UNIVERSIDADE FEDERAL
DE PERNAMBUCO

Luis Felipe Batista Pereira
Marcos Heitor Carvalho de Oliveira
Thalisson Moura Tavares

RELATÓRIO DE PROJETO

Métodos Numéricos

Recife
2019

Sumário

1 Introdução

Visando compreender melhor os temas abordados em métodos numéricos abordamos quatro problemas direferentes indicados pelo professor **Ricardo Martins** dentro do conteúdo da cadeira de **Métodos Numéricos Computacionais** (if816ec) no CIN-UFPE.

2 Problema 1

2.1 Problema

Durante a caçada pelas joias do infinito, após conseguir todas elas, Thanos dizimou metado do Universo. Sabe-se que a população de determinada cidade cresce a uma taxa propocional ao número de habitantes existentes. Se, após 10 anos do estalo de Thanos, a população triplica, e após 20 anos é de 150.000 habitantes, determine a população inicial.

2.2 Modelo

Ao vermos o Modelo de Crescimento Exponencial, isto é, a taxa de variação da população em relação ao tempo, aqui denotada por dP/dt, é proporcional à população presente. Em outras palavras, se P=P(t) mede a população, nós temos

$$\frac{dP}{dt} = -k \cdot P(t) \tag{1}$$

onde a taxa k é uma constante.

2.3 Solução Analítica

Deseja-se obter a população inicial, logo a equação diferencial é da forma

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P(t) \tag{2}$$

Como pode-se observar, a equação 2 é do tipo separável, logo a partir da equação 2 temos

$$\frac{dP}{P(t)} = k \cdot dt \tag{3}$$

Integrando ambos os lados da equação

$$\int \frac{dP}{P(t)} = \int k \cdot \, dt \tag{4}$$

E resolvendo a integral

$$\ln P(t) = kt + k_0 \tag{5}$$

Da equação 5 obtemos

$$e^{\ln P(t)} = e^{kt+k_0} \tag{6}$$

Sendo a solução geral da equação diferencial 2 igual a

$$P(t) = k_0 \cdot e^{kt} \tag{7}$$

O problema informa que a população triplica em 10 anos, ou seja

$$3 \cdot k_0 = k_0 \cdot e^{10k} \tag{8}$$

$$3 = e^{10k} \tag{9}$$

Aplicando logaritmo natural de ambos os lados da equação 9 obtemos

$$\ln 3 = \ln e^{10k} \tag{10}$$

Usando as regras de logaritmo

$$10k = \ln 3 \tag{11}$$

$$k = \frac{\ln 3}{10} \tag{12}$$

Encontrando assim o valor da constante k

$$k \approx 0,11 \tag{13}$$

Substituindo o valor de k na equação 7 e usando o fato que P(20) = 150.000, obtemos

$$150.000 = k_0 \cdot e^{0,11 \cdot 20} \tag{14}$$

logo

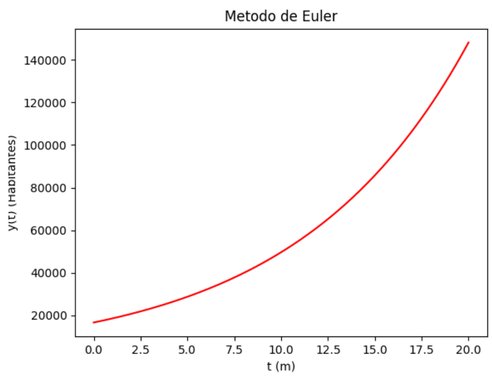
$$k_0 = \frac{150.000}{e^{0,11 \cdot 20}} \approx 16.620 \tag{15}$$

Obtemos assim que a população inicial é de aproximadamente 16.620 habitantes e a solução geral do problema é

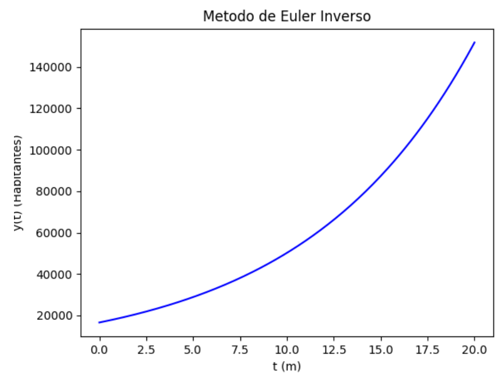
$$P(t) = 16620 \cdot e^{0,11t} \tag{16}$$

2.4 Gráficos das Soluções Numéricas

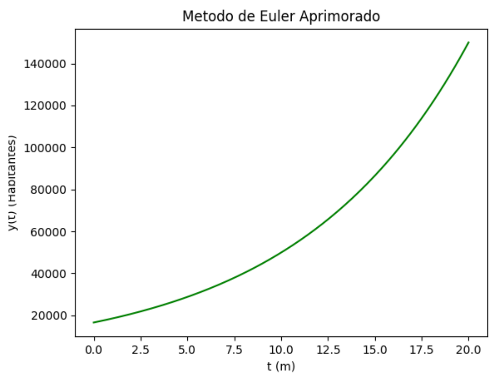
Nessa seção são apresentados os gráficos gerados pelos métodos numéricos implementados na parte 1 do projeto para a equação diferencial 16



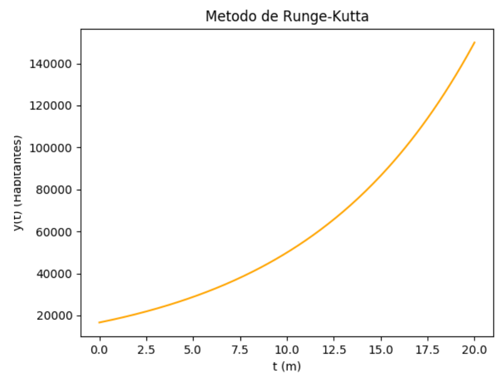
(a) Euler



(b) Euler Inverso

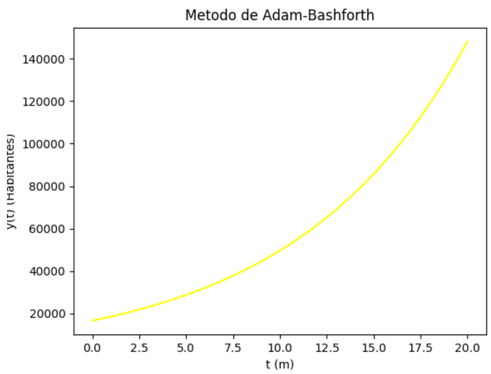


(c) Euler Aprimorado

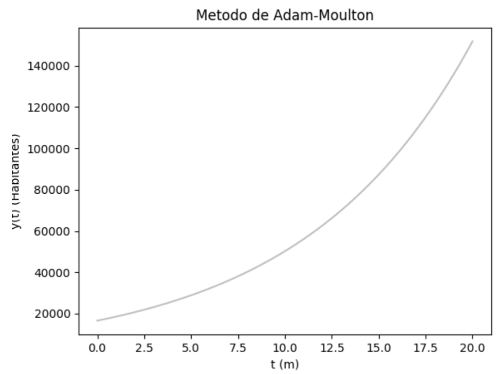


(d) Runge Kutta

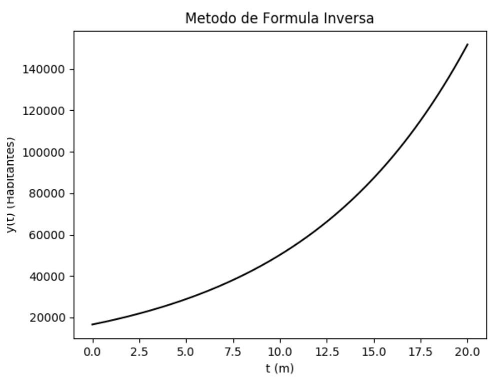
Figure 1: Métodos de Passos simples



(a) Adam Bashforth



(b) Adam Moulton

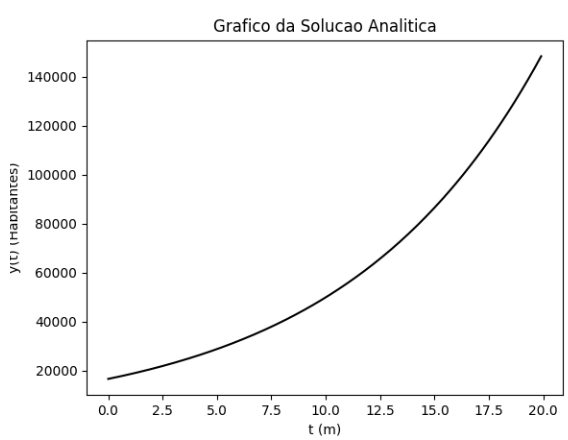


(c) Fórmula Inversa

Figure 2: Métodos de Passos Múltiplos

2.5 Gráfico da Solução Analítica

O gráfico da solução analítica é mostrado na figura abaixo



2.6 Comparação e análise de desempenho

Analisando a tabela dos métodos em conjunto com o erro associado podemos notar que tanto o método de Adam-Multon como o de Fórmula Inversa apresentam uma maior precisão em comparação aos outros para a solução real nesse caso.

Método	Valor previsto	Error percentual	Ordem
Euler	148204.75495948957	1.196830027%	1
Euler Aprimorado	149989.12435612545	$7.25042925 \times 10^{-3}$%	2
Runge Kutta	149995.72432070074	$2.85045287 \times 10^{-3}$%	4
Adam-Bashforth	149995.56322800246	2.957848×10^{-3}%	3
Adam-Bashforth	149995.72435941317	$2.85042706 \times 10^{-3}$%	5
Adam-Multon	149995.7243758057	$2.85041613 \times 10^{-3}$%	5
Fórmula Inversa	149995.72446788536	$2.85035474 \times 10^{-3}$%	5

3 Problema 2

3.1 Problema

Um grande tanque de mistura contendo 300 galões de salmoura (isto é, água na qual foi dissolvida uma determinada quantidade de libras de sal) com 50 libras de sal. Outra salmoura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de três galões por minuto (3gal/min); a concentração de sal nessa segunda salmoura é de 2 libras por galão (2lbs/gal). Quando a solução no tanque estiver bem misturada, ela será bombeada para fora a mesma taxa em que a segunda salmoura entrou. Se A(t) denotar a quantidade de sal (medida em libras) no tanque no instante t, a taxa segundo a qual A(t) varia será uma taxa liquida. Determine a quantidade de sal no tanque em qualquer instante e calcule o instante de tempo, em minutos, para que A(t)=100.

3.2 Modelo

As variações na quantidade de sal são devidas somente aos fluxos de entrada e de saida do tanque. Mais precisamente a taxa de variação de sal no tanque, dA/dt, é igual a taxa segundo a qual o sal está entrando menos a taxa segundo a qual ele está saindo

$$\frac{dA}{dt} = entrada - saida \tag{17}$$

A taxa de entrada de sal no tanque é a concentração 2 lbs/gal vezes a taxa de fluxo 3 gal/min.

$$entrada = 3\frac{gal}{min} \cdot 2\frac{lbs}{gal} \tag{18}$$

$$entrada = 6\frac{lbs}{min} \tag{19}$$

Para encontrar a taxa segundo a qual o sal deixa o tanque precisamos multiplicar a concentração de sal no tanque pela taxa de fluxo, 3 gal/min. Como as taxas de fluxo de saída e de entrada são iguais, o volume de água no tanque permanece constante e igual a 300gal; como a mistura está "bem mexida", a concentração é uniforme no tanque, A(t)/300 lbs/gal. Portanto, a taxa de saída do sal no tanque é

$$saida = 3 \cdot \frac{A(t)}{300} \tag{20}$$

$$saida = \frac{A(t)}{100} \tag{21}$$

Logo, a equação diferencial que governa esse processo é

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A(t)}{100} \tag{22}$$

3.3 Solução Analítica

A primeira parte do problema pede a solução geral da equação diferencial 22, a partir dela temos

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A(t)}{100} = 6 \tag{23}$$

Resolvendo a equação pelo método do fator integrante, temos que o fator integrante é

$$\mu(t) = e^{t/100} \tag{24}$$

Multiplicando a equacão diferencial 23 pelo fator integrante, obtemos

$$\frac{dA}{dt} \cdot e^{t/100} + e^{t/100} \cdot \frac{A(t)}{100} = 6 \cdot e^{t/100} \tag{25}$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{t/100} \cdot A(t)) = 6 \cdot e^{t/100} \tag{26}$$

Integrando a equação diferencial, temos

$$e^{t/100} \cdot A(t) = \int 6 \cdot e^{t/100}\, dt \tag{27}$$

$$e^{t/100} \cdot A(t) = 600 \cdot e^{t/100} + c \tag{28}$$

onde c é uma constante arbitrária, logo obtemos

$$A(t) = 600 + c \cdot e^{-t/100} \tag{29}$$

A partir da descrição do problema verificamos que a quantidade inicial de sal é de 50 libras

$$A(0) = 50 \tag{30}$$

Sendo assim, substituindo os valores no instante de tempo t=0 na equação 29 temos

$$A(0) = 600 + c \cdot e^{-0/100} \tag{31}$$

ou

$$50 = 600 + c \tag{32}$$

Resultando

$$c = -550 \tag{33}$$

Logo, a solução geral da 23 é

$$A(t) = 600 - 550 \cdot e^{-t/100} \tag{34}$$

A partir da solução geral resolvemos a segunda parte do problema, a qual deseja-se obter o instante de tempo, em minutos, para o qual a quantidade de sal é igual a 100 libras. Substituindo os valores na equação 34

$$100 = 600 - 550 \cdot e^{-t/100} \tag{35}$$

ou

$$500 = 550 \cdot e^{-t/100} \tag{36}$$

segue que

$$e^{-t/100} = \frac{500}{550} \tag{37}$$

Aplicando logaritmo natural de ambos os lados da equação 37

$$\ln e^{-t/100} = \ln \frac{500}{550} \tag{38}$$

assim, usando as regras de logaritmo obtemos

$$-\frac{t}{100} = \ln \frac{500}{550} \tag{39}$$

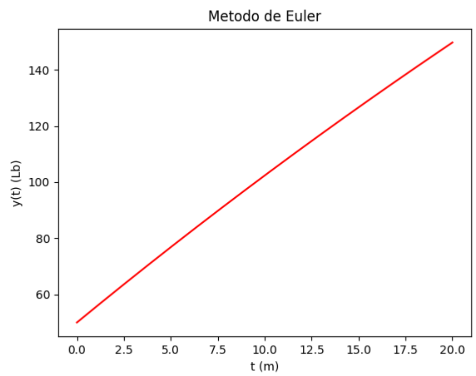
ou

$$t = -\ln \frac{500}{550} \cdot 100 \approx 9,53min \tag{40}$$

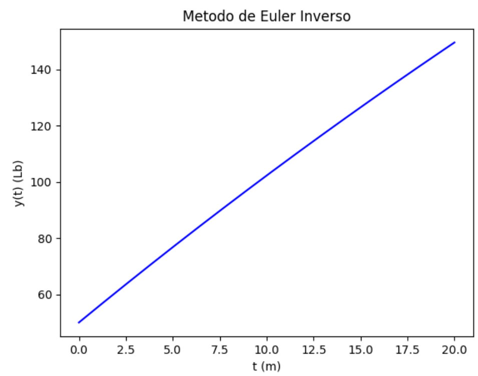
Logo o instante de tempo para o qual a quantidade de sal no tanque seja igual a 100 libras é aproximadamente 9,53 minutos.

3.4 Gráficos das Soluções Numéricas

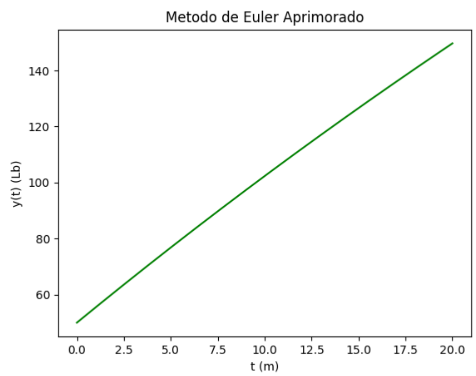
Nessa seção são apresentados os gráficos gerados pelos métodos numéricos implementados na parte 1 do projeto para a equação diferencial 22



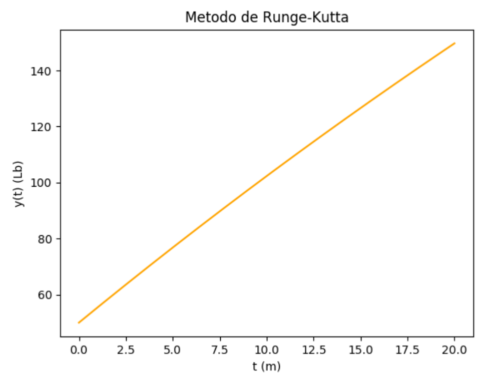
(a) Euler



(b) Euler Inverso

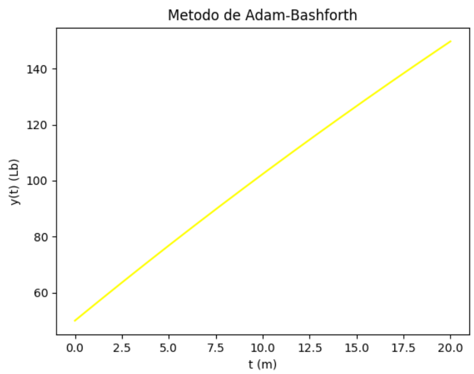


(c) Euler Aprimorado

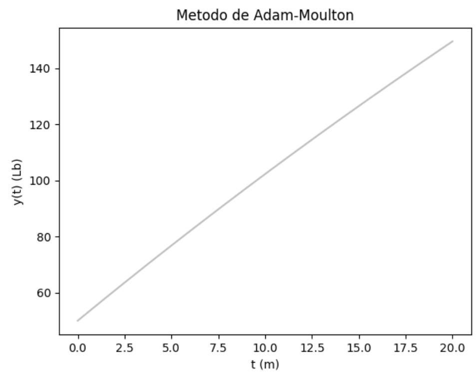


(d) Runge Kutta

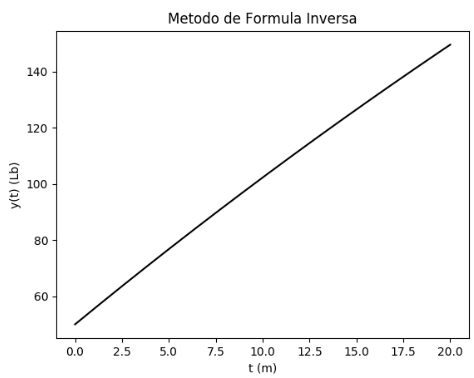
Figure 3: Métodos de Passos simples



(a) Adam Bashforth



(b) Adam Moulton

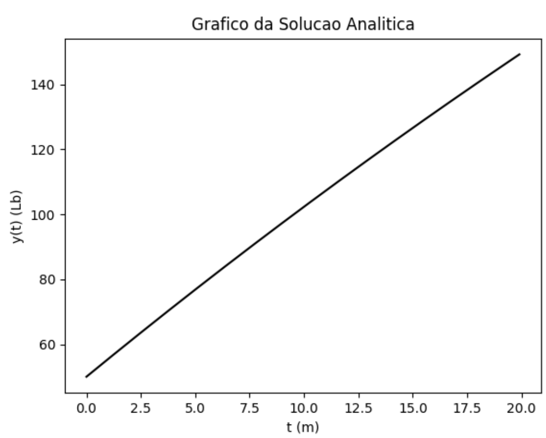


(c) Formula Inversa

Figure 4: Métodos de Passos Múltiplos

3.5 Gráfico da Solução Analítica

O gráfico da solução analítica é mostrado na figura abaixo



3.6 Comparação e análise de desempenho

Analisando a tabela dos métodos em conjunto com o erro associado podemos notar que tanto o método de Euler como o de Adams-Bashforth apresentam uma maior precisão em comparação aos outros para a solução real nesse caso.

Método	Valor previsto	Error percentual	Ordem
Euler	99.8686586955375	0.13134130446249515%	1
Euler Inverso	99.8210964204474	0.17890357955259617%	1
Euler Aprimorado	99.84487811740831	0.15512188259168624%	2
Runge Kutta	99.84488604247234	0.15511395752766077%	4
Adam-Bashforth	99.8686586955375	0.13134130446249515%	2
Adam-Multon	99.8210964204474	0.17890357955259617%	2
Fórmula Inversa	99.8210964204474	0.17890357955259617%	2

4 Problema 3

4.1 Problema

Um bolo é retirado do forno, sua temperatura é de 300ºF. Três minutos depois, sua temperatura passa para 200ºF. Quanto tempo levará para sua temperatura chegar a 75 graus, se a temperatura do meio ambiente em que ele foi colocado for de exatamente 70ºF?

4.2 Modelo

De acordo com a Lei empírica de Newton do esfriamento/resfriamento, a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional a diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio em que rodeia, denominada temperatura ambiente. Se T(t) representar a temperatura do corpo no instante t, Tm a temperatura do meio que o rodeia dT/dt a taxa segundo a qual a temperatura do corpo varia, a lei de Newton do esfriamento/resfriamento é convertido na sentença matemática

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \tag{41}$$

$$T = ce^{kt} + T_m \tag{42}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Em ambos os casos, esfriamento ou aquecimento, se Tm for uma constatne, é lógico que k é menor que 0.

4.3 Solução Analítica

Queremos saber o tempo t, tal que T(t) = 75°F, tendo em vista a equação diferencial 41 e sua solução na equação 42, temos que encontrar os valores das constantes c e k. O enunciado do problema informa que no instante t=0 a temperatura é igual a 300°F e que a temperatura do meio é igual a 70°F, obtemos assim

$$300 = ce^0 + 70 \tag{43}$$

onde

$$c = 300 - 70 = 230 \tag{44}$$

Quando t=3 a temperatura é igual a 200°F, substituindo na equação 42 os respectivos valores

$$200 = 230 \cdot e^{3k} + 70 \tag{45}$$

$$130 = 230 \cdot e^{3k} \tag{46}$$

Aplicando ln de ambos os lados da equação

$$\ln 23e^{3k} = \ln 13 \tag{47}$$

Após aplicar regras de logaritmo obtemos

$$\ln 23 + 3k \cdot \ln e = \ln 13 \tag{48}$$

logo temos que a constante k é

$$k = \frac{\ln 13 - \ln 23}{3} \approx -0,19 \tag{49}$$

O que faz sentido a constante k ser nagativa para o sistema proposto. Substituindo os valores encontrados na equação 42

$$T(t) = 230 \cdot e^{-0,19t} + 70 \tag{50}$$

Deseja-se encontrar o instante para o qual a temperatura é igual a 75°F, logo da equação 50 temos

$$75 = 230 \cdot e^{-0,19t} + 70 \tag{51}$$

$$230 \cdot e^{-0,19t} = 5 \tag{52}$$

aplicando ln de ambos os lados da equação

$$\ln 230e^{-0,19t} = \ln 5 \tag{53}$$

e usando regras de logaritmo, obtemos

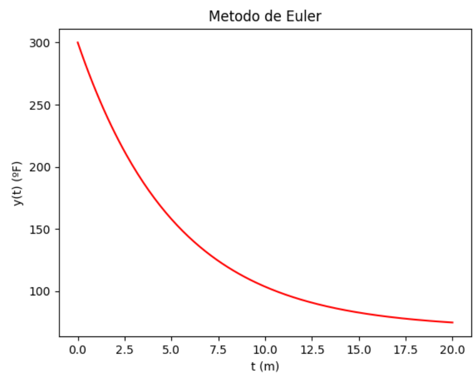
$$\ln 230 - 0,19t = \ln 5 \tag{54}$$

Assim, o instante t para o qual a temperatura é 75°F é

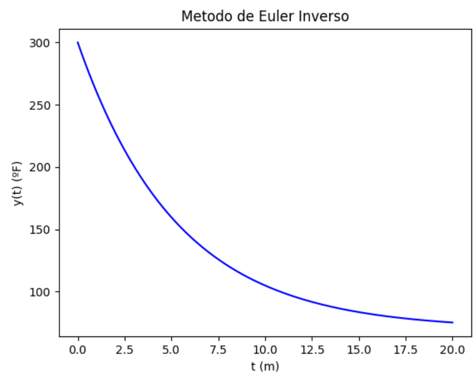
$$t = -\frac{\ln 5 - \ln 230}{0,19} \approx 20,13min \tag{55}$$

4.4 Gráficos das Soluções Numéricas

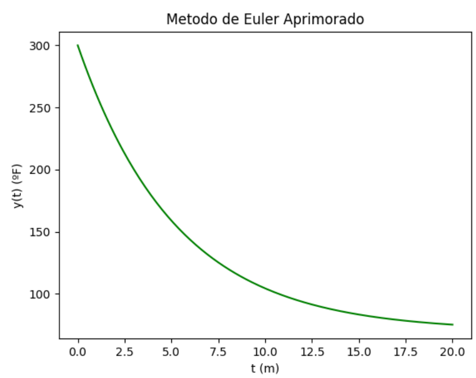
Nessa seção são apresentados os gráficos gerados pelos métodos numéricos implementados na parte 1 do projeto para a equação diferencial 50



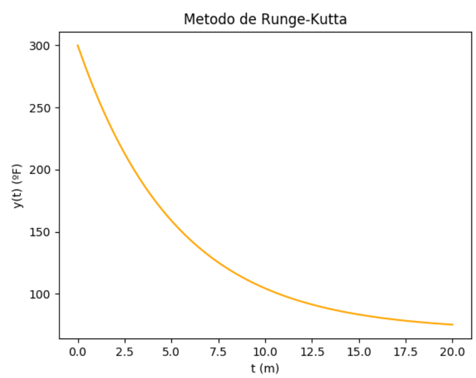
(a) Euler



(b) Euler Inverso

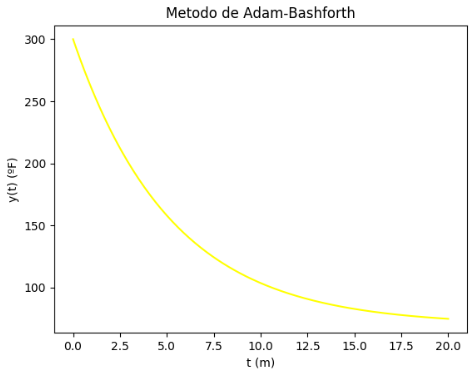


(c) Euler Aprimorado

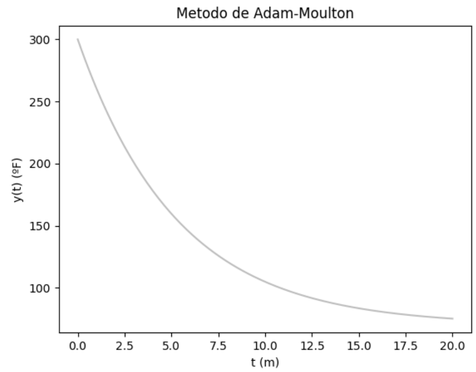


(d) Runge Kutta

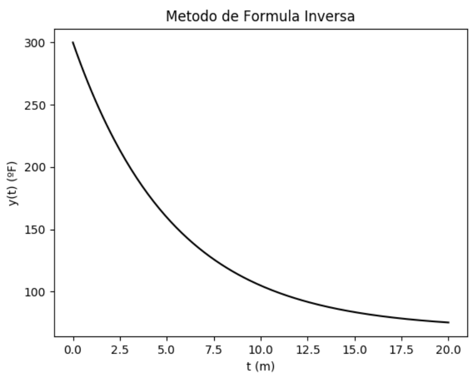
Figure 5: Métodos de Passos simples



(a) Adam Bashforth



(b) Adam Moulton

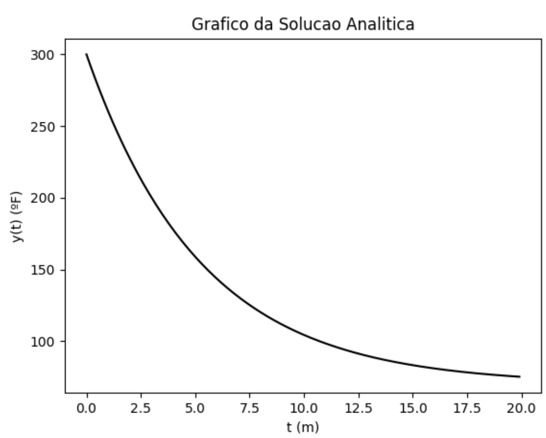


(c) Formula Inversa

Figure 6: Métodos de Passos Múltiplos

4.5 Gráfico da Solução Analítica

O gráfico da solução analítica é mostrado na figura abaixo



4.6 Comparação e análise de desempenho

Analisando a tabela dos métodos em conjunto com o erro associado podemos notar que tanto o método de Euler como o de Adams-Bashforth apresentam uma maior precisão em comparação aos outros para a solução real nesse caso.

Método	Valor previsto	Error percentual	Ordem
Euler	74.9422102472026	0.07705300372987267%	1
Euler Inverso	75.3203525206586	0.4271366942114696%	1
Euler Aprimorado	75.12781429124207	0.17041905498943302%	2
Runge Kutta	75.12662179892571	0.16882906523428196%	4
Adam-Bashforth	74.9422102472026	0.07705300372987267%	2
Adam-Multon	75.3203525206586	0.4271366942114696%	2
Fórmula Inversa	75.3203525206586	0.4271366942114696%	2

5 Problema 4

5.1 Problema

Descreva o sistema de equações diferenciais que descreve i1(t) e i2(t) no circuito eletrico contendo um registor , um indutor e um capacitor mostrado na figura 7, e resolva por laplace o sistema encontrado supondo que E(t)=60, L=1H, R=50Ohm e $C = 10^{-4}$F e que inicialmente i1=i2=0 (ver figura 8)

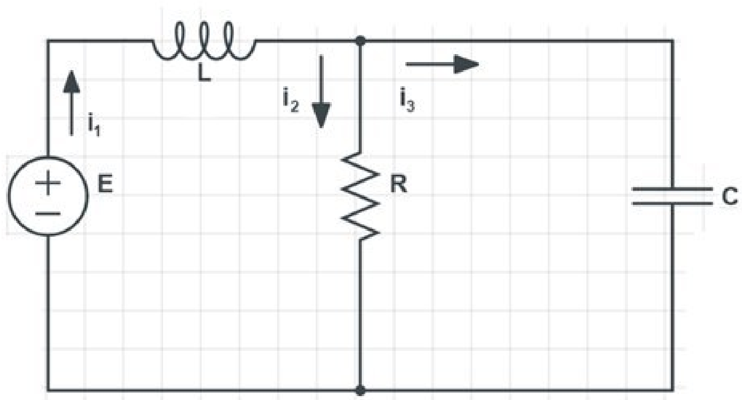


Figure 7: Problema 4

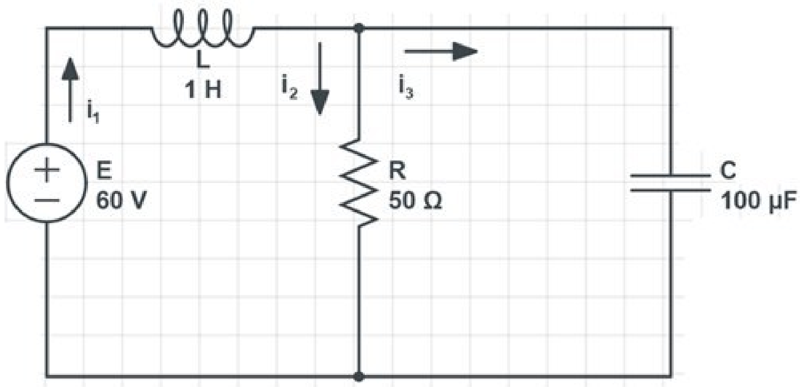


Figure 8: Problema 4

5.2 Modelo

A lei das malhas diz que a soma das diferenças de potenciais em uma malha é igual a zero, logo a partir da malha esquerda da figura 7 temos

$$E - L\frac{di_1}{dt} - i_2R = 0 \tag{56}$$

Da malha direita da figura 7 obtemos

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_3\,dt - i_2R = 0 \tag{57}$$

Resolvendo a integral da equação 57

$$\frac{i_3t}{C} - i_2R = 0 \tag{58}$$

E derivando a equação 58 em relação ao tempo

$$\frac{i_3}{C} - \frac{di_2}{dt}R = 0 \tag{59}$$

Pela regra da conservação das cargas sabemos que

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{60}$$

substituindo o valor de i_3 na equação 59 ficamos com

$$\frac{i_1 - i_2}{C} - \frac{di_2}{dt}R = 0 \tag{61}$$

E por fim, multiplicando a equação 61 por C obtemos a seguinte equação

$$i_1 - i_2 - RC\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{62}$$

Temos então o sistema de equações formado pela equação 56 e pela equação 62 como a modelagem do problema

5.3 Solução Analítica

Substituindo os valores informados no enunciado do problema nas equações 56 e 62 temos

$$60 - \frac{di_1}{dt} - 50i_2 = 0 \tag{63}$$

e

$$i_1 - i_2 - 5 \cdot 10^{-3}\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{64}$$

Aplicando laplace na equação 63 obtemos

$$\mathcal{L}\frac{di_1}{dt} = 60 \cdot \mathcal{L}1 - 50 \cdot \mathcal{L}i_2 \tag{65}$$

Usando as transformadas de laplace, a equação 65 fica

$$s \cdot I_1 - i_1(0) = \frac{60}{s} - 50I_2 \tag{66}$$

logo

$$I_1 = \frac{60}{s^2} - \frac{50I_2}{s} \tag{67}$$

Aplicando laplace na equação 64 temos

$$\mathcal{L}i_1 = \mathcal{L}i_2 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot \mathcal{L}\frac{di_2}{dt} \tag{68}$$

Usando as transformadas de laplace a equação 68 fica

$$I_1 = I_2 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-3} s) \tag{69}$$

Substituindo a equação 69 na equação 67 temos

$$I_2 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-3} s + \frac{50}{s}) = \frac{60}{s^2} \tag{70}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por s

$$I_2 \cdot (s + 5 \cdot 10^{-3} s^2 + 50s) = \frac{60}{s} \tag{71}$$

Manipulando a equação 71 algebricamente

$$I_2 = \frac{120}{s \cdot (s^2 + 2s + 100)} \tag{72}$$

$$I_2 = \frac{120}{s \cdot 10^{-2} \cdot (s^2 + 2s + 100)} \tag{73}$$

$$I_2 = \frac{12000}{s \cdot (s + 100)^2} \tag{74}$$

Usando a inversa de laplace na equação 74

$$i_2(t) = 12 \cdot 10^3 \int_0^t \tau e^{-100\tau} \, d\tau \tag{75}$$

E resolvendo a integral, encontramos o valor para i_2, segue

$$i_2(t) = [\frac{1}{10000} - \frac{(100t + 1)e^{-100t}}{10000}] \cdot 12 \cdot 10^3 \tag{76}$$

$$i_2(t) = -120te^{-100t} - 1,2e^{-100t} + 1,2 \tag{77}$$

Substituindo a equação 74 na equação 69, vemos que I_1 é

$$I_1 = \frac{12 \cdot 10^3}{s \cdot (s + 100)^2} + \frac{60}{(s + 100)^2} \tag{78}$$

Aplicando a inversa de laplace na equação 78 e substituindo o valor de i_2 encontrado na equação 77, obtemos

$$i_1 = -120te^{-100t} - 1,2e^{-100t} + 1,2 + 60te^{-100t} \tag{79}$$

segue que

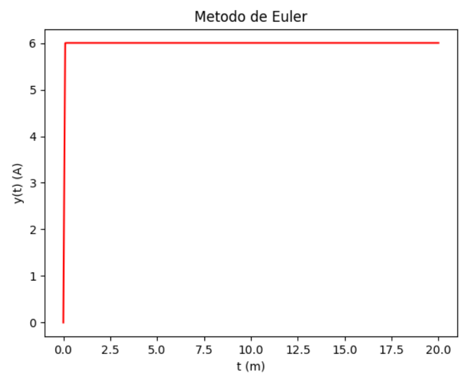
$$i_1 = -60te^{-100t} - 1,2e^{-100t} + 1,2 \tag{80}$$

Logo a solução por laplace para o sistema encontrado na seção anterior e utilizando os valores informados no enunciado do problema é mostrada nas equações 77 e 80.

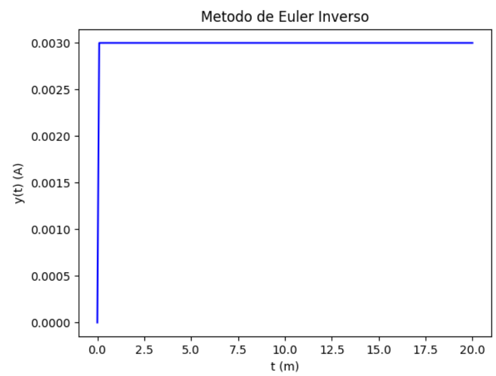
5.4 Gráficos das Soluções Numéricas

Nessa seção são apresentados os gráficos gerados pelos métodos numéricos implementados na parte 1 do projeto para a corrente i_1, para a corrente i_2 a ideia é a mesma.

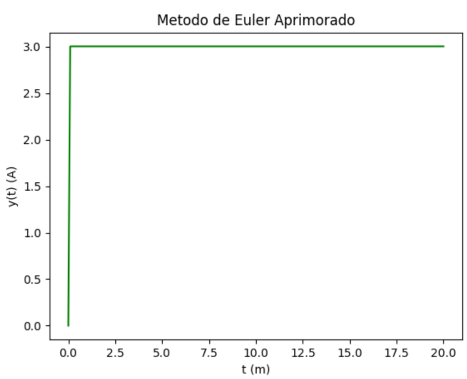
Observação: para utilizar o método numérico foi necessário substituir uma solução analítica dentro da equação diferencial 63, onde substituimos i_2 pelo valor dado na equação 77, de forma que tivessemos uma equação diferencial ordinária simples.



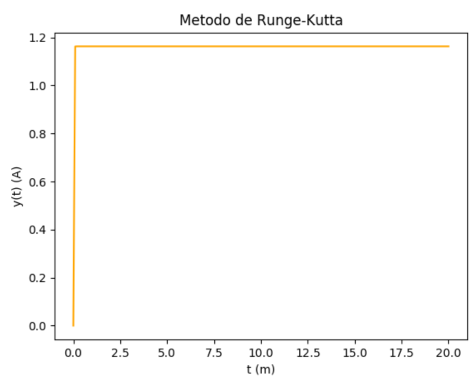
(a) Euler



(b) Euler Inverso

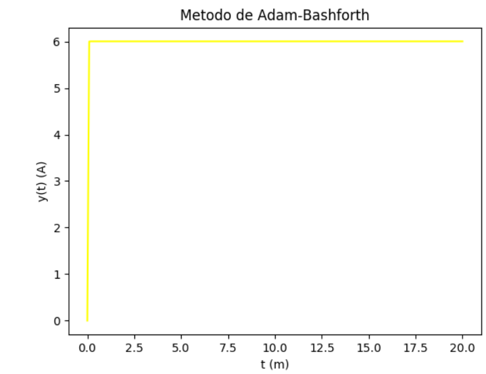


(c) Euler Aprimorado

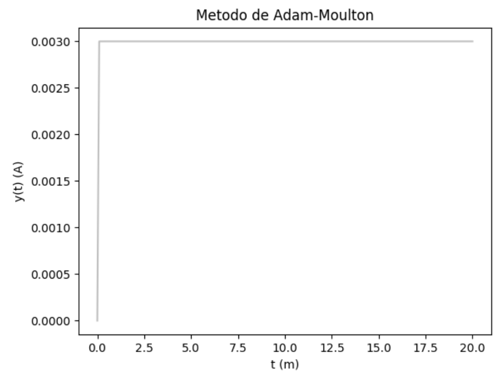


(d) Runge Kutta

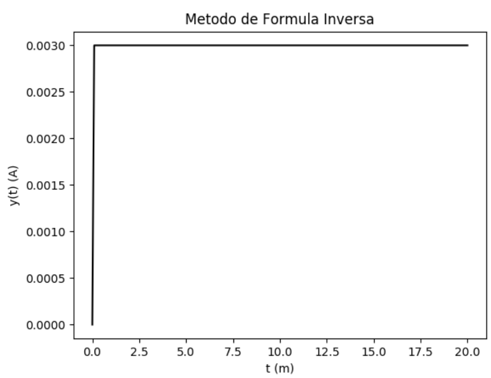
Figure 9: Métodos de Passos simples



(a) Adam Bashforth



(b) Adam Moulton

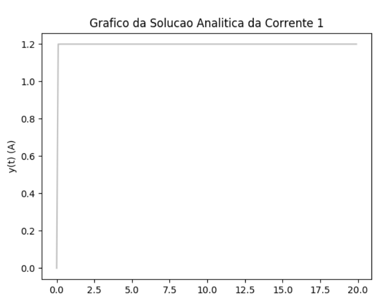


(c) Formula Inversa

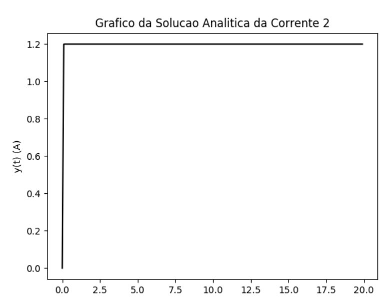
Figure 10: Métodos de Passos Múltiplos

5.5 Gráfico da Solução Analítica

O gráfico da solução exata para os valores das correntes i_1 e i_2 são mostradas na figura 11 abaixo



(a) Corrente i_1



(b) Corrente i_2

Figure 11: gráficos das correntes i_1 e i_2

6 Conclusão

Por meio desse projeto e com o que foi visto na disciplina, concluimos que, os métodos computacionais são essenciais para analisarmos funções diferenciais de tal modo que mesmo não conhecendo a função, conseguimos uma aproximação tão boa quanto.