EPIG 4 de Noviembre de 2020
Cálculo Examen parcial

Ejercicio 1.(3 puntos)
Se considera la función $f(x) = \log(1+2x)$.

1. (0.5 puntos) Obtén la expresión de la derivada n-ésima de f.
2. (0.5 puntos)Escribe la expresión del polinomio de Taylor de orden n de la función f en torno al punto $a = 0$.
3. (1.2 puntos) Aproxima el valor de $\log(1{,}2)$ utilizando el polinomio de Taylor de orden 3 de f.
4. (0.8 puntos) Escribe la expresión del error que se comete en la aproximación anterior y da una cota de dicho error en términos absolutos.

SOLUCIÓN:

1. Para obtener la expresión de la derivada n-esima de f, calculamos las primeras derivadas hasta que somos capaces de inducir la expresión de $f^{n)(x)}$.

$$f'(x) = \frac{2}{1+2x} = 2(1+2x)^{-1} \Rightarrow f'(0) = 2$$
$$f''(x) = 2(-1)(1+2x)^{-2}2 = 2^2(-1)(1+2x)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -2^2$$
$$f^{3)}(x) = 2^2(-1)(-2)(1+2x)^{-3}2 = 2^3(-1)^2(1)(2)(1+2x)^{-3} \Rightarrow f^{3)}(0) = 2^4$$
$$f^{4)}(x) = 2^3(-1)(-2)(-3)(1+2x)^{-4}2 = 2^4(-1)^3(1)(2)(3)(1+2x)^{-4} \Rightarrow f^{4)}(0) = 2^4 \cdot 6$$
$$\dots$$

$$\boxed{f^{n)}(x) = (-1)^{n-1}2^n(n-1)!(1+2x)^{-n} \quad \Rightarrow \quad f^{n)}(0) = (-1)^{n-1}2^n(n-1)!}$$

2. La expresión general del polinomio de Taylor de f en torno al punto a es

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En nuestro caso, $a = 0$, y ya hemos calculado las derivadas sucesivas de la función en $a = 0$, por lo que el polinomio pedido es

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n = \frac{2}{1!}x + \frac{-2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{3!}x^3 \cdots + \frac{(-1)^{n-1}2^n(n-1)!}{n!}x^n =$$

$$= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 \cdots + \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}x^n$$

3. Para aproximar $\log(1{,}2)$ mediante el polinomio de Taylor de orden 3 utilizamos el hecho de que $f(x) \sim P_3(x)$. Como $\log(1{,}2) = f(0{,}1)$, aproximamos $f(0{,}1) \sim P_3(0{,}1)$.

$$P_3(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$$

por lo que

$$P_3(0{,}1) = 2(0{,}1) - 2(0{,}1)^2 + \frac{8}{3}(0{,}1)^3 = 0,1826$$

4. Para obtener el error que se ha cometiendo en dicha aproximación se utiliza el resto de Lagrange:

$$R_3(x) = \frac{f^{4)}(t)}{4!}x^4 = \frac{(-1)^3\ 2^4\ 6(1+2t)^{-4}}{4!}x^4 = -\frac{2^2}{(1+2t)^4}x^4 \text{ siendo } t \in (0,x)$$

$$R_3(0{,}1) = -\frac{2^2}{(1+2t)^4}(0{,}1)^4 \text{ siendo } t \in (0, 0{,}1)$$

Si $0 < t < 0{,}1 \Longrightarrow 0 < 2t < 0{,}2 \Longrightarrow 1 < 1+2t < 1{,}2 \Longrightarrow 1 < (1+2t)^4 < 1{,}2^4 \Longrightarrow 1 > \frac{1}{(1+2t)^4} > \frac{1}{1{,}2^4}$ por lo que

$$|R_3(0{,}1)| = |-\frac{2^2}{(1+2t)^4}(0{,}1)^4| = \frac{2^2}{(1+2t)^4}(0{,}1)^4 \leq 2^2(0{,}1)^4 = 0{,}0004$$

Ejercicio 2.

1. (1 punto) Estudia la existencia de asíntota oblícua para la rama derecha de la función $f(x) = 2x + \sqrt{x^2+1}$.

2. (1 punto) Determina, de forma justificada, el número de soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}^2(x) - 4x = 1$, dando un intervalo que contenga a cada una de ellas.

3. (1.5 puntos)Calcula las dimensiones del cilindro de volúmen máximo que puede inscribise en una esfera de radio 9 cm.

SOLUCIÓN:

1. Si $f(x)$ tiene una asíntota oblícua para la rama derecha, será una recta de la forma $y = mx + n$, donde los valores de los parámetros m y n se obtienen a través de los límites siguientes:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 3$$

Por otro lado,

$$n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - m\,x = \lim_{x\to+\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} - 3\,x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} - 1) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} x(\log(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Existe asíntota oblícua para la rama derecha : $y = 3x$

2. Consideremos la función $f(x) = \sin^2(x) - 4x - 1$, que es continua y derivable en R.

Los ceros de esta función son los mismos que las soluciones de la ecuación $\sin^2(x) - 4x = 1$.

Si calculamos la función derivada de f tenemos que $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - 4$.

Facilmente se observa que $f'(x) < 0 \quad \forall x \in R$, ya que
$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x) < 1 \Rightarrow \sin(2x) - 4 < -3 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in R$.

Por otro lado,

$$f(0) = \sin^2(0) - 4\cdot 0 - 1 = -1 < 0$$

mientras que

$$f(-\frac{\pi}{2}) = \sin^2(-\frac{\pi}{2}) - 4\cdot(-\frac{\pi}{2}) - 1 = 1 + 2\cdot\pi - 1 = 2\cdot\pi > 0$$

.

Como f es continua en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$,y $f(-\frac{\pi}{2})\cdot f(0) < 0$, según el teorema de Bolzano, existe un punto $c \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

Por tanto, la ecuación tiene al menos una solución, y además sólo puede tener una, porque si tuviera dos soluciones, entre ellas debería haber un cero de la función derivada (Torema de Rolle), y ya hemos visto que f' no se anula nunca.

3. El volúmen de un cilindro viene dado por $V(r,h)=\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base del cilindro y h es la altura del mismo. La relación que existe entre estas dos variables cuando el cilindro está inscrito en una esfera de radio 9cm, es

$$9^2 = r^2 + (\frac{h}{2})^2 \Longleftrightarrow r = \sqrt{9^2 - \frac{h^2}{4}}$$

Y sustituyendo en la ecuación del volumen, tenemos la función que queremos maximizar en función de $h \in [0,18]$. Como la función V es continua sobre el intervalo [0, 18] alcanza un valor máximo y uno mínimo dentro del intervalo.

$$V(h) = \pi(\sqrt{9^2 - \frac{h^2}{4}})^2\ h = \pi(9^2 - \frac{h^2}{4})\ h = 9^2\pi\ h - \pi\frac{h^3}{4}$$

En primer lugar calculamos los puntos críticos de la función, que son los que anulan la primera derivada:

$$V'(h) = 9^2\pi - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{4\cdot 9^2\pi}{3\pi} \Rightarrow h = 6\ \sqrt{3}$$

El volumen será máximo para $h = 6\sqrt{3}$ y $r = \sqrt{9^2 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{9^2 - \frac{6^2\cdot 3}{4}} = 3\sqrt{6}$.

El volumen será mínimo si $h = 0$ y $r = 9$, ó si $h = 18$ y $r = 0$.

Ejercicio 3.

1. (1 punto) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $F(x) = \int_0^{x^2+x+\frac{1}{4}} e^{\sqrt{t}}\, dt$.
   ¿Tiene algún punto de mínimo o de máximo relativo?

2. (1 punto) Estudia la convergencia de la integral $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{Ln(x)}{\sqrt[5]{4-x^2}} dx$.

3. (1.5 puntos) Representa gráficamente las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   Además calcula el área limitada entre sus 2 gráficas en el primer cuadrante.

SOLUCIÓN:

1. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función F está determinado por el signo de su derivada. En los intervalos en los que F' es positiva, F es creciente, y donde F' es negativa, F es decreciente.

   Para derivar la función integral aplicamos el Teorema Fundamental de Cálculo Integral:

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = \int_0^{x^2+x+\frac{1}{4}} e^{\sqrt{t}} dt$$

   Como $f(t) = e^{\sqrt{t}}$ es una función continua en todo R^+, y $\alpha(x) = 0$ y $\beta(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$ son funciones derivables,

$$F'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) = e^{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}}(2x+1) - e^{\sqrt{0}} \cdot 0 =$$
$$= e^{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}}(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

   ya que $e^{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}}$ es siempre positivo.

   El único punto crítico de F es $x = -\frac{1}{2}$, que divide el dominio en 2 intervalos: $(-\infty, -\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{2}, +\infty)$.

   Si $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \Rightarrow F'(x) < 0 \Rightarrow F$ es decreciente.

   Si $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty) \Rightarrow F'(x) > 0 \Rightarrow F$ es creciente.

   Como en $x = -\frac{1}{2}$ la función F pasa de ser decreciente a creciente, $x = -\frac{1}{2}$ es un punto de mínimo relativo de F en R.

2. I es una integral impropia de 2ª especie porque la función $\frac{Ln(x)}{\sqrt[5]{4-x^2}}$ es no acotada en un entorno de $x = 2$.

   Para estudiar su convergencia aplicamos el criterio de comparación, utilizando para comparar la función $\frac{1}{(2-x)^p}$ que también es no acotada en un entorno de $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{Ln(x)}{\sqrt[5]{4-x^2}}}{\frac{1}{(2-x)^p}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)^p\; Ln(x)}{\sqrt[5]{(2-x)(2+x)}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)^p\; Ln(x)}{(2-x)^{1/5}(2+x)^{1/5}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{Ln(x)}{(2+x)^{1/5}} = \frac{Ln(2)}{\sqrt[5]{4}} = K$$

   considerando $p = 1/5$.

   Como $K \neq 0$, $K \in R$, las integrales $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{Ln(x)}{\sqrt[5]{4-x^2}} dx$ y $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{(2-x)^{1/5}} dx$ tienen el mismo caracter de convergencia.

   Sabemos que $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{(2-x)^{1/5}} dx$ es convergente por ser p<1, por lo que la integral I también converge.

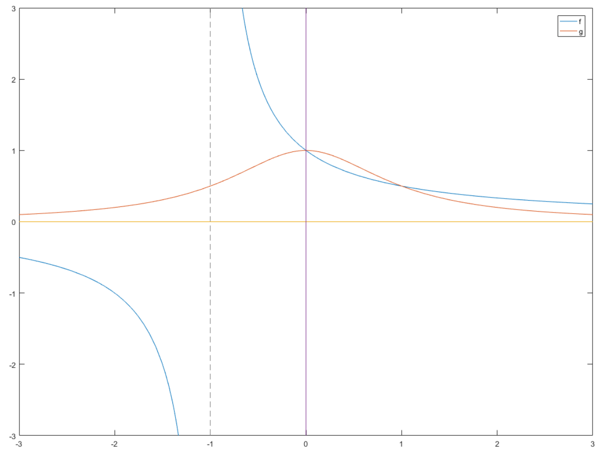

Figura 1: Representación gráfica de f y de g

3. La gráfica de la función f es la misma gráfica que la de la función $\frac{1}{x}$ trasladada 1 unidad a la izquierda del origen de coordenadas, de manera que la asíntota vertical estará en $x = -1$.

   Para estudiar el comportamiento de la función g empezamos por el dominio. Como el denominador no se anula para ningún valor real, el $Dom(g) = R$.

   Veamos si g tiene asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

   De forma que $y = 0$ es asíntota horizontal para las dos ramas.

   Los puntos de corte con el eje OX se obtienen resolviendo la ecuación $g(x) = 0$, es decir, $\dfrac{1}{1+x^2} = 0$ que no tiene solución.

   El punto de corte con el eje OY se obtiene mediante $f(0) = 1$.

   Para obtener los extremos relativos, buscamos los puntos críticos, es decir, los valores de x tales que $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

   $x = 0$ es el único punto crítico de g.

   Como $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow g$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

   Como $g'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow g$ es decreciente en $(0, +\infty)$.

   En $x = 0$ hay un punto de máximo relativo de g en R.

   La representación gráfica de f y de g viene dada por la Figura 1

   Para obtener el área de la región limitada por las 2 gráficas necesitamos conocer los puntos de corte de las funciones:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

   Finalmente, el área de la región pedida viene dada por la siguiente integral:

$$AREA = \int_0^{+\infty} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^1 (g(x) - f(x))\, dx + \int_1^{+\infty} (f(x) - g(x))\, dx$$

   La primera de las integrales es una integral definida, y la segunda una integral impropia de 1ª especie.

Veamos si la integral impropia es convergente:

$$\int_1^{+\infty} (f(x) - g(x))\ dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^{M} (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1+x^2})\ dx =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} [log|x+1| - arctg(x)]_1^M = \lim_{M\to+\infty} log|M+1| - arctg(M) - log(2) + \frac{\pi}{4} = +\infty - \frac{\pi}{2} - log(2) + \frac{\pi}{4} = +\infty$$

Por tanto, el área pedida es no acotada.