Tema 1. Aritmética finita. Análisis del error.

Computación Numérica

Antonio Palacio

Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo

palacioantonio@uniovi.es

Curso 2021-2022

Contenido I

1. Introducción
2. Conceptos de error
3. Aritmética de un computador
4. Análisis del error

Contenidos

1. Introducción
2. Conceptos de error
3. Aritmética de un computador
4. Análisis del error

¿Para qué el cálculo numérico?

Muchos problemas matemáticos que surgen en problemas reales no son manejables mediante cálculo simbólico.

Principales motivos.

1. No existe método simbólico.
2. El método simbólico es extremadamente lento.
3. El método simbólico falla al ejecutarlo con un ordenador.
4. Los datos de los que se dispone son habitualmente aproximaciones inexactas de los reales.

Tipos de métodos

Métodos para resolver problemas matemáticos.

- **Métodos directos.** Suelen ser traslaciones directas de métodos de cálculo simbólico, y **en teoría** mediante un número finito de operaciones nos devuelven la solución exacta.
- **Métodos iterativos.** Se genera una sucesión $\{x_n\}$ tal que **en teoría**, $\lim_{n\to\infty} x_n = \widehat{x}$, siendo $\widehat{x}$ la solución del problema.

Principales fuentes de error

Error en la solución.

1. Errores debido al redondeo.
2. Errores debidos al método, también llamados errores de truncamiento.
3. Errores debidos a la falta de precisión en los datos.

Contenidos

1. Introducción
2. Conceptos de error
3. Aritmética de un computador
4. Análisis del error

Conceptos de error

Definición 1.1

Sean $x, x^* \in \mathbb{R}$.

1. *Se denomina* ***error absoluto*** *al aproximar x por x^* al número real $|x - x^*|$.*
2. *Para $x \neq 0$, se denomina* ***error relativo*** *al aproximar x por x^* a: $\delta_x = \dfrac{|x - x^*|}{|x|}$. A $\delta_x \times 100$ se le denomina* ***error porcentual****.*
3. *Se dirá que x^* aproxima a x con k cifras significativas si*

$$0{,}5 \times 10^{-k} < \delta_x \leq 5 \times 10^{-k}.$$

Ejemplos I

Ejemplo 1.1

Calcule los errores absolutos y relativos cometidos al aproximar $x = 1$ *por* $x^* = 2$ *e* $y = 1000$ *por* $y^* = 1001$.

Ejemplos II

Ejemplo 1.2

El cálculo experimental de la constante de un muelle elástico produce el valor de 29,25. *Sabiendo que el error relativo cometido no supera el* 1 %, *calcule los valores posibles de dicha constante.*

Ejemplos III

Ejemplo 1.3

Halle los números reales que son representados por 1000 *con una precisión de al menos cuatro dígitos.*

Ejemplos IV

Ejemplo 1.4

Calcule con cuantas cifras significativas aproxima 200 *a* 199 *y con cuantas aproxima* 199 *a* 200.

Contenidos

1. Introducción
2. Conceptos de error
3. Aritmética de un computador
4. Análisis del error

Aritmética de un computador

La representación interna de un número real en una máquina se realiza mediante números binarios, es decir, mediante una cantidad finita de ceros y unos. Este conjunto de ceros y unos puede ser combinado de diferentes formas (depende de la máquina utilizada) para producir un número real.
El formato **standard IEEE-754 (1987) en doble precisión** se utilizan $2^6 = 64$ bits (64 ceros/unos) que son interpretados de la siguiente forma:

- El primer bit define un número que se denota por s y determina el signo.
- Los once siguientes bits definen otro número denotado por e y define un exponente, el primero de los dígitos determina el signo del exponente y los 10 restantes el valor del exponente.
- Los 52 bits restantes definen otro número denotado por m y determina la mantisa.

Aritmética de un computador

Con estos tres números binarios se forma el número real: $(-1)^s \times 1.m \times 2^{e-1023}$ que determina un rango de valores positivos del orden de 10^{-308} a 10^{308}.

Figura: Números reales en doble precisión en el standard IEEE 754

Aritmética de un computador

Observaciones:

- Cuando el exponente e es 0 se utiliza la representación $(-1)^s \times 0.m \times 2^{-1022}$ que permite utilizar números mas pequeños (hasta 10^{-324}) denominados no normales.
- Se utilizan códigos especiales para representar $\pm\infty$ o NaN.

Aritmética de un computador

La forma habitual de representar un número es el **formato decimal normalizado**: $\pm 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n$, siendo $d_i \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, $d_1 \geq 1$ y $k \in \mathbb{Z}$. El número natural k y el rango del número entero n dependen de la máquina. El cero se considerará como un caso especial. Con esta representación de los números, se suele decir que la máquina posee **aritmética de $k-$dígitos**.
El número máquina que sigue a $x_1 = 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n$ siendo $d_1 \geq 1$, es $x_2 = x_1 + 0.\overbrace{0}^{1} \cdots \overbrace{0}^{k-1}\overbrace{1}^{k} \times 10^n$.
Es decir, la distancia entre dos números-máquina consecutivos es $10^{-k} \times 10^n$.

Aritmética de un computador

Ejemplo 1.5

Utilizando aritmética de dos dígitos,

1. *Halle el número máquina que sigue a* 1 *y el que sigue a* 10.
2. *Calcule cuántos números máquina hay en los intervalos* $[1, 10]$ *y* $[10, 100]$.

Aritmética de un computador

Dado un número real

$$x = \pm 0.d_1 d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n \neq 0$$

admitiremos que su aproximación x^*, en una máquina con k cifras, se obtiene redondeando al número máquina mas cercano, es decir:

- $x^* = \pm 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n$ si $d_{k+1} < 5$
- Siguiente número-máquina si $d_{k+1} \geq 5$ y $x > 0$
- Anterior número-máquina si $d_{k+1} \geq 5$ y $x < 0$

Nota 1.1

Se habla de aproximación por truncamiento con aritmética de k cifras cuando el número aproximado se obtiene siempre con las k primeras cifras.

Aritmética de un computador

Ejemplo 1.6

Sea $\pi = 3{,}141592\cdots$. *Calcule su aproximación por redondeo en una máquina con aritmética de 3, 4 y 5 dígitos.*

Aritmética de un computador

Ejemplo 1.7

Sea $x = 17{,}01$ y considere una máquina con aritmética de 4 dígitos. Calcule el número real positivo mas pequeño que sumado a x da un número distinto de x. Misma cuestión para $x = 1{,}7$.

Aritmética de un computador

Teorema 1.1

Sea $0 \neq x \in \mathbb{R}$ y sea $0 \neq x^*$ su aproximación por redondeo con aritmética de k dígitos. Entonces, x^* aproxima a x con al menos k cifras significativas.

Ejemplo 1.8

Halle los números reales que son representados por 1000 en una máquina con aritmética de 4 dígitos y aproximación por redondeo.

Contenidos

1. Introducción
2. Conceptos de error
3. Aritmética de un computador
4. Análisis del error

Análisis del error

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y x^*, y^* sus aproximaciones en una máquina. Representaremos el resultado de una o varias operaciones aritméticas por $r = f(x, y)$ (por ejemplo $f(x, y) = x + y$). Se pretende estudiar el orden de aproximación de $r_m = (f(x^*, y^*))^*$ a r, es decir, nos interesa saber si la operación aritmética realizada por la máquina se mantiene con un error razonable.

Análisis del error

Ejemplo 1.9

Calcule el error relativo cometido al realizar la diferencia entre $x = 0{,}6793$ e $y = 0{,}6751$ usando aritmética de dos dígitos.

Análisis del error

Ejemplo 1.10

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones pueden expresarse por: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$. Usando ambas expresiones, calcule los dígitos de precisión que se obtienen al calcular las soluciones con aritmética de una cifra y los datos $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$ y con aritmética de cuatro dígitos y los datos $a = 1$, $b = 62{,}10$, $c = 1$. Las soluciones exactas son $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ y $x_1 = -0{,}01610723$, $x_2 = -62{,}08390$.

Análisis del error

Ejemplo 1.11

Compruebe que, con aritmética de precisión finita, no se verifica la propiedad asociativa: Utilizando aritmética de tres dígitos y los valores $x = -1000$, $y = 1000$, $z = 1$ verifique que $(x^* + (y^* + z^*)^*)^* \neq ((x^* + y^*)^* + z^*)^*$.

Ejemplo 1.12

Compruebe que, con aritmética de 6 dígitos, el punto medio de $a = 0{,}742531$ y $b = 0{,}742533$ no está comprendido entre a y b.