Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Tema 2
Lógica de Predicados (L1)

Departamento de Informática
Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Oviedo

Problemas lógica proposicional

- Poca expresividad

Fido *es un perro* ⟶ ***p***

formalización

Fido *es bueno* ⟶ ***q***

Una vez formalizadas, no se puede saber si hay algo en común en ambas proposiciones

Problemas lógica proposicional

Razonamientos que no pueden demostrarse

*Todos los perros son buenos, **Fido** es un perro, por tanto, **Fido** es bueno.*

¿Es correcto?

Formalización

Todos los perros son buenos	→	p
Fido es un perro	→	q
Fido es bueno	→	r

Las proposiciones no permiten hablar de individuos ni relacionarlos entre sí

Lógica de predicados

- Añade expresividad a lógica proposicional
  - Mismo conjunto de conectivas
  - Añade predicados, constantes, funciones, variables y cuantificadores

Ejemplo:

Todos los perros son buenos	$\forall X(p(X) \to b(X))$
Fido es un perro	$p(j)$
Fido es bueno	$b(j)$

L1. Contenidos

- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas Sintácticas
  - Formalización
  - Semántica
    - Interpretación
    - Reglas Semánticas
    - Evaluación
  - Clasificación de Fórmulas y Equivalencias Lógicas
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Resolución General
    - Forma Normal de Skolem
    - Sustituciones y Unificación
    - Algoritmo de Resolución
  - Deducción Natural
- Propiedades

L1. Sintaxis. Alfabeto

- ***Constantes:*** Objetos de los que se quiere decir algo. (a, b, c,…)
  - Ejemplos: Juan, Asturias, 2, …
- ***Variables:*** Representan objetos de forma abstracta
  - Ejemplos: X, Y, …
- ***Funciones:*** Permiten referirse a objetos indirectamente. (f, g,…)
  - Ejemplos: padreDe, sumaDe,…
- ***Predicados:*** Expresan relaciones y propiedades. (p, q, r, …)
  - Ejemplos: ViveEn, EsMayorQue, EsProfesor, EsBueno…
- ***Conectivas:*** $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- ***Cuantificadores:*** Indican cómo interpretar las variables

  Universal $\forall$X or (**AX**)

  Existencial $\exists$X or (**EX**)

- ***Símbolos auxiliares:*** **{**, **}**, **(**,**)** ,**[**, **]**
- ***Aridad*** = Nº de argumentos de funciones/predicados

L1. Sintaxis. Reglas Sintácticas

- ***Término:*** Constante, variable o función de aridad N con N términos como argumento
  - Ejemplos: Juan, X, sumaDe(2,2), sumaDe(3,sumaDe(2,2))
- ***Fórmula atómica:*** Un único predicado de aridad N $\geq$ 0 con N términos como argumentos
  - Ejemplos: q(X,Y), viveEn(Juan, X), p, **V**, **F**
- ***Literal:*** una fórmula atómica o su negación
  - Ejemplos: q(X,Y), $\neg$q(X,Y)

L1. Sintaxis. Reglas Sintácticas

- ***Fórmula***: secuencia de fórmulas atómicas, conectivas, cuantificadores, y paréntesis si es necesario
  - Ejemplo: $\forall X\ \forall Y\ p(a,X) \land \neg q(Y,Z) \rightarrow r(f(X),Y, Z)$

Jerarquía de Conectivas y Cuantificadores:

Entre conectivas de igual nivel, tiene prioridad la que se encuentre más a la izquierda en la fórmula

En caso de duda, mejor poner paréntesis

$\neg$, $\forall$, $\exists$	+
$\land$	
$\lor$	
$\rightarrow$	
$\leftrightarrow$	-

L1. Sintaxis. Fórmulas bien formadas

- **LPred** = Fórmulas bien formadas en lógica de predicados

Definición

Las fórmulas atómicas $\in$ **LPred**

Si G y H $\in$ **Lpred** entonces:

(G) $\in$ **LPred**

$\neg$G $\in$ **LPred**

G$\wedge$H $\in$ **LPred**

G$\vee$H $\in$ **LPred**

G$\rightarrow$H $\in$ **LPred**

G$\leftrightarrow$H $\in$ **LPred**

Si G $\in$ **LPred** y X es una variable, entonces:

$\forall$XG $\in$ **LPred**

$\exists$XG$\in$ **LPred**

L1. Sintaxis. Fórmulas bien formadas

- $(p(X) \longrightarrow (q(f(X,Y)) \longrightarrow p(Y)))$ es una fórmula
  - f(X,Y) es un término
    - La evaluación de f sobre (X,Y) produce una variable o una constante
    - **Su evaluación <u>no</u> produce un valor de verdad**
  - q(f(X,Y)) es una fórmula atómica o predicado.
    - **Su evaluación produce un valor de verdad**

L1. Sintaxis. Fórmulas cerradas

- Variable libre = no está afectada por un cuantificador
- Variable ligada = sí está afectada por un cuantificador

$\forall X \exists Y(p(X,Y) \wedge q(X,Z) \rightarrow r(X))$

Z es una variable libre
X, Y son variables ligadas

En una expresión del tipo **$\forall$XF**, **$\exists$XF**, la variable **X** es conocida como ***variable de cuantificación*** y la fórmula F como ***ámbito*** o ***recorrido*** de la cuantificación.

Así en el ejemplo las variables X e Y son variables cuantificadas
Ámbito de $\forall X$: $\exists Y(p(X,Y) \wedge q(X,Z) \rightarrow r(X))$
Ámbito de $\exists Y$: $(p(X,Y) \wedge q(X,Z) \rightarrow r(X))$

Sentencia, o fórmula cerrada = fórmula que no contiene variables libres

Ejemplo

Nota: cuando una variable está en el ámbito de varios cuantificadores diferentes para ella, sólo la cuantifica el más próximo

$\forall X \underbrace{p(X, f(X,Y))}_{\text{Ámbito}}$

X pertenece al ámbito del cuantificador y está ligada
Y pertenece al ámbito del cuantificador pero es libre

$\forall$X [$\exists$Y p(X,Y) $\rightarrow$ ¬$\exists$X q(X) $\wedge$ r(X,f(X))]. *¿Alcance de cada uno de los cuantificadores?*

- *De $\forall$X es [$\exists$Y p(X,Y) $\rightarrow$ ~$\exists$X q(X) $\wedge$ r(X,f(X))]*
- *De $\exists$Y es p(X,Y)*
- *De $\exists$X es q(X)*

Todas las variables de esta fórmula están afectadas por al menos un cuantificador, luego todas las apariciones son acotadas, luego estamos hablando de una fórmula cerrada

$\forall$X $\exists$Y p(X,Y)$\rightarrow$ ¬$\exists$X q(X) $\wedge$ r(X,f(X)) *. ¿Alcance de cada uno de los cuantificadores?*

- *De $\forall$X es $\exists$Y p(X,Y)   De $\exists$Y es p(X,Y)   y   De $\exists$X es q(X)*

En este caso la variable Y está acotada, mientras que la X aparece dos veces de forma acotada, $\forall$X $\exists$Y p(X,Y) y ~$\exists$X q(X), y otras dos libre r(X,f(X))

Ejercicio

- ¿Cuál de las siguientes fórmulas son cerradas?

$$\forall X \exists Y (p(X,Y) \wedge q(X,Z) \rightarrow r(f(X)))$$

$$\forall X \exists Y (p(X,Y) \rightarrow q(X,a,Y))$$

$$\forall X (\exists Y p(X,Y) \rightarrow q(X,Y))$$

L1. Contenidos

- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas Sintácticas
  - Formalización
  - Semántica
    - Interpretación
    - Reglas Semánticas
    - Evaluación
  - Clasificación de Fórmulas y Equivalencias Lógicas
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Resolución General
    - Forma Normal de Skolem
    - Sustituciones y Unificación
    - Algoritmo de Resolución
  - Deducción Natural
- Propiedades

Formalización

- Representación en el lenguaje de la lógica el conocimiento expresado en lenguaje natural
  - Elegir constantes, funciones y predicados
  - Definir las sentencias

Predicados:
- EsCiervo(X): X es ciervo
- ViveEn(X,Y): X vive en Y
- EsBueno(X): X es bueno
- EsListo(X): X es listo

Constantes:
- Asturias: Asturias

Ejemplos

Hay un ciervo que vive en Asturias	Hay un X tal que X es ciervo y X vive en Asturias
Todos los ciervos son buenos	Para todo X, si X es ciervo, X es bueno
Todos los ciervos que viven en Asturias son listos	Para todo X, si X es ciervo y X vive en Asturias, X es listo

Formalización

Ejemplos

Hay un X tal que X es ciervo y X vive en Asturias	$\exists X(EsCiervo(X) \wedge ViveEn(X,asturias))$
Para todo X, si X es ciervo, X es bueno	$\forall X(EsCiervo(X) \rightarrow EsBueno(X))$
Para todo X, si X es ciervo y X vive en Asturias, X es listo	$\forall X(EsCiervo(X) \wedge ViveEn(X,asturias) \rightarrow EsListo(X))$

- NOTA
- El resultado de formalizar una frase debe ser una fórmula cerrada

Dos enunciados distintos pueden dar lugar a la misma fórmula

"El cuadrado de todo número impar mayor que cero es múltiplo de 9 y 2 es mayor que cero"

Símbolos
a=2
$f(X)=X^2$
p(X)="*X es impar*" q(X)="*X > 0*" r(X)="*X es múltiplo de 9*"

"Todas las madres de los estudiantes de informática que juegan al póker son tercas, además, Juan estudia informática"

Símbolos
a=Juan
f(X)=madre de X
p(X)="X juega al póker" q(X)="X estudia informática" r(X)="X es terco"

Fórmula: $\forall X(p(X) \wedge q(X) \rightarrow r(f(X))) \wedge q(a)$

Cuantificadores

- Universal
  - Frecuentemente se utilizan con “implicaciones” para generar “reglas”:
    - “Todos los estudiantes son elegantes”: $\forall X\ (estudiante(X) \rightarrow elegante(X))$
  - Raramente se utilizan para hacer afirmaciones globales sobre cada individuo en el mundo:
    - “Todos en el mundo son estudiantes y elegantes: $\forall X\ (estudiante(X) \wedge elegante(X))$
  - Intercambiar el orden de los cuantificadores universales no cambia el significado:
    - $\forall X\ \forall Y\ p(X,Y) \leftrightarrow \forall Y\ \forall X\ p(X,Y)$
- Existencial
  - Normalmente se emplean con **“y”** para especificar una lista de propiedades sobre un individuo:
    - “Hay un estudiante que es elegante”: $\exists X\ (estudiante(X) \wedge elegante(X))$
  - Intercambiar el orden de los cuantificadores existenciales no cambia el significado:
    - $\exists X\ \exists Y\ p(X,Y) \leftrightarrow \exists Y\ \exists X\ p(X,Y)$
- Intercambiar el orden de Universales y Existenciales puede cambiar el significado:
    - “A todo el mundo le gusta alguien”: $\forall X\ \exists Y\ gustarA(X,Y)$
    - “Alguien le gusta a todo el mundo”: $\exists Y\ \forall X\ gustarA(X,Y)$

Relaciones entre cuantificadores

- Formas de expresar:
  - Ningún X verifica la propiedad P
    - Afirmar que todos no la verifican: $\forall X \neg p(X)$
    - Negar que exista uno que la verifique: $\neg\exists X\ p(X)$
  - Algún X no verifica la propiedad P
    - Afirmar que existe alguno que no la verifica: $\exists X \neg p(X)$
    - Negar que todos la verifiquen: $\neg\forall X\ p(X)$

Formalización con cuantificadores: Ejercicio

Modelar las siguientes expresiones:

1. *Todos los **p** son **q***

   $\forall X\ (p(X) \rightarrow q(X))$

2. *Sólo los **p** son **q***

   $\forall X\ (q(X) \rightarrow p(X))$

3. *Ningún **p** es **q***

   $\forall X\ (p(X) \rightarrow \neg q(X))$ **o** $\neg \exists X\ (p(X) \wedge q(X))$

4. *Algunos **p** son **q***

   $\exists X\ (p(X) \wedge q(X))$

Ejercicio

Formalizar las siguientes frases:

1. *Todos los bárbaros beben cerveza*
   $\forall X\ (B(X) \rightarrow C(X))$
2. *Algunos bárbaros beben whisky*
   $\exists X\ (B(X) \wedge W(X))$
3. *Existen no bárbaros que beben cerveza o whisky*
   $\exists X\ (\neg B(X) \wedge (C(X) \vee W(X)))$

B(X) = X es un bárbaro
W(X) = X bebe whisky
C(X) = X bebe cerveza

1. *Todos los que padecen gripe tienen fiebre*
   $\forall X\ (G(X) \rightarrow F(X))$
2. *Si tu cónyuge tiene fiebre entonces tú también*
   $\forall X\ [\exists Y\ (C(X, Y) \wedge F(Y)) \rightarrow F(X)]$
3. *Existe una pareja tal que si son cónyuges y al menos uno padece gripe entonces al menos uno tiene fiebre*
   $\exists X\ \exists Y\ [(C(X, Y) \wedge (G(X) \vee G(Y))) \rightarrow (F(X) \vee F(Y))]$

G(X) = X padece gripe
F(X) = X tiene fiebre
C(X,Y) = X e Y son cónyuges

Ejercicio

Formalizar las siguientes frases:

1. *Hay algún perro que no es amigo de ningún humano.*
2. *Los perros son amigos de los humanos.*
3. *Los perros sólo son amigos de los humanos.*

P(X) = X es un perro
A(X,Y) = X es amigo de Y
H(X) = X es un humano

1. *Si U es un dragón, entonces V es un piojo y V acosa a U.*
2. *Todo dragón es acosado por el piojo V.*
3. *Si U es un dragón, entonces algún piojo acosa a U.*
4. *Todo piojo acosa a algún dragón..*
5. *Algunos piojos acosan a todos los dragones.*
6. *Algunos dragones son acosados por todos los piojos.*
7. *Todo dragón es acosado por algún piojo.*

D(X) = X es un dragón
P(X) = X es un piojo
A(X,Y) = X acosa a Y

Ejercicio

Formalizar las siguientes frases:

1. *Hay algún perro que no es amigo de ningún humano.*

   $$\exists X\, [P(X) \wedge \neg\exists Y\, (H(Y) \wedge A(X,Y))]$$

2. *Los perros son amigos de los humanos.*

   $$\forall X\, [P(X) \longrightarrow \forall Y\, (H(Y) \longrightarrow A(X,Y))]$$

3. *Los perros son amigos solo de los humanos.*

   $$\forall X\, [P(X) \longrightarrow \forall Y\, (A(X,Y) \longrightarrow H(Y))]$$

   $$\forall X\, \forall Y\, [P(X) \wedge A(X,Y) \longrightarrow H(Y)]$$

P(X) = X es un perro
A(X,Y) = X es amigo de Y
H(X) = X es un humano

Ejercicio

Formalizar las siguientes frases:

1. *Si U es un dragón, entonces V es un piojo y V acosa a U.*
   $\mathbf{D(U) \longrightarrow P(V) \land A(V,U)}$
2. *Todo dragón es acosado por el piojo V.*
   $\mathbf{\forall X\ [D(X) \longrightarrow P(V) \land A(V,X)]}$
3. *Si U es un dragón, entonces algún piojo acosa a U.*
   $\mathbf{D(U) \longrightarrow \exists Y\ (P(Y) \land A(Y,U))}$
4. *Todo piojo acosa a algún dragón.*
   $\mathbf{\forall Y\ [P(Y) \longrightarrow \exists X\ (D(X) \land A(Y,X))]}$
5. *Algunos piojos acosan a todos los dragones.*
   $\mathbf{\exists Y\ [P(Y) \land \forall X\ (D(X) \longrightarrow A(Y,X))]}$
6. *Algunos dragones son acosados por todos los piojos.*
   $\mathbf{\exists X\ [D(X) \land \forall Y\ (P(Y) \longrightarrow A(Y,X))]}$
7. *Todo dragón es acosado por algún piojo.*
   $\mathbf{\forall X\ [D(X) \longrightarrow \exists Y (P(Y) \land A(Y,X))]}$

D(X) = X es un dragón
P(X) = X es un piojo
A(X,Y) = X acosa a Y

Ejercicio

- Formalizar el siguiente razonamiento:

1. *Sólo los grandes músicos tocan magistralmente una pieza de música sin ensayar*
2. *Para ser un gran músico hace falta matricularse de algún curso de música en el conservatorio*
3. *Pedro no se ha matriculado de algún curso de música en el conservatorio. Tampoco ensaya nunca.*
4. *Por tanto Pedro no tocará magistralmente el Himno de la Alegría*

tocar_pieza (X,Y) = X toca la pieza Y
ensaya(X) = X ensaya
gran_músico(X) = X es un gran músico
matricula(X,Y)= X se matricula del curso de música Y en el conservatorio
Constantes: Pedro, HimnoAlegría

Ejercicio

Formalizar el siguiente razonamiento:

1. *Sólo los grandes músicos tocan magistralmente una pieza de música sin ensayar*

   $$\forall X\ [\exists\ Y\ (\mathbf{tocar\_pieza}(X,Y) \wedge \neg \mathbf{ensaya}(X)\ ) \longrightarrow \mathbf{gran\_músico}(X)]$$

2. *Para ser un gran músico hace falta matricularse de algún curso de música en el conservatorio*

   $$\forall X\ [\mathbf{gran\_músico}\ (X) \longrightarrow \exists Y\ \mathbf{matricula}(X,Y)]$$

3. *Pedro no se ha matriculado de algún curso de música en el conservatorio. Tampoco ensaya nunca.*

   $$\neg \exists X\ \mathbf{matricula}(\mathbf{Pedro},\ X) \wedge \neg \mathbf{ensaya}(\mathbf{Pedro})$$

4. *Por tanto Pedro no tocará magistralmente el Himno de la Alegría*

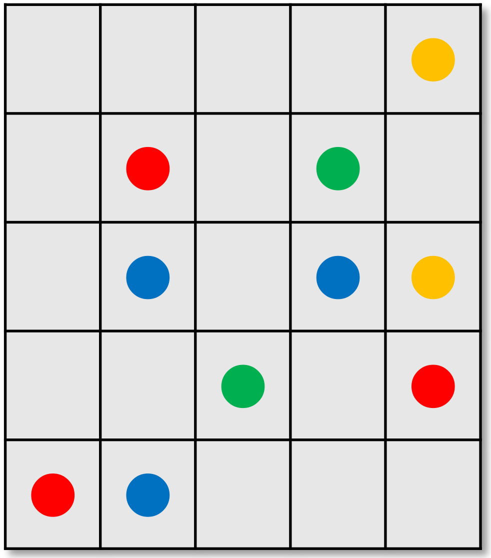
   $$\neg \mathbf{tocar\_pieza}\ (\mathbf{Pedro},\ \mathbf{HimnoAlegría}))$$

Ejercicio

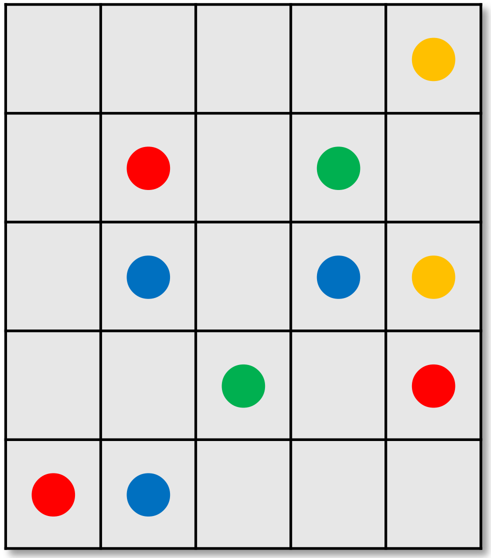
Formalizar las siguientes frases:

1. *Alguna pieza verde está al lado de todas las piezas azules*
2. *Ninguna pieza verde está al lado de una pieza roja*
3. *Todas las piezas naranjas que están al lado de una pieza roja, están al lado de una pieza azul*

V(X) = X es una pieza verde
L(X,Y) = X está al lado de Y
A(X) = X es una pieza azul
R(X) = X es una pieza roja
N(X) = X es una pieza naranja



Solución



Formalizar las siguientes frases:

Alguna pieza verde está al lado de todas las piezas azules

$$\exists X(V(X)\wedge\forall Y(A(Y)\rightarrow L(X,Y)))$$

Ninguna pieza verde está al lado de una pieza roja

$$\neg\exists X(V(X)\wedge\exists Y(R(Y)\wedge L(X,Y)))$$

$$\forall X\ (V(X)\ \rightarrow\forall Y\ (L(X,Y)\rightarrow\neg R(Y)))$$

$$\forall X\forall Y(V(X)\wedge R(Y)\rightarrow\neg L(X,Y))$$

Todas las piezas naranjas que están al lado de una pieza roja, están al lado de una pieza azul

$$\forall X\ (N(X)\wedge\exists Y(R(Y)\wedge L(X,Y))\rightarrow\exists Z(A(Z)\wedge L(X,Z)))$$

$$\forall X\forall Y(N(X)\wedge R(Y)\wedge L(X,Y)\rightarrow\exists Z(A(Z)\wedge L(X,Z)))$$

L1. Contenidos

- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas Sintácticas
  - Formalización
  - Semántica
    - Interpretación
    - Reglas Semánticas
    - Evaluación
  - Clasificación de Fórmulas y Equivalencias Lógicas
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Resolución General
    - Forma Normal de Skolem
    - Sustituciones y Unificación
    - Algoritmo de Resolución
  - Deducción Natural
- Propiedades

L0. Semántica

- Asocia un **significado** a las fórmulas en L. Predicados
  - En lógica clásica sólo hay **dos significados posibles**: los valores de verdad **Verdadero (V)** o **Falso (F).** Las fórmulas son "Verdaderas" o "Falsas" en cada mundo/configuración posible
  - **El significado de la fórmula en una situación** depende del contexto o Interpretación (la definiremos formalmente más adelante) y de las Reglas Semánticas. Es independiente de cualquier otro significado o interpretación de la vida real.
- **Evaluación** de fórmulas
  - Mecanismo que permite asignar un valor de verdad (**V** / **F**) a una fórmula, a partir de una **Interpretación** y de las **Reglas semánticas** de las conectivas y cuantificadores.

Semántica

Ejemplo

- **EsIgual(2, 3):** 2 es igual a 3, este predicado es falso
- **En el contexto de la familia en la que Pedro es hermano de Juan**
  - **Hermano (Pedro, Juan) :** Pedro es hermano de Juan, este predicado es Verdadero
  - **hermano (Pedro):** se refiere indirectamente a la constante Juan, es una función y no es ni verdadero ni falso
  - **Hermano(Pedro, hermano(Pedro)):** este predicado es verdad

Semántica: Interpretación

- El **valor** de una **fórmula** (verdadero o falso) depende de la **interpretación**
  - Asignación a cada componente de la fórmula

Definición: Interpretación I de una fórmula:

Un conjunto no vacío D llamado dominio
A cada constante c un valor $c^I \in D$
A cada función f de aridad n, una aplicación $f^I : D^n \rightarrow D$
A cada predicado P de aridad n, una aplicación $P^I : D^n \rightarrow$ **{V,F}**

Ejemplo: dos posibles interpretaciones para una misma fórmula

Fórmula: $\forall X(p(X) \wedge q(X) \rightarrow r(f(X))) \wedge q(a)$

Interpretación I
Dominio: Números naturales
$a^I=2$
$f^I(X)=X^2$
$p^I(X)$=“*X es impar*” $q^I(X)$=“*X* > 0” $r^I(X)$=“*X es múltiplo de* 9”

Interpretación J
Dominio: Personas
a^J=Juan
$f^J(X)$=madre de X
$p^J(X)$=“X juega al póker” $q^J(X)$=“X estudia informática” $r^J(X)$=“X es terco”

Una misma fórmula puede ser Verdadera bajo una interpretación y Falsa bajo otra

Pregunta

- ¿Cuántas interpretaciones puede tener una fórmula en lógica de predicados?

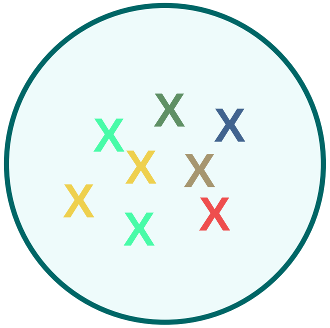
En lógica de predicados hay infinitas interpretaciones

El método de tablas de verdad no puede utilizarse

Semántica de los Cuantificadores

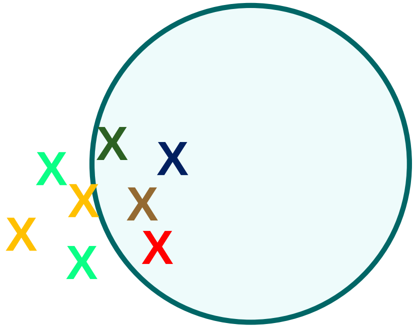
- Universal $\forall$**x**

  Para **TODO** X se cumple que ….



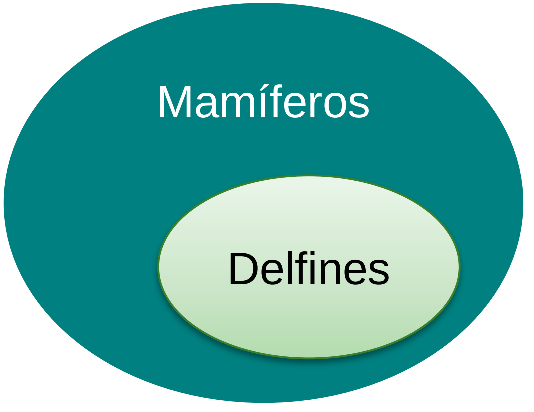
- Existencial $\exists$**x**

  Existe **AL MENOS UN** X tal que ….



Semántica de los Cuantificadores

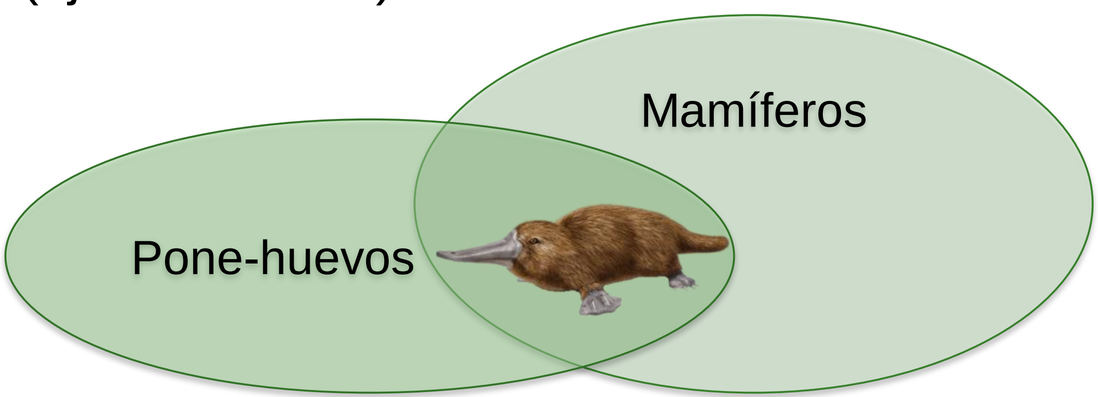
- Cuantificación **Universal**
  - $\forall X p(X)$ significa que **p** se cumple para **todos** los valores de **X** en el dominio asociado con la variable
  - Ejemplo: Todos los delfines son mamíferos



$\forall$X (delfín(X) $\rightarrow$ mamífero(X))

Semántica de los Cuantificadores

- Cuantificación **Existencial**
  - (∃ X)p(X) significa que **p** se cumple para **algún** valor de **X** en el dominio asociado con la variable
  - Algunos mamíferos ponen huevos
  - Permite hacer una afirmación sobre algún objeto sin nombrarlo (ej: ornitorrinco)



$\exists X$ (pone-huevos(X) $\wedge$ mamífero(X))

Reglas semánticas. Valor de una fórmula $\mathcal{F}$ en una interpretación ($\mathcal{F}^I$)

Si $\mathcal{F}$ = fórmula atómica $P(t_1,\ldots t_n)$, $\mathcal{F}^I = P^I(t^I_1,\ldots t^I_n)$ donde t^I_i es el resultado de aplicar la interpretación I al término t_i

Si $\mathcal{F} = G \wedge H$, $\mathcal{F}^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I = \mathbf{V} \text{ y } H^I = \mathbf{V} \\ \mathbf{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Si $\mathcal{F} = G \vee H$, $\mathcal{F}^I = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{si } G^I = \mathbf{F} \text{ y } H^I = \mathbf{F} \\ \mathbf{V} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Si $\mathcal{F} = G \rightarrow H$, $\mathcal{F}^I = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{si } G^I = \mathbf{V} \text{ y } H^I = \mathbf{F} \\ \mathbf{V} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Si $\mathcal{F} = G \leftrightarrow H$, $\mathcal{F}^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I = H^I \\ \mathbf{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Si $\mathcal{F} = \neg G$, $\mathcal{F}^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I = \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \text{si } G^I = \mathbf{V} \end{cases}$

Si $\boldsymbol{\mathcal{F} = \forall x G(x)}$, $\mathcal{F}^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I(d) = \mathbf{V} \text{ para todo } d \in D \\ \mathbf{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Si $\boldsymbol{\mathcal{F} = \exists x G(x)}$, $\mathcal{F}^I = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{si } G^I(d) = \mathbf{V} \text{ para algún } d \in D \\ \mathbf{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Ejercicio. Evaluación de Fórmulas

- Evaluar las fórmulas bajo la interpretación $\mathcal{I}$

$\mathcal{F}_1$: $\forall X \forall Y\ p(X,Y)$

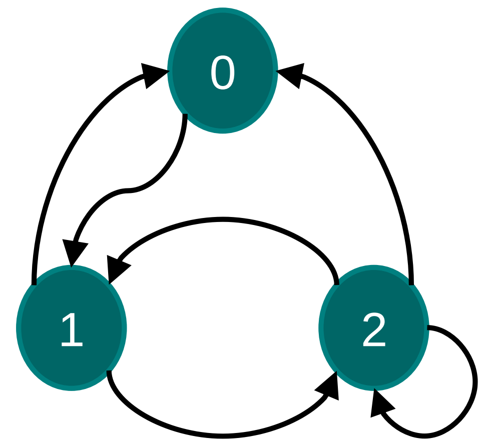
$\mathcal{F}_2$: $\exists X \exists Y\ p(X,Y)$

$\mathcal{F}_3$: $\forall X \exists Y\ p(X,Y)$

$\mathcal{F}_4$: $\exists X \forall Y\ p(X,Y)$

$\mathcal{F}_5$: $\exists Y \forall X\ p(X,Y)$

$\mathcal{F}_6$: $\forall Y \exists X\ p(X,Y)$



$\mathcal{I}$: Dominio D ={0,1,2}

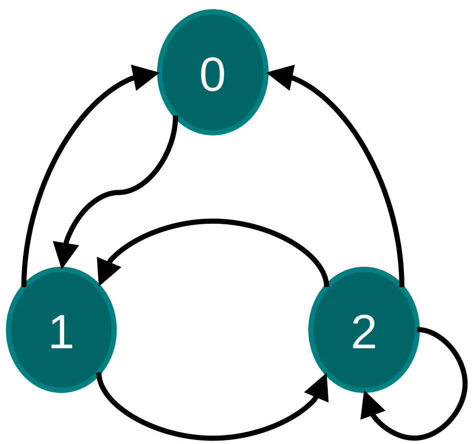
$p^{\mathcal{I}}(X,Y)$="X se relaciona con Y según el grafo"

Solución

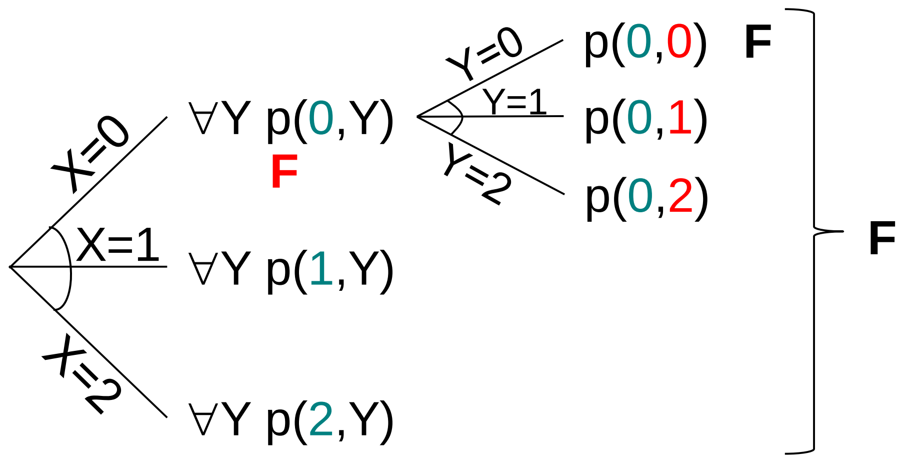
- Evaluar $\mathcal{F}_1$ bajo la interpretación I

$\mathcal{F}_1$: $\forall X \forall Y\ p(X,Y)$

I: Dominio D ={0,1,2}
$p^I(X,Y)$="X se relaciona con Y"



Árbol Y/O



Solución: $\mathcal{F}_1{}^I$ = F

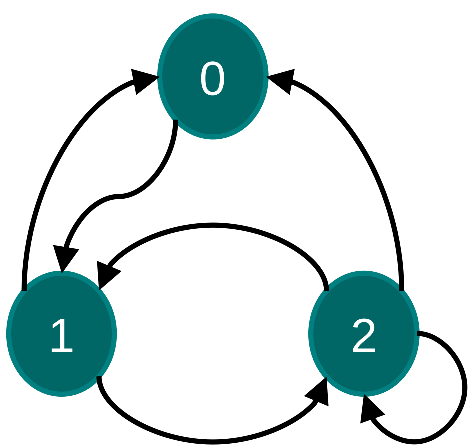
Solución

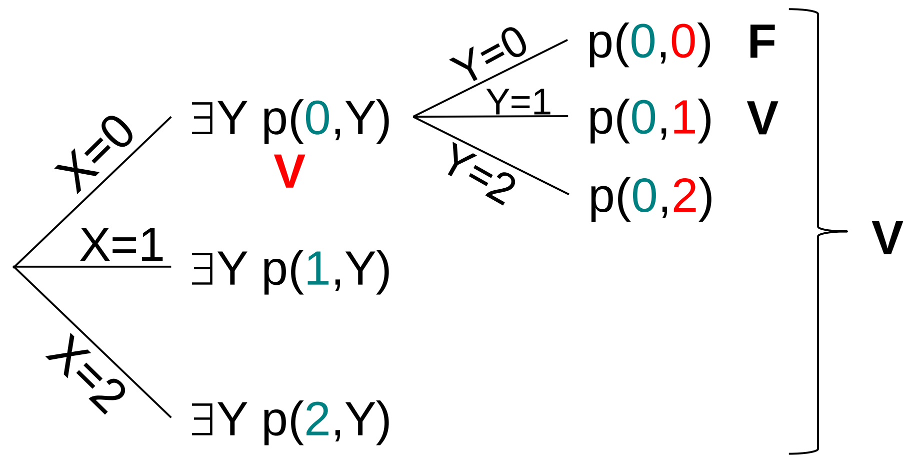
- Evaluar $\mathcal{F}_2$ bajo la interpretación I

$\mathcal{F}_2$: $\exists X \exists Y\ p(X,Y)$

I : Dominio D ={0,1,2}
$p^I(X,Y)$="X se relaciona con Y"

Árbol Y/O





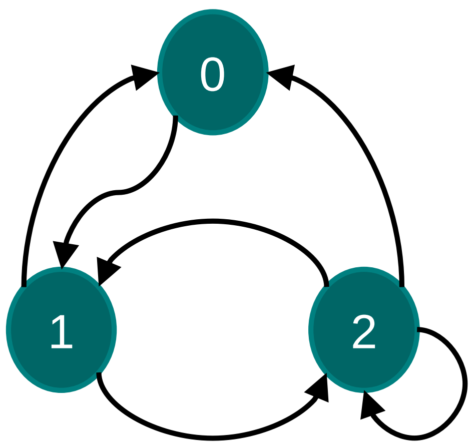
Solución: $\mathcal{F}_2^I$ = V

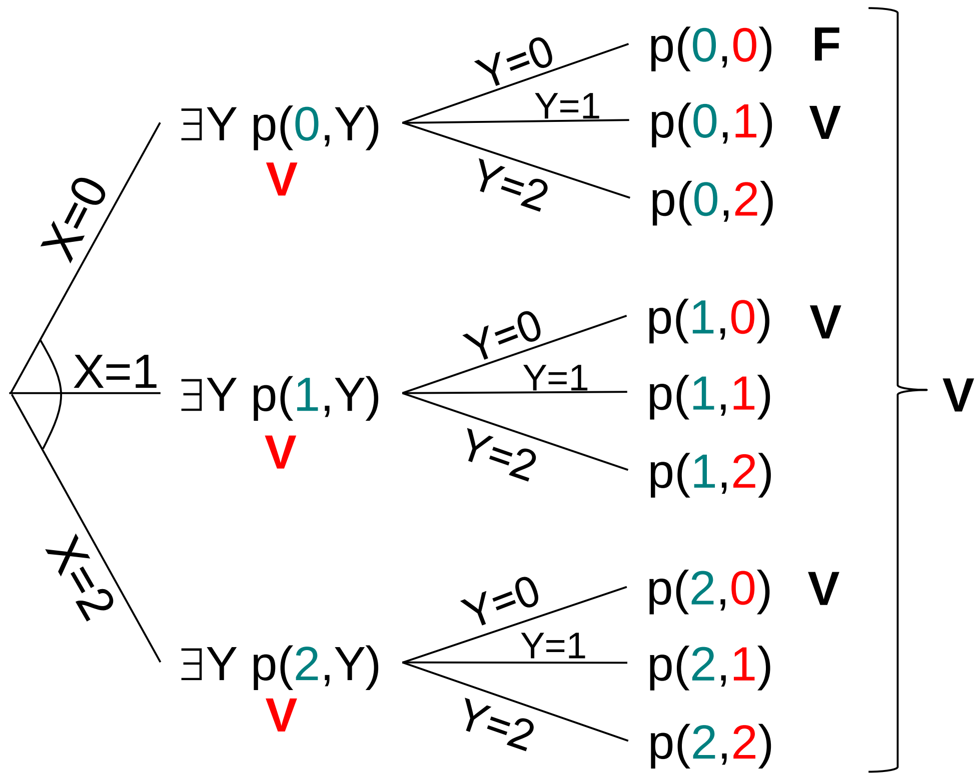
Solución

- Evaluar $\mathcal{F}_3$ bajo la interpretación I

$\mathcal{F}_3$: $\forall X \exists Y\ p(X,Y)$

I: Dominio D ={0,1,2}
$p^I(X,Y)$="X se relaciona con Y"





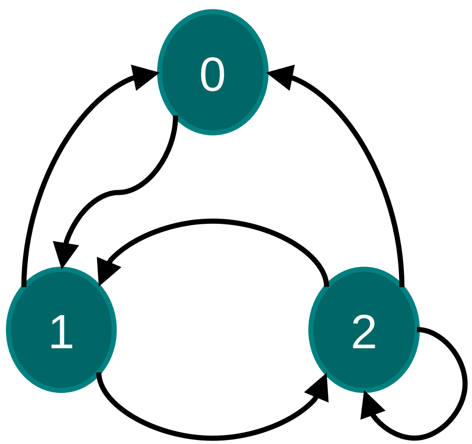
Solución: $\mathcal{F}_3^I$ = V

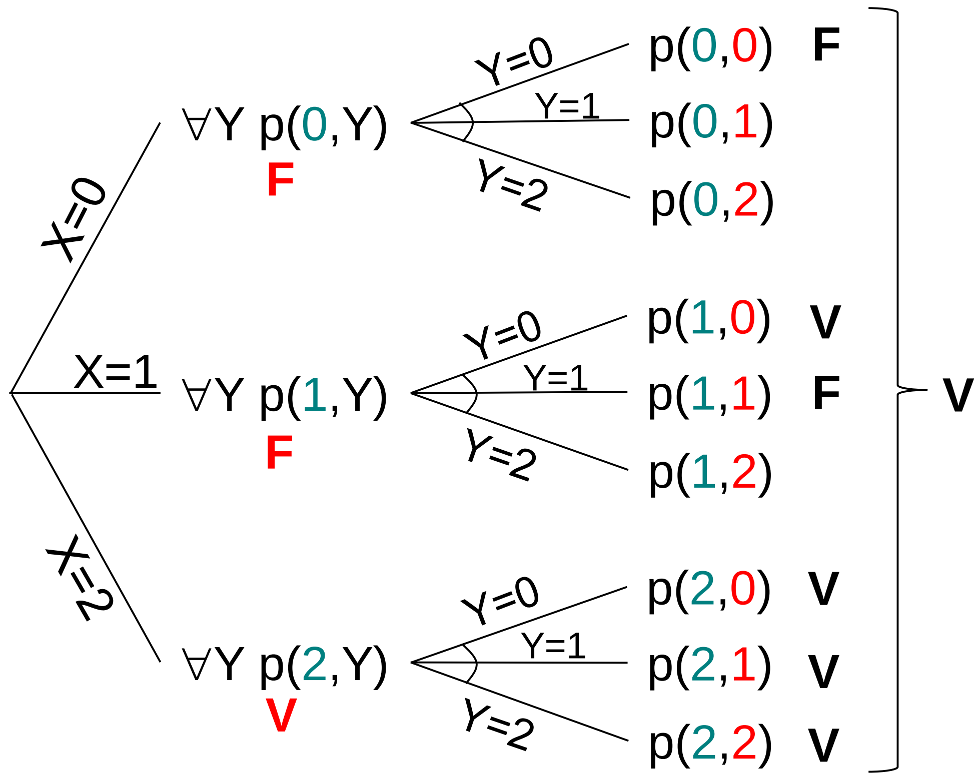
Solución

- Evaluar $\mathcal{F}_4$ bajo la interpretación I

$\mathcal{F}_4$: $\exists X \forall Y\ p(X,Y)$

I : Dominio D ={0,1,2}
p^I(X,Y)="X se relaciona con Y"





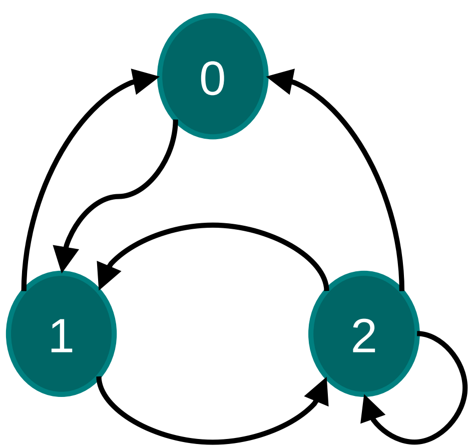
Solución: $\mathcal{F}_4{}^I$ = V

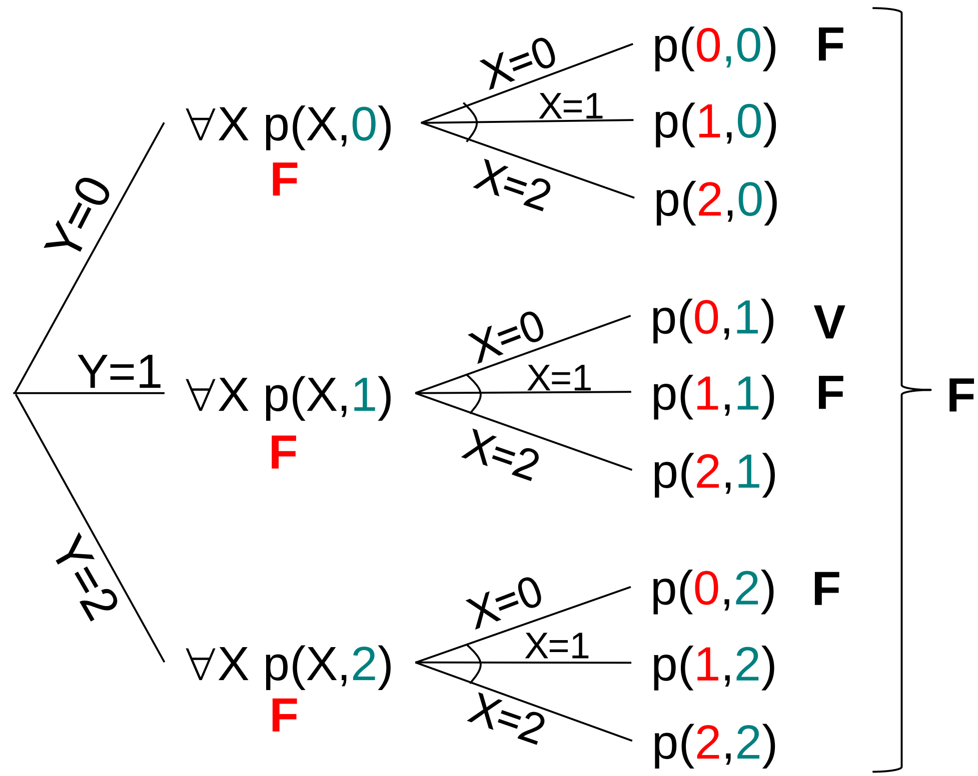
Solución

- Evaluar $\mathcal{F}_5$ bajo la interpretación I

$\mathcal{F}_5$: $\exists Y \forall X\ p(X,Y)$

I: Dominio D ={0,1,2}
p^I(X,Y)="X se relaciona con Y"





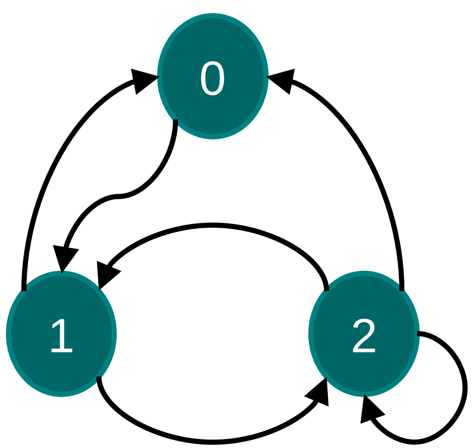
Solución: $\mathcal{F}_5^{\,I}$ = F

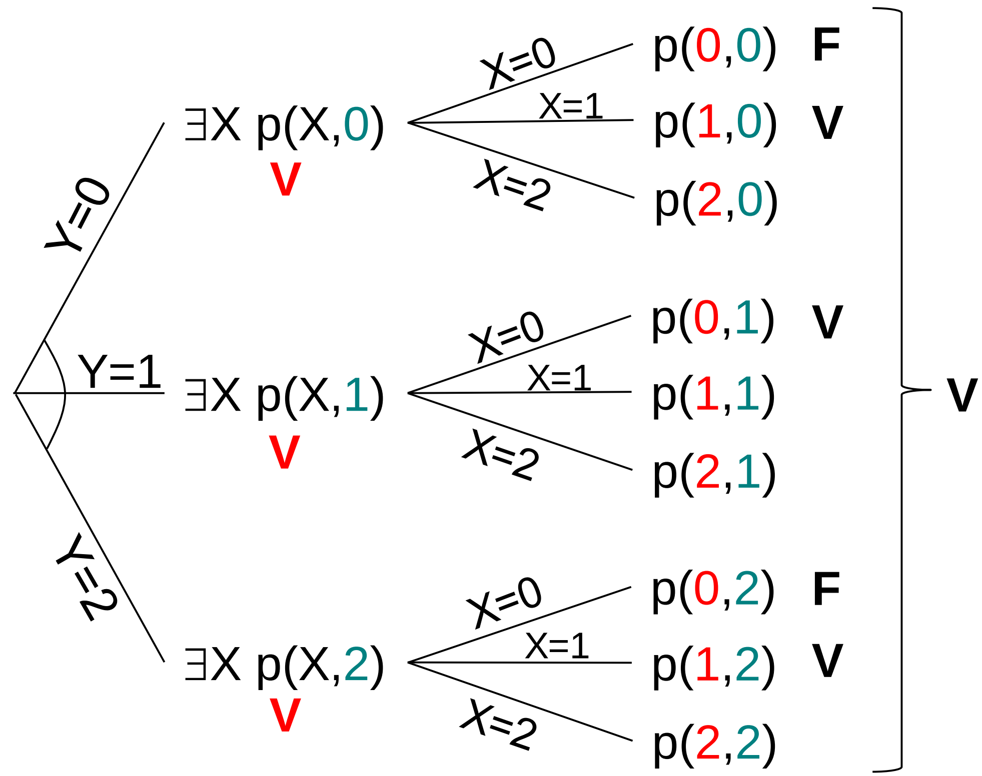
Solución

- Evaluar $\mathcal{F}_6$ bajo la interpretación I

$\mathcal{F}_6$: $\forall Y \exists X\ p(X,Y)$

I: Dominio D ={0,1,2}
p^I(X,Y)="X se relaciona con Y"





Solución: $\mathcal{F}_6^{\,I}$ = V

Ejercicio

- Evaluar la fórmula $\mathcal{F}$ en la interpretación $\mathcal{I}$

$$\mathcal{F}: \ \forall X \exists Y(\ p(X,Y) \wedge q(f(X)) \rightarrow \neg q(g(a,b,f(Y)))\ )$$

$\mathcal{I}$:

Dominio D ={1,2,3}

$a^{\mathcal{I}}=1,\ b^{\mathcal{I}}=3$

$f^{\mathcal{I}}(X)=4 - X$

$g^{\mathcal{I}}(X,Y,Z)= ((X + Y + Z) \bmod 3) + 1$

$p^{\mathcal{I}}(X,Y)=$"$X \leq Y$"

$q^{\mathcal{I}}(X)=$" X == 2 || X == 3 "

Ejercicio

$\mathcal{F}$: $\forall X \exists Y (\ p(X,Y) \wedge q(f(X)) \rightarrow \neg q(g(a,b,f(Y)))\ )$

$\mathcal{I}$: Dominio D ={1,2,3}

$a^{\mathcal{I}}=1$, $b^{\mathcal{I}}=3$; $f^{\mathcal{I}}(X)=4 - X$;

$g^{\mathcal{I}}(X,Y,Z)= ((X + Y + Z) \bmod 3) + 1$;

$p^{\mathcal{I}}(X,Y)=$"$X \leq Y$"; $q^{\mathcal{I}}(X)=$" X == 2 || X == 3 "

X=1: $\exists Y (\ldots)$ **V**

- Y=1: $p(1,1) \wedge q(f(1)) \rightarrow \neg q(g(1,3,f(1)))$ **F**
- Y=2: $p(1,2) \wedge q(f(1)) \rightarrow \neg q(g(1,3,f(2)))$ **V**

X=2: $\exists Y (\ldots)$ **V**

- Y=1: $p(2,1) \wedge q(f(2)) \rightarrow \neg q(g(1,3,f(1)))$ **V**

X=3: $\exists Y (\ldots)$ **V**

- Y=1: $p(3,1) \wedge q(f(3)) \rightarrow \neg q(g(1,3,f(1)))$ **V**

V

Solución: $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ = V

Ejercicio

- Evaluar las fórmulas bajo la interpretación $\mathcal{I}$

$\mathcal{F}_1$: $\forall X \exists Y (p(X,Y) \rightarrow q(X))$

$\mathcal{F}_2$: $\forall X (\exists Y p(X,Y) \rightarrow q(X))$

$\mathcal{I}$: Dominio D ={1,2}

$p^{\mathcal{I}}(X,Y)$=“X == Y”

$q^{\mathcal{I}}(X)$=“X es impar”

Ejercicio

- Evaluar las fórmulas bajo la interpretación I

$\mathcal{F}_1: \forall X \exists Y (p(X,Y) \rightarrow q(X))$

I: Dominio D ={1,2}
$p^I(X,Y)$=“X == Y”
$q^I(X)$=“X es impar”

Solución: $\mathcal{F}_1^{\,I}$ = V

X=1: $\exists Y$ (…) **V**
- Y=1: $(p(1,1) \rightarrow q(1))$ **V**

X=2: $\exists Y$ (…) **V**
- Y=1: $(p(2,1) \rightarrow q(2))$ **V**

V

$\mathcal{F}_2: \forall X (\exists Y p(X,Y) \rightarrow q(X))$

X=1: $\exists Y p(1,Y)^{(1)} \rightarrow q(1)$ **V**
- $\exists Y p(1,Y)^{(1)}$: **V**

X=2: $\exists Y p(2,Y)^{(2)} \rightarrow q(2)$ **F**
- $\exists Y p(2,Y)^{(2)}$: **V**

F

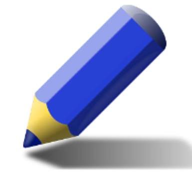
(1) $\exists Y p(1,Y)$
- Y=1: $p(1,1)$ **V**

(2) $\exists Y p(2,Y)$
- Y=1: $p(2,1)$ **F**
- Y=2: $p(2,2)$ **V**

V

Solución: $\mathcal{F}_2^{\,I}$ = F

Ejercicio



- Evaluar $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ y $\mathcal{F}_4$ bajo la interpretación $\mathcal{I}$

$\mathcal{F}_1$: $\forall X \exists Y(\ p(X,Y) \wedge q(f(X))\ )$

$\mathcal{F}_2$: $\exists Y \forall X(\ p(X,Y) \wedge q(f(X))\ )$

$\mathcal{F}_3$: $\forall X \exists Y(\ p(X,Y) \rightarrow q(f(X))\ )$

$\mathcal{F}_4$: $\forall X(\ \exists Y p(X,Y) \rightarrow q(f(X))\ )$

$\mathcal{I}$: Dominio D ={1,2,3}

$f^{\mathcal{I}}(X)=4 - X$

$p^{\mathcal{I}}(X,Y)=$“$X \leq Y$”

$q^{\mathcal{I}}(X)=$“ X == 2 || X == 3 ”

Ejercicio

- Evaluar $\mathcal{F}_1$, bajo la interpretación $\mathcal{I}$

$\mathcal{F}_1$: $\forall X \exists Y(\ p(X,Y) \wedge q(f(X))\ )$

$\mathcal{I}$: Dominio D ={1,2,3}
$f^{\mathcal{I}}(X)=4 - X$
$p^{\mathcal{I}}(X,Y)=$“X $\leq$ Y”
$q^{\mathcal{I}}(X)=$“ X == 2 || X == 3 ”

X=1: $\exists Y(\ldots)$ **V**
- Y=1: $p(1,1) \wedge q(f(1))$ **V**

X=2: $\exists Y(\ldots)$ **V**
- Y=1: $p(2,1) \wedge q(f(2))$ **F**
- Y=2: $p(2,2) \wedge q(f(2))$ **V**

X=3: $\exists Y(\ldots)$ **F**
- Y=1: $p(3,1) \wedge q(f(3))$ **F**
- Y=2: $p(3,2) \wedge q(f(3))$ **F**
- Y=3: $p(3,3) \wedge q(f(3))$ **F**

F

Solución: $\mathcal{F}_1^{\mathcal{I}}$ = F

Ejercicio

- Evaluar $\mathcal{F}_2$ bajo la interpretación $\mathcal{I}$

$\mathcal{F}_2$: $\exists Y \forall X (\, p(X,Y) \wedge q(f(X)) \,)$

$\mathcal{I}$: Dominio D ={1,2,3}
$f^{\mathcal{I}}(X)=4 - X$
$p^{\mathcal{I}}(X,Y)=$"$X \leq Y$"
$q^{\mathcal{I}}(X)=$" X == 2 || X == 3 "

Y=1 → ∀X(…) F
- X=1: $p(1,1) \wedge q(f(1))$ **V**
- X=2: $p(2,1) \wedge q(f(2))$ **F**

Y=2 → ∀X(…) F
- X=1: $p(1,2) \wedge q(f(1))$ **V**
- X=2: $p(2,2) \wedge q(f(2))$ **V**
- X=3: $p(3,2) \wedge q(f(3))$ **F**

Y=3 → ∀X(…) F
- X=1: $p(1,3) \wedge q(f(1))$ **V**
- X=2: $p(2,3) \wedge q(f(2))$ **V**
- X=3: $p(3,3) \wedge q(f(3))$ **F**

→ **F**

Solución: $\mathcal{F}_2^{\mathcal{I}}$ = F

Ejercicio

- Evaluar $\mathcal{F}_3$ bajo la interpretación $\mathcal{I}$

$\mathcal{F}_3$: $\forall X \exists Y(\ p(X,Y) \rightarrow q(f(X))\ )$

$\mathcal{I}$: Dominio D ={1,2,3}
$f^{\mathcal{I}}(X)=4 - X$
$p^{\mathcal{I}}(X,Y)=$"$X \leq Y$"
$q^{\mathcal{I}}(X)=$" X == 2 || X == 3 "

X=1: $\exists Y(\ldots)$ **V** — Y=1: $p(1,1) \rightarrow q(f(1))$ **V**

X=2: $\exists Y(\ldots)$ **V** — Y=1: $p(2,1) \rightarrow q(f(2))$ **V**

X=3: $\exists Y(\ldots)$ **V** — Y=1: $p(3,1) \rightarrow q(f(3))$ **V**

$\Big\}$ **V**

Solución: $\mathcal{F}_3^{\mathcal{I}}$ = V

Ejercicio

- Evaluar $\mathcal{F}_4$ bajo la interpretación $\mathcal{I}$

$\mathcal{F}_4$: $\forall X(\ \exists Y p(X,Y) \rightarrow q(f(X))\ )$

$\mathcal{I}$: Dominio D ={1,2,3}
$f^{\mathcal{I}}(X)=4 - X$
$p^{\mathcal{I}}(X,Y)=$"$X \leq Y$"
$q^{\mathcal{I}}(X)=$" X == 2 || X == 3 "

X=1: $\exists Y p(1,Y)^{(1)}$ **V** $\rightarrow q(f(1))$ **V**
X=2: $\exists Y p(2,Y)^{(2)}$ **V** $\rightarrow q(f(2))$ **V**
X=3: $\exists Y p(3,Y)^{(3)}$ **V** $\rightarrow q(f(3))$ **F**
} **F**

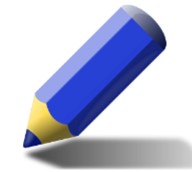
(1) $\exists Y p(1,Y)$
Y=1: p(1,1) **V**
} **V**

(2) $\exists Y p(2,Y)$
Y=1: p(2,1) **F**
Y=2: p(2,2) **V**
} **V**

(3) $\exists Y p(3,Y)$
Y=1: p(3,1) **F**
Y=2: p(3,2) **F**
Y=3: p(3,3) **V**
} **V**

Solución: $\mathcal{F}_4^{\mathcal{I}}$ = F

Ejercicio



- Evaluar la fórmula $\mathcal{F}$ en las interpretaciones I_1 e I_2

$$\mathcal{F}\text{:}\ \exists Y\ \neg\exists X\ (p(Y) \leftrightarrow q(X,Y))$$

I_1 : Dominio D = {A,B}

$p^{I1}(X) = \{A\}$

$q^{I1}(X,Y) = \{(A,B), (A,A)\}$

I_2 : Dominio D = {A,B}

$p^{I2}(X) = \{A\}$

$q^{I2}(X,Y) = \{(A,B), (A,A), (B,B)\}$

Ejercicio

- Evaluar la fórmula $\mathcal{F}$ en las interpretaciones I_1 e I_2

$\mathcal{F}$: $\exists Y\ \neg\exists X\ (p(Y) \leftrightarrow q(X,Y))$

I_1: Dominio D = {A,B}

$p^{I1}(X) = \{A\}$

$q^{I1}(X,Y) = \{(A,B), (A,A)\}$

Y=A: $\neg\boxed{\exists X(p(A) \leftrightarrow q(X,A))}$ **F**

V

$\exists X(p(A) \leftrightarrow q(X,A))$ — X=A: $p(A) \leftrightarrow q(A,A)$ **V** → **V**

Y=B: $\neg\boxed{\exists X(p(B) \leftrightarrow q(X,B))}$ **F**

V

→ **F**

$\exists X(p(B) \leftrightarrow q(X,B))$ — X=A: $p(B) \leftrightarrow q(A,B)$ **F**; X=B: $p(B) \leftrightarrow q(B,B)$ **V** → **V**

Solución: $\mathcal{F}^{I1}$ = F

Ejercicio

- Evaluar la fórmula $\mathcal{F}$ en las interpretaciones I_1 e I_2

$\mathcal{F}$: $\exists Y\ \neg\exists X\ (p(Y) \leftrightarrow q(X,Y))$

I_2: Dominio D = {A,B}

$p^{I2}(X) = \{A\}$

$q^{I2}(X,Y) = \{(A,B), (A,A), (B,B)\}$

Y=A: $\neg\ \boxed{\exists X(p(A) \leftrightarrow q(X,A))}$ **F**

V

Y=B: $\neg\ \boxed{\exists X(p(B) \leftrightarrow q(X,B))}$ **V**

F

} **V**

$\exists X(p(A) \leftrightarrow q(X,A))$ — X=A: $p(A) \leftrightarrow q(A,A)$ **V** } **V**

$\exists X(p(B) \leftrightarrow q(X,B))$ — X=A: $p(B) \leftrightarrow q(A,B)$ **F**; X=B: $p(B) \leftrightarrow q(B,B)$ **F** } **F**

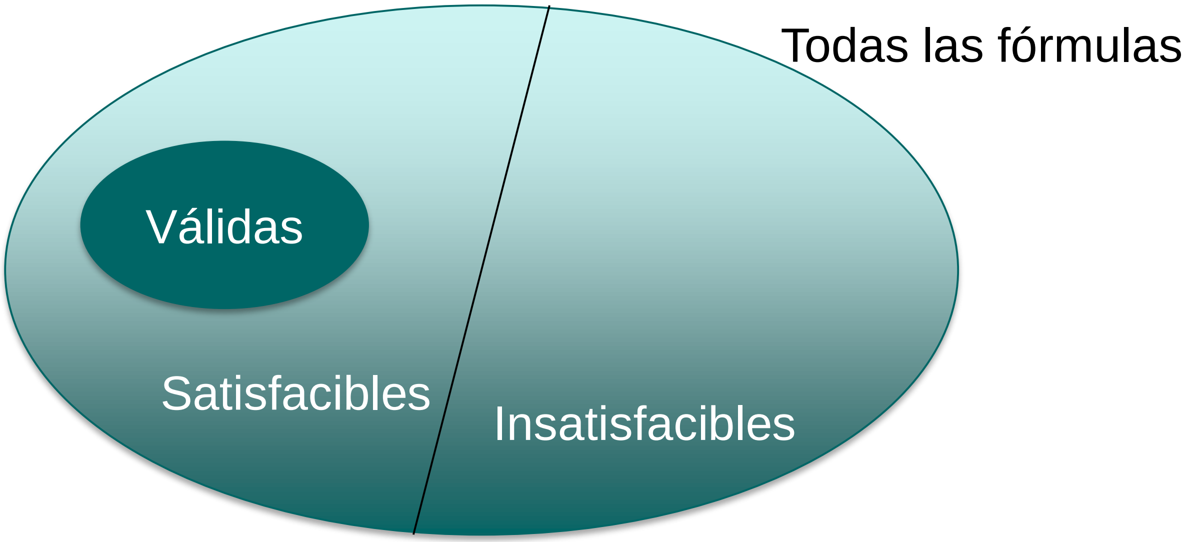
Solución: $\mathcal{F}^{I2}$ = V

L1. Contenidos

- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas Sintácticas
  - Formalización
  - Semántica
    - Interpretación
    - Reglas Semánticas
    - Evaluación
  - Clasificación de Fórmulas y Equivalencias Lógicas
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Resolución General
    - Forma Normal de Skolem
    - Sustituciones y Unificación
    - Algoritmo de Resolución
  - Deducción Natural
- Propiedades

Definiciones

- Fórmula **válida** = Verdadera en todas las interpretaciones
- Fórmula **satisfacible** = Verdadera en alguna interpretación
- Fórmula **insatisfacible** = No verdadera en ninguna interpretación



Equivalencias lógicas

- G equivalente a H si $G^I = H^I$ en toda interpretación I.
- Se mantienen las equivalencias de lógica proposicional.
- Nuevas equivalencias:

Nombre	Ley	
De Morgan con cuantificadores	$\neg\forall XG(X) \equiv \exists X\neg G(X)$	$\neg\exists XG(X) \equiv \forall X\neg G(X)$
Intercambio de cuantificadores	$\forall X\forall YG(X,Y) \equiv \forall Y\forall XG(X,Y)$	$\exists X\exists YG(X,Y) \equiv \exists Y\exists XG(X,Y)$
Gran distributividad	$\forall X(G(X)\wedge H(X)) \equiv \forall XG(X)\wedge\forall XH(X)$	$\exists X(G(X)\vee H(X)) \equiv \exists XG(X)\vee\exists XH(X)$
Gran distributividad restringida ($X \notin H$)	$H\vee\forall XG(X) \equiv \forall X(H\vee G(X))$ $H\wedge\forall XG(X) \equiv \forall X(H\wedge G(X))$	$H\vee\exists XG(X) \equiv \exists X(H\vee G(X))$ $H\wedge\exists XG(X) \equiv \exists X(H\wedge G(X))$

Ejercicio

- Buscar contraejemplos en los que no se cumplan las siguientes leyes

Se cumple	No se cumple
$\forall X G(X) \vee \forall X H(X) \vDash \forall X (G(X) \vee H(X))$	$\forall X (G(X) \vee H(X)) \nvDash \forall X G(X) \vee \forall X H(X)$
$\exists X (G(X) \wedge H(X)) \vDash \exists X G(X) \wedge \exists X H(X)$	$\exists X G(X) \wedge \exists X H(X) \nvDash \exists X (G(X) \wedge H(X))$
$\exists X \forall Y G(X,Y) \vDash \forall Y \exists X G(X,Y)$	$\forall Y \exists X G(X,Y) \nvDash \exists X \forall Y G(X,Y)$

No se cumple	Contraejemplo
$\forall X (G(X) \vee H(X)) \nvDash \forall X G(X) \vee \forall X H(X)$	G(X) = "*X aprueba*" H(X)= "*X suspende*" Todos aprueban o suspenden $\nRightarrow$ Todos aprueban o todos suspenden
$\exists X G(X) \wedge \exists X H(X) \nvDash \exists X (G(X) \wedge H(X))$	G(X)= "*X es alumno*" H(X)= "*X es trabajador*" Existen alumnos y existen trabajadores $\nRightarrow$ Existen alumnos trabajadores
$\forall Y \exists X G(X,Y) \nvDash \exists X \forall Y G(X,Y)$	G(X,Y)="*X está saliendo con Y*" Todos están saliendo con alguien $\nRightarrow$ Alguien está saliendo con todos

L1. Contenidos

- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas Sintácticas
  - Formalización
  - Semántica
    - Interpretación
    - Reglas Semánticas
    - Evaluación
  - Clasificación de Fórmulas y Equivalencias Lógicas
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Resolución General
    - Forma Normal de Skolem
    - Sustituciones y Unificación
    - Algoritmo de Resolución
  - Deducción Natural
- Propiedades

La Resolución General

- Al igual que en Lógica Proposicional:
  - Es un método constructivo que, realizando manipulaciones sintácticas, permite probar la consecuencia lógica.
  - Prueba por Refutación:
    - Para demostrar $\Phi \models G$ prueba *inconsistencia de* $\Phi \cup \{\neg G\}$

      $(\Phi \cup \{\neg G\} \models \textit{Falso})$
  - **Correcto** y **Completo**:
    - $\Phi \models G$ *si, y sólo si,* $\Phi \cup \{\neg G\} \vdash_R \square$
  - Necesita las sentencias en ***Forma clausal***

Forma Normal de Skolem (FNS)

Una sentencia está en FNS si

- Todos los cuantificadores están al principio.
- No tiene cuantificadores existenciales.
- El núcleo está en FNC (Forma Normal Conjuntiva):
  - Conjunción de cláusulas.
  - **Cláusula:** una disyunción de literales, sin literales repetidos y sin cuantificadores

Ejemplo:

$$\forall X_1 \forall X_2 \forall X_3 \; ((p_1(X_1) \vee \neg p_2(X_2) \vee p_3(X_3)) \wedge (q_1(X_1) \vee \neg q_2(X_2) \vee \neg q_3(X_3)))$$

Forma Normal de Skolem

Teorema de Skolem

Toda sentencia *F* se puede transformar en otra *SKO(F)* en FNS que es **equisatisfacible** con *F* . Además el alfabeto de *SKO(F)* es el mismo que el *F* de salvo quizás algunas constantes y funciones nuevas llamadas de Skolem.

No es un obstáculo para probar la consecuencia lógica:

$$\Phi \cup \{\neg G\} \textit{ inconsistente} \Leftrightarrow SKO(\Phi) \cup SKO(\neg G) \textit{ inconsistente}$$

Por tanto, comprobar si una sentencia es consecuencia lógica de un conjunto de sentencias se reduce a probar, o no, la inconsistencia de un conjunto de **cláusulas.**

Demostración (constructiva) del teorema de Skolem

- **Eliminar $\leftrightarrow$ y $\rightarrow$** con las equivalencias $G \leftrightarrow H \equiv (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$, y $G \rightarrow H \equiv \neg G \vee H$.
- **Reducir el ámbito de cada $\neg$** a un término simple, utilizando las leyes de Doble negación, De Morgan, y Gran De Morgan.
- **Renombrar variables** para que no interfieran los cuantificadores, teniendo en cuenta, por ejemplo, que $\forall X\ p(X) \vee \forall X\ q(X)$ es equivalente a $\forall X\ p(X) \vee \forall Y\ q(Y)$ y que $\forall X\ G$ es equivalente a $\forall Y\ G\ \{X/Y\}$ si Y no aparece en G.
- Poner todos los **cuantificadores al principio** de la expresión conservando su orden (Gran Distributividad Restringida).
- **Eliminar los cuantificadores existenciales** introduciendo constantes y funciones de Skolem si es preciso.
  - $\forall X\ \exists Y\ p(X, Y)$ se transforma en $\forall X\ p(X, f(X))$, siendo "f" función de Skolem.
  - $\exists X\ \forall Y\ p(X, Y)$ se transforma en $\forall Y\ p(a, Y)$, siendo "a" constante de Skolem.
- Convertir la expresión a **FNC** (una conjunción de disyunciones) utilizando las propiedades asociativa y distributivas de $\vee$ y $\wedge$.

Forma Normal de Skolem

- Cada paso conserva la equivalencia lógica, excepto la Skolemización (es decir, el proceso de eliminación de los cuantificadores existenciales) que sólo conserva la satisfacibilidad.

Reglas para borrar los cuantificadores existenciales	
Fórmula Original	**Fórmula tras eliminar cuantificadores**
$\exists \mathbf{Y}\ Q_1X_1\ Q_2X_2 \ldots Q_nX_n\ \mathbf{G} \quad \equiv_{\mathbf{sat}}$	$Q_1X_1\ Q_2X_2 \ldots Q_nX_n\ \mathbf{G\{Y/a\}}$ Dónde a es un nuevo símbolo de constante que no aparece en G
$\forall X'_1 \ldots \forall X'_m\ \exists \mathbf{Y}\ Q_1X_1 \ldots Q_nX_n\ \mathbf{G} \quad \equiv_{\mathbf{sat}}$	$\forall X'_1 \ldots \forall X'_m\ Q_1\ X_1 \ldots Q_n\ X_n\ \mathbf{G\{Y/f(X'_1, .. ,X'_m)\}}$ Dónde f es un nuevo símbolo de función que no aparece en G

Conversión a *FNS: Ejemplo*

$$\exists X \forall Y \neg(\exists Y\ p(X,Y) \rightarrow q(X,Y)) \vee \forall Z\ r(Z)$$

1. Eliminar $\leftrightarrow$ y $\rightarrow$
   - $\exists X \forall Y \neg(\neg\exists Y\ p(X,Y) \vee q(X,Y)) \vee \forall Z\ r(Z)$
2. Mover $\neg$ hacia dentro
   - $\exists X \forall Y (\neg\neg\exists Y\ p(X,Y) \wedge \neg q(X,Y)) \vee \forall Z\ r(Z)$
   - Simplificar $\neg\ \neg$: $\exists X \forall Y (\exists Y\ p(X,Y) \wedge \neg q(X,Y)) \vee \forall Z\ r(Z)$
3. Renombrar variables si dos cuantificadores ligan la misma variable.
   - $\exists X\ \forall \mathbf{Y_1} (\exists \mathbf{Y_2}\ p(X,\mathbf{Y_2}) \wedge \neg q(X,\mathbf{Y_1})) \vee \forall Z\ r(Z)$

Conversión a *FNS: Ejemplo*

$$\exists X\ \forall Y_1\ (\exists Y_2\ p(X,Y_2) \wedge \neg q(X,Y_1)) \vee \forall Z\ r(Z)$$

4. Sacar todos los cuantificadores a la izquierda
   - $\exists X \forall Y_1\ \exists Y_2\ \forall Z\ [(p(X,Y_2) \wedge \neg q(X,Y_1)) \vee r(Z)]$
5. Eliminar cuantificadores existenciales

   $\exists X$ (X/a):
   - $\forall Y_1\ \exists Y_2\ \forall Z\ [(p(\mathbf{a},Y_2) \wedge \neg q(\mathbf{a},Y_1)) \vee r(Z)]$

   $\exists Y_2$ (Y_2/f(Y_1)):
   - $\forall Y_1\ \forall Z\ [(p(\mathbf{a},\mathbf{f(Y_1)}) \wedge \neg q(\mathbf{a},Y_1)) \vee r(Z)\ ]$

   Esta fórmula no es equivalente a la original
6. Transformar el **núcleo** en forma normal conjuntiva.
   - $\forall Y_1\ \forall Z\ [(p(a,f(Y_1)) \vee r(Z)) \wedge (\neg q(a,Y_1) \vee r(Z))]$

Paso de FNS a Forma Clausal

$$\forall Y_1\ \forall Z\ [(p(a,f(Y_1)) \vee r(Z)) \wedge (\neg q(a,Y_1) \vee r(Z))]$$

- Se prescinde de los cuantificadores (todos son universales)

$$(p(a,f(Y_1)) \vee r(Z)) \wedge (\neg q(a,Y_1) \vee r(Z))$$

Se escribe cada cláusula como una expresión independiente

$$p(a,f(Y_1)) \vee r(Z)\ ,$$

$$\neg q(a,Y_1) \vee r(Z)$$

Ejemplo de conversión a Forma Clausal (debemos pasar por la Forma Normal de Skolem)

$$\exists X[p(X) \rightarrow [\forall Y(p(Y) \rightarrow p(f(X,Y))) \wedge \neg \forall Y(q(X,Y) \rightarrow p(Y))]]$$

- Eliminar $\rightarrow$

$$\exists X[\neg p(X) \vee [\forall Y(\neg p(Y) \vee p(f(X,Y))) \wedge \neg \forall Y(\neg q(X,Y) \vee p(Y))]]$$

- Reducir el alcance de $\neg$

$$\exists X[\neg p(X) \vee [\forall Y(\neg p(Y) \vee p(f(X,Y))) \wedge \exists Y(q(X,Y) \wedge \neg p(Y))]]$$

- Renombrar variables

$$\exists X[\neg p(X) \vee [\forall Y(\neg p(Y) \vee p(f(X,Y))) \wedge \exists Z(q(X, Z) \wedge \neg p(Z))]]$$

- Sacar ordenadamente los cuantificadores al principio

$$\exists X\ \forall Y\ \exists Z[\neg p(X) \vee [(\neg p(Y) \vee p(f(X,Y))) \wedge (q(X, Z) \wedge \neg p(Z))]]$$

Ejemplo de conversión a Forma Clausal (debemos pasar por la Forma Normal de Skolem)

$$\exists X\ \forall Y\ \exists Z[\neg\ p(X) \vee [\ (\neg\ p(Y) \vee p(f(X,Y))) \wedge (q(X, Z) \wedge \neg p(Z))]]$$

- Eliminar ordenadamente $\exists$

$$\forall Y\ \exists Z[\neg\ p(\mathbf{a}) \vee [\ (\neg\ p(Y) \vee p(f(\mathbf{a},Y))) \wedge (q(\mathbf{a}, Z) \wedge \neg p(Z))]]$$

$$\forall Y\ [\neg\ p(a) \vee [\ (\neg\ p(Y) \vee p(f(a,Y))) \wedge (q(a, \mathbf{g(Y)}) \wedge \neg p(\mathbf{g(Y)}))]]$$

- Poner el núcleo en FNC

$$\forall Y[(\neg p(a) \vee \neg p(Y) \vee\ p(f(a,Y))) \wedge (\neg p(a) \vee\ q(a, g(Y))) \wedge (\neg p(a) \vee \neg p(g(Y)))]$$

- **Obtener las cláusulas**

Forma Normal de Skolem

- $(\neg\ p(a) \vee \neg\ p(Y) \vee p(f(a,Y)))$
- $(\neg\ p(a) \vee q(a, g(Y)))$
- $(\neg\ p(a) \vee \neg p(g(Y)))$

Forma Clausal

Ejercicio

- Poner en forma normal de Skolem y forma clausal:

$\exists X \; \forall Y \; \neg[\, \neg p(X,Y) \longrightarrow \forall Z \, (\, q(Z) \wedge p(X,X) \,) \,]$

$\forall X \; [\exists Y \, (\, p(X, Y) \longrightarrow r(X, Y) \,) \longrightarrow \exists Y \, (\, q(Y) \longrightarrow s(Y) \,) \,]$

$\exists X \; \forall Y \; \neg \forall Z \; [\, \neg p(X,Y) \longrightarrow (\, q(Z) \wedge p(X,X) \,) \,]$

$\forall X \; \{\, p(X) \vee \exists X \, [(r(X) \vee p(f(X)) \,) \wedge \exists X \, \neg r(X) \,] \vee [\exists X \, q(X,X) \wedge \neg r(f(X)) \,) \,] \,\}$

Ejercicio: Paso a FNS y a FC

a) $\exists X\ \forall Y\ \neg[\ \neg p(X,Y) \longrightarrow \forall Z\ (\ q(Z) \wedge p(X,X)\ )\ ]$

Eliminar $\rightarrow$

$\exists X\ \forall Y\ \neg[\neg\ \neg p(X,Y) \vee \forall Z\ (\ q(Z) \wedge p(X,X)\ )\ ]$

Simplificar $\neg\ \neg$

$\exists X\ \forall Y\ \neg[p(X,Y) \vee \forall Z\ (\ q(Z) \wedge p(X,X)\ )\ ]$

Reducir el alcance de $\neg$ (De Morgan)

$\exists X\ \forall Y\ [\neg p(X,Y) \wedge \neg\forall Z\ (\ q(Z) \wedge p(X,X)\ )\ ]$

Reducir el alcance de $\neg$ (De Morgan)

$\exists X\ \forall Y\ [\neg p(X,Y) \wedge \exists Z\ (\neg\ q(Z) \vee \neg\ p(X,X)\ )\ ]$

Sacar ordenadamente los cuantificadores al principio

$\exists X\ \forall Y\ \exists Z\ [\neg p(X,Y) \wedge (\neg\ q(Z) \vee \neg\ p(X,X)\ )\ ]$

Eliminar ordenadamente $\exists$ (Tras eliminar $\exists$, Fórmula Equisatisfacible)

(*Eliminar $\exists X$ (X/a)*)

$\forall Y\ \exists Z\ [\neg p(a,Y) \wedge (\neg\ q(Z) \vee \neg\ p(a,a)\ )\ ]$

(*Eliminar $\exists Z$ (Z/f(Y))*)

$\forall Y\ [\neg p(a,Y) \wedge (\neg\ q(f(Y)) \vee \neg\ p(a,a)\ )\ ]$ **F.N. Skolem**

$\{\neg p(a,Y)\ ,\ \neg\ q(f(Y)) \vee \neg\ p(a,a)\ \}$ **Forma clausal**

Ejercicio: Paso a FNS y a FC

b) $\forall X\, [\exists Y\, (\, p(X, Y) \longrightarrow r(X, Y)\,) \longrightarrow \exists Y\, (\, q(Y) \longrightarrow s(Y)\,)\,]$

Eliminar $\rightarrow$

$\forall X\, [\, \neg \exists Y\, (\neg\, p(X, Y) \vee r(X, Y)\,) \vee \exists Y\, (\neg\, q(Y) \vee s(Y)\,)\,]$

Reducir el alcance de $\neg$ (De Morgan)

$\forall X\, [\, \forall Y\, \neg\, (\neg\, p(X, Y) \vee r(X, Y)\,) \vee \exists Y\, (\neg\, q(Y) \vee s(Y)\,)\,]$

Reducir el alcance de $\neg$ (De Morgan)

$\forall X\, [\, \forall Y\, (\, p(X, Y) \wedge \neg\, r(X, Y)\,) \vee \exists Y\, (\neg\, q(Y) \vee s(Y)\,)\,]$

Renombrar variables y sacar ordenadamente los cuantificadores al principio

$\forall X \forall Y \exists Z\, [(\, p(X, Y) \wedge \neg\, r(X, Y)\,) \vee (\neg\, q(Z) \vee s(Z)\,)\,]$

Eliminar ordenadamente $\exists$ (Tras eliminar $\exists$, Fórmula Equisatisfacible)

(*Eliminar $\exists Z$ $(Z/f(X,Y))$*)

$\forall X \forall Y\, [(\, p(X, Y) \wedge \neg\, r(X, Y)\,) \vee (\neg\, q(\, f(X,Y)\,) \vee s(\, f(X,Y)\,)\,)\,]$

Propiedad Distributiva

$\forall X \forall Y\, [(\, p(X, Y) \vee \neg\, q(f(X,Y)) \vee s(f(X,Y))\,) \wedge (\neg\, r(X, Y) \vee \neg\, q(f(X,Y)) \vee s(f(X,Y))\,)\,]$ **F.N. Skolem**

$\{\, p(X, Y) \vee \neg\, q(f(X,Y)) \vee s(f(X,Y)),\ \neg\, r(X, Y) \vee \neg\, q(f(X,Y)) \vee s(f(X,Y))\, \}$ **Forma clausal**

Ejercicio: Paso a FNS y a FC

c) $\exists X\ \forall Y\ \neg\forall Z\ [\ \neg p(X,Y) \longrightarrow (\ q(Z) \wedge p(X,X)\ )\ ]$

Eliminar $\rightarrow$ y Simplificar $\neg\ \neg$

$\exists X\ \forall Y\ \neg\forall Z\ [p(X,Y) \vee (\ q(Z) \wedge p(X,X)\ )\ ]$

Reducir el alcance de $\neg$ (De Morgan)

$\exists X\ \forall Y\ \exists Z\ [\neg\ p(X,Y) \wedge (\neg\ q(Z) \vee \neg\ p(X,X)\ )\ ]$

Eliminar ordenadamente $\exists$ (Tras eliminar $\exists$, Fórmula Equisatisfacible)

(*Eliminar: $\exists X$ (X/a), $\exists Z$ (Z/f(Y))*)

$\forall Y\ [\neg\ p(a,Y) \wedge (\neg\ q(f(Y)) \vee \neg\ p(a,a)\ )\ ]$ **F.N. Skolem**

Forma clausal: $\{\neg\ p(a,Y)\ ,\ \neg\ q(f(Y)) \vee \neg\ p(a,a)\ \}$

Ejercicio: Paso a FNS y a FC

d) $\forall X \{ p(X) \vee \forall X [(r(X) \vee p(f(X))) \wedge \forall X \neg r(X)] \vee [\forall X\ q(X,X) \wedge \neg r(f(X)))] \}$

Renombrar variables

$\forall X_1 \{ p(X_1) \vee \forall X_2 [(r(X_2) \vee p(f(X_2))) \wedge \forall X_3 \neg r(X_3)] \vee [\forall X_4\ q(X_4, X_4) \wedge \neg r(f(X_1)))] \}$

Sacar ordenadamente los cuantificadores al principio

$\forall X_1 \forall X_2 \forall X_3 \forall X_4 \{ p(X_1) \vee [(r(X_2) \vee p(f(X_2))) \wedge \neg r(X_3)] \vee [q(X_4, X_4) \wedge \neg r(f(X_1)))] \}$

Propiedad Distributiva (En: $p(X_1) \vee [(r(X_2) \vee p(f(X_2))) \wedge \neg r(X_3)]$)

$\forall X_1 \forall X_2 \forall X_3 \forall X_4 \{ [(p(X_1) \vee r(X_2) \vee p(f(X_2))) \wedge (p(X_1) \vee \neg r(X_3))] \vee [q(X_4, X_4) \wedge \neg r(f(X_1)))] \}$

Propiedad Distributiva (En: $[(p(X_1) \vee r(X_2) \vee p(f(X_2))) \wedge (p(X_1) \vee \neg r(X_3))] \vee [q(X_4, X_4) \wedge \neg r(f(X_1)))]$)

$\forall X_1 \forall X_2 \forall X_3 \forall X_4 \{ [p(X_1) \vee r(X_2) \vee p(f(X_2)) \vee q(X_4, X_4)] \wedge [p(X_1) \vee \neg r(X_3) \vee q(X_4, X_4)] \wedge$
$[p(X_1) \vee r(X_2) \vee p(f(X_2)) \vee \neg r(f(X_1))] \wedge [p(X_1) \vee \neg r(X_3) \vee \neg r(f(X_1))] \}$ **Skolem N.F.**

$\{ p(X_1) \vee r(X_2) \vee p(f(X_2)) \vee q(X_4, X_4)\ ,\ p(X_1) \vee \neg r(X_3) \vee q(X_4, X_4)\ ,$

$p(X_1) \vee r(X_2) \vee p(f(X_2)) \vee \neg r(f(X_1))\ ,\ p(X_1) \vee \neg r(X_3) \vee \neg r(f(X_1)) \ \}$ **Clausal Form**

La Resolución General

- Para probar la inconsistencia de

$$\{\forall X\ p(X), \neg p(a)\}$$

la Resolución Proposicional no es suficiente:

  - *{p(X), ¬ p(a)}* es proposicionalmente consistente aunque sea inconsistente

Necesitamos un procedimiento de particularización

- (que nos permita saber que si *{p(X), ¬ p(a)}* fuera consistente, también tendría que serlo *{p(a), ¬ p(a)}*)

la Unificación

La Resolución General: Sustitución

- Una ***sustitución***, denotada por θ, es una asignación de términos a variables.
- **Ejemplo** (particularización = aplicación de una sustitución)

  θ = {X/g(Y)}, **E** = p(X,W,f(X)) ⇒ **Eθ** = p(g(Y),W, f(g(Y)))
- **Unificación** es el proceso de reemplazar las variables en varias expresiones por términos para conseguir que las expresiones modificadas sean idénticas.
- Ejemplo

  E_1=p(X,a), E_2=p(Y,a) , θ_1 = {Y/b, X/b} ⇒ $E_1\theta_1 = E_2\theta_1$ = p(b,a)

  E_1=p(X,a), E_2=p(Y,a) , θ_2 = {Y/X} ⇒ $E_1\theta_2 = E_2\theta_2$ = p(X,a)

En el ejemplo θ_2 es el ***unificador más general*** (umg)

La Resolución General: Sustituciones

- Una sustitución se representa por un conjunto de pares ordenados:

$$\sigma = \{ V_1/t_1, V_2/t_2, \ldots, V_n/t_n \}$$

donde: V_i / t_i significa que el término t_i *va a* sustituir a la variable V_i en toda la expresión.

p.e. $\sigma_1 = \{X/b, Y/a, Z/f(U)\}$

- Cada aparición de una variable debe sustituirse por el mismo término.
- Ninguna variable puede reemplazarse por un término que la contenga.

La Resolución General: Sustituciones

Una ***composición*** de dos sustituciones σ_1 y σ_2, $(\sigma_1\sigma_2)$, es una nueva sustitución tal que $E\sigma_1\sigma_2 = (E\sigma_1)\sigma_2$ para cualquier expresión E

$\sigma_1\sigma_2$ se construye con:

1. el resultado de aplicar σ_2 a los elementos de σ_1.
2. los pares de σ_2 de las variables que no están en σ_1.

Ejemplo:

$$\sigma_1 = \{Z/g(X,Y)\}, \quad \sigma_2 = \{X/a, Y/b, W/c, Z/d\}$$

$$\sigma_1\sigma_2 = \{Z/g(a,b), X/a, Y/b, W/c\}$$

$$\sigma_2\sigma_1 = \{X/a, Y/b, W/c, Z/d\} = \sigma 2$$

La Unificación

- Un conjunto $\{E_i : i=1...n\}$ de expresiones es ***unificable*** si existe una sustitución σ tal que: $E_1\sigma = E_2\sigma = \ldots = E_n\sigma$.
- El algoritmo de Unificación nos indica las particularizaciones mínimas a realizar en un conjunto de expresiones lógicas para que se reduzcan a una misma expresión (unificador más general)
  - ***umg****{p(X,f(b),a), p(a,f(Y),a)} = {X/a, Y/b}*
  - ***umg****{p(X), q(a)} = fallo*
- ¿Problemas?:
  - ***umg****{p(X,Y), p(Y, f(X))}= fallo* ⇒ Renombramiento de variables

    Solución: ***umg****{p(X,Y), p(*Y_1*, f(*X_1*))}= {X/*Y_1*, Y/f(*X_1*)}*
  - *(*)* ***umg****{p(X,X), p(Y,f(Y))} = fallo ¡Sin solución!*

Algoritmo de Unificación

Para el algoritmo de unificación interpretamos los argumentos como listas de símbolos:

g(r(X,f(Z)),Y) ==> [g [r [X, [f [Z]]], Y]]

g(r(a, Y), U) ==> [g [r [a, Y], U]]

Input T (Conjunto de términos o fórmulas atómicas)

μ_0= { }; i=0;

Repeat

Calcular D(Tμ_i); (Desacuerdos del conjunto)

If en D(Tμ_i) hay:

Dos términos, no variables, que no empiezan por el mismo símbolo de función ó

Una variable –p.e. *x*- y al menos otro que contiene la variable - p.e *f(x)*-

Then *stop* y **Return** : *" T no es unificable";*

Construir δ={x/t} donde x es una variable y t un término en D(Tμ_i);

μ_{i+1}= μ_iδ;

i=i+1

Until #(Tμ_i)= 1

Return: *"μ_i es un umg para T";*

El algoritmo de Unificación: ejemplo

- Consideremos el siguiente conjunto de fórmulas atómicas T:
  - p (X,   a, f(g(Y)))
  - p (f(Z), Z, f(U))

  $$\mu_0 = \{\}$$

- Buscamos desacuerdos en $\mathbf{T\mu_0 = T}$ y los resolvemos

El algoritmo de Unificación: ejemplo

$T\mu_0$:

- **p (** X, a, f(g(Y)))
- **p (**f(Z), Z, f(U))

- $D(T\mu_0) = \{ X, f(Z) \}$
  - $\delta = \{X/ f(Z)\}$
  - $\mu_1 = \mu_0\delta = \{\}\delta =$ **{X/ f(Z)}**

El algoritmo de Unificación: ejemplo

$\mathbf{T\mu_1 = T\{X/\ f(Z)\}}$:

- **p (f(Z)),** a, f(g(Y)))
- **p (f(Z)),** Z, f(U))

- $D(T\mu_1) = \{ a, Z \}$
  - $\delta = \{Z / a\}$
  - $\mu_2 = \mu_1\delta = \{X/f(Z)\}\delta = \mathbf{\{X/\ f(a),\ Z/a\}}$

Recuerda: es una composición

El algoritmo de Unificación: ejemplo

$\mathbf{T\mu_2 = T\{X/\ f(a), Z/\ \boldsymbol{a}\}}$:

- **p (f(a), a, f(g(Y)))**
- **p (f(a), a, f(U))**

  - $D(T\mu_2) = \{ U, g(Y) \}$
    - $\delta = \{U / g(Y)\}$
    - $\boldsymbol{\mu_3} = \mu_2\delta = \{X/f(a), Z/a\}\delta =$

      $=$ **{X/f(a), Z/a, U/g(Y)}**

El algoritmo de Unificación: ejemplo

$\mathbf{T\mu_3 = T\{X/f(a), Z/\mathit{a}, U/g(Y)\}}$:

- **p (f(a), a, f(g(Y)))**
- **p (f(a), a, f(g(Y)))**

Las expresiones son idénticas, por tanto:

$$\mathbf{u.m.g. = \{X/f(a), Z/\mathit{a}, U/g(Y)\}}$$

El algoritmo de Unificación: otro ejemplo

- Consideremos el siguiente conjunto de fórmulas atómicas T:
  - p (X, f(X), f(a))
  - p (g(Y), Z, Z)

    $\boldsymbol{\mu_0 = \{\}}$

- Buscamos desacuerdos en $\mathbf{T\mu_0 = T}$ y los resolvemos

El algoritmo de Unificación: otro ejemplo

$T\mu_0$:

- **p (** X, f(X), f(a))
- **p (** g(Y), Z, Z)

  - $D(T\mu_0) = \{ X, g(Y) \}$
    - $\delta = \{X/ g(Y)\}$
    - $\mu_1 = \mu_0\delta = \{\}\delta =$ **{X/ g(Y)}**

El algoritmo de Unificación: otro ejemplo

$\mathbf{T\mu_1 = T\{X/\ g(Y)\}}$:

- **p (g(Y),** f(g(Y)), f(a))
- **p (g(Y),** Z, Z)

  - $D(T\mu_1) = \{ f(g(Y)), Z \}$
    - $\delta = \{Z / f(g(Y))\}$
    - $\mu_2 = \mu_1\delta = \{X/g(Y)\}\delta = \mathbf{\{X/\ g(Y), Z/f(g(Y))\}}$

El algoritmo de Unificación: otro ejemplo

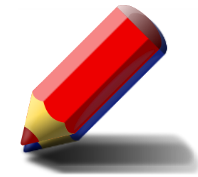
$\mathbf{T\mu_2 = T\{X/\ g(Y), Z/\ f(g(Y))\}}$:

- **p (g(Y), f(g(Y)), f(a))**
- **p (g(Y), f(g(Y)), f(g(Y)))**

  - $D(T\mu_2) = \{ a, g(Y) \}$

El conjunto no es unificable, por lo que el algoritmo acaba y no existe u.m.g

Ejercicio



- Determinar si los siguientes conjuntos de expresiones son unificables encontrando, cuando proceda, su u.m.g.
  1. {p(f(X),Z), p(Y,a)}   umg={Y/f(X), Z/a}
  2. {p(f(X),a), p(Y,f(U))}
  3. {p(f(X), g(U,Z)), p(Y, g(V,a))}   umg={Y/f(X), U/V, Z/a}
  4. {p(f(Z), g(U,Z)), p(Y, g(V,a)) }   umg={Y/f(**a**), U/V, Z/a}
  5. {p(a, X, h(g(Z))), p(Z, h(Y), h(Y)) }   umg={Z/a, X/h(g(a)), Y/g(a)}
  6. {p(X, f(a), g(g(Y))), p(Z, f(Z), g(Y)) }
  7. {p(f(a),g(X)), p(Y, Y)}
  8. {p(a, X, g(g(Z))), p(Z, h(Y), g(Y)) }   umg={Z/a, X/h(g(a)), Y/g(a)}
  9. {p(f(X), h(Y), a), p(f(X), Z, a), p(f(X), h(Y), b) }
  10. {q(X, f(a), g(b)), q(Z, f(Y), g(Y)), q(X, X, Z) }

La Resolución General

$C_1 = G \vee \neg E_1$ $\qquad$ $C_2 = H \vee E_2$

$\sigma = \mathrm{umg}(E_1 \cup E_2)$

Resolvente$(C_1, C_2) = G\sigma \vee H\sigma$

E_1, E_2, E_3 literales del mismo predicado que sean unificables

G, H, disyunción de literales

$C_1 = G \vee \neg E_1 \vee \neg E_3$ $\qquad$ $C_2 = H \vee E_2$

$\sigma = \mathrm{umg}(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

Resolvente$(C_1, C_2) = G\sigma \vee H\sigma$

$$\neg s(Z) \vee q(X,Y) \vee \neg p(X) \vee \neg p(f(a)) \qquad r(Z) \vee p(f(Z))$$

$$\sigma \qquad \sigma == \{X / f(a), Z / a\} \qquad \sigma$$

$$\neg s(a) \vee q(f(a),Y) \vee \neg p(f(a)) \qquad r(a) \vee p(f(a))$$

$$\neg s(a) \vee q(f(a),Y) \vee r(a)$$

La Resolución General

Definición derivabilidad:

- $\{C_1,\ldots, C_n\} \vdash G$

si y solo si $\exists F_0,\ldots,F_m$ donde:

- $F_m = G$,
- F_i es resolvente general de un par de *variantes* de cláusulas del conjunto $\{C_1,\ldots, C_n\} \cup \{F_0,\ldots,F_{i-1}\}$.

Teorema de Corrección.-

$$\text{Si } \Phi \vdash_{RG} C \text{ entonces } \Phi \vDash C.$$

En particular si Φ es refutable entonces Φ es insatisfacible.

Algoritmo de Resolución

{Dado un conjunto de claúsulas S, indica si es refutable o no, es decir si de S se puede deducir o no la cláusula vacía}

mientras ($\square \notin S$) **y** (se puede continuar) **hacer**

tratar de seleccionar dos claúsulas de S a las que se pueda aplicar el cálculo del resolvente y que no se les haya aplicado previamente **(*);**

si se han seleccionado dos cláusulas

entonces renombrar variables en una de las cláusulas (si ambas contienen variables) y aplicarles el cálculo del resolvente **(**)**

sino no se puede continuar

finsi;

añadir a S el resolvente obtenido

finmientras;

si ($\square \in S$)

entonces devuelve “**Refutable**” (¡Éxito!)

sino devuelve “**No Refutable**”

finsi

fin.

Resolución: Ejemplo

Hipótesis	Forma Clausal
$\forall X\ (perro(X) \rightarrow animal(X))$	$\neg perro(X) \vee animal(X)$
perro(fido)	perro(fido)
$\forall X\ (animal(X) \rightarrow muere(X))$	$\neg animal(X) \vee muere(X)$

Conclusión

muere(fido)

Negar el objetivo

¬muere(fido)

Resolución: Ejemplo

$\neg perro(X) \vee animal(X)$ $\quad$ $\neg animal(Y) \vee muere(Y)$

μ_1 $\quad$ μ_1=**umg{**animal(X), animal(Y)**}** = {**X / Y**} $\quad$ μ_1

$\neg perro(Y) \vee animal(Y)$ $\quad$ $\neg animal(Y) \vee muere(Y)$

$\neg perro(Y) \vee muere(Y)$

perro(fido)

μ_2 $\quad$ μ_2=**umg{**perro(fido), perro(Y)**}** = **{Y / fido}** $\quad$ μ_2

perro(fido) $\quad$ $\neg perro(fido) \vee muere(fido)$

muere(fido) $\quad$ $\neg$**muere(fido)**

μ_3 $\quad$ μ_3=**umg{**muere(fido), muere(fido)**}** = **{ }** $\quad$ μ_3

muere(fido) $\quad$ $\neg$**muere(fido)**

□

Conjunto inconsistente

⬇

Razonamiento correcto

- En formato estándar:

¬perro(X) ∨ animal(X) **¬animal(Y) ∨ muere(Y)**

{X / Y}

perro(fido) **¬perro(Y) ∨ muere(Y)**

{Y / fido}

muere(fido) **¬muere(fido)**

$\square$

Conjunto inconsistente $\Rightarrow$ Correcto

Resolución: Otro ejemplo

$$\{\forall X\,(q(X) \lor \neg p(X)), \forall X\,(r(X) \lor \neg q(X)), p(f(a))\} \vDash \exists X r(f(X))$$

- Como siempre en Resolución, tenemos que probar:

$$\{q(X) \lor \neg p(X), r(X) \lor \neg q(X), p(f(a)), \neg r(f(X))\} \vdash \square$$

Resolución: Otro ejemplo

$$\{q(X) \vee \neg p(X), r(X) \vee \neg q(X), p(f(a)), \neg r(f(X))\} \vdash \text{Falso}$$

$r(X) \vee \neg q(X)$ $\qquad$ $\neg r(f(X_1))$

$\mu_1 = \{X / f(X_1)\}$

$\neg q(f(X_1))$ $\qquad$ $q(X_2) \vee \neg p(X_2)$

$\mu_2 = \{X_2 / f(X_1)\}$

$\neg p(f(X_1))$ $\qquad$ $p(f(a))$

$\mu_3 = \{X_1 / a\}$

$\blacksquare$

Renombrar variables en una de las cláusulas seleccionadas

$\neg r(f(X))$ *renombro* $X : \neg r(f(X_1))$

$r(X) \vee \neg q(X)$ $\qquad$ $\neg r(f(X_1))$

μ_1 $\quad$ $\mu_1 = umg\{r(X), r(f(X_1))\} = \{X / f(X_1)\}$ $\quad$ μ_1

$r(\mathrm{f}(\mathrm{X}_1)) \vee \neg q(\mathrm{f}(\mathrm{X}_1))$ $\qquad$ $\neg r(f(X_1))$

$\neg q(f(X_1))$

Algoritmo de Resolución. Ejemplo

- Estudiar la corrección del siguiente razonamiento

$\{\forall X(\neg p(X) \vee q(X) \vee r(X,f(X))),\ \forall X\ (\neg p(X) \vee q(X) \vee s(f(X))),\ t(a),\ p(a),$
$\forall Y\ (\neg r(a,Y) \vee t(Y)),\ \forall X\ (\neg t(X) \vee \neg q(X)),\ \exists x(p(X) \vee t(X))\} \vDash \exists x(t(X) \wedge s(X))$

1º) Negar la conclusión y obtener su FC: $\neg(\exists x(t(X) \wedge s(X)))$

$\neg\exists x\ (t(X) \wedge s(X)) \equiv \forall X\ (\neg t(X) \vee \neg s(X)) \quad \{\neg t(X) \vee \neg s(X)\}$

2º) Pasar a FC las premisas:

$\{\neg p(X) \vee q(X) \vee r(X,f(X)),\ \neg p(X) \vee q(X) \vee s(f(X)),\ t(a),\ p(a),\ \neg r(a,Y) \vee t(Y), \neg t(X) \vee \neg q(X),$
$\mathbf{p(b) \vee t(b)}\}$

$\exists x(p(X) \vee t(x))$: al eliminar el $\exists$ para pasar a FC quedaría **p(b) $\vee$ t(b)** (la constante **a** no se puede emplear pues aparece en otra cláusula).

3º) Resolución: Veamos que el siguiente conjunto de cláusulas deriva la cláusula vacía:

$\{\neg p(X) \vee q(X) \vee r(X,f(X)),\ \neg p(X) \vee q(X) \vee s(f(X)),\ t(a),\ p(a),$
$\neg r(a,Y) \vee t(Y), \neg t(X) \vee \neg q(X),\ p(b)\ \vee t(b),\ \neg t(X) \vee \neg s(X)\}$

Algoritmo de Resolución. Ejemplo

1.	$\neg p(X) \vee q(X) \vee r(X,f(X))$		
2.	$\neg p(X) \vee q(X) \vee s(f(X))$		
3.	$t(a)$		
4.	$p(a)$		
5.	$\neg r(a,Y) \vee t(Y)$		
6.	$\neg t(X) \vee \neg q(X)$		
7.	$p(b) \vee t(b)$		
8.	$\neg t(X) \vee \neg s(X)$		
9.	$\neg q(a)$	umg= {X/a}	Res(3, 6, t)
10.	$q(a) \vee s(f(a))$	umg= {X/a}	Res(2, 4, p)
11.	$s(f(a))$	umg= {}	Res(9, 10, q)
12.	$q(a) \vee r(a,f(a))$	umg= {X/a}	Res(1, 4, p)
13.	$r(a,f(a))$	umg= {}	Res(9, 12, q)
14.	$t(f(a))$	umg= {Y/f(a)}	Res(5, 13, r)
15.	$\neg s(f(a))$	umg= {X/f(a)}	Res(8, 14, t)
16.	$\square$	umg= {}	Res(11, 15, s)

Algoritmo de Resolución. Ejercicio

- Prueba, usando Resolución, que se puede derivar la cláusula vacía del siguiente conjunto de cláusulas:

$$
\begin{gathered}
\{s(X) \vee \neg q(Y) \vee \neg r(X,Y), \\
\neg p(X) \vee q(X), \\
p(b), \\
r(a,b) \\
\neg s(a)\}
\end{gathered}
$$

Estrategias de Resolución

- El algoritmo de Resolución es no-determinista, por tanto su eficiencia (utilidad) en la extracción de respuestas se basa:
  - la estrategia de elección del par de cláusulas a las que aplicar resolución, y dentro de éstas
  - la elección de los literales a unificar
- ***Estrategia de control***
  - Completa si un procedimiento que la use lleva a una contradicción siempre que exista

Estrategias de Resolución

- Estrategia a lo ancho
  - Desarrollar el árbol completo de derivaciones calculando todos los resolventes de cada nivel
- Estrategia del conjunto soporte
  - Una cláusula pertenece al conjunto soporte si:
    - Es una de las cláusulas de la negación de la conclusión
    - Es el resolvente de un par de cláusulas donde alguna de ellas pertenece al conjunto soporte
  - La particularización más importante es la *Resolución SLD*, utilizada por el sistema *PROLOG*

Ejercicio

Demostrar los siguientes razonamientos mediante resolución

- $\{\exists X p(X)\} \models \neg\forall X \neg p(X)$
- $\{\neg\forall X \neg p(X)\} \models \exists X p(X)$
- $\{\ \exists X(p(X) \vee q(X)),\ \forall X(p(X) \rightarrow r(X,X)),\ \neg\exists X q(X)\} \models \exists X r(X,X)$
- $\{\forall X(r(X) \rightarrow q(X)),\ \exists X(p(X) \wedge \neg q(X))\} \models \exists X(p(X) \wedge \neg r(X))$
- $\{\ p(a)\ ,\ \forall x \forall y\ (\neg p(x) \vee \neg q(f(x)) \vee r(x,y)),\ \forall x \forall y\ (q(x) \vee r(y,x)\ )\} \vdash \exists x\ r(x,f(a))$

Ejercicio

Demostrar mediante resolución

$\{\exists X p(X)\} \vDash \neg\forall X \neg p(X)$

- $\{\exists X p(X), \forall X \neg p(X)\}$ inconsistente
- Paso a Forma clausal:
  - $\exists X p(X)$ // $p(a)$
  - $\forall X \neg p(X)$ // $\neg p(X)$

1. *$p(a)$*
2. *$\neg p(X)$*
3. $\square$ *umg= $\{X/a\}$* *Res(1, 2, p)*

Ejercicio

Demostrar mediante resolución

$\{\neg\forall X \neg p(X)\} \vDash \exists X p(X)$

- $\{\neg\forall X \neg p(X), \neg\exists X p(X)\}$ inconsistente
- Paso a Forma clausal:
  - $\neg\forall X \neg p(X)$ // $\exists X\ p(X)$ // $p(a)$
  - $\neg\exists X p(X)$ // $\forall X \neg p(X)$ // $\neg p(X)$

Nótese que resulta el mismo conjunto de cláusulas que en el ejercicio anterior

Ejercicio

Demostrar mediante resolución

$\{ \exists X(p(X) \vee q(X)),\ \forall X(p(X) \rightarrow r(X,X)),\ \neg\exists X q(X)\} \models \exists X r(X,X)$

- $\{ \exists X(p(X) \vee q(X)),\ \forall X(p(X) \rightarrow r(X,X)),\ \neg\exists X q(X),\ \neg\exists X r(X,X)\}$ inconsistente
- F.C.: $\{p(a) \vee q(a),\ \neg p(X) \vee r(X,X),\ \neg q(X),\ \neg r(X,X)\}$

1.	$p(a) \vee q(a)$		
2.	$\neg p(X) \vee r(X,X)$		
3.	$\neg q(X)$		
4.	$\neg r(X,X)$		
5.	$p(a)$	*umg= {X/a}*	*Res(1, 3, q)*
6.	$r(a,a)$	*umg= {X/a}*	*Res(2, 5, p)*
7.	$\square$	*umg= {X/a}*	*Res(4, 6, r)*

Ejercicio

Demostrar mediante resolución

$\{\forall X(r(X) \rightarrow q(X)),\ \exists X(p(X) \wedge \neg q(X))\} \vDash \exists X(p(X) \wedge \neg r(X))$

- $\{\forall X(r(X) \rightarrow q(X)),\ \exists X(p(X) \wedge \neg q(X)),\ \neg\exists X(p(X) \wedge \neg r(X)\ \}$ inconsistente
- F.C.: $\{\neg r(X) \vee q(X),\ p(a),\ \neg q(a),\ \neg p(X) \vee r(X)\ \}$
-
  1. $\neg r(X) \vee q(X)$
  2. $p(a)$
  3. $\neg q(a)$
  4. $\neg p(X) \vee r(X)$
  5. $r(a)$ umg= $\{X/a\}$ Res(2, 4, p)
  6. $q(a)$ umg= $\{X/a\}$ Res(1, 5, r)
  7. $\square$ umg= $\{\}$ Res(3, 6, q)

Ejercicio

Demostrar mediante resolución

{ p(a) ,$\forall x \forall y$ (¬p(x) ∨ ¬q(f(x)) ∨ r(x,y)), $\forall x \forall y$ (q(x) ∨ r(y,x))} ⇒ $\exists x$ r(x,f(a))

- { p(a) ,$\forall x \forall y$ (¬p(x) ∨ ¬q(f(x)) ∨ r(x,y)), $\forall x \forall y$ (q(x) ∨ r(y,x)), ¬$\exists x$ r(x,f(a))} inconsistente
- Claúsulas: {p(a) , ¬p(x) ∨ ¬q(f(x)) ∨ r(x,y), q(x) ∨ r(y,x), ¬r(x,f(a))}

1.	p(a)		
2.	¬p(x) ∨ ¬q(f(x)) ∨ r(x,y)		
3.	q(x) ∨ r(y,x)		
4.	¬r(x,f(a))		
5.	q(f(a))	*umg= {x_1/y, x/f(a)}*	*Res(3, 4', r)*
6.	¬p(x) ∨ ¬q(f(x))	*umg= {x_2/x, y/f(a)}*	*Res(2, 4', r)*
7.	¬p(a)	*umg= {x/a}*	*Res(2, 5, q)*
8.	$\square$	*umg= {}*	*Res(1, 7, p)*

L1. Contenidos

- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas Sintácticas
  - Formalización
  - Semántica
    - Interpretación
    - Reglas Semánticas
    - Evaluación
  - Clasificación de Fórmulas y Equivalencias Lógicas
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Resolución General
    - Forma Normal de Skolem
    - Sustituciones y Unificación
    - Algoritmo de Resolución
  - Deducción Natural
- Propiedades

Deducción natural

- Se utilizan las mismas reglas de inferencia que en lógica proposicional
- Se añaden 2 reglas más por cada cuantificador

Reglas de inferencia nuevas lógica de predicados

∀I	$\boxed{\begin{array}{l}(t)\ \text{libre}\\ \vdots\\ A(t)\end{array}}$ $\overline{\forall x A(x)}$	∀E	$\dfrac{\forall x A(x)}{A(a)}$
∃I	$\dfrac{A(a)}{\exists x A(x)}$	∃E	$\exists x A(x)$ $\boxed{\begin{array}{l}A(t)\ \text{libre}\\ \vdots\\ B\end{array}}$ $\overline{B}$ Condición: $t \notin B$

t libre = el término t no puede aparecer en ninguna caja anterior abierta

Deducción natural. Ejemplo 1

Demostrar

- $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vdash Q(a)$
- $\{ \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a) \} \vdash \exists x\, Q(x)$

1	$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$	Premisa
2	$P(a)$	Premisa
3	$P(a)\rightarrow Q(a)$	$\forall$E 1
4	$Q(a)$	$\rightarrow$E 2,3
5	$\exists x\, Q(x)$	$\exists$I 4

Deducción natural. Ejemplo 2

Demostrar

- $\{\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)), \neg Q(a)\} \vdash \neg P(a)$

1.	$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$	Premisa
2.	$\neg Q(a)$	Premisa
3.	$P(a)\rightarrow Q(a)$	$\forall$E 1
4.	$P(a)$	Supuesto
5.	$Q(a)$	$\rightarrow$E 3,4
6.	$Q(a) \wedge \neg Q(a)$	$\wedge$I 2,5
7.	$\neg P(a)$	$\neg$I 4-6

Deducción natural. Ejemplo 3

Demostrar

- $\{ \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \} \vdash \forall x(P(x) \wedge Q(x))$

1.	$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	Premisa
2.	$\forall x\, P(x)$	$\wedge$E 1
3.	$\forall x\, Q(x)$	$\wedge$E 1
4.	(t) libre	
5.	$P(t)$	$\forall$E 2
6.	$Q(t)$	$\forall$E 3
7.	$P(t) \wedge Q(t)$	$\wedge$I 5,6
8.	$\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$	$\forall$I 4-7

Deducción natural. Ejemplo 4

Demostrar

- $\{ \forall x(P(x) \vee Q(x)), \forall x(P(x) \rightarrow R(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))\} \vdash \forall x R(x)$

1.	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	Premisa
2.	$\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$	Premisa
3.	$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$	Premisa
4.	(t) libre	
5.	$P(t) \vee Q(t)$	$\forall$E 1
6.	$P(t) \rightarrow R(t)$	$\forall$E 2
7.	$Q(t) \rightarrow R(t)$	$\forall$E 3
8.	$R(t)$	$\vee$E 5,6,7
9.	$\forall x R(x)$	$\forall$I 4-8

Deducción natural. Ejemplo 5

Demostrar

- $\{ \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \} \vdash \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$

1.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	Premisa
2.	$P(t) \wedge Q(t)$, t libre	Supuesto
3.	$P(t)$	$\wedge$E 2
4.	$\exists xP(x)$	$\exists$I 3
5.	$Q(t)$	$\wedge$E 2
6.	$\exists xQ(x)$	$\exists$I 5
7.	$\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$	$\wedge$I 4,6
8.	$\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$	$\exists$E 1, 2-7

Deducción natural. Ejemplo 6

Demostrar

- $\{\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)), \exists xP(x)\} \vdash \exists xQ(x)$

1.	$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$	Premisa
2.	$\exists xP(x)$	Premisa
3.	$P(t)$, t libre	Supuesto
4.	$P(t)\rightarrow Q(t)$	$\forall$E 1
5.	$Q(t)$	$\rightarrow$E 3,4
6.	$\exists xQ(x)$	$\exists$I 5
7.	$\exists xQ(x)$	$\exists$E 2, 3-6

Ejemplo de mal uso de variables libres

- $\{\exists x P(x), \exists x Q(x)\} \nvdash \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

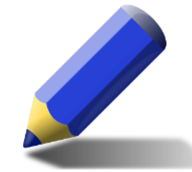
1	$\exists x P(x)$	Premisa
2	$\exists x Q(x)$	Premisa
3	$P(a)$, a libre	Supuesto
4	**$Q(a)$, a libre**	**Supuesto**
5	$P(a) \wedge Q(a)$	$\wedge$-I 3,4
6	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists$-I 5
7	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists$-E 2, 4-6
8	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists$-E 1, 3-7

a no es libre

¡OJO!

No podemos demostrar $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ a partir $\{\exists x P(x), \exists x Q(x)\}$.
Esta demostración no es correcta pues en el paso 4 no podemos suponer **Q(a) con a libre**, pues **a** no es libre

Ejercicio



Demostrar los siguientes razonamientos mediante deducción natural

$\{\exists x P(x)\} \vdash \neg\forall x \neg P(x)$

$\{\forall x(R(x)\rightarrow Q(x)), \exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))\} \vdash \exists x(P(x)\wedge\neg R(x))$

$\{\exists x(P(x)\vee Q(x)), \forall x(P(x) \rightarrow R(x,x)), \neg\exists x Q(x)\} \vdash \exists x R(x,x)$

$\{\neg\forall x\neg P(x)\} \vdash \exists x P(x)$ (**)

$\{\exists x\forall y P(x,y)\} \vdash \forall y\exists x P(x,y)$

Soluciones

- $\{\exists x P(x)\} \vdash \neg \forall x \neg P(x)$

1	$\exists x P(x)$	Premisa
2	$P(t)$, t libre	Supuesto
3	$\forall x \neg P(x)$	Supuesto
4	$\neg P(t)$	$\forall$-E 3
5	$P(t) \wedge \neg P(t)$	$\wedge$-I 2,4
6	$\neg \forall x \neg P(x)$	$\neg$-I 3-5
7	$\neg \forall x \neg P(x)$	$\exists$-E 1, 2-6

Soluciones

- $\{\forall x(R(x)\rightarrow Q(x)),\ \exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))\} \vdash \exists x(P(x)\wedge\neg R(x))$

1	$\forall x(R(x)\rightarrow Q(x))$	Premisa
2	$\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$	Premisa
3	$P(t) \wedge\neg Q(t)$, t libre	Supuesto
4	**P(t)**	$\wedge$-E 3
5	$\neg Q(t)$	$\wedge$-E 3
6	$R(t)\rightarrow Q(t)$	$\forall$-E 1
7	$R(t)$	Supuesto
8	$Q(t)$	$\rightarrow$-E 6,7
9	$Q(t) \wedge\neg Q(t)$	$\wedge$-I 5,8
10	$\boldsymbol{\neg R(t)}$	$\neg$-I 7-9
11	$P(t)\wedge\neg R(t)$	**$\wedge$-I** 4,10
12	$\exists x(P(x)\wedge\neg R(x))$	**$\exists$-I** 11
13	$\exists x(P(x)\wedge\neg R(x))$	**$\exists$-E 2,** 3-12

Soluciones

- $\{ \exists x(P(x) \vee Q(x)),\ \forall x(P(x) \rightarrow R(x,x)),\ \neg\exists x Q(x)\} \vdash \exists x R(x,x)$

1	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	Premisa
2	$\forall x(P(x) \rightarrow R(x,x))$	Premisa
3	$\neg\exists x Q(x)$	Premisa
4	$P(t) \vee Q(t)$, t libre	Supuesto
5	$P(t) \rightarrow R(t,t)$	$\forall$-E 2
6	$Q(t)$	Supuesto
7	$\neg R(t,t)$	Supuesto
8	$\exists x Q(x)$	$\exists$-I 6
9	$\exists x Q(x) \wedge \neg\exists x Q(x)$	$\wedge$-I 3,8
10	$R(t,t)$	$\neg$-E7-9
11	$Q(t) \rightarrow R(t,t)$	$\rightarrow$-I 6,10
12	$R(t,t)$	$\vee$-E 4,5,11
13	$\exists x R(x,x)$	$\exists$-I 12
14	$\exists x R(x,x)$	$\exists$-E 1, 4-13

Soluciones

- $\{\neg\forall x \neg P(x)\} \vdash \exists x P(x)$

1	$\neg\forall x\neg P(x)$	Premisa
2	$\neg\exists xP(x)$	Supuesto
3	(t) libre	Supuesto
4	$P(t)$	Supuesto
5	$\exists xP(x)$	$\exists$-I 4
6	$\exists xP(x)\wedge\neg\exists xP(x)$	$\wedge$-I 2,5
7	$\neg P(t)$	$\neg$-I 4-6
8	$\forall x\neg P(x)$	$\forall$-I 3-7
9	$\forall x\neg P(x)\wedge\neg\forall x\neg P(x)$	$\wedge$-I 1,8
10	$\exists xP(x)$	$\neg$-E 2-9

Soluciones

- $\{\exists x \forall y P(x,y)\} \vdash \forall y \exists x P(x,y)$

1	$\exists x \forall y P(x,y)$	Premisa
2	$\forall y\ P(a,y)$, a libre	Supuesto
3	(b), b libre	Supuesto
4	$P(a,b)$	$\forall$-E 2
5	$\exists x\ P(x,b)$	$\exists$-I 4
6	$\forall y \exists x P(x,y)$	$\forall$-I 3-5
7	$\forall y \exists x P(x,y)$	$\exists$-E1, 2-6

L1. Contenidos

- Sintaxis y Semántica
  - Alfabeto y Reglas Sintácticas
  - Formalización
  - Semántica
    - Interpretación
    - Reglas Semánticas
    - Evaluación
  - Clasificación de Fórmulas y Equivalencias Lógicas
- Prueba de la Consecuencia lógica
  - Resolución General
    - Forma Normal de Skolem
    - Sustituciones y Unificación
    - Algoritmo de Resolución
  - Deducción Natural
- Propiedades

Propiedades

- Lógica de predicados es **semidecidible**
  - Si una fórmula es consecuencia lógica lo detecta
  - Si no lo es, puede detectarlo o no

¿Otras lógicas?

- La lógica de predicados es un tipo de lógica
  - Lógica proposicional = orden 0
  - Lógica predicados = orden 1
  - Lógica de predicados de orden superior
- Existen numerosas ampliaciones
  - Lógica temporal, borrosa, …
- …o restricciones
  - Lógica clausal: programación lógica
  - Lógica descriptiva: ontologías y web semántica

Campo activo de investigación

L1. Bibliografía

- Arenas Alegría, L. *Lógica Formal para Informáticos*. Díaz de Santos, 1996.
- Cuena, J. *Lógica Informática*. Alianza Editorial, 1986.
- Huth, M., Ryan, M. *Logic in Computer Science*. Cambridge University Press, second edition, 2004.
- Ben Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science*. Springer-Verlag, third edition, 2012.