1. ***(1.25 puntos)*** Formaliza el siguiente enunciado en el lenguaje de la Lógica de proposiciones, indicando cuáles son las proposiciones utilizadas: "*Sólo madrugo si ceno pronto y voy temprano a la cama, pero es suficiente no poner el despertador para que no madrugue*".

Solución:

p: madrugo
q: ceno pronto
r: voy temprano a la cama
s: pongo el despertador

$$(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \wedge (\neg \boldsymbol{s} \rightarrow \neg \boldsymbol{p})$$

2. ***(1,75 puntos)*** Formaliza el siguiente enunciado en el lenguaje de la Lógica de predicados: "Es necesario que una persona sea envidiada por alguien para que sea interesante, además solo las personas que no son interesantes caen bien a todo el mundo." Utiliza los siguientes predicados: I(x): x es una persona interesante, E(x,y): x tiene envidia de y, y C(x,y): a x le cae bien y.

Solución: $\forall \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \exists \boldsymbol{y} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\big) \wedge \forall \boldsymbol{x}(\forall \boldsymbol{y} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \rightarrow \neg \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}))$

3. ***(2 puntos)*** Demuestra, utilizando **Deducción Natural**, la corrección del siguiente razonamiento:

$$\{ p \rightarrow q \wedge s, \neg q \rightarrow \neg r, p \vee \neg q \} \Rightarrow \neg r \vee s$$

Solución:

1.	$p \rightarrow q \wedge s$	**Premisa**
2.	$\neg q \rightarrow \neg r$	**Premisa**
3.	$p \vee \neg q$	**Premisa**
4.	p	**Supuesto**
5.	$q \wedge s$	**→-E 1,4**
6.	s	**∧-E 5**
7.	$\neg r \vee s$	**∨-I 6**
8.	$p \rightarrow \neg r \vee s$	**→-I 4-7**
9.	$\neg q$	**Supuesto**
10.	$\neg r$	**→-E 2,9**
11.	$\neg r \vee s$	**∨-I 10**
12.	$\neg q \rightarrow \neg r \vee s$	**→-I 9-11**
13.	$\neg r \vee s$	**∨- E 3,8,12**

4. ***(1 punto)*** Demuestra la corrección del anterior razonamiento mediante **prueba por contradicción**

Solución:

$$(p \to q \wedge s) \wedge (\neg q \to \neg r) \wedge (p \vee \neg q) \to (\neg r \vee s)$$

Tratamos de encontrar una interpretación I que haga la fórmula Falsa
$(p \to q \wedge s) \wedge (\neg q \to \neg r) \wedge (p \vee \neg q)$ **ha de ser V**
$(\neg r \vee s)$ **ha de ser F**
$(\neg r)$ **ha de ser F (r ha de ser V) y s ha de ser F**

$(p \to q \wedge s)$ **ha de ser V**
$(\neg q \to \neg r)$ **ha de ser V**
$(p \vee \neg q)$ **ha de ser V**

$q \wedge s$ **es F (al serlo s), luego p ha de ser F (para que sea V $p \to q \wedge s$)**
$(p \vee \neg q)$ V con (p) F, obligan a que $(\neg q)$ sea V, o sea (q) ha de ser F
Al ser $\neg q \to \neg r$ ***V; con $(\neg q)$ V y $(\neg r)$*** **F** $\neg q \to \neg r$ ***es F, con lo que se llega a una contradicción.***
La fórmula es Válida

5. Dado el siguiente razonamiento:

$$\{\forall x(P(x) \wedge Q(x) \to S(x)), \neg\exists x(\neg R(x) \wedge \exists y\, S(y))\} \vDash \forall x\left(P(x) \to (Q(x) \to \exists y\, R(y))\right)$$

a. ***(1,75 puntos)*** Demuestra, utilizando **Resolución**, que es correcto
b. ***(0,5 puntos)*** Escribir otro razonamiento distinto cuya corrección esté demostrada con la inconsistencia del conjunto de cláusulas obtenidas en el apartado a).

Solución:

a) Forma clausal de $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \to S(x))$

Eliminación de la implicación: $\forall \boldsymbol{x}[\neg(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})) \vee \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})]$

Introducción de negaciones: $\forall \boldsymbol{x}[(\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})) \vee \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})]$

FClausal: $\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$

b) Forma clausal de $\neg\exists x(\neg R(x) \wedge \exists y\, S(y))$

Introducción de negaciones: $\forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \vee \forall \boldsymbol{y} \neg \boldsymbol{S}(\boldsymbol{y}))$

Sacar cuantificadores $\forall \boldsymbol{x}\, \forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{S}(\boldsymbol{y}))$

FClausal: $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{S}(\boldsymbol{y})$

c) Si $\forall x\left(P(x) \to (Q(x) \to \exists y\, R(y))\right)$ **es la conclusión, debe negarse y pasarse a FC:**

$$\neg\forall x\left(P(x) \to (Q(x) \to \exists y\, R(y))\right)$$

Eliminación de la implicación: $\neg\forall x\left(\neg P(x) \vee (\neg Q(x) \vee \exists y\, R(y))\right)$

Introducción de negaciones: $\exists \boldsymbol{x}\left(P(x) \wedge (Q(x) \wedge \forall y\, \neg R(y))\right)$

Sacar cuantificadores: $\exists x \forall y \left(P(x) \wedge \left(Q(x) \wedge \neg R(y)\right)\right)$

Eliminar cuantificadores existenciales (x/a): $\forall y \left(P(a) \wedge \left(Q(a) \wedge \neg R(y)\right)\right)$

FClausal: $\{P(a), Q(a), \neg R(y)\}$

Conjunto de cláusulas: $\{\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{S}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a}), \neg \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y})\}$

d) Resolución:

1.	$\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$	
2.	$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{S}(\boldsymbol{y})$	
3.	$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a})$	
4.	$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a})$	
5.	$\neg \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y})$	
6.	$\neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a}) \vee \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a})$	**R(1,3,{x/a})**
7.	$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a})$	**R(6,4,{ })**
8.	$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$	**R(7,2,{y/a})**
9.	$\blacksquare$	**R(8,5,{y/x})**

Conjunto de cláusulas inconsistente, luego el razonamiento es correcto

Razonamiento alternativo:

$$\{\forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow S(x)), \neg \forall x \left(P(x) \rightarrow \left(Q(x) \rightarrow \exists y\, R(y)\right)\right)\} \vDash \exists x(\neg R(x) \wedge \exists y\, S(y))$$

6. ***(0,75 puntos)*** Estamos utilizando un programa prolog para definir la distribución de fichas en un tablero, para lo cual tenemos los predicados: `distancia1(X,Y)`, que indica que la ficha X está a distancia 1 de la ficha Y, y `color(X,Y)` que nos indica que la ficha X es de color Y. Define la relación `amarilla2(X,Y)` que nos indica si la ficha X está a distancia 2 de una ficha Y amarilla.

Solución:

- **`amarilla2(X,Y):- distancia1(X,Z),distancia1(Z,Y),color(Y,amarilla).`**

7. ***(1 punto,* pero si la respuesta es incorrecta resta 0,3 puntos)** Tenemos tres fórmulas F, G y H. Sabemos además que la fórmula $(F \wedge G) \rightarrow H$ **no** es válida. De entre las siguientes fórmulas, ¿cuál es necesariamente satisfacible? (sólo hay una respuesta correcta).

   a. La fórmula H
   b. La fórmula $\neg F \vee H$
   c. La fórmula $\neg F \vee G$
   d. La fórmula $\neg G \wedge \neg H$

Solución: c.