

LÓGICA

1. **(1 punto)** Formaliza el siguiente enunciado en el lenguaje de la **Lógica de proposiciones**, indicando las proposiciones empleadas:

“Es necesario reducir el uso de combustibles fósiles para reducir las emisiones de CO₂ y frenar la emergencia climática, si la humanidad quiere sobrevivir”.

2. **(1,5 puntos)** Formaliza el siguiente enunciado en el lenguaje de la **Lógica de predicados**:

“Es suficiente actuar en algún escenario para ser un showman, pero hay showman muy conocidos que actúan en todos los escenarios”.

Utiliza los siguientes predicados: A(X,Y): X actúa en Y, C(X): X es muy conocido, E(X): X es un escenario, S(X): X es un showman.

3. **(1,5 puntos)** Evalúa la siguiente fórmula bajo la interpretación dada:

$$\neg \exists X \left((p(X) \vee q(a, X)) \rightarrow \forall Y (q(X, a) \wedge \neg p(f(X, Y))) \right)$$

Interpretación:

Dominio_I = {0, 1}; **p**_I(X) = “X < 1”; **q**_I(X,Y) = “X = Y”; **f**_I(X,Y) = max{X,Y}; **a**_I=1

En base al resultado obtenido, ¿podemos afirmar algo acerca de la validez de la fórmula? ¿Y acerca de su insatisfacibilidad? **Justifica todas las respuestas.**

4. **(2,5 puntos)** Demuestra la corrección del siguiente razonamiento mediante **Deducción Natural**.

$$\{\forall X(r(X) \rightarrow q(X)), \exists X(p(X) \wedge \neg q(X))\} \models \exists X(p(X) \wedge \neg r(X))$$

5. **(2,5 puntos)** Demuestra, utilizando **resolución**, la corrección del siguiente razonamiento. **Justifica tu respuesta.**

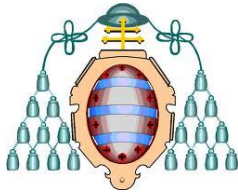
$$\{(p \vee s) \rightarrow (q \wedge r), \neg r \rightarrow q\} \vdash (p \vee \neg q) \rightarrow r$$

6. **(1 punto, pero si la respuesta es incorrecta resta 0,3 puntos)** Sean C₁ y C₂ las cláusulas:

$$C_1 = p(X, f(X)) \vee \neg q(X, Y), \quad C_2 = \neg p(f(a), f(b)) \vee q(f(Z), f(Y))$$

Determinar cuál de las siguientes respuestas es correcta:

- a) Las cláusulas tienen dos posibles resolventes: $\neg q(X, Y) \vee q(f(Z), f(Y))$ y $p(X, f(X)) \vee \neg p(f(a), f(b))$
- b) El único resolvente es: $p(f(Z), f(f(Z))) \vee \neg p(f(a), f(b))$
- c) A partir de estas cláusulas, se obtiene la cláusula vacía (\square)
- d) No se puede obtener ningún resolvente a partir de estas cláusulas.



COMPUTABILIDAD

1. (1,25 puntos) Indica cuáles serían las funciones semántica unaria y binaria del siguiente programa while P:

```
begin
  while X1 ≠ X4 do
    begin
      X3 := X1;
      X1 := X1 ÷ X2;
    end
    X3 := X2 ÷ X3;
    while X3 ≠ X4 do
      begin
        X3 := succ(X3);
      end
      X1 := X1 + X2;
    end
  end
```

2. (2 puntos) Sea P1 un programa while con exactamente 4 variables, y P2 un programa while con exactamente 6 variables. Constrúyase un programa while P, utilizando los programas P1 y P2, cuya función ternaria semántica sea:

$$\varphi_P^{(3)}(x, y, z) = \begin{cases} (\varphi_{P1}(\varphi_{P2}(x, z))) * y & \text{si } z > 0 \\ \perp & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Nota: Se permiten únicamente las macros de asignación, suma, resta y multiplicación.

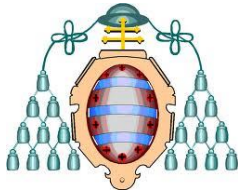
3. (2 puntos) Constrúyase una Máquina de Turing Mf cuya función semántica unaria sea:

$$f(x) = g(2x)$$

utilizando una Máquina de Turing Mg cuya función semántica binaria es g(x,y) y de la que únicamente sabemos que su estado inicial es q0, su conjunto de estados es Q={q0, q1, ..., q6}, y su único estado final es q6. **Indicar, para cada transición, un breve comentario explicando para qué sirve.**

4. (1 punto) Determina la función semántica binaria que computa la siguiente Máquina de Turing M={0,1}, {q0,q1,q2,q3,q4,q5,qf}, T, q0, {qf}).

(q0, 1, 0, D, q1)	(q2, 1, 1, D, q3)	(q4, 1, 0, D, q4)
(q1, 1, 1, D, q2)	(q3, 1, 1, D, q3)	(q4, 0, 0, H, qf)
(q1, 0, 0, D, q5)	(q3, 0, 0, D, q4)	(q5, 1, 0, H, qf)



Computabilidad

Apellidos, Nombre: DNI:

5. Se pretende demostrar la irresolubilidad del problema de decidir si la función semántica binaria de un programa P está definida sí y solo sí ambas entradas son mayores de 5.

- a) **(2 puntos)** Rellena los **5 huecos** que faltan en el proceso de demostración por reducción:

Suponemos que existe un algoritmo A cuya función semántica es:

(Hueco 1)

y definimos la macro $A(X)$ a partir de él.

Hacemos ahora este programa P_d , que nos permitirá más adelante reducir el problema de la parada (se permite usar todas las macros vistas en clase, incluidos macro-test):

(Hueco 2)

y cuya función semántica es:

(Hueco 3)

Aplicando el teorema de parametrización, el código d se puede calcular mediante una función $f(c,k)$ total y computable. Dado que es total y computable, se puede definir una macro $F(X,Y)$ que la compute.

A partir de las macros A y F podemos ahora definir el siguiente programa:

```
begin
  X1 := F(X1, X2);
  X1 := A(X1);
end
```

cuya función semántica es:

(Hueco 4)

Dada la definición de P_d , esta función es equivalente a la función característica del problema de la parada. Por tanto, **(Hueco 5)**, por lo que nuestro problema es irresoluble.

- b) **(0,75 puntos)** Demuestra, utilizando el Teorema de Rice, que el problema descrito en el apartado anterior es irresoluble (se permite usar todas las macros vistas en clase, incluidos macro-test).

6. **(1 punto, incorrecta resta 0.3)** El Teorema de Parametrización nos garantiza que:

- a) Existe una función φ^j de aridad j capaz de computar todas las funciones semánticas de aridad $j - 1$
- b) Si f es una función total y computable, existe un número natural e tal que $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$
- c) Dado un programa P , el código de un programa en el que se reemplazan variables de entrada de P por valores constantes, es siempre computable.
- d) Si podemos reducir el problema de la parada a otro problema, entonces éste último es irresoluble