

LÓGICA

1. **(1 punto)** Formaliza el siguiente enunciado en el lenguaje de la Lógica de proposiciones, indicando cuáles son las proposiciones utilizadas: “Tomaré de postre un helado a no ser que haya brownie de chocolate o tarta de queso”.

Solución:

p: tomar helado de postre

q: haber brownie de chocolate

r: haber tarta de queso

$$\neg p \rightarrow (q \vee r)$$

2. **(1,5 puntos)** Formaliza el siguiente enunciado en el lenguaje de la Lógica de predicados: “A todos los que juegan al Fútbol les gusta el deporte, sin embargo no todos a los que les gusta el deporte juegan al Fútbol” (utilizando $J(x,y)$ =“x juega a y”, $G(x)$ =“a x le gusta el deporte” a=“Fútbol”).

Solución:

$$\forall x(J(x,a) \rightarrow G(x)) \wedge \exists x(G(x) \wedge \neg J(x,a))$$

3. **(1,5 puntos)** Determinar, por contradicción, si la siguiente fórmula es válida. Explique en qué consiste el método y justifique su respuesta.

$$(q \rightarrow t) \wedge (t \vee p \rightarrow q) \wedge (p \vee t \leftrightarrow r) \rightarrow (q \leftrightarrow r)$$

Solución: Suponemos que la fórmula **NO** es válida, y que, por tanto, existe una interpretación **I** que la hace **F**. Veamos si somos capaces de encontrar esa **I**

$$(q \rightarrow t) \wedge (t \vee p \rightarrow q) \wedge (p \vee t \leftrightarrow r) \rightarrow (q \leftrightarrow r)$$

$(q \rightarrow t) \wedge (t \vee p \rightarrow q) \wedge (p \vee t \leftrightarrow r)$ ha de ser **V**

$(q \leftrightarrow r)$ ha de ser **F**

a) $(q \rightarrow t)$ ha de ser **V**

b) $(t \vee p \rightarrow q)$ ha de ser **V**

c) $(p \vee t \leftrightarrow r)$ ha de ser **V**

No se puede seguir: dividimos en casos usando $(q \leftrightarrow r)$ F

Caso 1: $q : V$ y $r : F$ (propagar los valores de verdad q y r)

De a) t ha de ser V (se propaga)

En c) se llega a una contradicción $p \vee t \leftrightarrow r$ (V (al serlo t) $\leftrightarrow F$) es F y debería ser V

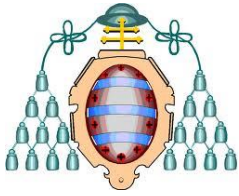
Caso 2: $q : F$ y $r : V$ (propagar los valores de verdad q y r)

De b) $t \vee p$ ha de ser F y, por tanto $t : F$ y $p : F$

En c) se llega a una contradicción $p \vee t \leftrightarrow r$ (F (al serlo *ambos*) $\leftrightarrow V$) es F y debería ser

V

Como lo que se llega a una contradicción en todos los casos posibles, la fórmula es Válida



4. **(2,5 puntos)** Demuestra, utilizando **Deducción Natural**, la corrección del siguiente razonamiento

$$\{\exists X p(X), \forall X (q(X) \rightarrow \neg p(X))\} \vdash \exists X \neg q(X)$$

Solución:

1.	$\exists X p(X)$	Premisa
2.	$\forall X (q(X) \rightarrow \neg p(X))$	Premisa
3.	$p(a), a \text{ libre}$	Supuesto
4.	$q(a) \rightarrow \neg p(a)$	$\forall\text{-E } 2$
5.	$q(a)$	Supuesto
6.	$\neg p(a)$	$\rightarrow\text{-E } 4,5$
7.	$p(a) \wedge \neg p(a)$	$\wedge\text{-I } 3,6$
8.	$\neg q(a)$	$\neg\text{-I } 5\text{-}7$
9.	$\exists X \neg q(X)$	$\exists\text{-I } 8$
10.	$\exists X \neg q(X)$	$\exists\text{-E } 1,3\text{-}9$

5. **(2,5 puntos)** Dado el siguiente razonamiento:

$$\{\forall x \forall y ((\neg R(y, x) \wedge P(x)) \rightarrow \neg Q(y, x)), \exists x \neg (P(x) \rightarrow \exists y R(y, x))\} \\ \vdash \exists x (P(x) \wedge \forall y \neg Q(y, x))$$

Demuestra, utilizando **Resolución**, que es correcto. **Justifica los pasos.**

Solución:

- a) **Forma clausal de** $\forall x \forall y ((\neg R(y, x) \wedge P(x)) \rightarrow \neg Q(y, x))$

Eliminación de la implicación: $\forall x \forall y [\neg(\neg R(y, x) \wedge P(x)) \vee \neg Q(y, x)]$

Introducción de negaciones: $\forall x \forall y [(R(y, x) \vee \neg P(x)) \vee \neg Q(y, x)]$

FClausal: $\{R(y, x) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(y, x)\}$

- b) **Forma clausal de** $\exists x \neg (P(x) \rightarrow \exists y R(y, x))$

Eliminación de la implicación: $\exists x \neg (\neg P(x) \vee \exists y R(y, x))$

Introducción de negaciones: $\exists x (P(x) \wedge \forall y \neg R(y, x))$

Sacar cuantificadores $\exists x \forall y (P(x) \wedge \neg R(y, x))$

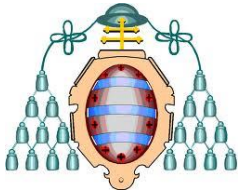
Eliminar cuantificadores existenciales (X/a): $\forall y (P(a) \wedge \neg R(y, a))$

FClausal: $\{P(a), \neg R(y, a)\}$

- c) **Forma clausal de la negación de la conclusión** $\neg \exists x (P(x) \wedge \forall y \neg Q(y, x))$

Introducción de negaciones: $\forall x (\neg P(x) \vee \exists y Q(y, x))$

Sacar cuantificadores $\forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y, x))$



Computabilidad

Apellidos, Nombre: DNI:

Eliminar \exists ($y/f(x)$): $\forall x (\neg P(x) \vee Q(f(x), x))$

FClausul: $\{\neg P(x) \vee Q(f(x), x)\}$

Conjunto de cláusulas: $\{R(y, x) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(y, x), P(a), \neg R(y, a), \neg P(x) \vee Q(f(x), x)\}$

Resolución:

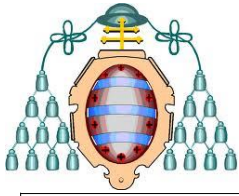
- | | | | |
|----|--|-------------------|-----------------|
| 1. | $R(y, x) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(y, x)$ | | |
| 2. | $P(a)$ | | |
| 3. | $\neg R(y, a)$ | | |
| 4. | $\neg P(x) \vee Q(f(x), x)$ | | |
| 5. | $\neg P(a) \vee \neg Q(y, a)$ | $\{x/a\}$ | R(1,3,R) |
| 6. | $\neg P(a)$ | $\{y/f(a), x/a\}$ | R(4,5,Q) |
| 7. | ■ | $\{\}$ | R(6,2,P) |

Conjunto de cláusulas inconsistente, luego el razonamiento es correcto

6. **(1 punto, pero si la respuesta es incorrecta resta 0,25 puntos)** Tenemos tres fórmulas F, G y H. Sabemos además que la fórmula $((H \leftrightarrow G) \vee \neg F)$ no es válida. De entre las siguientes fórmulas, ¿cuál es necesariamente satisfacible? (sólo hay una respuesta correcta).

- La fórmula G .
- La fórmula $\neg F \vee G$.
- La fórmula $G \rightarrow F$.
- La fórmula $H \rightarrow G$.

Solución: c.



Computabilidad

Apellidos, Nombre:.....DNI:.....

$\wedge I$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$	$\wedge E$	$\frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B}$
$\vee I$	$\frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B}$	$\vee E$	$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C}$
$\rightarrow I$	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}}{A \rightarrow B}$	$\rightarrow E$	$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$
$\leftrightarrow I$	$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}$	$\leftrightarrow E$	$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B} \quad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$
$\neg I$	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \wedge \neg B \end{array}}}{\neg A}$	$\neg E$	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg A \\ \vdots \\ B \wedge \neg B \end{array}}}{A}$
$\vee I$	$\frac{A \vee \neg A}{\mathbf{V}}$	$\vee E$	$\frac{\mathbf{V}}{A \vee \neg A}$
$F I$	$\frac{A \wedge \neg A}{\mathbf{F}}$	$F E$	$\frac{\mathbf{F}}{A}$

$\forall I$	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} (t) \text{ libre} \\ \vdots \\ A(t) \end{array}}}{\forall x A(x)}$	$\forall E$	$\frac{\forall x A(x)}{A(a)}$
$\exists I$	$\frac{A(a)}{\exists x A(x)}$	$\exists E$	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \exists x A(x) \\ A(t) \text{ libre} \\ \vdots \\ B \end{array}}}{B} \quad \boxed{\text{Condición: } t \notin B}$

t libre = el término t no puede aparecer en ninguna caja anterior abierta