Ejercicio 1. 1 *Calcule los errores absolutos y relativos cometidos al aproximar* $x = 1$ *por* $x^* = 2$ *e* $y = 1000$ *por* $y^* = 1001$*.*

Solución: Para $x = 1$:

$$e_{abs} = |1-2| = 1, \quad \delta_1 = \frac{|1-2|}{|1|} = 1, \quad \delta_1 \times 100 = 100\,\%$$

Para $x = 1000$:

$$e_{abs} = |1000-1001| = 1, \quad \delta_{1000} = \frac{|1000-1001|}{|1000|} = 0.001, \quad \delta_{1000} \times 100 = 0.1\,\%$$

Ejercicio 1. 2 *El cálculo experimental de la constante de un muelle elástico produce el valor de* 29.25*. Sabiendo que el error relativo cometido no supera el* 1 %*, calcule los valores posibles de dicha constante.*

Solución:

$$\frac{|x-29.25|}{|x|} \leqslant 0.01$$

Separamos en dos casos, primero si $x < 0$,

$$|x-29.25| \leqslant -0.01x \Rightarrow 0.01x \leqslant x - 29.25 \leqslant -0.01x \Rightarrow$$

$$0.01x \leqslant x - 29.25 \Rightarrow 29.25 \leqslant 0.99x < 0!!$$

Ahora si $x > 0$

$$|x-29.25| \leqslant 0.01x \Rightarrow -0.01x \leqslant x - 29.25 \leqslant 0.01x$$

$$-0.01x \leqslant x - 29.25 \Rightarrow 29.25 \leqslant 1.01x \Rightarrow x \geqslant \frac{29.25}{1.01} = 28.96\ldots$$

$$x - 29.25 \leqslant 0.01x \Rightarrow 0.99x \leqslant 29.25 \Rightarrow x \leqslant \frac{29.25}{0.99} = 29.545\ldots$$

$$x \in [28.96\ldots, 29.545\ldots]$$

Ejercicio 1. 3 *Halle los números reales que son representados por* 1000 *con una precisión de al menos cuatro dígitos.*

Solución:

$$\frac{|x-1000|}{|x|} \leqslant 5 \cdot 10^{-4} = 0.0005$$

Separamos en dos casos, primero si $x < 0$,

$$|x-1000| \leqslant -0.0005x \Rightarrow 0.0005x \leqslant x - 1000 \leqslant -0.0005x \Rightarrow$$

$$0.0005x \leqslant x - 1000 \Rightarrow 1000 \leqslant 0.9995x < 0!!$$

Ahora si $x > 0$

$$|x - 1000| \leqslant 0.0005x \Rightarrow -0.0005x \leqslant x - 1000 \leqslant 0.0005x$$

$$-0.0005x \leqslant x - 1000 \Rightarrow 1000 \leqslant 1.0005x \Rightarrow x \geqslant \frac{1000}{1.0005} = 999.500249875\ldots$$

$$x - 1000 \leqslant 0.0005x \Rightarrow 0.9995x \leqslant 1000 \Rightarrow x \leqslant \frac{1000}{0.9995} = 1000.50025\ldots$$

$$x \in [999.500249875\ldots, 1000.50025\ldots]$$

Ejercicio 1. 4 *Calcule con cuantas cifras significativas aproxima* 200 *a* 199 *y con cuantas aproxima* 199 *a* 200.

Solución:

$$0.5 \cdot 10^{-2} < \frac{|199 - 200|}{|199|} = 0.00502512562814 \leqslant 5 \cdot 10^{-2}$$

dos cifras significativas.

$$0.5 \cdot 10^{-3} < \frac{|200 - 199|}{|200|} = 0.005 \leqslant 5 \cdot 10^{-3}$$

tres cifras significativas.

Ejercicio 1. 5 *Utilizando aritmética de dos dígitos,*

1. *Halle el número máquina que sigue a* 1 *y el que sigue a* 10.
2. *Calcule cuántos números máquina hay en los intervalos* $[1, 10]$ *y* $[10, 100]$.

Solución:

1. Como estamos con 2 dígitos de precisión, el siguiente número máquina se obtiene sumando $0.01 \cdot 10^n$. Dado 1, normalizado es $0.1 \cdot 10^1$, luego el siguiente es:

$$0.1 \cdot 10^1 + 0.01 \cdot 10^1 = 0.11 \cdot 10^1 = 1.1$$

Dado 10, normalizado es $0.1 \cdot 10^2$, luego el siguiente es:

$$0.1 \cdot 10^2 + 0.01 \cdot 10^2 = 0.11 \cdot 10^2 = 11$$

Con la notación normalizada, la solución es totalmente análoga, simplemente cambiando el exponente 1 por 2.

2. Ya hemos visto que empezando por 1, el siguiente número máquina sería 1.1, luego 1.2, ...

1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	
2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	
3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	
4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	
5	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	
6	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	
7	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	
8	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	
9	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10

luego en total hay 91 números máquina, 10 por cada intervalo entre enteros consecutivos (que son 9) más el 10 final.

Para el intervalo $[10, 100]$ la solución es totalmente análoga, basta con multiplicar toda la tabla anterior por diez, luego el resultado es el mismo, 91 números máquina.

Ejercicio 1. 6 *Sea* $\pi = 3.141592\cdots$. *Calcule su aproximación por redondeo en una máquina con aritmética de 3, 4 y 5 dígitos.*

Solución: Para 3 dígitos $\pi^* = 3.14$, para 4 dígitos $\pi^* = 3.142$ y para 5 cifras $\pi^* = 3.1416$.

Ejercicio 1. 7 *Sea* $x = 17.01$ *y considere una máquina con aritmética de 4 dígitos. Calcule el número real positivo mas pequeño que sumado a* x *da un número distinto de* x. *Misma cuestión para* $x = 1.7$.

Solución: En la notación normalizada, se obtiene $17.01 = 0.1701 \cdot 10^2$, luego el siguiente número máquina es $0.1701 \cdot 10^2 + 0.0001 \cdot 10^2 = 0.1702 \cdot 10^2$ y, por tanto, el número pedido es $\frac{0.1702 \cdot 10^2 - 0.1701 \cdot 10^2}{2} = 0.005$, ya que 17.01+0.005=17.015 es el primer número que redondea a 17.02

En la notación normalizada, se obtiene $1.7 = 0.1700 \cdot 10^1$, luego el siguiente número máquina es $0.1700 \cdot 10^1 + 0.0001 \cdot 10^1 = 0.1701 \cdot 10^1$ y, por tanto, el número pedido es $\frac{0.1701 \cdot 10^1 - 0.1700 \cdot 10^1}{2} = 0.0005$, ya que 1.7+0.0005=1.7005 es el primer número que redondea a 1.701

Ejercicio 1. 8 *Halle los números reales que son representados por* 1000 *en una máquina con aritmética de* 4 *dígitos y aproximación por redondeo.*

Solución: El siguiente número máquina a 1000 es 1001, luego el primer número que redondea a 1001 es $\frac{1000+1001}{2} = 1000.5$, luego los anteriores redondean a 1000, o sea, si $x \in [1000, 1000.5)$, se representa por 1000. El anterior número máquina a 1000 es 999.9, luego el primer número que redondea a 1000 es $\frac{1000+999.9}{2} = 999.95$, luego los anteriores redondean a 999.9, o sea, si $x \in [999.95, 1000]$, se representa por 1000.

Por tanto, todos los números del intervalo $[999.95, 1000.5)$ son representados por 1000.

Ejercicio 1. 9 *Calcule el error relativo cometido al realizar la diferencia entre* $x = 0.6793$ *e* $y = 0.6751$ *usando aritmética de dos dígitos.*

Solución: El resultado de la diferencia calculado con aritmética de 2 dígitos es: $x^* = 0.68$ e $y^* = 0.68$. $r_m = x^* - y^* = 0.68 - 0.68 = 0$. El resultado exacto es $r = x - y = 0.6793 - 0.6751 = 0.0042$. Luego el error relativo cometido es

$$\delta_x = \frac{|r - r_m|}{|r|} = \frac{|0.0042 - 0|}{|0.0042|} = 1 = 100\,\%$$

Ejercicio 1. 10 *Dada la ecuación de segundo grado* $ax^2 + bx + c = 0$*, las soluciones pueden expresarse por:* $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$ *Usando ambas expresiones, calcule los dígitos de precisión que se obtienen al calcular las soluciones con aritmética de una cifra y los datos* $a = 1$*,* $b = -3$*,* $c = 2$ *y con aritmética de cuatro dígitos y los datos* $a = 1$*,* $b = 62.10$*,* $c = 1$*. Las soluciones exactas son* $x_1 = 2$*,* $x_2 = 1$ *y* $x_1 = -0.01610723$*,* $x_2 = -62.08390$.

Solución:

- $$a = a^* = 1, \; b = b^* = -3, \; c = c^* = 2$$
- $$(b^* b^*)^* = ((b^*)^2)_* = ((-3)^2)^* = 9$$
- $$((4a^*)^* c^*)^* = (4c^*)^* = (4 \cdot 2)^* = 8$$
- $$(\sqrt{((b^* b^*)^* - ((4a^*)^* c^*)^*)^*})^* = (\sqrt{(9-8)^*})^* = (\sqrt{1})^* = 1$$
- Usando $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $$x_{1m} = \frac{-(-3) + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
- $\delta_{x_1} = \dfrac{|2-2|}{|2|} = 0$ **(Solución exacta)**
- Usando $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $$x_{2m} = \frac{-(-3) - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

- $\delta_{x_2} = \frac{|1-1|}{|1|} = 0$ **(Solución exacta)**
- Usando $x_1 = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$
- $x_{1m} = \frac{-2\cdot 2}{-3+1} = \frac{-4}{-2} = 2$
- $\delta_{x_1} = \frac{|2-2|}{|2|} = 0$ **(Solución exacta)**
- Usando $x_2 = \frac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}$
- $x_{2m} = \frac{-2\cdot 2}{-3-1} = \frac{-4}{-4} = 1$
- $\delta_{x_2} = \frac{|1-1|}{|1|} = 0$ **(Solución exacta)**
- $a = a^* = 1, \ b = b^* = 62.1, \ c = c^* = 1$
- $(b^*b^*)^* = ((b^*)^2)_* = ((62.1)^2)^* = (3856.41)^* = 3856$
- $((4a^*)^*c^*)^* = (4c^*)^* = (4\cdot 1)^* = 4$
- $(\sqrt{((b^*b^*)^* - ((4a^*)^*c^*)^*)^*})^* = (\sqrt{(3856-4)^*})^* = (62.0644...)^* = 62.06$
- Usando $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- $x_{1m} = \frac{-62.10+62.06}{2.000} = -0.0200$
- $\delta_{x_1} = \frac{|-0.01610723-(-0.02)|}{|-0.01610723|} \approx 0.2417 = 2.417\times 10^{-1}$
  (Un dígito de precisión, pérdida de 3 dígitos)
- Usando $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- $x_{2m} = \frac{-62.10-62.06}{2.000} = \frac{-124.2}{2.000} = -62.10$
- $\delta_{x_2} = \frac{|-62.0839-(-62.10)|}{|-62.0839|} \approx 2.59\times 10^{-4}$
  (Cuatro dígitos de precisión, se conserva la precisión)
- Usando $x_1 = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$

- $$x_{1m} = (\frac{-2.000}{(62.10+62.06)^*})^* = (\frac{-2.000}{124.2})^* = (-0.016103...)^* = -0.0161$$

- $\delta_{x_1} = \dfrac{|-0.01610723-(-0.0161)|}{|-0.01610723|} \approx 4.5 \times 10^{-4}$
(Cuatro dígitos de precisión, se conserva la precisión)

- Usando $x_2 = \dfrac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}$

- $x_{2m} = \dfrac{-2.000}{62.10-62.06} = \dfrac{-2.000}{0.04} = -50$

- $\delta_{x_2} = \dfrac{|-62.0839-(-50)|}{|-62.0839|} \approx 1.9 \times 10^{-1}$
(Un dígito de precisión, pérdida de 3 dígitos)

Ejercicio 1. 11 *Compruebe que, con aritmética de precisión finita, no se verifica la propiedad asociativa: Utilizando aritmética de tres dígitos y los valores* $x=-1000$, $y=1000$, $z=1$ *verifique que* $(x^*+(y^*+z^*)^*)^* \neq ((x^*+y^*)^*+z^*)^*$

Solución:

- $x^* = x = -1000$, $y^* = y = 1000$, $z^* = z = 1$
- $(y^*+z^*) = (1001)^* = 1000$
- $(x^*+(y^*+z^*)^*)^* = ((-1000)+(1000))^* = 0^* = 0$
- $(x^*+y^*) = ((-1000)+(1000))^* = 0^* = 0$
- $((x^*+y^*)^*+z^*)^* = (0+1)^* = 1^* = 1$
- $(x^*+(y^*+z^*)^*)^* = 0 \neq 1 = ((x^*+y^*)^*+z^*)^*$

Ejercicio 1. 12 *Compruebe que, con aritmética de 6 dígitos, el punto medio de* $a = 0.742531$ *y* $b = 0.742533$ *no está comprendido entre* a *y* b.

Solución:

- $(a+b)^* = (1.485064)^* = 1.48506$
- $\dfrac{(a+b)^*}{2} = 0.742530$
- $0.742530 < a$