Ejercicio 2. 1 *Sea* $f(x) = x^5 + x^3 + x - 3$.

1. *Razone que* f *tiene raíz única en* $[0, 3]$ *y que el método de bisección, comenzando en* $[0, 3]$, *converge a dicha raíz.*
2. *Calcule el término* x_3 *de la sucesión obtenida por bisección.*
3. *Halle* $N \in \mathbb{N}$ *de forma que el término* x_N *de la sucesión obtenida por bisección aproxime la raíz con al menos ocho dígitos.*

1.
   - $f(x)$ es continua por ser polinómica y $f(0) = -3 < 0$, $f(3) = 3^5+3^3+3-3 = 270 > 0$. Luego $f(0) \cdot f(3) = -810 < 0$, por Bolzano, $f(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 3]$.
   - f es derivable y $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \geqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ luego $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. f tiene a lo sumo una raíz real.
   - Por último se tiene que f tiene exactamente una única raíz real en $[0, 3]$.
   - Sabemos que para una raíz de $[0, 3]$, se cumple que $|x_n - r| \leqslant \frac{1}{2^n}(b - a) = \frac{3}{2^n}$. Como solo hay una raíz, esto se cumple para dicha raíz, luego

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} |x_n - r| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2^n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - r| = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - r) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = r$$

   Luego el método converge a r.

2.
   - $a_1 = a = 0$, $f(0) = -3$; $b_1 = b = 3$, $f(3) = 270$
   - $x_1 = \frac{0+3}{2} = 1.5$; $f(1.5) = 9.46875$
   - $a_2 = a_1 = 0$; $b_2 = x_1 = 1.5$
   - $x_2 = \frac{0+1.5}{2} = 0.75$; $f(0.75) = -1.5908203125$
   - $a_3 = x_2 = 0.75$; $b_3 = b_2 = 1.5$
   - $x_3 = \frac{0.75+1.5}{2} = 1.125$

3.
   - El error relativo es $\delta_r = \frac{|r-x_n|}{|r|}$
   - Para que aproxime con al menos 8 dígitos, $\delta_r = \frac{|r-x_n|}{|r|} \leqslant 5 \cdot 10^{-8}$
   - Como hay que acotar $\frac{1}{|r|}$, tenemos que $r \geqslant \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow |r| \geqslant \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{|r|} \leqslant \frac{4}{3}$
   - $\delta_r = \frac{|r-x_n|}{|r|} = \frac{1}{|r|}|r - x_n| \leqslant \frac{4}{3}\frac{3-0}{2^n} = \frac{1}{2^{n-2}} \leqslant 5 \cdot 10^{-8}$
   - La última desigualdad se cumple si, y solamente si, $10^7 \leqslant 2^{n-3} \Longleftrightarrow n - 3 \geqslant 7\log_2(10) = 23.25...$
   - $n \geqslant 26.25...$ luego $\boxed{n = 27}$.

Ejercicio 2. 2 *Sea* $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$*. Razone que* f *posee una única raíz en el intervalo* $[1, 2]$ *y plantee dos métodos de punto fijo asociados al cálculo de las raíces de* f*.*

- $f(x)$ es continua por ser polinómica y $f(1) = 1 + 4 - 10 = -5 < 0$, $f(2) = 8 + 16 - 10 = 14 > 0$. Luego $f(1) \cdot f(2) = -70 < 0$, por Bolzano, $f(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1, 2]$.
- f es derivable y $f'(x) = 3x^2 + 8x = 0$ si, y solamente sí $x = 0$ o $x = -\dfrac{8}{3}$, luego $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [1, 2]$. f tiene a lo sumo una raíz real.
- Por último se tiene que f tiene exactamente una única raíz real en $[1, 2]$.
- $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + x - 10 = x \Rightarrow g_1(x) = x^3 + 4x^2 + x - 10$
- $x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 10 - x^3 \Leftrightarrow \dfrac{10 - x^3}{4} = x^2$ Tomando la raíz cuadrada positiva, si $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$, entonces x es una raíz. Tomando $g_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$, los puntos fijos de esta función, son ceros de $f(x)$, el recíproco no tiene por qué ser cierto.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
g_1	1.5	3.875	112.123	1459952.02	$3.11 \cdot 10^{18}$
g_2	1.5	1.29	1.40	1.345458	1.37517

$$r = 1.36523001341410$$

Se adivina que el primer método no converge, pero el segundo sí.

Ejercicio 2. 3 *Sea* $f(x) = x - 0.5 \operatorname{sen} x - 2$*.*

1. *Razone que la ecuación* $f(x) = 0$ *tiene una única raíz real en* $[0, 3]$*.*
2. *Verifique que los puntos fijos de* $g(x) = 2 + 0.5 \operatorname{sen} x$ *son raíces de* f
3. *Compruebe que* g *verifica las hipótesis del teorema convergencia local en* $[0, 3]$*.*

1.
   - $f(x)$ es continua por ser suma de funciones elementales y $f(0) = -2$, $f(3) = 3 - 0.5 \operatorname{sen}(3) - 2 = 1 - 0.5 \operatorname{sen}(3) \geqslant 1 - 0.5 = 0.5 > 0$. Luego $f(0) \cdot f(3) < 0$, por Bolzano, $f(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 3]$.
   - $f'(x) = 1 - 0.5 \cos(x)$, (como $-1 \leqslant -\cos(x) \leqslant 1 \Rightarrow \overbrace{-0.5 \leqslant -0.5 \cos(x)} \leqslant 0.5)$ $f'(x) = 1 - 0.5 \cos(x) \geqslant 1 - 0.5 = 0.5 > 0$. Luego $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. f tiene a lo sumo una raíz real.
   - Por último se tiene que f tiene exactamente una única raíz real en $[0, 3]$.

2. x es un punto fijo de $g(x) = 2 + 0.5\,\mathrm{sen}(x)$ si, y solamente si, $x = 2 + 0.5\,\mathrm{sen}(x)$ si, y solamente si, $x - 0.5\,\mathrm{sen}(x) - 2 = 0$ si, y solamente si, x es una raíz de $f(x) = x - 0.5\,\mathrm{sen}(x) - 2$

3. g es una función de clase 1 porque es suma de funciones elementales. En el intervalo $[0, 3]$ tiene un punto fijo r ya que hemos demostrado que f tiene un raíz en dicho intervalo y $|g'(r)| = |0.5\cos(r)| \leqslant 0.5 < 1$. Luego verifica las hipótesis del teorema.

Ejercicio 2. 4 *Sea* $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

1. *Demuestre que* $x = 1$ *y* $x = 2$ *son los únicos puntos fijos de* g.

2. *Demuestre que en* $x = 1$ *se cumplen las hipótesis del teorema de convergencia local pero no en* $x = 2$.

3. *Halle* $x_0 \neq 2$ *tal que la sucesión* $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \geqslant 0$ *converja a* 2.

1. $g(x) = x$ si, y solamente si, $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = x$ si, y solamente si, $x^2 + x + 2 = 4x$ si, y solamente si, $x^2 - 3x + 2 = 0$ si, y solamente si, $x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} = \frac{3\pm1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

2. $g(x)$ es de clase 1 por ser una función polinómica. Tenemos que $r = 1$ es un punto fijo ya que $g(r) = g(1) = \frac{1}{4}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 = r$. $g'(r) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$. Luego se cumplen las hipótesis del teorema de convergencia local. Sin embargo, si $r = 2$, $g'(r) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1$. No se cumplen las hipótesis.

3. Por último, calculamos un $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2$ si, y solamente si, $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = 2$ si, y solamente si, $x^2 + x + 2 = 8$ si, y solamente si, $x^2 + x - 6 = 0$ si, y solamente si, $x = \frac{-1\pm\sqrt{1-(-24)}}{2} = \frac{-1\pm5}{2}$ si, y solamente si, $x = 2$ o $x = -3$. Luego si tomamos $x_0 = -3 \neq 2$, $x_1 = g(x_0) = 2$ y, como este es un punto fijo, $g(x_n) = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Ejercicio 2. 5 *Razone que* $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ *verifica las hipótesis del teorema de convergencia local del método de Newton en* $[1, 2]$ *y realice dos iteraciones de dicho método con* $x_0 = 1.5$. *(**Nota:** Tomando* $x_0 = 1.5$ *y utilizando* $r = 1.365230013$ *como la única raíz de* f *en* $[1, 2]$*, se obtiene que con el método del punto fijo para* $g(x) = \sqrt{10 - x^3}/2$ *son necesarias 30 iteraciones para aproximar* r *con una precisión de 10 dígitos, mientras que el método de Newton solamente necesita 4 iteraciones.)*

- $f(x)$ es continua por ser polinómica y $f(1) = 1 + 4 - 10 = -5 < 0$, $f(2) = 8 + 16 - 10 = 14 > 0$. Luego $f(1)\cdot f(2) = -70 < 0$, por Bolzano, $f(x)$ tiene al menos una raíz $r \in [1, 2]$.

- f es de clase 2 por ser polinómica y $f'(x) = 3x^2 + 8x = 0$ si, y solamente sí $x = 0$ o $x = -\frac{8}{3}$, luego $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [1, 2]$. Por tanto, $f'(r) \neq 0$.
- $x_0 = 1.5$.
- $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.5 - \frac{1.5^3+4\cdot 1.5^2-10}{3\cdot 1.5^2+8\cdot 1.5} = 1.3733$.
- $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3733 - \frac{f(1.3733)}{f'(1.3733)} = 1.3733 - \frac{1.3733^3+4\cdot 1.3733^2-10}{3\cdot 1.3733^2+8\cdot 1.3733} = 1.3653$.

Ejercicio 2. 6 *Se considera el polinomio $x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 24x^2 + 2x$. Puesto que $x = 0$ es una de las raíces, podemos realizar la descomposición: $x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 24x^2 + 2x = P(x)x$, siendo $P(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 24x + 2$ y en el que el coeficiente a_0 es no nulo. Razone que P tiene, a lo sumo, dos raíces reales. Halle $a, b \in \mathbb{R}$ tal que las raíces de P verifiquen $a \leqslant |r| \leqslant b$.*

- $P'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 12x + 24$ y $P''(x) = 12x^2 + 12x + 12 = 12(x^2 + x + 1)$. Luego $P''(x) = 0$ si, y solamente si $x^2 + x + 1 = 0$ si, y solamente si, $x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$ Luego como no tiene raíces reales, $P''(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $P(x)$ tiene a lo sumo dos raíces reales.
- Por el teorema anterior, calculamos

$$\lambda = \text{máx}\left\{\frac{|a_0|}{|a_n|}, \ldots, \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\right\} = \max\left\{\frac{|2|}{|1|}, \frac{|24|}{|1|}, \frac{|6|}{|1|}, \frac{|2|}{|1|}\right\} = 24$$

- Por el teorema anterior, calculamos

$$\nu = \text{máx}\left\{\frac{|a_1|}{|a_0|}, \ldots, \frac{|a_n|}{|a_0|}\right\} = \max\left\{\frac{|24|}{|2|}, \frac{|6|}{|2|}, \frac{|2|}{|2|}, \frac{|1|}{|2|}\right\} = 12$$

- Luego $a = \frac{1}{1+\nu} = \frac{1}{1+12} = \frac{1}{13}$ y $b = 1 + \lambda = 1 + 24 = 25$.
- $\frac{1}{13} \leqslant |r| \leqslant 25$
- Es claro que las raíces de P son negativas, ya que si $r \geqslant 0$, entonces $P(r) = r^4 + 2r^3 + 6r^2 + 24r + 2 \geqslant 2$, luego $P(r) \neq 0$.
- Se puede decir que, en caso de tener raíces reales, éstas están en el intervalo $[-25, -\frac{1}{13}]$.

Ejercicio 2. 7 *Sean $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149$, $a = 4.71$ y $P(a) = -14.636489$. Usando aritmética de tres dígitos, halle el error relativo cometido al evaluar $P(a)$ directamente y por método de Horner.*

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149$. Calculamos el valor directamente, con el orden de operaciones del ordenador: $P(a) = a^3 - 6a^2 + 3a - 0.149$

- $a = 4.71$; $3 * a = 14.13 = 14.1$
- $a^2 = 22.1841 = 22.2$; $6 * a^2 = 133.2 = 133$
- $a^3 = a * a^2 = 104.562 = 105$
- $a^3 - 6a^2 = -28.0$; $(a^3 - 6a^2) + 3a = -13.9$
- $P(a) = ((a^3 - 6a^2) + 3a) - 0.149 = -14.049 = -14$
- $\delta_v = \frac{|-14.636489-(-14)|}{|-14.636489|} = 0.0434864536160281 = 4.3\,\%$

Se han hecho 4 multiplicaciones y 3 sumas.

A continuación, vamos a aplicar el método de Horner:

- $\alpha = a = 4.71$
- $b_2 = a_3 = 1$
- $b_1 = a_2 + \alpha \cdot b_2 = -6 + 4.71 = -1.29$
- $b_0 = a_1 + \alpha \cdot b_1 = 3 + (4.71) \cdot (-1.29) = 3 + (-6.0759) = 3 + (-6.08) = -3.08$
- $P(\alpha) = a_0 + \alpha \cdot b_0 = -0.149 + (4.71) \cdot (-3.08) = -0.149 + (-14.5068) = -0.149 - 14.5 = -14.6$
- $\delta_v = \frac{|-14.636489-(-14.6)|}{|-14.636489|} = 0.00249301591385794 = 0.24\,\%$

Se han hecho 2 multiplicaciones y 3 suma.

Ejercicio 2. 8 *Sea $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$. Realice una iteración del método de Newton con $x_0 = -2$ y utilizando el algoritmo de Horner para evaluar $P(-2)$ y $P'(-2)$.*

- $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4.$
- $\alpha = -2$
- $b_3 = a_4 = 2$
- $b_2 = a_3 + \alpha \cdot b_3 = 0 + (-2) \cdot 2 = -4$
- $b_1 = a_2 + \alpha \cdot b_2 = -3 + (-2) \cdot (-4) = 5;$
- $b_0 = a_1 + \alpha \cdot b_1 = 3 + (-2) \cdot 5 = -7$
- $P(\alpha) = a_0 + \alpha \cdot b_0 = -4 + (-2) \cdot (-7) = 10$
- $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

- $P'(-2) = Q(-2)$
- $b_2' = b_3 = 2$
- $b_1' = b_2 + \alpha \cdot b_2' = -4 + (-2) \cdot 2 = -8$
- $b_0' = b_1 + \alpha \cdot b_1' = 5 + (-2) \cdot (-8) = 21$
- $Q(-2) = b_0 + \alpha \cdot b_0' = -7 + (-2) \cdot (21) = -49$
- $x_1 = -2 - \dfrac{10}{-49} = -1.79591836734694$

Ejercicio 2. 9 *Sea $P(x) = x^4 - 1$, cuyas raíces reales son $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$. Calcule, mediante el método de Horner y con aritmética de 4 dígitos, la descomposición $P(x) = Q^*(x)(x-0.9999)+P(0.9999)$. Realice una iteración del método de Newton para Q^* con $x_0 = 1$.*

Factorización mediante el algoritmo de Horner:

$$P(x) = x^4 - 1 \qquad \alpha = 0.9999$$

- $a_0 = -1,\ a_1 = a_2 = a_3 = 0,\ a_4 = 1$
- $b_3 = a_4 = 1$
- $b_2 = a_3 + \alpha\, b_3 = 0 + (0.9999 * 1)^* = 0.9999$
- $b_1 = a_2 + \alpha\, b_2 = 0 + (0.9999 * 0.9999)^* = (0.99980001)^* = 0.9998$
- $b_0 = a_1 + \alpha\, b_1 = 0 + (0.9999 * 0.9998)^* = (0.99970002)^* = 0.9997$
- $Q^*(x) = 0.9997 + 0.9998x + 0.9999x^2 + x^3$
- **Nota:** $P(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(x - 1)$

Método de Newton:

- $Q^*(x) = x^3 + 0.9999x^2 + 0.9998x + 0.9997$
- $Q^{*\prime}(x) = 3x^2 + 2x + 0.9998$
- $Q^*(1) = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0.9999 & 0.9998 & 0.9997 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} \end{array} = 4$
- $Q^{*\prime}(1) = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 2 & 0.9998 \\ 1 & & 3 & 5 \\ \hline & 3 & 5 & \boxed{6} \end{array} = 6$
- $x_1 = 1 - \frac{4}{6} = 1 - 0.6667 = 0.3333$