LÓGICA

1. ***(1 punto)*** Formaliza el siguiente enunciado en el lenguaje de la Lógica de proposiciones, indicando cuáles son las proposiciones utilizadas: *"Tomaré de postre un helado a no ser que haya brownie de chocolate o tarta de queso".*

Solución:

p: tomar helado de postre
q: haber brownie de chocolate
r: haber tarta de quedo

$$\neg p \rightarrow (q \vee r)$$

2. ***(1,5 puntos)*** Formaliza el siguiente enunciado en el lenguaje de la Lógica de predicados: "A todos los que juegan al Fútbol les gusta el deporte, sin embargo no todos a los que les gusta el deporte juegan al Fútbol" (utilizando J(x,y)="x juega a y", G(x)="a x le gusta el deporte" a="Fútbol").

Solución:

$$\forall x(J(x,a) \rightarrow G(x)) \wedge \exists x\big(G(x) \wedge \neg J(x,a)\big)$$

3. ***(1,5 puntos)*** *Determinar, por contradicción, si la siguiente fórmula es válida.* **Explique en qué consiste el método y justifique su respuesta.**

$$(q \rightarrow t) \wedge (t \vee p \rightarrow q) \wedge (p \vee t \leftrightarrow r) \rightarrow (q \leftrightarrow r)$$

Solución: Suponemos que la fórmula **NO** es válida, y que, por tanto, existe una interpretación **I** que la hace **F.** Veamos si somos capaces de encontrar esa **I**

$$(q \rightarrow t) \wedge (t \vee p \rightarrow q) \wedge (p \vee t \leftrightarrow r) \rightarrow (q \leftrightarrow r)$$

$(q \rightarrow t) \wedge (t \vee p \rightarrow q) \wedge (p \vee t \leftrightarrow r)$ **ha de ser V**
$(q \leftrightarrow r)$ **ha de ser F**

a) $(q \rightarrow t)$ **ha de ser V**
b) $(t \vee p \rightarrow q)$ **ha de ser V**
c) $(p \vee t \leftrightarrow r)$ **ha de ser V**

No se puede seguir: dividimos en casos usando $(q \leftrightarrow r)$ **F**
Caso 1: q **: V y** r **: F (propagar los valores de verdad** q y r**)**
De a) t **ha de ser V (se propaga)**
En c) se llega a una contradicción $p \vee t \leftrightarrow r$ **(V (al serlo** t**)** $\leftrightarrow$ **F) es F y debería ser V**
Caso 2: q **: F y** r **: V (propagar los valores de verdad** q y r**)**
De b) $t \vee p$ **ha de ser F y, por tanto** t **: F y** p **: F**
En c) se llega a una contradicción $p \vee t \leftrightarrow r$ **(F (al serlo *ambos*)** $\leftrightarrow$ **V) es F y debería ser V**

Como lo que se llega a una contradicción en todos los casos posibles, la fórmula es Válida

4. ***(2,5 puntos)*** Demuestra, utilizando **Deducción Natural**, la corrección del siguiente razonamiento

$$\{\exists X p(X), \forall X(q(X) \rightarrow \neg p(X))\} \vdash \exists X \neg q(X)$$

Solución:

1.	$\exists X p(X)$	**Premisa**
2.	$\forall X(q(X) \rightarrow \neg p(X))$	**Premisa**
3.	$p(a), a\ libre$	**Supuesto**
4.	$q(a) \rightarrow \neg p(a)$	**∀-E 2**
5.	$q(a)$	**Supuesto**
6.	$\neg p(a)$	**→-E 4,5**
7.	$p(a) \wedge \neg p(a)$	**∧-I 3,6**
8.	$\neg q(a)$	**¬-I 5-7**
9.	$\exists X \neg q(X)$	**∃-I 8**
10.	$\exists X \neg q(X)$	**∃-E 1,3-9**

5. ***(2,5 puntos)*** Dado el siguiente razonamiento:

$$\left\{\forall x\, \forall y\left(\left(\neg R(y,x) \wedge P(x)\right) \rightarrow \neg Q(y,x)\right), \exists x \neg\left(P(x) \rightarrow \exists y R(y,x)\right)\right\}$$
$$\vdash\ \exists x\left(P(x) \wedge \forall y\, \neg Q(y,x)\right)$$

Demuestra, utilizando **Resolución**, que es correcto. **Justifica los pasos**.

Solución:

a) Forma clausal de $\forall x\, \forall y\left(\left(\neg R(y,x) \wedge P(x)\right) \rightarrow \neg Q(y,x)\right)$

Eliminación de la implicación: $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\left[\neg\left(\neg R(y,x) \wedge P(x)\right) \vee \neg Q(y,x)\right]$

Introducción de negaciones: $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\left[\left(R(y,x) \vee \neg P(x)\right) \vee \neg Q(y,x)\right]$

FClausal: $\{R(y,x) \vee \neg P(x)\ \vee \neg Q(y,x)\}$

b) Forma clausal de $\exists x \neg\left(P(x) \rightarrow \exists y R(y,x)\right)$

Eliminación de la implicación: $\exists x \neg\left(\neg P(x) \vee \exists y R(y,x)\right)$

Introducción de negaciones: $\exists x\ (P(x) \wedge \forall y \neg R(y,x))$

Sacar cuantificadores $\exists \boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{y}(P(x) \wedge \neg R(y,x))$

Eliminar cuantificadores existenciales (X/a): $\forall y(P(a) \wedge \neg R(y,a))$

FClausal: $\{P(a), \neg R(y,a)\}$

c) Forma clausal de la negación de la conclusión $\neg\exists x\left(P(x) \wedge \forall y\, \neg Q(y,x)\right)$

Introducción de negaciones: $\forall x\ (\neg P(x) \vee \exists y Q(y,x))$

Sacar cuantificadores $\forall \boldsymbol{x}\ \exists \boldsymbol{y}(\neg P(x) \vee Q(y,x))$

Eliminar ∃ (y/f(x)): $\forall \boldsymbol{x}\ (\neg P(x) \vee Q(f(x), x))$

FClausal: $\{\neg P(x) \vee Q(f(x), x)\}$

Conjunto de cláusulas: $\{R(y, x) \vee \neg P(x)\ \vee \neg Q(y, x), P(a), \neg R(y, a), \neg P(x) \vee Q(f(x), x)\}$

Resolución:

1.	$R(y, x) \vee \neg P(x)\ \vee \neg Q(y, x)$		
2.	$P(a)$		
3.	$\neg R(y, a)$		
4.	$\neg P(x) \vee Q(f(x), x)$		
5.	$\neg P(a)\ \vee \neg Q(y, a)$	**{x/a}**	**R(1,3,*R*)**
6.	$\neg P(a)$	**{y/f(a),x/a}**	**R(4,5,*Q*)**
7.	■	**{}**	**R(6,2,*P*)**

Conjunto de cláusulas inconsistente, luego el razonamiento es correcto

6. ***(1 punto, pero si la respuesta es incorrecta resta 0,25 puntos)*** Tenemos tres fórmulas F, G y H. Sabemos además que la fórmula $((\mathrm{H} \leftrightarrow \mathrm{G}) \vee \neg \mathrm{F})$ no es válida. De entre las siguientes fórmulas, ¿cuál es necesariamente satisfacible? (sólo hay una respuesta correcta).

   a. La fórmula G.
   b. La fórmula $\neg F \vee G$.
   c. La fórmula $G \to F$.
   d. La fórmula $H \to G$.

Solución: c.

Computabilidad

Apellidos, Nombre:……………………………………………….DNI:…………………

$\wedge$I	$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}$	$\wedge$E	$\dfrac{A \wedge B}{A}$ $\qquad$ $\dfrac{A \wedge B}{B}$
$\vee$I	$\dfrac{A}{A \vee B}$ $\qquad$ $\dfrac{B}{A \vee B}$	$\vee$E	$\dfrac{A \vee B \quad A \to C \quad B \to C}{C}$
$\to$I	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B\end{array}}}{A \to B}$	$\to$E	$\dfrac{A \qquad A \to B}{B}$
$\leftrightarrow$I	$\dfrac{A \to B \qquad B \to A}{A \leftrightarrow B}$	$\leftrightarrow$E	$\dfrac{A \leftrightarrow B}{A \to B}$ $\qquad$ $\dfrac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$
$\neg$I	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B \wedge \neg B\end{array}}}{\neg A}$	$\neg$-E	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg A\\ \vdots\\ B \wedge \neg B\end{array}}}{A}$
V-I	$\dfrac{A \vee \neg A}{\mathbf{V}}$	V-E	$\dfrac{\mathbf{V}}{A \vee \neg A}$
F-I	$\dfrac{A \wedge \neg A}{\mathbf{F}}$	F-E	$\dfrac{\mathbf{F}}{A}$

$\forall$I	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\text{(t) libre}\\ \vdots\\ A(t)\end{array}}}{\forall x A(x)}$	$\forall$E	$\dfrac{\forall x A(x)}{A(a)}$	
$\exists$I	$\dfrac{A(a)}{\exists x A(x)}$	$\exists$E	$\dfrac{\begin{array}{c}\exists x A(x)\\ \boxed{\begin{array}{c}A(t)\ \text{libre}\\ \vdots\\ B\end{array}}\end{array}}{B}$	$\boxed{\begin{array}{c}\text{Condición:}\\ t \notin B\end{array}}$

t libre = el término t no puede aparecer en ninguna caja anterior abierta