Ejercicio 3. 1 *Aplique el método de eliminación de Gauss para resolver el sistema* $A\vec{x} = \vec{b}$, *siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 15 & 19 \\ 8 & 42 & 60 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 30 \\ 98 \end{pmatrix}$$

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 15 & 19 & 30 \\ 8 & 42 & 60 & 98 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3=f_3-4f_1]{f_2=f_2-3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 30 & 44 & 78 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3=f_3-5f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{array}\right) = (U|\vec{c})$$

Ejercicio 3. 2 *Resuelva el sistema* $A\vec{x} = \vec{b}$, *siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 15 & 19 \\ 8 & 42 & 60 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 30 \\ 98 \end{pmatrix}$$

usando la factorización LU *de la matriz* A.

$$\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = LU \right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 15 & 19 \\ 8 & 42 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 30 \\ 98 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema auxiliar $LY = b$, y con la solución resolveremos $UX = Y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 30 \\ 98 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} y_1 & & & & & = & 5 \\ 3y_1 & + & y_2 & & & = & 30 \\ 4y_1 & + & 5y_2 & + & y_3 & = & 98 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y_1 = 5 \\ y_2 = 30 - 3y_1 = 15 \\ y_3 = 98 - 4y_1 - 5y_2 = 3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ & & 6x_2 & + & 7x_3 & = & 15 \\ & & & & 9x_3 & = & 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = (5 - 3x_2 - 4x_3)/2 = -4/3 \\ x_2 = (15 - 7x_3)/6 = 19/9 \\ x_3 = 1/3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 3. 3 *Halle la factorización* LU *de la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Utilizando dicha factorización, calcule el determinante de la matriz y la matriz inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(U) = 1 \cdot (-2) = -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. 4 *Compruebe que la eliminación de Gauss para* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *necesita del pivoteo.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 = f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. 5 *Resuelva los sistemas* $\left.\begin{array}{rcrcl} 10^{-4} & x & + & y & = & 1 \\ & x & + & y & = & 2 \end{array}\right\}$ *y* $\left.\begin{array}{rcrcl} 10 & x & + & 10^5 & y & = & 10^5 \\ & x & + & & y & = & 2 \end{array}\right\}$, *mediante eliminación gaussiana sin pivoteo y con aritmética de 3 dígitos. Calcule el error relativo cometido. (solución exacta:* $x_e = 10000/9999$, $y_e = 9998/9999$*)*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & 1-10^4 & 2-10^4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & -9999 & -9998 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & -10^4 & -10^4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} 10^{-4}x + y = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 10^5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 10^5 \\ 0 & 1-10^4 & 2-10^4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 10^5 \\ 0 & -9999 & -9998 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 10^5 \\ 0 & -10^4 & -10^4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} 10x + 10^5 y = 10^5 \Rightarrow x = 0 \\ y = 1 \end{array}\right\}$$

$$\delta_x = \frac{\left|\dfrac{10000}{9999} - 0\right|}{\left|\dfrac{10000}{9999}\right|} = 1 = 100\,\%, \quad \delta_y = \frac{\left|\dfrac{9998}{9999} - 1\right|}{\left|\dfrac{9998}{9999}\right|} = \frac{1}{9998} = 0.0001 = 0.01\,\%$$

Ejercicio 3. 6 *Se considera el sistema del ejemplo anterior* $\left.\begin{array}{rcrcl} 10 & x & + & 10^5 & y & = & 10^5 \\ & x & + & & y & = & 2 \end{array}\right\}$. *Resuélvalo por Gauss, utilizando aritmética de tres dígitos y mediante pivoteo parcial con factor de escala. Calcule el error relativo cometido. (solución exacta:* $x_e = 10000/9999$, $y_e = 9998/9999$*)*

$$s_1 = \max\{|a_{11}|, |a_{12}|\} = \max\{10, 10^5\} = 10^5$$

$$s_2 = \max\{|a_{21}|, |a_{22}|\} = \max\{1, 1\} = 1$$

$$\max\left\{\frac{|a_{11}|}{s_1}, \frac{|a_{21}|}{s_2}\right\} = \max\left\{\frac{10}{10^5}, \frac{1}{1}\right\} = 1 = \frac{|a_{21}|}{s_2}$$

Luego hay que intercambiar las filas 1 y 2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 10^5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 10 & 10^5 & 10^5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 10^5-10 & 10^5-20 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 99990 & 99980 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 10^5 & 10^5 \end{array}\right) \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} x + y = 2 \Rightarrow x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right\}$$

$$\delta_x = \frac{\left|\dfrac{10000}{9999} - 1\right|}{\left|\dfrac{10000}{9999}\right|} = \frac{1}{10^4} = 0.0001 = 0.01\,\%, \quad \delta_y = \frac{\left|\dfrac{9998}{9999} - 1\right|}{\left|\dfrac{9998}{9999}\right|} = \frac{1}{9998} = 0.0001 = 0.01\,\%$$

Ejercicio 3. 7 *Sean* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 11/2 \end{pmatrix}$ *y* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$*. Resuelva el sistema* $A\vec{x} = \vec{b}$ *utilizando la factorización de Cholesky.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} l_{11}^2 = 2 \\ l_{11}l_{21} = 0 \\ l_{11}l_{31} = 1 \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 = 1 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 2 \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = \frac{11}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_{11} = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}l_{21} = 0 \Rightarrow l_{21} = 0 \\ \sqrt{2}l_{31} = 1 \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0^2 + l_{22}^2 = 1 \Rightarrow l_{22} = 1 \\ 0\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot l_{32} = 2 \Rightarrow l_{32} = 2 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2^2 + l_{33}^2 = \frac{11}{2} \Rightarrow l_{33} = 1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \sqrt{2}y_1 & & & & & = & 2 \\ & & y_2 & & & = & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & = & 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y_1 = \sqrt{2} \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} - 2 \cdot 1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} \sqrt{2}x_1 & & & + & \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & = & \sqrt{2} \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & & & x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}0\right) = 1 \\ x_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 3. 8 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *calcule* $||A||_\infty$, $||A||_1$ *y* $||A||_2$.

$$\|A\|_\infty = \text{máx}\{|1| + |1| + |0|, |1| + |2| + |1|, |-1| + |1| + |2|\} = \text{máx}\{2, 4, 4\} = 4$$

$$\|A\|_1 = \text{máx}\{|1| + |1| + |-1|, |1| + |2| + |1|, |0| + |1| + |2|\} = \text{máx}\{3, 4, 3\} = 4$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de esta matriz

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 14 * \lambda^2 - 42 * \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 14 * \lambda + 42)$$

Las raíces son $\lambda = 0$, $\lambda = \dfrac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 42}}{2} = 7 \pm \sqrt{7}$:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t \cdot A)} = \sqrt{\text{máx}\{0, 7-\sqrt{7}, 7+\sqrt{7}\}} = \sqrt{7+\sqrt{7}} = 3.10576$$

Ejercicio 3. 9 *Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ el sistema*

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

- *Calcule su solución exacta $\vec{x}_e$.*
- *Calcule la solución exacta $\vec{x}'_e$ del sistema* perturbado *obtenido al sumar* $\Delta\vec{b} = (0.1, -0.1, 0.1, -0.1)$ *a $\vec{b}$ ($A\vec{x}'_e = \vec{b} + \Delta\vec{b}$).*
- *Calcule los errores relativos de la solución y de la perturbación. Compárelos calculando el cociente de ambos.*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_e = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}'_e = A^{-1} \cdot (\vec{b} + \Delta\vec{b}) = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{\vec{b}} = \frac{\|\Delta\vec{b}\|_1}{\|\vec{b}\|_1} = \frac{0.4}{119} = 0.00336, \quad \delta_{\vec{b}} = \frac{\|\Delta\vec{b}\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty} = \frac{0.1}{33} = 0.00303$$

$$\delta_{\vec{b}} = \frac{\|\Delta\vec{b}\|_2}{\|\vec{b}\|_2} = \frac{0.2}{60.02499} = 0.0033319453$$

$$\delta_{\vec{x}_e} = \frac{\|\vec{x}_e - \vec{x}'_e\|_1}{\|\vec{x}_e\|_1} = \frac{27.4}{4} = 6.85, \quad \delta_{\vec{x}_e} = \frac{\|\vec{x}_e - \vec{x}'_e\|_\infty}{\|\vec{x}_e\|_\infty} = \frac{13.6}{1} = 13.6$$

$$\delta_{\vec{x}_e} = \frac{\|\vec{x}_e - \vec{x}'_e\|_2}{\|\vec{x}_e\|_2} = \frac{16.39695}{2} = 8.198475$$

$$\text{Con la norma } \| \ \|_1\text{: } \frac{\delta_{\vec{x}_e}}{\delta_{\vec{b}}} = \frac{6.85}{0.00336} = 2037.875$$

$$\text{Con la norma } \| \ \|_\infty\text{: } \frac{\delta_{\vec{x}_e}}{\delta_{\vec{b}}} = \frac{13.6}{0.00303} = 4488$$

$$\text{Con la norma } \| \ \|_2\text{: } \frac{\delta_{\vec{x}_e}}{\delta_{\vec{b}}} = \frac{8.198475}{0.0033319453} = 2460.567$$

Ejercicio 3. 10 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$*; su inversa es* $\begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcule el número de condición de A respecto de las tres normas matriciales. Compare este valor con el cociente calculado en el Ejercicio 9

Como la matriz es simétrica

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 33, \quad \|A^{-1}\|_1 = \|A^{-1}\|_\infty = 136$$

$$cond_1(A) = cond_\infty(A) = 33 \cdot 136 = 4488$$

Los valores propios de A son

$$\{0.01015, 0.8431, 3.858, 30.288685\}$$

luego

$$cond_2(A) = \frac{30.288685}{0.01015} = 2984.0927$$

los cocientes del Ejercicio 9 son

$$\{2037.875, 4488, 2460.567\}$$

Ejercicio 3. 11 *Se considera el sistema* $\left.\begin{array}{rcr} 4x_1+3x_2 &=& 24\\ 3x_1+4x_2-x_3 &=& 30\\ -x_2+4x_3 &=& -24\end{array}\right\}$

1. *Halle las ecuaciones del método de Jacobi para la resolución de dicho sistema.*
2. *Calcule las matrices B_J y $\vec{c}_J$ de dicho método.*
3. *Realice una iteración con $\vec{x}^{(0)}=(0,4,0)$.*

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1^{(k+1)} &=& -\frac{3}{4}x_2^{(k)}+6\\ x_2^{(k+1)} &=& -\frac{3}{4}x_1^{(k)}+\frac{1}{4}x_3^{(k)}+\frac{15}{2}\\ x_3^{(k+1)} &=& \frac{1}{4}x_2^{(k)}-6\end{array}\right\}\Longrightarrow B_J=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{4} & 0\\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix},\ \vec{c}_J=\begin{pmatrix}6\\ \frac{15}{2}\\ -6\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(1)}=B_J\cdot\vec{x}^{(0)}+\vec{c}_J=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{4} & 0\\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\ \frac{15}{2}\\ -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ \frac{15}{2}\\ -5\end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. 12 *Se considera el sistema* $\left.\begin{array}{rcr} 4x_1+3x_2 &=& 24\\ 3x_1+4x_2-x_3 &=& 30\\ -x_2+4x_3 &=& -24\end{array}\right\}$

1. *Halle las ecuaciones del método de Jacobi para la resolución de dicho sistema y deduzca de ellas las del método de Gauss-Seidel.*
2. *Calcule las matrices B_{G-S} y $\vec{c}_{G-S}$ de dicho método.*
3. *Realice una iteración con $\vec{x}^{(0)}=(0,4,0)$.*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} &=& -\frac{3}{4}x_2^{(k)}+6\\ x_2^{(k+1)} &=& -\frac{3}{4}x_1^{(k)}+\frac{1}{4}x_3^{(k)}+\frac{15}{2}\\ x_3^{(k+1)} &=& \frac{1}{4}x_2^{(k)}-6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} &=& -\frac{3}{4}x_2^{(k)}+6\\ x_2^{(k+1)} &=& -\frac{3}{4}x_1^{(k+1)}+\frac{1}{4}x_3^{(k)}+\frac{15}{2}\\ x_3^{(k+1)} &=& \frac{1}{4}x_2^{(k+1)}-6\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\left.\begin{array}{rcr} x_1^{(k+1)} &=& -\frac{3}{4}x_2^{(k)}+6\\ x_2^{(k+1)} &=& \frac{9}{16}x_2^{(k)}+\frac{1}{4}x_3^{(k)}+3\\ x_3^{(k+1)} &=& \frac{9}{64}x_2^{(k)}+\frac{1}{16}x_3^{(k)}-\frac{21}{4}\end{array}\right\}$$

$$B_{G-S} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}, \ \vec{c}_{G-S} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -\frac{21}{4} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_{G-S}\cdot\vec{x}^{(0)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -\frac{21}{4} \end{pmatrix}}_{\vec{c}_{G-S}} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{21}{4} \\ -\frac{75}{16} \end{pmatrix}$$

Cálculo matricial

$$(D+L) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow (D+L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{64} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$B_{G-S} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{64} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{-(D+L)^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_{G-S} = (D+L)^{-1}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-3}{64} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -\frac{21}{4} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. 13 *Dado el método iterativo del punto fijo* $\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$ *con* $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *y* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

1. *Compruebe que si* $|\lambda| < 1$ *entonces el método converge para cualquier* $\vec{x}^{(0)}$ *que se considere.*

2. *Para $\lambda = 2$, halle un vector inicial para que el método sea convergente y otro vector inicial para que no converja.*

1. Como B es una matriz diagonal sus valores propios son $\frac{1}{2}$ y λ, luego el radio espectral de B es:
$$\rho(B) = \max\left\{\left|\frac{1}{2}\right|, |\lambda|\right\} < 1$$
por el Teorema 3.13, se tiene que el método converge para cualquier vector inicial que se considere.

2. Para $\lambda = 2$, si tomamos como vector inicial el (a, b), se tiene
$$\vec{x}^{(n)} = B\vec{x}^{(n-1)} + \vec{0} = B\vec{x}^{(n-1)} = B^2\vec{x}^{(n-2)} = \ldots = B^n\vec{x}^{(0)} =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2^n} \\ b \cdot 2^n \end{pmatrix}$$
Como la matriz es simétrica
$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 33, \quad \|A^{-1}\|_1 = \|A^{-1}\|_\infty = 136$$
$$cond_1(A) = cond_\infty(A) = 33 \cdot 136 = 4488$$
Los valores propios de A son
$$\{0.01015, 0.8431, 3.858, 30.288685\}$$
luego
$$cond_2(A) = \frac{30.288685}{0.01015} = 2984.0927$$
los cocientes del Ejercicio 9 son
$$\{2037.875, 4488, 2460.567\}$$

Ejercicio 3. 14 *Dado el sistema*
$$\left.\begin{array}{rcr} 4x_1 + 3x_2 & = & 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 & = & 30 \\ -x_2 + 4x_3 & = & -24 \end{array}\right\}$$

1. *Estudie la convergencia del método de Jacobi y la del método de Gauss-Seidel para la resolución de dicho sistema.*
2. *Compare la velocidad de convergencia de ambos métodos.*

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{G-S} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{9}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$P_{B_J} = -\lambda(\lambda^2 - \frac{5}{8}), \quad P_{B_{G-S}} = -\lambda^2(\lambda - \frac{5}{8})$$

$$\rho(B_J) = \text{máx}\left\{|0|, \left|-\sqrt{\frac{5}{8}}\right|, \left|\sqrt{\frac{5}{8}}\right|\right\} = \sqrt{\frac{5}{8}} = 0.790569$$

$$\rho(B_{G-S}) = \text{máx}\left\{|0|, |0|, \left|\frac{5}{8}\right|\right\} = \frac{5}{8} = 0.625$$

Ejercicio 3. 15 *Se considera el sistema lineal* $A\vec{x} = \vec{b}$*, siendo* $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ *y* $\vec{b} = (7, -21, 5)$*. Razone que los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel, aplicados a dicho sistema, son convergentes.*

Como

$$\begin{array}{c} 4 = |4| > |-1| + |1| = 2 \\ 8 = |-8| > |4| + |1| = 5 \\ 5 = |5| > |-2| + |1| = 3 \end{array}$$

la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ es de diagonal estrictamente dominante y, por tanto, el método de Jacobi y el método de Gauss Seidel son convergentes.

Ejercicio 3. 16 *Se considera el sistema no lineal* $\left.\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 5x \\ 2x^4 + y^4 & = & 9y \end{array}\right\}$*, encuentre la función* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que se pueda plantear como las soluciones de* $f(x, y) = (0, 0)$

Pasamos todas las expresiones al miembro de la izquierda

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 5x \\ 2x^4 + y^4 & = & 9y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 - 5x & = & 0 \\ 2x^4 + y^4 - 9y & = & 0 \end{array}\right\}$$

Luego tomando la función $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 5x, 2x^4 + y^4 - 9y)$, se tiene que las soluciones del sistema coinciden con los puntos (x, y) tales que $f(x, y) = (0, 0)$.

Ejercicio 3. 17 *Se plantea el sistema no lineal*

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 - 5x & = & 0 \\ 2x^4 + y^4 - 9y & = & 0 \end{array}$$

1. *Halle una función g de forma que la solución del sistema sea equivalente a encontrar un punto fijo de g.*

2. *Aplique la técnica de Gauss-Seidel al método del punto fijo definido por la función del apartado anterior (se calcula secuencialmente cada variable utilizando las variables nuevas).*

3. *Realice una iteración de ambos métodos partiendo de $\vec{x}^0 = (1,1)$.*

1.

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{x^2+y^2}{5} \\ y &=& \dfrac{2x^4+y^4}{9} \end{array}\right\} \Longrightarrow (x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y)) =$$

$$= \left(\frac{x^2+y^2}{5}, \frac{2x^4+y^4}{9}\right)$$

y la función pedida puede ser:

$$g(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2}{5}, \frac{2x^4+y^4}{9}\right)$$

2.

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{x^2+y^2}{5} \\ y &=& \dfrac{2\left(\dfrac{x^2+y^2}{5}\right)^4 + y^4}{9} \end{array}\right\} \Longrightarrow (x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y)) =$$

$$\left(\frac{x^2+y^2}{5}, \frac{2\left(\dfrac{x^2+y^2}{5}\right)^4 + y^4}{9}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{x^2+y^2}{5} \\ y &=& \dfrac{2x^4+y^4}{9} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x^{(1)} &=& \dfrac{1^2+1^2}{5} = \dfrac{2}{5} \\ y^{(1)} &=& \dfrac{2(1)^4+1^4}{9} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{x^2+y^2}{5} \\ y &=& \dfrac{2\left(\dfrac{x^2+y^2}{5}\right)^4 + y^4}{9} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

3.
$$\left.\begin{array}{rcl} x_{GS}^{(1)} & = & \dfrac{1^2+1^2}{5} = \dfrac{2}{5} \\ y_{GS}^{(1)} & = & \dfrac{2\left(\dfrac{2}{5}\right)^4 + 1^4}{9} = \dfrac{32+625}{625\cdot 9} = \dfrac{657}{5625} = \dfrac{73}{625} \simeq 0.1168 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 3. 18 *Sea* $\vec{g}(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2}{5}, \dfrac{2x^4+y^4}{9}\right)$.

1. *Compruebe que* $(0,0)$ *y* $(1,2)$ *son puntos fijos de* $\vec{g}$.
2. *Compruebe que* $\vec{g}$ *verifica las hipótesis del teorema de convergencia en* $(0,0)$.
3. *Realice una iteración del método de punto fijo tomando* $x^0 = y^0 = 1/2$.
4. *Calcule el error absoluto cometido al aproximar* $(0,0)$ *por* (x^1, y^1) *en la norma dos, en la norma uno y en la norma infinito.*

1. $\vec{g}(0,0) = ((0^2+0^2)/5, (2\cdot 0^4+0^4)/9) = (0,0)$ y $\vec{g}(1,2) = ((1^2+2^2)/5, (2\cdot 1^4+2^4)/9) = (\frac{2}{2}, \frac{18}{9}) = (1,2)$
2. g es continua y de clase 1 en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómicas sus componentes y $(0,0)$ es punto fijo por el apartado 1. Las derivadas parciales son:
$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{2x}{5}, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{2y}{5}, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{8x^3}{9}, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{4y^3}{9}$$
y por tanto se cumple trivialmente la acotación pedida en el Teorema 3.15 con $k=0$. Así, el método es localmente convergente.
3. $\vec{x^{(0)}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{x^{(1)}} = g(\vec{x^{(0)}}) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{48}\right)$.
4. $\left\|(\frac{1}{10}, \frac{1}{48}) - (0,0)\right\|_1 = \left\|(\frac{1}{10}, \frac{1}{48})\right\|_1 = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{48}\right| = \frac{29}{240} = 0.120833333\ldots$
$$\left\|(\frac{1}{10}, \frac{1}{48}) - (0,0)\right\|_\infty = \left\|\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{48}\right)\right\|_\infty = \text{máx}\left\{\left|\frac{1}{10}\right|, \left|\frac{1}{48}\right|\right\} = \frac{1}{10} = 0.1$$
$$\left\|\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{48}\right) - (0,0)\right\|_2 = \left\|\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{48}\right)\right\|_2 = \sqrt{\frac{1}{10^2} + \frac{1}{48^2}} = \sqrt{\frac{601}{57600}} = \frac{\sqrt{601}}{240} = 0.102147\ldots$$

Ejercicio 3. 19 *Realice una iteración del método de Newton para el sistema* $\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 4 \\ xy & = & 1 \end{array}\right\}$, *tomando como estimación inicial el punto* $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Tomamos la función $f(x,y) = (x^2+y^2-4, xy-1)$, tenemos que $f\left(\frac{1}{2},2\right) = \left(\frac{1}{4},0\right)$ y la diferencial es

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \Rightarrow df\left(\frac{1}{2},2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$\left[d\vec{f}(\vec{x}^0)\right](\Delta\vec{x}^0) = -\vec{f}(\vec{x}^0) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & \frac{-1}{4} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & \frac{-1}{4} \\ 0 & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{15} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{60} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{15} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{60} \\ \frac{-1}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{60} \\ \frac{29}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.51\hat{6} \\ 1.9\hat{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. 20 *Sabiendo que existe al menos una solución del sistema, estudie si se verifican las hipótesis del teorema de convergencia local del método de Newton para el sistema* $\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 4 \\ xy & = & 1 \end{array}\right\}$

Tomamos la función $f(x,y) = (x^2+y^2-4, xy-1)$, tenemos que la diferencial es

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \Longrightarrow |df(x,y)| = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 - 2y^2 = 2(x-y)(x+y)$$

El determinante es cero si $y = x$ o $y = -x$. Comprobamos si hay puntos que sean solución del sistema y que el determinante sea cero.

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 4 \\ xy & = & 1 \\ y & = & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x^2+x^2 & = & 4 \\ x \cdot x & = & 1 \\ y & = & x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x^2 & = & 4 \\ x^2 & = & 1 \\ y & = & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x^2 & = & 2!! \\ x^2 & = & 1!! \\ y & = & x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 0 & = & 1!! \\ x^2 & = & 1 \\ y & = & x \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 4 \\ xy & = & 1 \\ y & = & -x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x^2+(-x)^2 & = & 4 \\ x(-x) & = & 1 \\ y & = & -x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x^2 & = & 4 \\ x^2 & = & -1 \\ y & = & -x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x^2 & = & 2!! \\ x^2 & = & -1!! \\ y & = & -x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 0 & = & 3!! \\ x^2 & = & -1 \\ y & = & -x \end{array}\right\}$$

Ejercicio 3. 21 *Realice una iteración del método obtenido como extensión del método de la secante para el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 4 \\ xy & = & 1 \end{array}\right\}$$

tomando como estimaciones iniciales los puntos $(1/2, 2)$ *y* $(1/3, 3)$.

El sistema no lineal esta formado por las funciones

$$\left.\begin{array}{rcl} f_1(x,y) & = & x^2+y^2-4 \\ f_2(x,y) & = & xy-1 \end{array}\right\}$$

Los puntos iniciales del algoritmo

$$\vec{x}^0 = (x^0, y^0) = (1/2, 2) \qquad \vec{x}^1 = (x^1, y^1) = (1/3, 3)$$

Las aproximaciones de la diferencial se calculan

$$d\vec{f} \approx \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{x}^1) \approx \dfrac{f_1(\vec{x}^1) - f_1(x^0, y^1)}{x^1 - x^0} = \dfrac{5}{6} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{x}^1) \approx \dfrac{f_1(\vec{x}^1) - f_1(x^1, y^0)}{y^1 - y^0} = 5 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{x}^1) \approx \dfrac{f_2(\vec{x}^1) - f_2(x^0, y^1)}{x^1 - x^0} = 3 & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{x}^1) \approx \dfrac{f_2(\vec{x}^1) - f_2(x^1, y^0)}{y^1 - y^0} = \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Se plantea el sistema

$$d\vec{f}(\Delta\vec{x}^1) = -\vec{f}(\vec{x}^1)$$

$$\begin{pmatrix} 5/6 & 5 \\ 3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^1 \\ \Delta y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.1111 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que da como solución $(\Delta x^1, \Delta y^1) = (-0.1157, 1.0415)$ y finalmente se define

$$(x^2, y^2) = (x^1, y^1) + (\Delta x^1, \Delta y^1) = (0.2176, 4.0415)$$