes. Se, após 10 anos do estalo de Thanos, a população triplica, e após 20 anos é de 150.000 habitantes, determine a população inicial.

b) Usando os métodos numéricos implementados na primeira parte do projeto, resolva novamente o problema anterior e compare os resultados obtidos.

Equação diferencial separável:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{P(t)} = kdt$$

$$ln(P(t)) = kt + k0$$

$$P(t) = k0e^{kt}$$

a) A população triplicou em 10 anos e P(20)=150.000

$$3k0 = k0e^{10k}$$

$$ln3 = 10k$$

$$k = \frac{ln3}{10}$$

$$k = 0.110$$

$$150.000 = k0e^{0,11*20}$$

$$k0 = \frac{150000}{e^{0.11*20}} = 16620$$

$$P(t) = 16620e^{0.11t}$$

Após o evento apocalíptico, a população inicial era de 16620 pessoas.

b) Valores gerados pelos métodos numéricos para t0=0, h=0.1, n=200, y(0)=16620 e y'=0.11y.

Método	Valor previsto	Error percentual	Ordem
Euler	148204.75495948957	1.196830027%	1
Euler Aprimorado	149989.12435612545	$7.25042925 \times 10^{-3}$%	2
Runge Kutta	149995.72432070074	$2.85045287 \times 10^{-3}$%	4
Adam-Bashforth	149995.56322800246	2.957848×10^{-3}%	3
Adam-Bashforth	149995.72435941317	$2.85042706 \times 10^{-3}$%	5
Adam-Multon	149995.7243758057	$2.85041613 \times 10^{-3}$%	5
Fórmula Inversa	149995.72446788536	$2.85035474 \times 10^{-3}$%	5

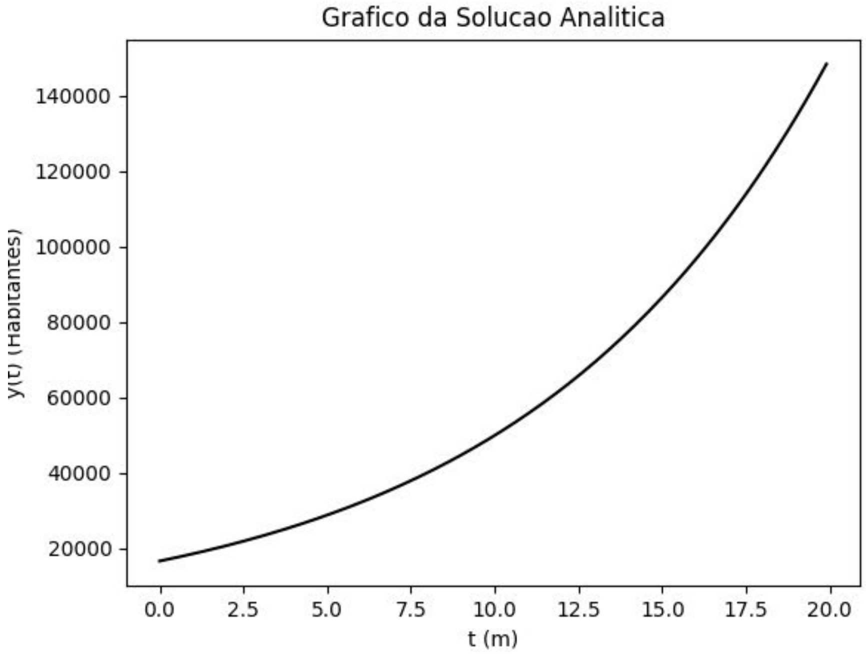
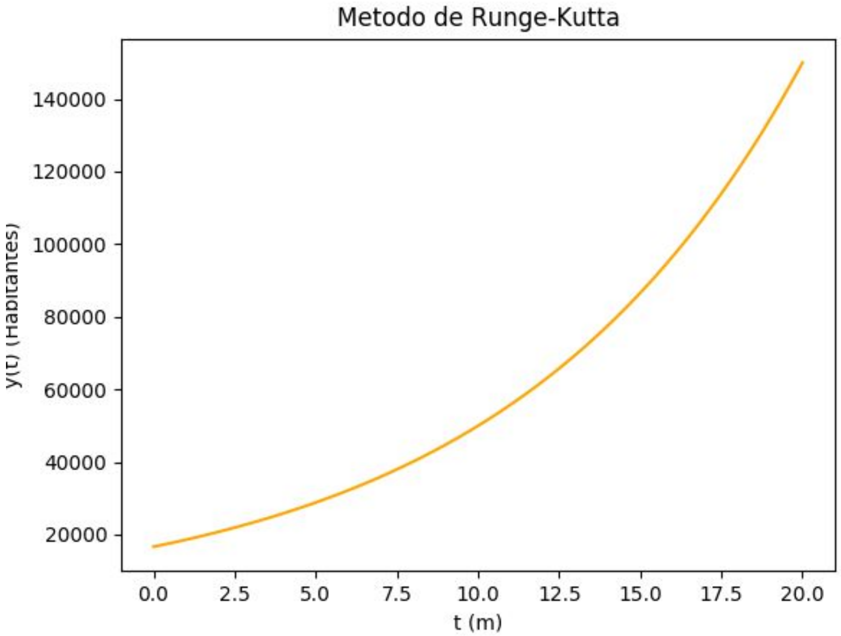


Grafico da Solucao Analitica
140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
y(t) (Habitantes)
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
t (m)


Metodo de Runge-Kutta
140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
y(t) (Habitantes)
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
t (m)

Questao 2

Vamos supor um grande tanque de mistura contenha 300 galões de salmoura (isto é, água na qual foi dissolvida uma determinada quantidade de libras de sal) com 50 libras de sal. Outra salmoura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de três galões por minuto (3gal/min); a concentração de sal nessa segunda salmoura é de 2 libras por galão (2lbs/gal). Quando a solução no tanque estiver bem misturada, ela será bombeada para fora a mesma taxa em que a segunda salmoura entrou. Se *A(t)* denotar a quantidade de sal (medida em libras) no tanque no instante *t*, a taxa segundo a qual *A(t)* varia será uma taxa liquida. Determine a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.

b) Calcule o instante de tempo, em minutos, para que A(t) = 100.

c) Usando os métodos numéricos implementados na primeira parte do projeto, resolva novamente o problema anterior e compare os resultados obtidos.

a)

A primeira parte do problema pede a solução geral da equação diferencial 22, a partir dela temos

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A(t)}{100} = 6 \tag{23}$$

Resolvendo a equação pelo método do fator integrante, temos que o fator integrante é

$$\mu(t) = e^{t/100} \tag{24}$$

Multiplicando a equacão diferencial 23 pelo fator integrante, obtemos

$$\frac{dA}{dt} \cdot e^{t/100} + e^{t/100} \cdot \frac{A(t)}{100} = 6 \cdot e^{t/100} \tag{25}$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{t/100} \cdot A(t)) = 6 \cdot e^{t/100} \tag{26}$$

Integrando a equação diferencial, temos

$$e^{t/100} \cdot A(t) = \int 6 \cdot e^{t/100}\, dt \tag{27}$$

$$e^{t/100} \cdot A(t) = 600 \cdot e^{t/100} + c \tag{28}$$

onde c é uma constante arbitrária, logo obtemos

$$A(t) = 600 + c \cdot e^{-t/100} \tag{29}$$

A partir da descrição do problema verificamos que a quantidade inicial de sal é de 50 libras

$$A(0) = 50 \tag{30}$$

Sendo assim, substituindo os valores no instante de tempo t=0 na equação 29 temos

$$A(0) = 600 + c \cdot e^{-0/100} \tag{31}$$

ou

$$50 = 600 + c \tag{32}$$

Resultando

$$c = -550 \tag{33}$$

b)

Logo, a solução geral da 23 é

$$A(t) = 600 - 550 \cdot e^{-t/100} \tag{34}$$

A partir da solução geral resolvemos a segunda parte do problema, a qual deseja-se obter o instante de tempo, em minutos, para o qual a quantidade de sal é igual a 100 libras. Substituindo os valores na equação 34

$$100 = 600 - 550 \cdot e^{-t/100} \tag{35}$$

ou

$$500 = 550 \cdot e^{-t/100} \tag{36}$$

segue que

$$e^{-t/100} = \frac{500}{550} \tag{37}$$

Aplicando logaritmo natural de ambos os lados da equação 37

$$\ln e^{-t/100} = \ln \frac{500}{550} \tag{38}$$

assim, usando as regras de logaritmo obtemos

$$-\frac{t}{100} = \ln \frac{500}{550} \tag{39}$$

ou

$$t = -\ln \frac{500}{550} \cdot 100 \approx 9,53min \tag{40}$$

Logo o instante de tempo para o qual a quantidade de sal no tanque seja igual a 100 libras é aproximadamente 9,53 minutos.

c)

Método	**Valor previsto**	**Error percentual**	**Ordem**
Euler	99.8686586955375	0.131341304462495 15%	1
Euler Inverso	99.8210964204474	0.178903579552596 17%	1
Euler Aprimorado	99.84487811740831	0.155121882591686 24%	2
Runge Kutta	99.84488604247234	0.155113957527660 77%	4
Adam-Bashforth	99.8686586955375	0.131341304462495 15%	2
Adam-Multon	99.8210964204474	0.178903579552596 17%	2
Fórmula Inversa	99.8210964204474	0.178903579552596 17%	2

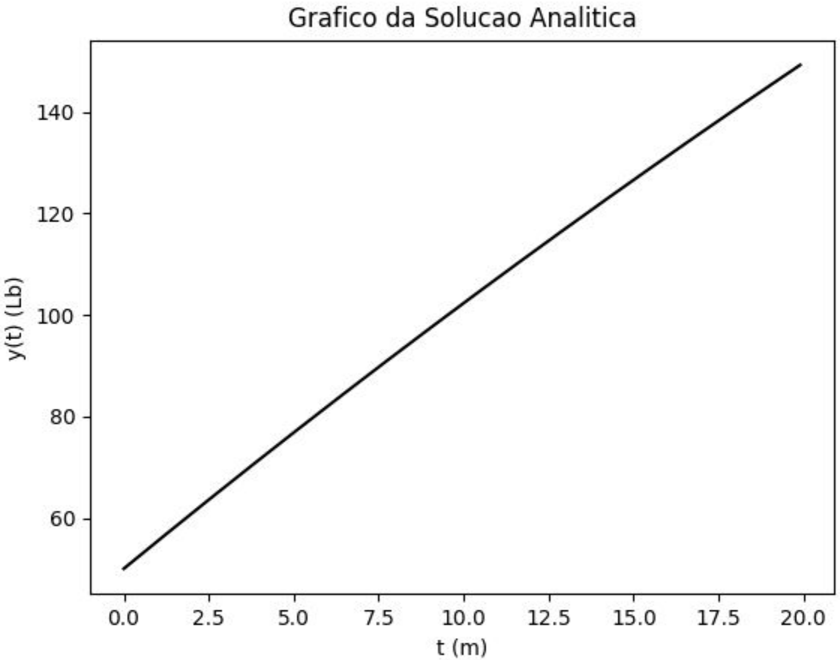
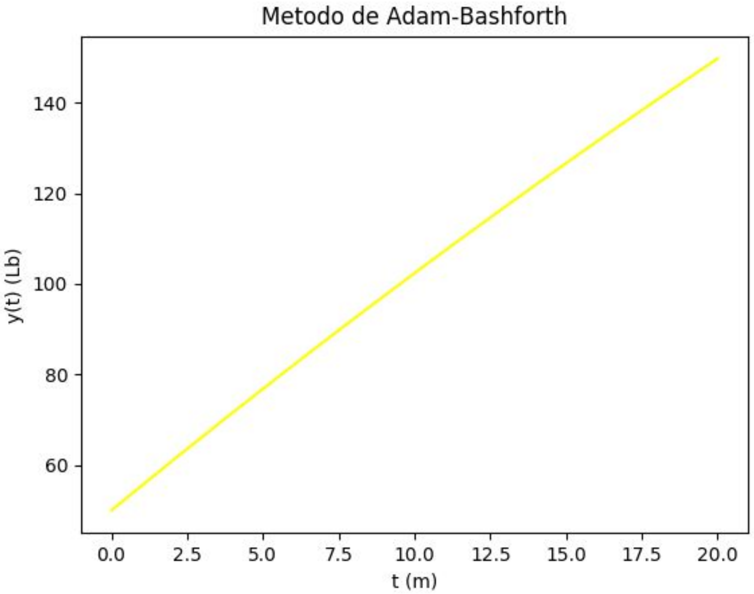


Grafico da Solucao Analitica
y(t) (Lb)
140
120
100
80
60
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
t (m)


Metodo de Adam-Bashforth
y(t) (Lb)
140
120
100
80
60
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
t (m)

Questao 3

De acordo com a Lei empírica de Newton do esfriamento/resfriamento, a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional a diferença entre a temperatura de um corpo varia proporcionalmente a diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada temperatura ambiente. Se T(t) representar a temperatura de um corpo no instante t, T_m a temperatura do meio que o rodeia dT/dt a taxa segundo a qual a temperatura do corpo varia, a lei de Newton do esfriamento/resfriamento é convertida na sentença matemática

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)} \qquad (3)$$

$$T = ce^{kt} + T_m$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Em ambos os casos, esfriamento ou aquecimento, se T_m for uma constante, é lógico que k<0.

c) **Um bolo é retirado do forno, sua temperatura é de 300°F. Três minutos depois, sua temperatura passa para 200°F. Quanto tempo levará para sua temperatura chegar a 75 graus, se a temperatura do meio ambiente em que ele foi colocado for de exatamente 70°F?**

d) **Usando os métodos numéricos implementados na primeira parte do projeto, resolva novamente o problema anterior e compare os resultados obtidos.**

a)

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \tag{41}$$

$$T = ce^{kt} + T_m \tag{42}$$

Queremos saber o tempo t, tal que T(t) = 75°F, tendo em vista a equação diferencial 41 e sua solução na equação 42, temos que encontrar os valores das constantes c e k. O enunciado do problema informa que no instante t=0 a temperatura é igual a 300°F e que a temperatura do meio é igual a 70°F, obtemos assim

$$300 = ce^{0} + 70 \tag{43}$$

onde

$$c = 300 - 70 = 230 \tag{44}$$

Quando t=3 a temperatura é igual a 200°F, substituindo na equação 42 os respectivos valores

$$200 = 230 \cdot e^{3k} + 70 \tag{45}$$

$$130 = 230 \cdot e^{3k} \tag{46}$$

Aplicando ln de ambos os lados da equação

$$\ln 23e^{3k} = \ln 13 \tag{47}$$

Após aplicar regras de logaritmo obtemos

$$\ln 23 + 3k \cdot \ln e = \ln 13 \tag{48}$$

logo temos que a constante k é

$$k = \frac{\ln 13 - \ln 23}{3} \approx -0,19 \tag{49}$$

O que faz sentido a constante k ser nagativa para o sistema proposto. Substituindo os valores encontrados na equação 42

$$T(t) = 230 \cdot e^{-0,19t} + 70 \tag{50}$$

Deseja-se encontrar o instante para o qual a temperatura é igual a 75°F, logo da equação 50 temos

$$75 = 230 \cdot e^{-0,19t} + 70 \tag{51}$$

$$230 \cdot e^{-0,19t} = 5 \tag{52}$$

aplicando ln de ambos os lados da equação

$$\ln 230e^{-0,19t} = \ln 5 \tag{53}$$

e usando regras de logaritmo, obtemos

$$\ln 230 - 0,19t = \ln 5 \tag{54}$$

Assim, o instante t para o qual a temperatura é 75°F é

$$t = -\frac{\ln 5 - \ln 230}{0,19} \approx 20,13min \tag{55}$$

b)

Método	**Valor previsto**	**Error percentual**	**Ordem**
Euler	74.9422102472026	0.07705300372987267%	1
Euler Inverso	75.3203525206586	0.4271366942114696%	1
Euler Aprimorado	75.12781429124207	0.17041905498943302%	2
Runge Kutta	75.12662179892571	0.16882906523428196%	4
Adam-Bashforth	74.9422102472026	0.07705300372987267%	2
Adam-Multon	75.3203525206586	0.4271366942114696%	2
Fórmula Inversa	75.3203525206586	0.4271366942114696%	2

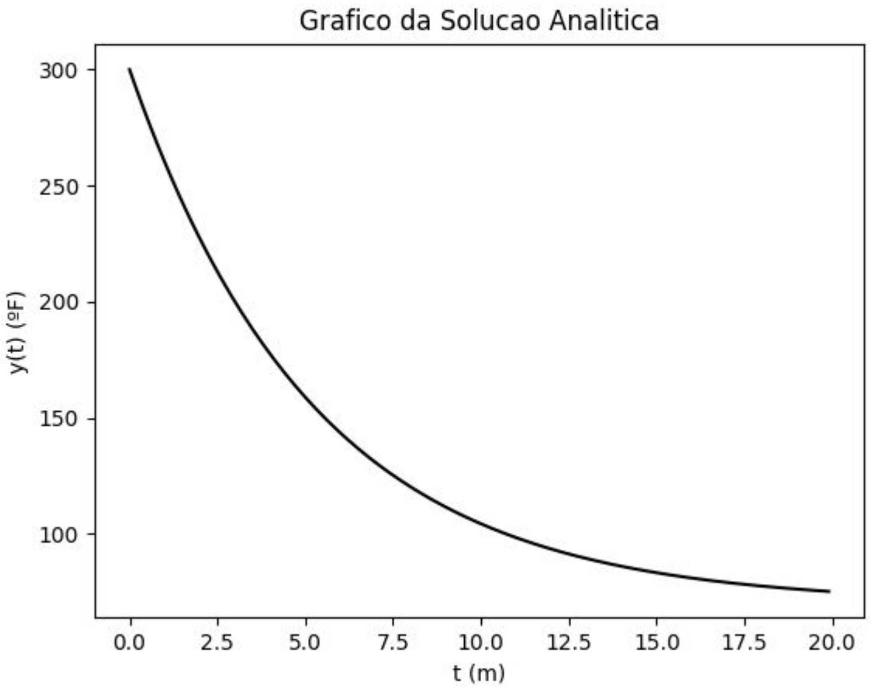
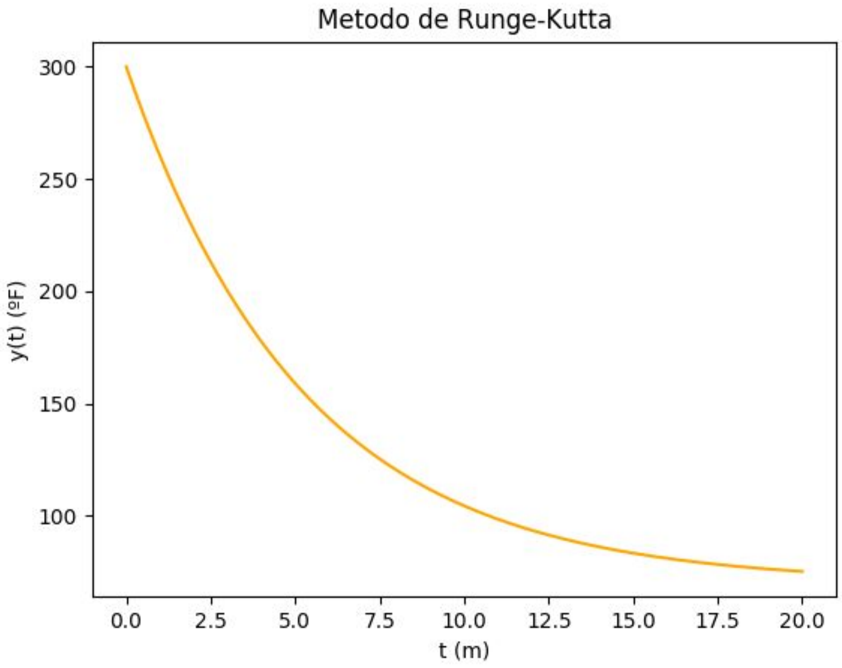
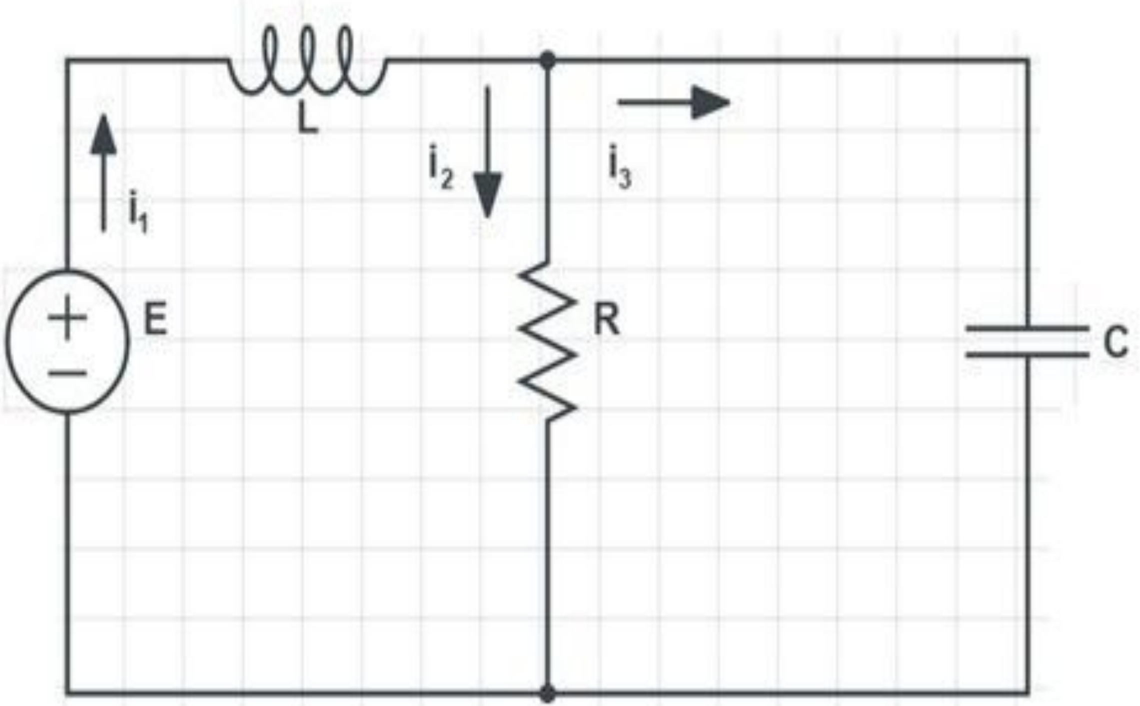


Grafico da Solucao Analitica
300
250
200
150
100
y(t) (ºF)
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
t (m)


Metodo de Runge-Kutta
300
250
200
150
100
y(t) (ºF)
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
t (m)

4.

a) Descreva o sistema de equações diferenciais que descrevem i1(t) e i2(t) no circuito elétrico contendo um resistor, um indutor e um capacitor mostrado abaixo.



A lei das malhas diz que a soma das diferenças de potencial em um ciclo é zero:

Primeiro ciclo

$$E - L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - i_2 R = 0$$

Segundo ciclo

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_3 dt - i_2 R = 0$$

$$\frac{i_3}{C} - \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} R = 0$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$ (Conservação da carga)

$$\frac{i_1 - i_2}{C} - \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} R = 0$$

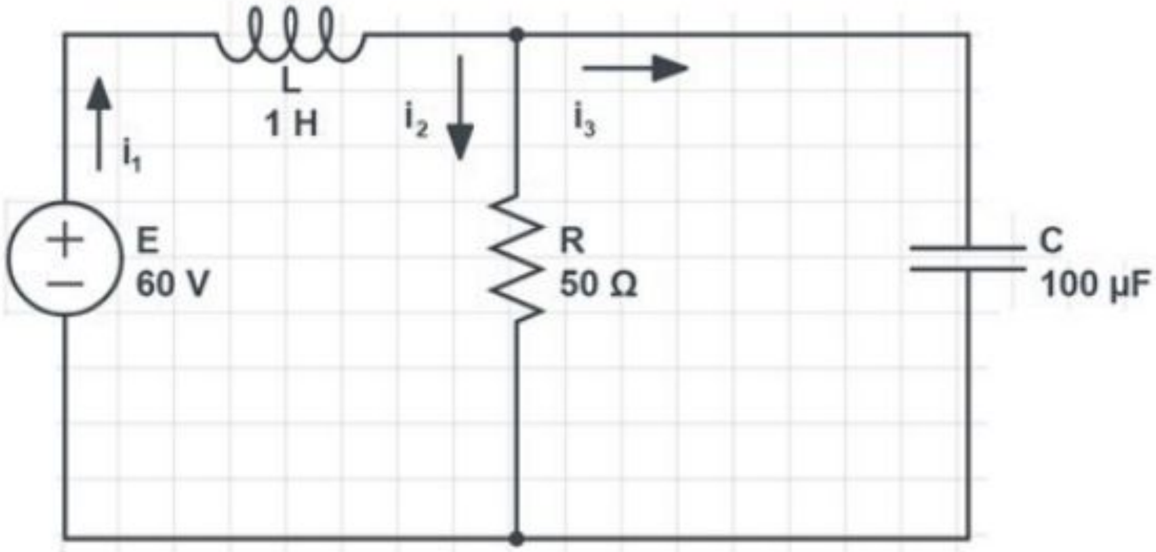
$$i_1 - i_2 - RC\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

Temos então o sistema de equações:

$$E - L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - i_2 R = 0$$

$$i_1 - i_2 - RC\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

b) Resolva por Laplace o sistema encontrado supondo que E(t) = 60V, L = 1H, R= 50 Ohm e C= 10^-4 F e que inicialmente i1=i2=0 (ver figura).



$$60 - \frac{di_1}{dt} - 50i_2 = 0 \tag{63}$$

e

$$i_1 - i_2 - 5 \cdot 10^{-3}\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{64}$$

Aplicando laplace na equação 63 obtemos

$$\mathcal{L}\frac{di_1}{dt} = 60 \cdot \mathcal{L}1 - 50 \cdot \mathcal{L}i_2 \tag{65}$$

Usando as transformadas de laplace, a equação 65 fica

$$s \cdot I_1 - i_1(0) = \frac{60}{s} - 50I_2 \tag{66}$$

logo

$$I_1 = \frac{60}{s^2} - \frac{50I_2}{s} \tag{67}$$

Aplicando laplace na equação 64 temos

$$\mathcal{L}i_1 = \mathcal{L}i_2 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot \mathcal{L}\frac{di_2}{dt} \tag{68}$$

Usando as transformadas de laplace a equação 68 fica

$$I_1 = I_2 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-3} s) \tag{69}$$

Substituindo a equação 69 na equação 67 temos

$$I_2 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-3} s + \frac{50}{s}) = \frac{60}{s^2} \tag{70}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por s

$$I_2 \cdot (s + 5 \cdot 10^{-3} s^2 + 50s) = \frac{60}{s} \tag{71}$$

Manipulando a equação 71 algebricamente

$$I_2 = \frac{120}{s \cdot (s^2 + 2s + 100)} \tag{72}$$

$$I_2 = \frac{120}{s \cdot 10^{-2} \cdot (s^2 + 2s + 100)} \tag{73}$$

$$I_2 = \frac{12000}{s \cdot (s + 100)^2} \tag{74}$$

Usando a inversa de laplace na equação 74

$$i_2(t) = 12 \cdot 10^3 \int_0^t \tau e^{-100\tau}\, d\tau \tag{75}$$

E resolvendo a integral, encontramos o valor para i_2, segue

$$i_2(t) = [\frac{1}{10000} - \frac{(100t + 1)e^{-100t}}{10000}] \cdot 12 \cdot 10^3 \tag{76}$$

$$i_2(t) = -120te^{-100t} - 1,2e^{-100t} + 1,2 \tag{77}$$

Substituindo a equação 74 na equação 69, vemos que I_1 é

$$I_1 = \frac{12 \cdot 10^3}{s \cdot (s+100)^2} + \frac{60}{(s+100)^2} \tag{78}$$

Aplicando a inversa de laplace na equação 78 e substituindo o valor de i_2 encontrado na equação 77, obtemos

$$i_1 = -120te^{-100t} - 1,2e^{-100t} + 1,2 + 60te^{-100t} \tag{79}$$

segue que

$$i_1 = -60te^{-100t} - 1,2e^{-100t} + 1,2 \tag{80}$$

c)

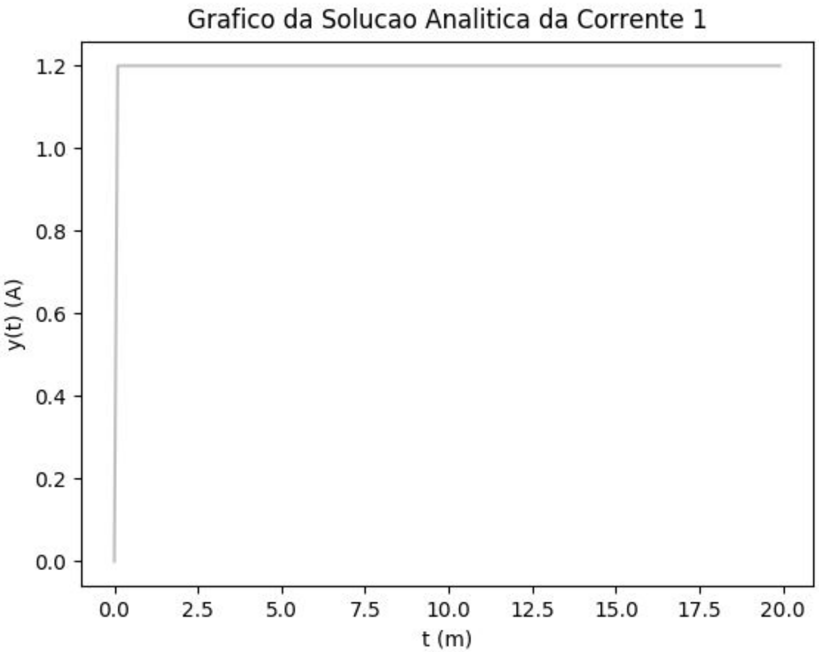
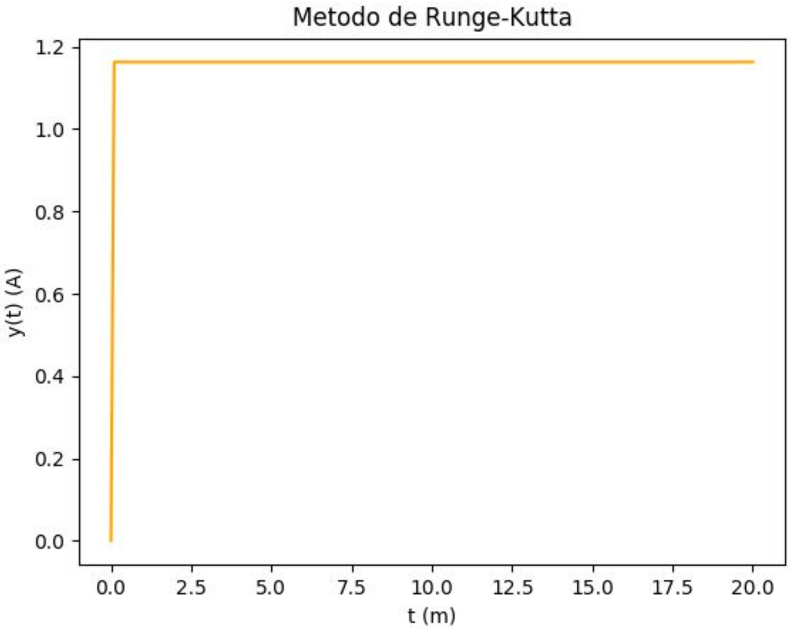


Grafico da Solucao Analitica da Corrente 1
y(t) (A)
t (m)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0


Metodo de Runge-Kutta
y(t) (A)
t (m)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

Para maior detalhes a respeito das resoluções e gráficos verificar o Relatório