Tema 4: Interpolación y ajuste de datos.

Ejercicio 1 *Sean* $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$, $g(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)$ *y* $h(x) = e^{x+1} - e^{1-x}$.

(a) Halle el polinomio que interpola los datos $(k, f(k))$, *para* $k = -1, 0, 1$.

(b) Halle el polinomio que interpola los datos $(k, g(k))$, *para* $k = -1, 0, 1$.

(c) Halle el polinomio que interpola los datos $(k, h(k))$, *para* $k = -1, 0, 1$.

Ejercicio 2 *Sea* $f(x) = x(3x + 1 + x^2)$.

(a) Halle la forma de Lagrange del polinomio que interpola los datos $(k, f(k))$, *para* $k = 0, 1$.

(b) Halle la forma de Newton del polinomio que interpola los datos $(k, f(k))$, *para* $k = 0, 1$.

(c) Halle el polinomio que interpola los datos $(k, f(k))$, *para* $k = 0, 1, 2$.

(d) Halle el polinomio que interpola los datos $(k, f(k))$, *para* $k = 0, 1, 2, 3$.

Ejercicio 3 *Dada la función* $f(x) = \cos(x)$, *halle un conjunto de nodos que garanticen que el error absoluto cometido, al aproximar* f *por el polinomio de interpolación de Lagrange en dichos nodos, sea menor que* 10^{-2} *en el intervalo* $[0, 2\pi]$*(Sugerencia: utilice nodos de Chebyshev)*

Ejercicio 4 *Sean* $x_0, x_1, \cdots, x_n$ *puntos igualmente espaciados en el intervalo* $[1, 4]$ *con* $x_0 = 1$ *y* $x_n = 4$ *y sea* $p(x)$ *la interpolación segmentada lineal para los datos* (x_0, x_0^4), (x_1, x_1^4),...,(x_n, x_n^4). *Halle, razonadamente, un valor de* n *que garantice que el error absoluto cometido al aproximar* x^4 *por* $p(x)$ *para* $x \in [1, 4]$ *es menor que* 0.001.

Ejercicio 5 *Se quiere construir una tabla de* $n+1$ *datos igualmente espaciados de la función* $\ln x$ *en el intervalo* $[1, 10]$, *para su utilización en la aproximación de la función por la técnica de interpolación segmentada lineal. Calcule un valor de* n *que garantice que el error absoluto cometido en cualquier punto del intervalo* $[1, 10]$, *mediante dicha aproximación, es menor que* 10^{-5}. *Utilizando el valor de* n *obtenido, evalúe el interpolador segmentado en* $x = 3$.

Ejercicio 6 *Sea*

$$s(x) = \begin{cases} x + x^3 & x \in [0, 1] \\ 2 + 4(x-1) + a(x-1)^2 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Halle, si existe, el valor de $a \in \mathbb{R}$ *para que* $s(x)$ *sea un spline cúbico en* $[0, 2]$.

Ejercicio 7 *Sea*

$$s(x) = \begin{cases} x + x^3 & x \in [0, 1] \\ a + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Halle, si existe, el valor de $a \in \mathbb{R}$ *para que* $s(x)$ *sea un spline cúbico natural en* $[0, 2]$.

Ejercicio 8 *Sea*

$$s(x) = \begin{cases} x & x \in [-1,0] \\ bx + cx^2 + dx^3 & x \in [0,1] \end{cases}$$

con $b,c,d \in \mathbb{R}$. *Halle, si existen, b, c y d para que* $s(x)$ *pueda ser spline cúbico sujeto en* $[-1,1]$ *para una función* f *que verifica* $f'(-1) = 1$ *y* $f'(1) = 7$.

Ejercicio 9 *Sea* $f(t) = 3 - 2t$. *Halle un polinomio trigonométrico que interpole a* f *en los nodos* $0,1,2,3$ *y evaluelo . ¿Qué periodo tiene dicho polinomio trigonométrico?.*

Ejercicio 10 *Sea* $f(x)$ *la función periódica de periodo 4 cuya restricción al intervalo* $[-2,2)$ *es*

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -2 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

(a) *Calcule el polinomio trigonométrico de segundo grado que interpola a la función en los nodos* $-2,-1,0,1$. *¿Qué periodo tiene dicho polinomio trigonométrico?*

(b) *Evalúe dicho polinomio en* $x = 0.5$.

(c) *Halle la transformada discreta de Fourier de los datos* $f(-2), f(-1), f(0), f(1)$.

Ejercicio 11 *Sea* $f(x)$ *la función periódica de periodo 3 cuya restricción al intervalo* $[0,3)$ *es*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

(a) *Calcule el polinomio trigonométrico de segundo grado que interpola a la función en los nodos* $0, 0.75, 1.5, 2.25$.

(b) *Evalúe dicho polinomio en* $t = 1$ *y* $t = 3$.

(c) *Halle la transformada discreta de Fourier de los datos* $f(0), f(0.75), f(1.5), f(2.25)$.

Ejercicio 12 *Se consideran los datos* $(0,0)$, $(1,1)$ *y* $(2,4)$ *y la recta* $y = \frac{-1}{3} + 2x$. *Hallar el error, en el sentido de mínimos cuadrados discreto, al aproximar los datos mediante dicha recta.*

Ejercicio 13 *Ajuste por mínimos cuadrados a una recta y a una parábola los datos:*

x_i	0	1	2	3	4
Y_i	1.5	2.5	3.5	5.0	7.5

Ejercicio 14 *Halle la función de la forma* $ae^{3x} + b\cos(x)$, $a,b \in \mathbb{R}$ *que mejor ajusta en el sentido de mínimos cuadrados los datos*

x	0.523	0.785	1.04
y	5.67	11.2	23.6

Ejercicio 15 *Sea* $f \in C(\mathbb{R})$ *que verifica:* $f(1) = 0.3$, $f(2) = 0.5$, $f(3) = 0.6$. *Halle, utilizando la transformación* $T(f) = \frac{1}{f}$, *la función de*

$$\mathscr{A}^* = \left\{ \frac{ax}{x+b} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

que mejor aproxima a f *en el sentido de mínimos cuadrados discreto.*

Ejercicio 16 *Ajuste por mínimos cuadrados, utilizando la técnica de linealización, una función exponencial de la forma* $y = ae^{bx}$ *a los siguientes datos*

x_i	1	2	3	4
Y_i	7	11	17	27

Ejercicio 17 *Ajuste los siguientes datos a un modelo de potencias (ecuación del tipo* $y = ax^b$*) utilizando la técnica de linealización*

x	4	4.2	4.5
y	102.56	113.18	130.11