Tema 6: Optimización numérica.

Ejercicio 1 *Calcule una aproximación del mínimo de la función*

$$g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 40 \qquad\qquad x \in [-1,1]$$

aplicando dos iteraciones del método de la sección de oro.

Ejercicio 2 *Realice dos iteraciones del método de la sección de oro para obtener una aproximación de:*

$$\min_{x\in[0,2]} \; (x^2 - x)$$

Ejercicio 3 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ *realice una iteración del método de la sección de oro para obtener una aproximación del mínimo de* f *en el intervalo* $[-1,1]$. *¿Cuántas iteraciones garantizarían que el mínimo estuviera en un intervalo de longitud menor que* 10^{-1}*?*

Ejercicio 4 *Realice una iteración del método de máxima pendiente para el problema de minimización*

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \; (x^2 + y^2 + 2x - y + 1)$$

partiendo del punto $\mathbf{x}^0 = (1,\ 0)$. *Aplique una iteración del método de la sección de oro para*

$$\min_{\lambda\geq 0} g(\lambda) = \min_{\lambda} f(\mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{d}^k)$$

comenzando en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 5 *Realice dos iteraciones del método del gradiente conjugado (Fletcher-Reeves) para el problema de minimización*

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \; (x^2 + y^2 + 2x - y + 1)$$

partiendo del punto $\mathbf{x}^0 = (1,\ 0)$. *Aplique una iteración del método de la sección de oro para*

$$\min_{\lambda\geq 0} g(\lambda) = \min_{\lambda} f(\mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{d}^k)$$

comenzando en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 6 *Calcule una aproximación de la solución del sistema no lineal*

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ xy & = & 1 \end{array}\right\}$$

realizando una iteración del método de máxima pendiente sobre la función $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (xy-1)^2$. *Considere como estimación inicial* $\mathbf{x}^0 = (0,0)$ *y aplique una iteración del método de la sección de oro para*

$$\min_{\lambda\geq 0} g(\lambda) = \min_{\lambda} f(\mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{d}^k)$$

comenzando en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 7 *Resuelva gráficamente y mediante el método de Símplex el problema de programación lineal de maximizar la función* $f(x,y) = 3x+5y$ *con restricciones* $x \leq 4$, $y \leq 3$, $x+y \leq 6$, $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$.

Ejercicio 8 *Un constructor construye tres tipos de pisos que en lo sucesivo se denominarán modelo I, modelo II y modelo III. La ganancia en los pisos del modelo I se estima es de 45000€, en los del modelo II de 40000€ y en los del modelo III de 35000€. La construcción anual de estos modelos de pisos está limitada por dos factores: el número de horas de trabajo cualificado que se supone es 20000 horas/año y la inversión total a realizar por año que se supone es de 3750000€. El número de horas de trabajo cualificado que requiere cada tipo de piso es 1750, 1500 y 1000 respectivamente, así como el capital que se necesita invertir en la construcción de cada tipo de piso es 37500, 30000 y 15000 respectivamente. Todos estos datos se pueden recoger en la siguiente tabla:*

Recursos	*Tipo I*	*Tipo II*	*Tipo III*	*Totales*
Horas	*1750*	*1500*	*1000*	*20000*
Inversión	*37500*	*30000*	*15000*	*3750000*
Beneficio	*45000*	*40000*	*35000*	

Si se supone que no se venderá ningún piso antes de terminar el año y que se venderán todos los pisos construidos, calcule por el método de Símplex, cuantos pisos de cada tipo se deben construir para que el beneficio sea máximo.

Ejercicio 9 *Una pequeña empresa tiene tres empleados que trabajan durante 40 horas semanales cada uno en la elaboración de dos tipos de productos* P_1 *y* P_2*. El producto del tipo* P_1 *requiere tres horas de trabajo mientras que el* P_2 *requiere para su elaboración 4 horas de trabajo. Además se tiene decidido que no se elaborarán más de 32 unidades semanales del producto* P_1 *y 12 del producto* P_2*. La ganancia proporcionada por cada unidad del producto* P_1 *es de seis unidades monetarias, mientras que cada unidad del producto* P_2 *deja unas ganancias de tres unidades monetarias. Todos estos datos se pueden recoger en la siguiente tabla:*

Recursos	*Producto I*	*Producto II*	*Totales*
Máximo 1	*1*	*0*	*32*
Máximo 2	*0*	*1*	*12*
Horas	*3*	*4*	*120*
Beneficio	*6*	*3*	

Resuelva gráficamente y por el método de Símplex dicho problema.

Si en las mismas condiciones se contrata un nuevo empleado (40 horas más de trabajo disponibles a la semana), ¿qué ganancia adicional supone esto para la empresa?

Ejercicio 10 *Resuelva gráficamente los siguientes problemas de programación lineal:*

(a) *Maximizar* $z = 3x_1 + x_2$*, estando las variables sometidas a las restricciones*
$x_1 + x_2 \geq 3; -2x_1 + x_2 \leq 3; 4x_1 + x_2 \leq 9; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$

(b) *Minimizar* $z = 3x_1 + 5x_2$, *estando las variables sometidas a las restricciones* $4x_1 + x_2 \geq 21; 3x_1 + 2x_2 \geq 27; 2x_1 + 3x_2 \geq 23; x_1 \geq 2; x_2 \geq 1.$

Ejercicio 11 *La empresa Cornsa fabrica dos tipos de harina: normal e integral. Cada saco producido, tanto de normal como de integral, requiere la utilización de dos tipos diferentes de máquinas,* M_1 *y* M_2*. Un saco de harina normal requiere 2 horas de la máquina* M_1 *y 1 hora de la máquina* M_2*, mientras que un saco de harina integral requiere la utilización de la máquina* M_1 *durante una hora y treinta minutos y de 15 minutos de la máquina* M_2*. Teniendo en cuenta las máquinas disponibles de ambos tipos, se establece que a lo largo de la semana se podrán conseguir 1200 horas de trabajo con la máquina* M_1 *y 376 con la* M_2*. Además se supone que todas los sacos producidos durante la semana se venden, dejando cada unidad de harina normal un beneficio de 600 unidades monetarias y cada unidad de harina integral, 300 unidades monetarias. Todos estos datos se pueden recoger en la siguiente tabla:*

Recursos	*Normal*	*Integral*	*Totales*
Máquina 1	*2*	*1.5*	*1200*
Máquina 2	*1*	*0.25*	*376*
Beneficio	*600*	*300*	

Resuelva gráficamente y por el método de Símplex dicho problema.

Ejercicio 12 *Un artesano fabrica en su casa dos tipos de juguetes: camiones y trenes. Entre otros materiales utiliza tornillos, bloques de plástico y ruedas, de los cuales, y para la semana próxima, dispone de las cantidades 8000, 6000 y 6300 unidades respectivamente. Para la construcción de los trenes hacen falta 10 tornillos, 15 bloques de plástico y 18 ruedas y para los camiones 20 tornillos, 10 bloques de plástico y 6 ruedas. El artesano no tiene ningún problema para vender todo lo que produzca semanalmente, obteniendo un beneficio neto de 80€ por cada tren y 70€ por cada camión. Todos estos datos se pueden recoger en la siguiente tabla:*

Recursos	*Trenes*	*Camiones*	*Totales*
Tornillos	*10*	*20*	*8000*
Plástico	*15*	*10*	*6000*
Ruedas	*18*	*6*	*6300*
Beneficio	*80*	*70*	

Resuelva gráficamente y por el método de Símplex dicho problema.

Ejercicio 13 *Tras aplicar el algoritmo del simplex a dos problemas de cálculo del máximo de una función con variables principales* x_1 *y* x_2 *se obtiene las tablas siguientes:*

Índices	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$=$	mín
0	0	-1	0	1	0	7	
5	0	-1	2	-1	1	1	
2	0	-1	1	1	0	1	
1	1	-1	-1	1	0	5	

Tabla 1

Índices	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$=$	mín
0	0	0	0	2	0	7	
5	0	0	3	-1	1	1	
2	0	1	2	1	0	2	
1	1	0	-1	1	0	1	

Tabla 2

Explica en cada caso si existe solución y resuelve el problema en caso de que sea posible.