Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 2020-21
EJERCICIOS PROPUESTOS DEL TEMA 1

1) ¿Para qué valores de x, $y \in R$ se verifica cada una de las propiedades siguientes:

a) Si $x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ b) Si $x < y \Rightarrow -x > -y$

c) $|x+y| = |x| + |y|$ d) $|x.y| = |x|.|y|$

2) Sea $A = \{x \in R \,/\, |2x+1| < 5\}$. Obtener, si existen, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$

3) Obtener los números reales x que verifican las desigualdades siguientes:

a) $|x+3| + |x-3| < 8$ b) $\left|\dfrac{4}{x^2-1}\right| \leq 2$

c) $|x-1|.|x+2| > 4$ d) $\left|\dfrac{x-3}{x-1} - 3\right| \geq 2$

4) Sean f y g dos funciones reales de una variable real tales que $Dom\, f = (0, \infty)$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$. Obtener el dominio de la función compuesta fog.

5) Razonar la certeza o falsedad de la afirmación siguiente. Si f es una función inyectiva en un dominio D entonces f es estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente en D.

6) Hallar la función inversa de $f(x) = x^2 - x$, $x \in [0.5, \infty)$

7) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Obtener, usando la definición, el dominio y la imagen de f. ¿Es f acotada en su dominio? Determinar, si existen, el supremo, el máximo, el ínfimo y el mínimo de f en su dominio?

8) Sea $f(x) = \dfrac{x}{2 + e^x}$. Elegir, con razonamiento, la respuesta correcta sin aplicar la regla de L'Hôpital.

a) f es acotada en R b) f es acotada superiormente y no inferiormente en R.

c) f es acotada inf. y no sup. en R d) f no es acotada ni inf. ni sup. en R.

9) Se considera la función

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=2+....$$

a) Hallar, usando la definición, el dominio y la imagen de f

b) Esbozar la gráfica de f (hipérbola equilatera) ¿Es f acotada en su dominio? ¿Es f acotada en el intervalo $[2\,,3]$? Razonar las respuestas.

c) ¿Quién es el máximo de $f(x)$ si $x\in[2\,,3]$? ¿Quién es el mínimo de $f(x)$ si $x\in[2\,,3]$?

d) ¿Tiene f inversa? En caso afirmativo, obtenerla.

10) Obtener las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

11) Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{x} & \text{si} \quad x>0\\[2ex] \dfrac{x^2}{x-1} & \text{si} \quad x\le 0\end{cases}$$

a) ¿Es f continua por la izquierda en $x=0$? ¿Es f continua por la derecha en $x=0$? ¿Tiene f una discontinuidad evitable en $x=0$? Razonar las respuestas.

b) Obtener todas las asíntotas de f .

12) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) La función siguiente es continua en $x=1$ por la izquierda y no lo es por la derecha.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & \text{si} \quad x\neq 1\\[2ex] 0 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$$

b) La ecuación $sen(x)-x-1=0$ tiene, al menos, una raíz en el intervalo $\left(-\pi\,,-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

13) Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2+e^{1/x}} & \text{si} \quad x\neq 0\\[2ex] 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

a) ¿Es f derivable por la derecha en $x=0$? ¿Es f derivable por la izquierda en $x=0$? ¿Es f derivable en $x=0$? Razonar las respuestas.

b) Obtener la función derivada de f en los puntos donde exista.

14) Obtener la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = tg(1+x)^3$
b) $f(x) = e^{-|x|}$
c) $f(x) = x^2.sen(1/x)$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$
d) $f(x) = e^x - 1$ si $x \geq 0$; $f(x) = x^3$ si $x < 0$
e) $f(x) = (1+x)^{\log(1+x)}$

15) Demostrar que la ecuación $sen(x) + 3x - 1 = 0$ tiene una única raíz real y encontrar un intervalo de longitud menor que dos que la contenga.

16) Sea $f(x) = \log(x) - x^2/2 + 2$

a) Determinar, por aplicación del cálculo diferencial, el número máximo de ceros reales de f .
b) ¿Cuántos ceros reales tiene exactamente la función f ? Razonar la respuesta.

17) Calcular los siguientes límites por la regla de L´Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}\right] \qquad \lim_{x\to 0} x^x \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tg(x) - x}{x - sen(x)}$$

18) Determinar los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3(x-1)$.

19) Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene un lado sobre el eje X y está inscrito en el triangulo determinado por las rectas $y = 0$, $y = x$, $y = 4 - 2x$

20) Sea $f(x) = xe^{1/x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad lateral (por la izda y por la dcha) de f en $x = 0$.
b) Determinar los puntos críticos, los intervalos de monotonía y los extremos relativos de f ¿ Existe el máximo ó el mínimo absoluto de f ? Razonar la respuesta.

21) Sea

$$f(x) = e^{-x} + |x+1| = \begin{cases} e^{-x} + x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ e^{-x} - x - 1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

a) ¿Es f continua en $x = -1$? ¿Es f derivable por la derecha en $x = -1$? ¿Es f derivable por la izquierda en $x = -1$? ¿Es f derivable en $x = -1$? Razonar las respuestas a partir del cálculo de los límites correspondientes.
b) Obtener las funciones $f´(x)$, $f´´(x)$ en los puntos donde existan y determinar los puntos críticos de f
c) Estudiar la existencia de extremos (relativos y absolutos) y de puntos de inflexión.
d) Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 asociado a f en el punto $x_0 = 0$

22) Obtener, si existen, el máximo absoluto (M) y el mínimo absoluto (m) de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ definida en el intervalo cerrado $\left[-2\,,1/2\right]$.

23) Se considera la función siguiente definida en el intervalo cerrado $I=\left[-3\,,3\right]$,

$$f(x)=\begin{cases} \log(1-x)\,, & x\in\left[-3\,,0\right) \\ \left|x^2-1\right|+x-1\,, & x\in\left[0\,,3\right] \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f en su dominio y usar las definiciones de derivadas laterales para obtener los puntos interiores al dominio en los que f no es derivable.

b) Obtener $f\,'(x)$, para todo x perteneciente al interior de I donde $f(x)$ sea derivable y determinar los puntos críticos de f.

c) ¿Existe $M=\max\limits_{x\in[-3\,,3]} f(x)$? ¿Existe $m=\min\limits_{x\in[-3\,,3]} f(x)$? Obtener M y m, caso de que existan.