

EJERCICIOS  
TEMA 3  
SUCESIONES Y SERIES



## SUCESIONES NUMÉRICAS

**Ejercicio 1** Hallar el límite de

$$a) a_n = \frac{8n \ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sin^3 \frac{1}{n}}{(2n^2 + 5n) \cos \frac{2\pi n - 2}{6n+3}}; \quad b) a_n = (n+2) (\sqrt[n]{e} - 1)$$

Solución: a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .**Ejercicio 2** Hallar

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{n!e^n}{n^n}; \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}}$$

Solución: a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ; b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2\pi$ .**Ejercicio 3** Hallar

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n + 3} - n; \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+a} - \sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c} - \sqrt{n+d}} \quad (c \neq d)$$

Solución: a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ; b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a-b}{c-d}$ .**Ejercicio 4** Calcular los siguientes límites

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2+3}; \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + 3n^4\right)^{\frac{1}{3+2\ln(n+1)}}; \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{3n^3-1}\right)^{\ln(n^4-3)}$$

Solución: a)  $L = e^{-1/2}$ ; b)  $L = \frac{1}{e}$ ; c)  $L = e^2$ ; d)  $L = e^{-\frac{1}{2}}$ .**Ejercicio 5** Hallar el límite de las sucesiones de término general

$$a) a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; \quad b) a_n = \left(\frac{2+n}{n+1}\right)^n; \quad c) a_n = \sqrt[n]{n}$$

Solución: a)  $e^{-1}$ ; b)  $e$ ; c)  $1$ .**Ejercicio 6** Calcular los límites

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos 2\pi n)^{n^2+3}; \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sin \pi n); \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

Solución: a)  $1$ ; b)  $0$ ; c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ .**Ejercicio 7** Hallar los límites siguientes

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!}; \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n}$$

Solución: a)  $1$ ; b)  $1$ .**Ejercicio 8** Calcular

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \right)$$

Solución:  $1$ .**Ejercicio 9** Hallar el límite de las sucesiones de término general

$$a) a_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n; \quad b) a_n = \left(1 + \frac{1}{n! + 1}\right)^{n!-1}$$

Solución: a)  $2/3$ ; b)  $e$ .

**Ejercicio 10** Hallar el límite de las sucesiones de término general

$$\begin{aligned} a) \ a_n &= \left( \frac{n^2 + 3n - 2}{n^2 + n} \right)^{\frac{n^3 + 2}{2n^2 - 1}} \\ b) \ a_n &= [1 - \ln(n^2 + 5n) + \ln(n^2 + 6n - 3)]^{n+2} \end{aligned}$$

Solución: a) e; b) e.

**Ejercicio 11** Hallar el límite de las sucesiones de término general

$$a) \ a_n = n(\sqrt[n]{a} - 1); \ b) \ a_n = (n^5 + n^4)^{1/n}$$

Solución: a)  $\ln a$ ; b) 1.

**Ejercicio 12** Hallar el límite de las sucesiones de término general

$$a) \ a_n = \frac{\ln n!}{\ln n^n}; \ b) \ a_n = \frac{3 + 6 + \dots + 3n}{n^2}$$

Solución: a) 1; b) 3/2.

**Ejercicio 13** Hallar el límite de las sucesiones de término general

$$a) \ a_n = \frac{\sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} + \dots + \sin \frac{\pi}{n}}{\ln n}; \ b) \ a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Solución: a)  $\pi$ ; b)  $1/e$ .

## SERIES NUMÉRICAS

**Ejercicio 14** Estudiar el carácter de las series de término general

$$a) \ a_n = \frac{2}{3^{n-1}}; \ b) \ a_n = 2^n; \ c) \ a_n = (-1)^{n-1} \cdot 2$$

Solución: a) convergente; b) divergente; c) oscilante.

**Ejercicio 15** De la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se conoce que la sucesión de las sumas parciales  $(S_n)$  viene dada por

$$S_n = \frac{3n + 2}{n + 4}; \ \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Hallar el término general  $a_n$  de la serie. b) Hallar el carácter de la serie.

Solución: a)  $a_n = \frac{10}{(n+3)(n+4)}$ ; b) convergente.

**Ejercicio 16** Hallar, calculando sus sumas parciales, el carácter de las series

$$a) \ \sum_{n=1}^{\infty} (0.2)^n; \ b) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \ c) \ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \ d) \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Solución: a) convergente; b) convergente; c) divergente; d) oscilante.

**Ejercicio 17** Determinar el carácter de las series

$$a) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)}; \ b) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 + 1}$$

Solución: a) divergente; b) divergente.

**Ejercicio 18** Determinar el carácter de la serie de término general

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

*Solución: divergente.*

**Ejercicio 19** Hallar el carácter de las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right); \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5^n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-7)^n$$

*Solución: a) divergente; b) convergente; c) divergente.*

## SERIES NUMÉRICAS de TÉRMINOS POSITIVOS

**Ejercicio 20** Determinar el carácter de las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{2+2n^5}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

*Solución: a) divergente; b) divergente.*

**Ejercicio 21** Hallar el carácter de las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2 + 5}; \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{(\ln n) n^3}$$

*Solución: a) convergente; b) convergente.*

**Ejercicio 22** Determinar el carácter de las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n} \right)$$

*Solución: a) convergente; b) convergente.*

**Ejercicio 23** Determinar el carácter de la series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{10n+3}{3n-1}$$

*Solución: a) convergente; b) convergente.*

**Ejercicio 24** Determinar el carácter de las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right)$$

*Solución: a) convergente; b) divergente.*

**Ejercicio 25** Determinar el carácter de las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n}$$

*Solución: a) convergente; b) convergente.*

**Ejercicio 26** Determinar el carácter de la series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin^3 n}{n^n}; \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

*Solución: a) convergente; b) convergente; c) convergente.*

**Ejercicio 27** Hallar el carácter de las siguientes series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(\ln(2^2 \sqrt[3]{2}) \cdots \ln(2^n \sqrt[3]{n}))}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

*Solución: a) divergente; b) convergente.*

**Ejercicio 28** Hallar el carácter de las siguientes series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} \right)^2; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+1)(1+\sqrt{2}) \cdots (1+\sqrt{n})}$$

*Solución: a) convergente; b) convergente.*

**Ejercicio 29** Hallar el carácter de las siguientes series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{n+1}{n} \right)^n - \frac{2n}{n+1} \right]^{-n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 [\sqrt{3} + (-1)^n]^n}{5^n}$$

*Solución: a) divergente; b) convergente.*

## SERIES ALTERNADAS

**Ejercicio 30** Estudiar la convergencia de la serie alternada (armónica alternada)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \cdots$$

*Solución: convergente.*

**Ejercicio 31** Estudiar la convergencia de la serie alternada

$$\frac{5}{2} - \frac{7}{4} + \frac{9}{6} - \frac{11}{8} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{2n+3}{2n} + \cdots$$

*Solución: divergente.*

**Ejercicio 32** Acotar el error que se comete en la serie alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \cdots$$

al considerar la suma aproximada  $S_n$  con  $n = 3$  y  $n = 4$ .

*Solución: Error =  $|S - S_3| < |a_4| = \frac{1}{4}$ ; Error =  $|S - S_4| < |a_5| = \frac{1}{5}$ .*

**Ejercicio 33** Determinar el carácter de la serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2\sqrt{7}} - \frac{4}{\sqrt{65}} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} + \cdots$$

*Solución: convergente.*

**Ejercicio 34** Estudiar la convergencia de la serie alternada

$$1 - \ln \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+1} - \cdots$$

*Solución: convergente.*

**Ejercicio 35** Estudiar el carácter de la serie

$$\frac{2}{1!} - \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} - \frac{5}{4!} + \frac{6}{5!} - \cdots$$

*Solución: convergente.*

**Ejercicio 36** Estudiar la convergencia absoluta de la serie

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} + \cdots$$

*Solución: absolutamente convergente.*

**Ejercicio 37** Estudiar la convergencia absoluta de las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

*Solución: a) no es absolutamente convergente; b) absolutamente convergente.*

## SERIES de POTENCIAS

**Ejercicio 38** Hallar el radio de convergencia de las series

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} nx^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Solución: a)  $R = 1$ ; b)  $R = 1$ .

**Ejercicio 39** Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias e investigar la convergencia en los extremos de dichos intervalos

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

Solución: a) converge puntualmente en  $x \in [-3, 1]$ ; b) converge puntualmente en  $x \in (-1, 1)$ ; c) converge puntualmente en todo  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 40** Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias e investigar la convergencia en los extremos de dichos intervalos

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{2n}$$

Solución: a) converge puntualmente en  $x \in [-2, 2]$ ; b) converge puntualmente en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

**Ejercicio 41** Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias e investigar la convergencia en los extremos de dichos intervalos

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n!x^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

Solución: a) Convergencia sólo en  $x = 0$ ; b) Convergencia puntual en  $[-1, 1]$ ; c) Convergencia puntual en  $(-1, 1]$ .

**Ejercicio 42** Hallar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias e investigar la convergencia en los extremos de dichos intervalos

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Solución: a) Convergencia puntual en  $[0, 4)$ ; b) Convergencia puntual en  $(-2, 2)$ .

**Ejercicio 43** Analizar la convergencia de la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$$

y demostrar que la función suma de la serie verifica

$$x^2 f''(x) + x f'(x) - 4x^2 f(x) = 0$$

## DESARROLLO de una FUNCIÓN en SERIE de POTENCIAS

**Ejercicio 44** Obtener los desarrollos en serie de potencias de  $x$  (desarrollos de Maclaurin) de las funciones elementales

$$a) e^x; \quad b) \sin x; \quad c) \cos x; \quad d) \ln(1+x); \quad e) (1+x)^\alpha$$

Solución:

$$\begin{aligned} a) e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad x \in \mathbb{R}; \quad b) \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}; \quad x \in \mathbb{R}; \quad c) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}; \quad x \in \mathbb{R} \\ d) \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}; \quad x \in (-1, 1]; \quad e) (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n; \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

**Ejercicio 45** Obtener el desarrollo de Maclaurin de las funciones

$$a) \frac{1}{1+x}; \quad b) \frac{1}{1-x}; \quad c) \frac{1}{1+x^2}; \quad d) \frac{1}{1-x^2}$$

*Solución:*

$$\begin{aligned} a) \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n; \quad x \in (-1, 1); \quad b) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad x \in (-1, 1) \\ c) \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}; \quad x \in (-1, 1); \quad d) \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}; \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

**Ejercicio 46** Desarrollar en serie de Taylor la función  $e^x$  alrededor de  $x_0 = 1$ .

*Solución:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n, \quad (x \in \mathbb{R})$$

**Ejemplo 1 Ejercicio 47** Usando los desarrollos de Maclaurin de

$$\frac{1}{1-x} \text{ y } \frac{1}{1+x}$$

y derivando término a término, calcular los desarrollos de

$$a) \frac{1}{(1-x)^2}; \quad b) \frac{1}{(1+x)^2}$$

*Solución:*

$$\begin{aligned} a) \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots, \quad x \in (-1, 1) \\ b) \frac{1}{(1+x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} = 1 - 2x + 3x^2 + \dots, \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

**Ejercicio 48** Usando los desarrollos de Maclaurin de

$$\frac{1}{1+x} \text{ y } \frac{1}{1+x^2}$$

e integrando término a término, calcular los desarrollos de

$$a) \ln(1+x); \quad b) \operatorname{arctg} x$$

*Solución:*

$$\begin{aligned} a) \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots; \quad x \in (-1, 1) \\ b) \operatorname{arctg} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

**Ejercicio 49** Obtener el desarrollo de Maclaurin de la función

$$f(x) = \arcsen x$$

*Solución:*

$$\arcsen x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad x \in (-1, 1)$$

**Ejercicio 50** Demostrar que cada una de las siguientes funciones tiene como representación la serie de potencias que se indica, en los conjuntos dados:

$$\begin{aligned} a) \operatorname{sen}^2 x &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}; \quad x \in \mathbb{R} \\ b) \frac{12-5x}{6-5x-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n; \quad x \in (-1, 1) \\ c) \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-2}}{n(2n)!} x^{2n}; \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



**Ejercicio 51** Desarrollar en serie de potencias de  $x$  la función

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

Solución:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in (-1, 1).$

**Ejercicio 52** Desarrollar en serie de potencias de  $x$  la función

$$f(x) = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

Solución:  $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in (-1, 1).$

**Ejercicio 53** Desarrollar en serie de potencias de  $x$  la función

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$$

Solución:  $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 2^{n+1}) x^n; x \in (-1/2, 1/2).$

**Ejercicio 54** Desarrollar en serie de potencias de  $x$  la función

$$f(x) = (1+x)e^{-x}$$

Solución:  $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n; x \in \mathbb{R}.$

**Ejercicio 55** Desarrollar en serie de potencias la función  $f(x) = \ln x$  en torno al punto  $a = 1$ . Aplicando el desarrollo anterior, con  $n = 3$ , calcular de forma aproximada

$$\int_0^1 x^7 \ln x dx$$

Solución:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}.$

**Ejercicio 56** Desarrollar en serie de potencias de  $x$  la función  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ . Aplicando el desarrollo anterior, con  $n = 3$ , calcular de forma aproximada

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

Solución:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}.$

**Ejercicio 57** Desarrollar en serie de potencias de  $x$  la función  $f(x) = x^{30}e^x$ . Aplicando el desarrollo anterior, con tres términos del desarrollo, calcular de forma aproximada

$$\int_0^1 x^{30} e^x dx$$

Solución:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+30}}{n!}.$