

Estadística Computacional

EJERCICIOS DE REPASO DE LOS TEMAS 4 Y 5

A continuación se proponen varios ejercicios de repaso de los contenidos estudiados en los Temas 4 y 5. Te proponemos que los resuelvas creando un documento de R Markdown en el que muestres además del código, el resultado de la ejecución en un fichero HTML.

Ejercicio 1

Establecer la semilla del generador de números aleatorios escribiendo `set.seed(1)`. A continuación generar 50 valores desde una distribución Chi-cuadrado con $n = 30$ grados de libertad y almacenarlos en un vector `y`. Después generar 50 valores desde una distribución Normal con media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 5$ y almacenarlos en un vector `x`. A partir de estos vectores se pide resolver la siguientes tareas:

1. Calcular la media, la desviación típica y los tres cuartiles de `y`.
2. Representar un histograma de los datos almacenados en `y`.
3. Superponer al histograma anterior la curva de la densidad Normal con media y desviación típica la de los datos.
4. Representar un gráfico probabilístico normal de los valores de `y`.
5. Representar un gráfico de cajas de los valores de `y`.
6. Representar un gráfico de cajas múltiples (2 cajas) que permita comparar la distribución de `x` e `y`.
7. Representar un diagrama de dispersión de los valores de `x` (en el eje horizontal) frente a los de `y` (en el eje vertical).
8. Ajustar un modelo de regresión lineal $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ ($i = 1, \dots, 50$), con los datos almacenados en `x` e `y`. Representar el modelo ajustado (la recta de regresión) sobre el diagrama de dispersión anterior.

Ejercicio 2

En 1651, el Caballero de Méré le planteó a Pascal una pregunta relacionada con las apuestas en juegos de azar: ¿sería adecuado apostar a que en cuatro lanzamientos de un dado se obtendrá al menos un seis? Este problema generó una fructífera correspondencia entre Pascal y Fermat que se contribuyó al nacimiento del Cálculo de Probabilidades. Se pide:

1. Escribir una función que simule el lanzamiento de n dados. La función tendrá un único argumento, el número de lanzamientos `n`, y tomará el valor 4 por defecto. La función devolverá como posibles valores `TRUE`, si se obtiene al menos un 6 y `FALSE` en caso contrario.
2. Utilizar la función anterior para simular `nsim=10000` jugadas de este juego y calcular la proporción de veces que se gana la apuesta “obtener al menos un 6 en $n = 4$ lanzamientos”. Comparar el resultado con la probabilidad exacta que es $1 - (5/6)^n$.

Ejercicio 3

La distribución Pareto de parámetros $a, b > 0$ corresponde a una distribución de probabilidad continua con funciones de densidad y distribución dadas por:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{ab^a}{x^{a+1}}, \quad \text{si } x \geq b \\F(x) &= 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a, \quad x \geq b.\end{aligned}$$

Con lo que la inversa de $F(x)$ se obtendría como:

$$u = F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a \Leftrightarrow x = F^{-1}(u) = \frac{b}{(1-u)^{1/a}}$$

Utilizando el método de inversión se pide generar $n = 1000$ valores de una distribución Pareto de parámetros $a = 5$ y $b = 4$. Evaluar usando gráficos y el contraste de Kolmogorov-Smirnow que en efecto los valores generados provienen de dicha distribución.

Ejercicio 4

Utilizando integración de Monte Carlo se pide aproximar la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

y calcular el error de la aproximación. Considerar para ello un número suficientemente grande de simulaciones, evaluando la convergencia mediante un gráfico. Como referencia tener en cuenta que el valor exacto de la integral es $\pi/4$.