TEMA 4: Funciones de varias variables

Cálculo para los Grados en Ingeniería

EPIG - UNIOVI

Definiciones

- **El espacio $\mathbb{R}^n$**

Sabemos que un punto en la recta real viene representado por un número real x, que un punto en el plano lo representamos por un par ordenado de números reales (x_1, x_2) y que un punto en el espacio tridimensional es una terna ordenada de números reales (x_1, x_2, x_3). De la misma forma definiremos un punto en $\mathbb{R}^n$ como:

- **Punto**

Llamaremos punto n-dimensional a un conjunto ordenado de n números reales $x_1, x_2, ..., x_n$ que denotaremos por

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Al conjunto de todos los puntos n-dimensionales se le denominará *espacio n-dimensional* y se denotará por $\mathbb{R}^n$.

Definiciones

- **Norma**

Llamaremos norma en $\mathbb{R}^n$ a toda aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que denotamos por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \|x\| \end{array}$$

verificando, con $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} a)\ \ \|x\| \geq 0; & b)\ \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ c)\ \ \|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|\,; & d)\ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{array}$$

En la mayoría de los casos y si no se expresa lo contrario, supondremos que trabajamos con la *norma euclídea*

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2} \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x \cdot x$$

Definiciones

- **Distancia**

  Para cada par de puntos x, y de $\mathbb{R}^n$ se define como distancia entre ellos, al número real

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Fácilmente se pueden comprobar las siguientes propiedades con x, y, $z \in \mathbb{R}^n$.

a) $d(x, y) \geq 0$; *b)* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x, y) = d(y, x)$; *d)* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definiciones

- **Bola**

  Dado un punto a perteneciente a $\mathbb{R}^n$ *y un número real positivo r se denomina bola abierta de centro a y radio r, y se denota por* $B(a,r)$ *al conjunto*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \, \|x-a\| < r\}$$

  Se denomina bola cerrada de centro a y radio r, y se denota por $\overline{B}(a,r)$ *al conjunto*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \, \|x-a\| \leq r\}$$

Así, en $\mathbb{R}$, $B(a,r)$ será el intervalo de centro a y radio r $(a-r, a+r)$.

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / \, |x-a| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \, a-r < x < a+r\} \end{aligned}$$

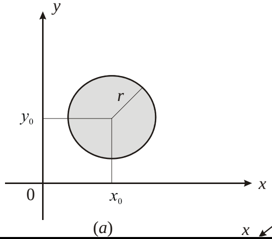
Definiciones

En $\mathbb{R}^2$, $B(a,r)$ será el círculo de centro (a_1,a_2) y radio r.

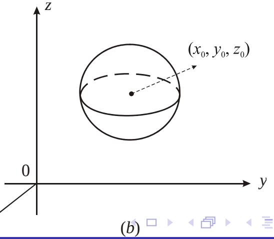
$$\begin{aligned} B(a,r) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ \|(x,y)-(a_1,a_2)\| < r\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x-a_1)^2+(y-a_2)^2 < r^2\right\} \end{aligned}$$

En $\mathbb{R}^3$, $B(a,r)$ será la esfera de centro (a_1,a_2,a_3) y radio r.

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\ \|(x,y,z)-(a_1,a_2,a_3)\| < r\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2 < r^2\right\} \end{aligned}$$



(a)



(b)

Definiciones

- **Entorno**

  Entorno esférico de un punto $x \in \mathbb{R}^n$, *es cualquier bola abierta* $B(x, r)$ *de centro* x.

A los entornos esféricos los denominaremos simplemente entornos y al entorno de x, lo designaremos por $U(x)$ sin hacer referencia al radio de la bola, si no es necesario por algún motivo.

- **Entorno reducido**

  Sea r *un número real cualquiera. Se denomina entorno reducido de* x *al conjunto*

$$U^*(x) = B(x, r) - \{x\}$$

Definiciones

- **Conjunto abierto**

  Un conjunto A es abierto si y sólo si para todo x perteneciente a A, existe un entorno $U(x)$ contenido en A.
  No sería abierto si existiese en él algún x para el cual no existe $U(x)$ tal que $U(x) \subset A$.

- **Conjunto cerrado**

  Se dice que un subconjunto A es cerrado cuando su complementario $\mathbb{R}^n - A$ es abierto.

Nota: Hay conjuntos que no son abiertos ni cerrados.

- **Conjunto acotado**

  Se dice que un subconjunto A es acotado cuando está contenido en una bola de radio finito.

Definiciones

- **Conjunto compacto**

  Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

- **Punto de acumulación**

  Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando todo entorno reducido, $U^*(x)$ contiene puntos de A, es decir, se verifica que $U^*(x) \cap A \neq \emptyset$.

- **Teorema de Bolzano-Weierstrass**

  Todo conjunto infinito y acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación.

Definiciones

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ccc} X \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \to & y = f(x) \end{array}$$

A estas funciones se las conoce como funciones reales de n variables o *campos escalares*.

- Haremos especial énfasis en las funciones

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ con } X \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$z = f(x, y)$$

Definiciones

Sea $f : X \to \mathbb{R}^m$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$.
Esta función vectorial f, equivale a m funciones reales de n variables también reales.

$$y = f(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

- **Dominio natural de definición**

  Sea una función $y = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, e $y \in \mathbb{R}$. El conjunto de los puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para los cuales está definida la función $y = f(x)$ se llama dominio natural de definición de la función y se suele representar por X.

Definiciones

- **Gráfica de una función**

  Sea $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Definamos la gráfica de f como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que consta de los puntos $(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))$ con $(x_1, ..., x_n)$ en X. Simbólicamente

  $$\text{gráfica de } f = \left\{ (x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} / (x_1, ..., x_n) \in X \right\}$$

Para el caso $n = 1$, la gráfica es una curva, mientras que para $n = 2$ es una superficie. Para acercarnos a la forma de esta gráfica introducimos la idea de *conjunto de nivel*.

- **Conjunto de nivel**

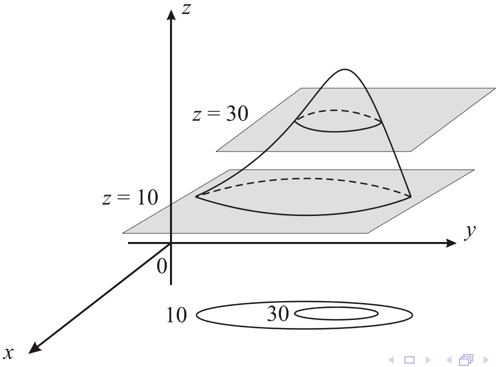
  Sea $f: X \to \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. El conjunto de nivel de valor c está definido como aquellos puntos $x \in X$ para los que $f(x) = c$. Simbólicamente

  $$\{x \in X / f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

Gráficas

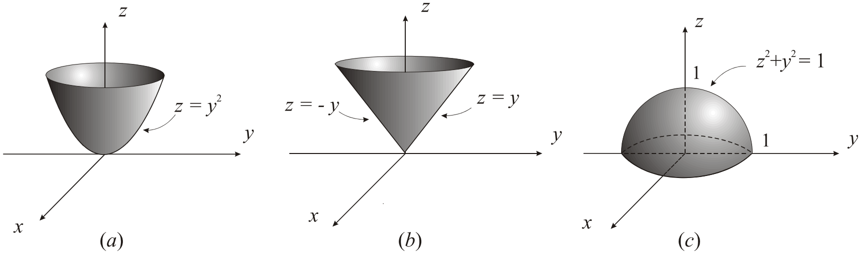
Si $n = 2$ nos referimos a una *curva de nivel* (de valor c) y si $n = 3$ nos referimos a una *superficie de nivel*.

En el caso particular de una función $z = f(x, y)$, podemos intuir el aspecto de la gráfica elevando mentalmente cada curva de nivel a la altura c, de la misma forma que lo hacemos ante un mapa topográfico para intuir el relieve de un paisaje.



Gráficas

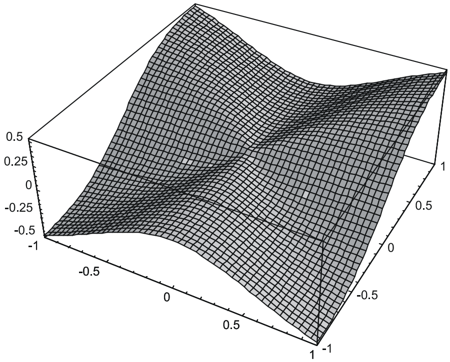
Veamos a continuación las gráficas de algunas funciones usuales $z = f(x, y)$ y que pueden deducirse fácilmente con el método de las curvas de nivel, completando el estudio con algún corte con planos verticales.



(a) Paraboloide: $z = x^2 + y^2$ (b) Cono: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (c) Semiesfera: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Gráficas

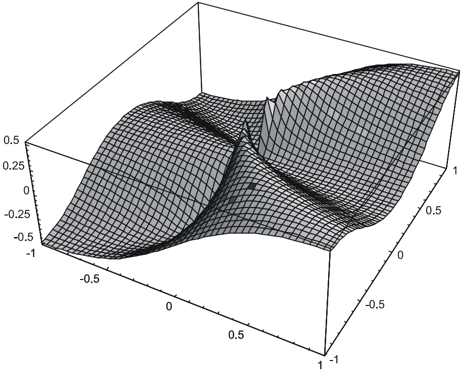
Veamos a continuación las gráficas de algunas funciones $z = f(x, y)$ que utilizaremos en los ejemplos.



Gráfica de $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

Gráficas

Veamos a continuación las gráficas de algunas funciones $z = f(x, y)$ que utilizaremos en los ejemplos.



Gráfica de $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Límite de una función en un punto

- **Límite**

Sea una función $f : X \to \mathbb{R}$*, con* $X \subseteq \mathbb{R}^n$*, y* a *un punto de acumulación de* X*. Se dice que* $l \in \mathbb{R}$ *es el límite de la función en el punto* a*, y se escribe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \textit{tal que}$$

$$\textit{para cada } x \in (B(a,\delta) - \{a\}) \cap X \Longrightarrow |\ f(x) - l\ | < \varepsilon$$

- **Proposición**

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$*,* a *punto de acumulación de* X *y* $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ *una función de* X *en* $\mathbb{R}^m$ *.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l = (l_1, l_2, .., l_m) \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f_i(x) = l_i, \ \ i = 1, 2, ..., m$$

Límite de una función en un punto

- **Proposición**

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, a punto de acumulación de X y f y g funciones de X en $\mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1, \lim_{x \to a} g(x) = l_2 \quad y \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

se verifican las siguientes propiedades

a) $\lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x \to a} f(x)$

b) $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

c) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{l_1}{l_2} \quad (si \;\; l_2 \neq 0)$

d) $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = l_1 l_2$

Límite de una función en un punto

- **Límites relativos a un conjunto (según una trayectoria)**

  Dados una función $f : X \to \mathbb{R}^m$, *un subconjunto* $S \subseteq X$, *y* a *punto de acumulación de* S, *se dice que* $l \in \mathbb{R}$ *es el límite de* f *relativo al conjunto* S *(o sobre* S*) en el punto* a *y se escribe*

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x) &= l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ \text{para cada } x &\in (X \cap S) \wedge (0 < \|x - a\| < \delta) \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon \end{aligned}$$

- **Proposición**

  Si existe el límite de $f(x)$ *en el punto* a *y es* l *entonces también existe el límite de* f *relativo a cualquier subconjunto* S *de* X *en el punto* a *y coincide con* l.

Límite de una función en un punto

Este resultado permite probar en algunos casos la no existencia del límite. Si para dos subconjuntos B, C de X se verifica

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x \in C}} f(x)$$

o bien no existe alguno de estos límites, entonces puede asegurarse que no existe

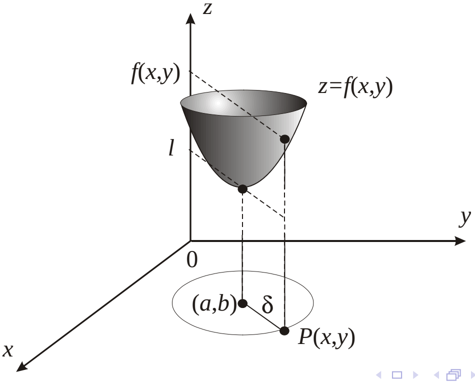
$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$$

tal que para cada (x,y) que verifique

$$0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2 \Longrightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$$



Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

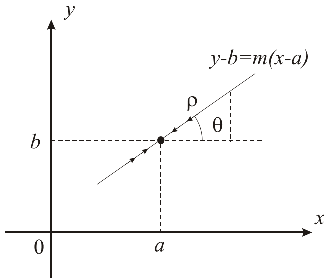
Supongamos que existe el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

éste debe coincidir con el límite obtenido al imponer a los puntos (x,y) que pertenezcan a una determinada trayectoria que finalice en el punto (a,b), como vimos anteriormente. El recíproco no es cierto. Es decir, el que exista el límite según una determinada trayectoria, no significa que exista el límite doble.
De todas las trayectorias, las más sencillas son las rectas, que admiten dos tratamientos:

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

Límites radiales.



Siendo $X_m = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = b + m(x-a)\right\}$, los límites radiales son los límites de $f(x,y)$ relativos al subconjunto X_m

$$\lim_{\substack{(x.y)\to(a,b)\\(x,y)\in X_m}} = \lim_{x\to a} f\left[x, b+m(x-a)\right]$$

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

Límites direccionales.

Los límites direccionales, son los radiales utilizando coordenadas polares

$$\lim_{\substack{(x.y)\to(a,b)\\(x,y)\in X_m}} = \lim_{\rho\to 0} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Se ve fácilmente que si los límites radiales dependen de la pendiente m o los límites direccionales dependen del ángulo θ, entonces el límite doble no existe.

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

Para evitarnos el cálculo del límite mediante la definición, también utilizaremos el siguiente concepto.

- **Límites reiterados**

Sea la función $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* (a, b) *un punto interior de* X*. Llamaremos*

$$f_1(x) = \lim_{y \to b} f(x, y); \quad f_2(y) = \lim_{x \to a} f(x, y)$$

Se llaman límites reiterados a los límites

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} \left[\lim_{y \to b} f(x, y) \right] \\ \displaystyle\lim_{y \to b} f_2(y) = \lim_{y \to b} \left[\lim_{x \to a} f(x, y) \right] \end{array}\right\}$$

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

- **Relación entre los límites reiterados y el límite de la función**

  - Si existen los límites reiterados, pero son distintos, entonces no existe el límite doble.
  - Puede existir el límite doble y no existir alguno (o ninguno) de los límites reiterados.
  - Si existe uno de los límites reiterados, el límite doble, en caso de existir, coincidirá con él.

Límite de una función en un punto (z=f(x,y))

Lo expuesto hasta ahora sólo nos sirve para afirmar que, o bien no existe el límite doble, o bien, si existe, su valor debe de ser l. Por eso enunciaremos un criterio que nos permita asegurar, si el candidato al límite sugerido por los métodos anteriores es realmente el límite doble.

- **Criterio de la función mayorante**

Dada una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una condición necesaria y suficiente para que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$$

es que exista una función $F(\rho)$, en todo el campo de variación de θ que recorra X, tal que

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - l| \leq F(\rho) \quad y \quad \lim_{\rho\to 0^+} F(\rho) = 0$$

Continuidad

- **Definición**

  Sea una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in X$ punto de acumulación de X. Se dice que f es continua en a, si y sólo si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

En el caso concreto de una función de dos variables $z = f(x, y)$, se dice continua en un punto (a, b) si y solo si

$$\begin{aligned} &1) \ \exists f(a,b) \\ &2) \ \exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \\ &3) \ f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \end{aligned}$$

Continuidad

- **Proposición**

  Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ *una función* $f : X \to \mathbb{R}^m$ *y* a *un punto de* X. *Una condición necesaria y suficiente para que* f *sea continua en* a *es que cada una de las funciones componentes* f_i *sea continua en* a.

- **Proposición**

  Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in X$ *y* f, g *dos funciones de* X *en* $\mathbb{R}$, *continuas en* a. *Se verifican las siguientes propiedades:*
  a) $\alpha f + \beta g$ *es continua en* $a (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
  b) $f \cdot g$ *es continua en* a.
  c) si $g(a) \neq 0$, *entonces* f/g *es continua en* a.

Continuidad en un conjunto

Se dice que una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es continua en X, cuando es continua en cada punto $x \in X$. Se verifica la siguiente propiedad.

- **Teorema de Weierstrass**

  Sean X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza un mínimo y un máximo en X, es decir existen x_0, $x_1 \in X$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo x de X.

Derivadas parciales de z=f(x,y)

- **Definición**

  Sean f una función definida en un abierto A de $\mathbb{R}^2$ que toma valores en $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y (x_0, y_0) un punto de A. Diremos que f es derivable respecto a x en el punto (x_0, y_0) si existe el límite siguiente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Este límite se llama *derivada parcial respecto a x de f en* (x_0, y_0). La representaremos en cualquiera de las formas siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \quad f'_x(x_0, y_0); \quad D_1 f(x_0, y_0)$$

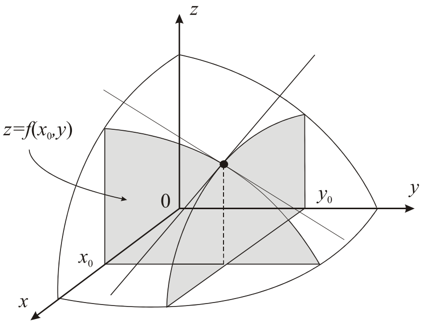
- **Definición**

De forma analóga se define la derivada parcial de f respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Derivadas parciales de z=f(x,y)

La representación gráfica de una función $z = f(x, y)$ es una superficie del espacio tridimensional. Si asignamos a y un valor fijo, $y = y_0$, la función de la variable x, $z = f(x, y_0)$, vendrá representada por la intersección del plano $y = y_0$ con dicha superficie. La derivada de esta función en el punto $x = x_0$ será precisamente $f'_x(x_0, y_0)$, y representará la pendiente de la tangente a la curva $z = f(x, y_0)$ en el punto $x = x_0$. El mismo razonamiento nos servirá para interpretar $f'_y(x_0, y_0)$.



Derivadas parciales

Podemos generalizar el concepto de derivada parcial a funciones de n variables.

- **Definición**

  Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$; se dice que f es derivable respecto x_i en el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_i, ..., a_n)$ si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h}$$

Este límite lo denotaremos en las formas siguientes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n); \quad f'_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Derivada direccional de z=f(x,y)

Si tenemos una función de dos variables $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, entonces

$$D_v f(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hv_1, a_2 + hv_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

es la derivada de f en el punto (a_1, a_2) en la dirección del vector $v = (v_1, v_2)$. Si

$$v_1^2 + v_2^2 = 1$$

entonces se llama derivada direccional.

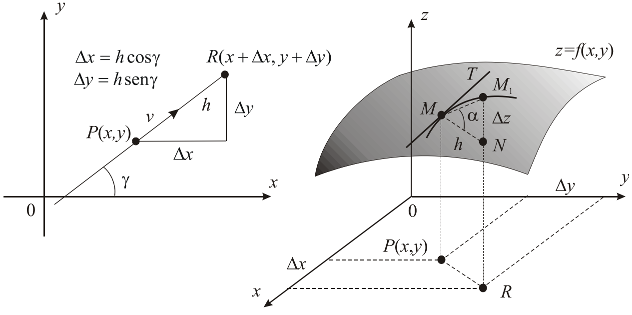
- **Proposición**

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y (x, y) punto de A. Sea $v = \cos\gamma i + \operatorname{sen}\gamma j$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x, y), entonces existe la derivada direccional en cualquier dirección γ y se cumple

$$D_\gamma f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cos\gamma + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \operatorname{sen}\gamma$$

Interpretación geométrica de la derivada direccional de z=f(x,y)

$$v = \cos\gamma i + \operatorname{sen}\gamma j$$



(a) (b)

$$D_v(x,y) = tg\alpha$$

Derivada direccional

- **Definición**

Sean una función $f : A \to \mathbb{R}$ con A abierto de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ un punto de A y $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$. El límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hv_1, a_2 + hv_2, ..., a_n + hv_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{h}$$

si existe, se denomina derivada de la función f en el punto a según la dirección v y se denota por $D_v f(a)$.
Si $||v|| = 1$ entonces $D_v f(a)$ se llama derivada direccional, según el vector, de la función f en el punto a.

Nota: Como caso particular, si tomamos vectores de la base canónica, podemos dar de nuevo, la definición de derivada parcial.

Diferencial de z=f(x,y) como aplicación lineal

- **Diferenciabilidad**

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ y (a_1, a_2) un punto de A. Se dice que f es diferenciable en (a_1, a_2) si existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verificando

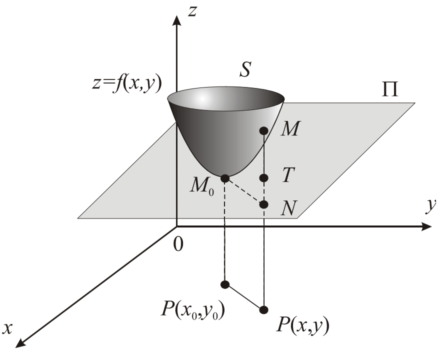
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a_1+h, a_2+k) - f(a_1, a_2) - \lambda(h,k)|}{||(h,k)||} = 0$$

Se cumple que esta aplicación lineal es única y que por lo tanto, es la diferencial de f definida anteriormente

$$df(a_1, a_2)(h,k) = \lambda(h,k) = \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x} h + \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial y} k$$

Nota: Análogamente se definiría la diferencial en un punto para *campos escalares.*

Interpretación geométrica de la diferencial de z=f(x,y)



El valor de la diferencial de una función en un punto (x_0, y_0) es numéricamente igual al incremento de la coordenada z del plano tangente en dicho punto: $|NT|$.

Aplicación de la diferencial a cálculos aproximados

Del incremento de la función obtenemos

$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x, y) \Longrightarrow f(x+h, y+k) = f(x, y) + \Delta z$$

Aproximando el incremento de la función por su diferencial

$$|MN| = \Delta z \simeq |NT| = dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k$$

podemos escribir la fórmula aproximada

$$f(x+h, y+k) \simeq f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k$$

en la que el error cometido es un infinitésimo de orden superior a $\sqrt{h^2 + k^2}$.

Diferencial de z=f(x,y)

- **Condición necesaria de diferenciabilidad**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ y (a_1, a_2) un punto de A. Si la función f es diferenciable en (a_1, a_2), entonces es continua en este punto.

- **Condición necesaria de diferenciabilidad**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $(a_1, a_2) \in A$ y $df = ah + bk$, entonces existen las derivadas parciales de f en el punto (a_1, a_2) y

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2); \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$$

Diferencial de z=f(x,y)

- **Condición suficiente de diferenciabilidad**

  Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $(a_1, a_2) \in A$. Si existen las derivadas parciales de $f(x, y)$ en el punto (a_1, a_2) y al menos una de ellas es continua en dicho punto, $f(x, y)$ es diferenciable en (a_1, a_2).

- **Condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad**

  Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ y (a_1, a_2) un punto de A. La función f es diferenciable en (a_1, a_2) si y sólo si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(a_1+h, a_2+k) - f(a_1, a_2) - f'_x(a_1, a_2)h - f'_y(a_1, a_2)k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Gradiente de z=f(x,y)

- **Definición**

  Llamaremos gradiente de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x, y) al vector $f'_x(x, y)i + f'_y(x, y)j$ asociado al punto (x, y). Se representa

$$\mathrm{grad} f(x, y) = \nabla f(x, y) = f'_x(x, y)i + f'_y(x, y)j$$

- **Proposición**

  Sea $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punto (x, y) de A. Entonces, la derivada direccional de f en (x, y) en la dirección del vector unitario v de R^2 cumple:

$$D_v f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot v$$

Propiedades del gradiente de z=f(x,y)

- **Proposición**

  En cada punto (x, y) el gradiente de la función $f\,(x, y)$ indica la dirección según la cual la derivada direccional es máxima en dicho punto

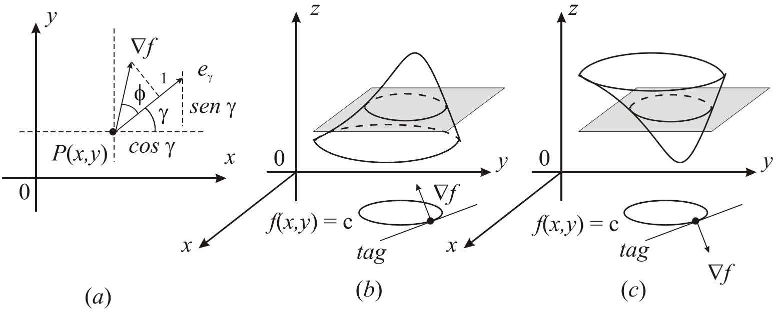
- **Proposición**

  En cada punto (x, y) el vector $\operatorname{grad} f\,(x, y)$ va dirigido según la normal en ese punto a la curva de nivel de f que pasa por el punto (x, y).

- **Proposición**

  La derivada de la función $z = f(x, y)$ según la dirección de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por (x, y) es cero.

Propiedades del gradiente de z=f(x,y)



Gradiente de z=f(x,y)

Podemos generalizar el concepto de gradiente a funciones de n variables.

- **Definición**

Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Llamaremos gradiente de la función f en el punto $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ al vector

$$\mathrm{grad} f(a) = \nabla f(a) = \left(f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_i}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)\right)$$

Diferencial de una función vectorial de variable vectorial

- **Proposición**

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $a \in A$. Una función $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ de A en $\mathbb{R}^m$ es diferenciable en a si y sólo si sus funciones componentes $f_1, f_2, ..., f_m$, como funciones de A en $\mathbb{R}$, son diferenciables en a, y en este caso $df(a)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que tiene por componentes

$$df(a) = (df_1(a), df_2(a), ..., df_m(a))$$

Podemos pues escribir

$$\begin{array}{cccc} \lambda : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & h & \rightarrow & \lambda(h) \\ & (h_1, h_2, ..., h_n) & \rightarrow & (df_1(a), df_2(a), ..., df_m(a))(h) \end{array}$$

Diferencial de una función vectorial de variable vectorial

- **Matriz Jacobiana**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f = (f_1, f_2, .., f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales respecto de cada variable en el punto a. La matriz $(m \times n)$

$$J\,f(a) = \frac{\partial(f_1, ..., f_m)}{\partial(x_1, ..., x_n)}(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & ... & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & ... & D_n f_2(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & ... & D_n f_m(a) \end{pmatrix}$$

  se llama matriz jacobiana de f en el punto a.

- **Proposición**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $f = (f_1, f_2, .., f_m)$ una función de A en $\mathbb{R}^m$ diferenciable en a. Entonces la matriz de la aplicación lineal $df(a)$ es $J\,f(a)$:

$$\lambda(h) = df(a)(h) = J\,f(a) \cdot h$$

Diferencial de la función compuesta

Sea

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (u,v) & & (x,y,z) & & w(u,v) = (g \circ f)(u,v) \end{array}$$

Se cumple

$$dw(u,v) = d(g \circ f)(u,v) = dg(x,y,z) \circ df(u,v)$$

Por tanto se cumple que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \\ J(g \circ f)(a) &= J g(f(a)) \cdot J f(a) \end{aligned}$$

Diferencial de la función compuesta

Regla de la cadena

Sean las funciones

$$\begin{cases} x = \phi_1(u, v) \\ y = \phi_2(u, v) \\ z = \phi_3(u, v) \end{cases}$$

diferenciables en (u, v) *y sea* g *la función*

$$w = g(x, y, z)$$

diferenciable en el punto (x, y, z) *correspondiente a* (u, v). *Entonces se verifica*

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & u \\
 & x \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & v \\
 & & u \\
w \arrow[uuur] \arrow[r] \arrow[dddr] & y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & v \\
 & & u \\
 & z \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & v
\end{tikzcd}$$

4.3.3. Regla de la cadena

Teorema 4.3.6 (Regla de la cadena) *Sean* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *y* $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *tales que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Dom} g$. *Si* f *es diferenciable en* $\mathbf{x_0}$ *y* g *es diferenciable en* $f(\mathbf{x_0})$, *entonces* $g \circ f$ *es diferenciable en* $\mathbf{x_0}$ *y además*

$$d(g \circ f)(\mathbf{x_0}) = dg(f(\mathbf{x_0})) \circ df(\mathbf{x_0}).$$

- La matriz correspondiente a la composición $dg(f(\mathbf{x}_0)) \circ df(\mathbf{x}_0)$ es el producto de las matrices jacobianas asociadas a $dg(f(\mathbf{x}_0))$ y $df(\mathbf{x}_0)$:

La matriz correspondiente a la composición $dg(f(\mathbf{x}_0)) \circ df(\mathbf{x}_0)$ es el producto de las matrices jacobianas asociadas a $dg(f(\mathbf{x}_0))$ y $df(\mathbf{x}_0)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(\mathbf{x}_0)) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(f(\mathbf{x}_0)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(\mathbf{x}_0)) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(f(\mathbf{x}_0)) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(f(\mathbf{x}_0)) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}(f(\mathbf{x}_0)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(\mathbf{x}_0)) & \frac{\partial g_p}{\partial y_2}(f(\mathbf{x}_0)) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(\mathbf{x}_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

- En el caso $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la matriz jacobiana de $g \circ f$ en $\mathbf{x}_0$ es su gradiente en $\mathbf{x}_0$:

$$\nabla(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = g'(f(\mathbf{x}_0))\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left(g'(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0), g'(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \right).$$

- En el caso $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la matriz jacobiana de $g \circ f$ en $\mathbf{x}_0$ es la derivada de la función $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\mathbf{x}_0$:

$$(g \circ f)'(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(f(x_0)) \ \frac{\partial g}{\partial y}(f(x_0)) \right) \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}(f(x_0)f_1'(x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(x_0))f_2'(x_0).$$

Derivadas de orden superior

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y f una función de A en $\mathbb{R}$. Sea $\phi(x,y):A\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $\phi(x,y)=f'_x(x,y)$. Si para un $(a_1,a_2)\in A$ existe $\phi'_y(a_1,a_2)$, esta derivada parcial de llama *derivada parcial segunda* respecto de las variables x e y de la función f en el punto (a_1,a_2) y se designa por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a_1,a_2)=f''_{xy}(a_1,a_2)$$

Igualmente se definiría

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx};\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=f'''_{xxx};\ \ldots$$

- **Teorema de Schwarz**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$. Supongamos la existencia de f'_x, f'_y, f''_{xy} en una bola de centro (x_0,y_0) y la continuidad de f''_{xy} en (x_0,y_0), entonces existe $f''_{yx}(x_0,y_0)$ y coinciden

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$$

Extremos Relativos. Definiciones

Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$.

- **Máximo relativo**

  Se dice que f alcanza un máximo relativo en $a \in A$ si existe una bola, $B(a,r)$, tal que $f(x) \leq f(a)$ para cada $x \in A \cap B(a,r)$. Si se verifica que $f(x) < f(a)$ para cada $x \in A \cap (B(a,r) - \{a\})$ se dice que el máximo es estricto.

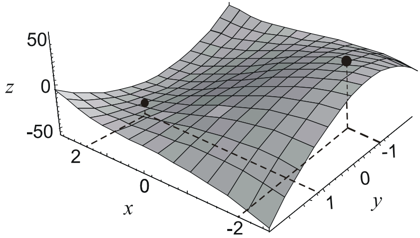
- **Mínimo relativo**

  Se dice que f alcanza un mínimo relativo en $a \in A$ si existe una bola, $B(a,r)$, tal que $f(x) \geq f(a)$ para cada $x \in A \cap B(a,r)$. Si se verifica que $f(x) > f(a)$ para cada $x \in A \cap (B(a,r) - \{a\})$ se dice que el mínimo es estricto.

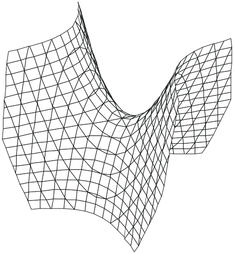
- **Punto de Silla**

  Se dice que f alcanza un punto de silla (o ensilladura) en $a \in A$ si para toda bola $B(a,r)$, se tienen puntos $x \in A \cap B(a,r)$ con $f(x) \geq f(a)$ y $f(x) \leq f(a)$.

Extremos Relativos. Definiciones



Extremos de
$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.



Punto de silla: $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Extremos Relativos. Condiciones Necesarias

- **Proposición**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$. Si $a \in A$ es un punto de extremo relativo de f y existen las derivadas parciales $D_i f(a)$, $i = 1, ..., n$ entonces

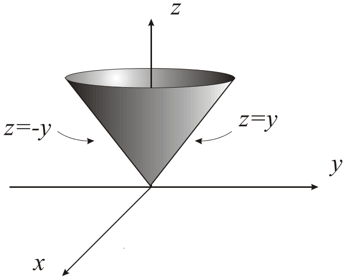
  $$D_i f(a) = 0; \quad i = 1, ..., n$$

- **Punto crítico**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f una función de A en $\mathbb{R}$ con derivadas parciales en un punto $a \in A$. Si $D_i f(a) = 0$ para $i = 1, 2, ..., n$, se dice que a es un punto crítico de f.

Extremos Relativos. Condiciones Necesarias

- Igual que ocurría en funciones de una variable, una función de varias variables puede tener extremos en puntos donde no es derivable.



Cono $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

El origen es un mínimo, pero en él no existen las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

- Para simplificar nuestro estudio en lo sucesivo nos limitaremos a estudiar y a buscar extremos en los puntos donde existen dichas derivadas parciales.

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

- Sea $f(x_1, x_2, ..., x_n) : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- Se denomina H *matriz Hessiana* a la matriz siguiente

$$H = \left(D_{ij}f\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} ; \quad 1 \leq i, j \leq n$$

- Denotaremos como Δ_k, $k = 1, 2, ..., n$ los *menores principales* de dicha matriz.

$$\Delta_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right| ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} ; \; \ldots \; \Delta_k = \left(D_{ij}f\right), 1 \leq i, j \leq k$$

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

- **Proposición (criterio de Sylvester)**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Supongamos que $x_0 \in A$ es un punto crítico de f, y sean Δ_k los menores principales en x_0.
  a) Si $\Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, ..., n$ entonces en x_0 se alcanza un mínimo estricto de f.
  b) Si $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, ..., n$ entonces en x_0 se alcanza un máximo estricto de f.
  c) Si $\Delta_n \neq 0$ y no se cumple ni a) ni b) entonces en x_0 hay un punto de silla de f.

Extremos Relativos. Condiciones Suficientes

En el caso particular de funciones de dos variables $z = f(x, y)$, llamaremos determinante *Hessiano* a

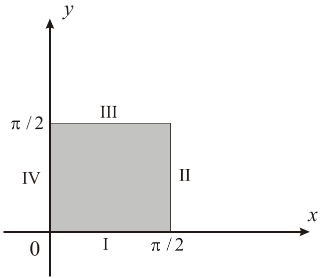
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

- **Proposición**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y $(x_0, y_0) \in A$ un punto crítico de f. Entonces:
  - si en $(x_0, y_0) : \Delta_2 > 0$, (x_0, y_0) es un punto de extremo estricto, (máximo estricto, si en este punto $f''_{xx} < 0$ y mínimo estricto, si $f''_{xx} > 0$).
  - si en $(x_0, y_0) : \Delta_2 < 0$ entonces hay un punto de silla (no hay extremo) en (x_0, y_0).
  - si en $(x_0, y_0) : \Delta_2 = 0$ el criterio no decide.

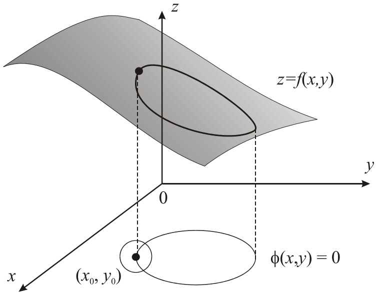
Extremos Absolutos

- Recordemos que en el caso de una función de una variable $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$ se estudiaban los extremos relativos en el abierto (a, b) y luego se estudiaba la función en la frontera, es decir en los puntos a y b. En realidad tan sólo se buscaban los puntos críticos en el abierto (a, b) (sin discutirlos).
- Para funciones de varias variables se trata de la misma idea, con los lógicos cambios de dimensión.



Extremos Condicionados

En primer lugar estudiaremos el problema de determinar extremos condicionados de una función de dos variables, ligadas por una condición.
Sea la función $z = f(x, y)$ con x e y ligadas por la condición $\phi(x, y) = 0$.



- **Extremo condicionado**

  Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, X el subconjunto de A tal que $X = \{(x, y) \in A \ / \ \phi\ (x, y) = 0\}$ y $(x_0, y_0) \in X$. El punto (x_0, y_0) se llama punto de extremo condicionado de la función $f(x, y)$ respecto de la ecuación $\phi(x, y) = 0$ siempre que sea un punto de extremo ordinario de esta función al considerarse ésta sólo en el conjunto X.

Extremos Condicionados

Dos métodos clásicos que resuelven extremos condicionados:

- **Eliminación de la condición**

Este método, en ocasiones, debe manejarse con precaución, como veremos en los ejemplos.

- **Método de los Multiplicadores de Lagrange (MML)**

Se basa en formar la función auxiliar (*función de Lagrange* o *Lagrangiana*)

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$$

Veremos que los extremos condicionados de $f(x, y)$ se pueden encontrar entre los puntos críticos de $F(x, y)$.

Extremos Condicionados (MML)

- **Teorema de Lagrange. Condiciones necesarias**

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f(x,y), \phi(x,y) : A \to \mathbb{R}$ funciones con derivadas parciales continuas en A y $X = \{(x,y) \in A \ / \ \phi(x,y) = 0\}$. Si (x_0, y_0) es un punto de extremo condicionado de $f(x,y)$ sobre X y el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \phi'_x(x_0,y_0) & \phi'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

es 1, entonces existe un número real λ tal que (x_0, y_0) es un punto crítico de la función

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$$

Nota. Esta proposición nos da condiciones necesarias pero no suficientes para la existencia de extremos condicionados. Ademas que el rango de la matriz sea 1 equivale a que no se anulen simultáneamente las dos derivadas parciales de ϕ.

Extremos Condicionados (MML). Generalización

- **Definición**

Sean G un abierto de $\mathbb{R}^n$; f_0: $G \longrightarrow \mathbb{R}$; X subconjunto de G tal que

$$X = \{x \in G \ / \ f_i(x) = 0 \ , \ i = 1, 2, ..., m\}$$

y $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0}) \in X$. El punto x_0 se dirá punto de extremo condicionado de la función f_0 respecto de las ecuaciones $f_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ si es un punto de extremo ordinario de esta función, al considerarse ésta sólo en el conjunto X.

Extremos Condicionados (MML). Generalización

- **Teorema de Lagrange. Condiciones necesarias**

  Sean G un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f_i : G \to \mathbb{R}$ con $i = 0, 1, 2, ..., m$ funciones con derivadas parciales continuas en G y

$$X = \{x \in G \ / \ f_i(x) = 0 \ , \ i = 1, 2, ..., m\}, (m < n)$$

  Si $x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, ..., x_{n_0})$ es un punto de extremo condicionado de f_0 sobre X y el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

  es m, entonces existen m números reales $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ tales que x_0 es un punto crítico de la función

$$F = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_m f_m$$