Computación Numérica

Segundo Parcial - Abril 2015

1. Dados los puntos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ y la función $f(x) = x^5 - x^4$:

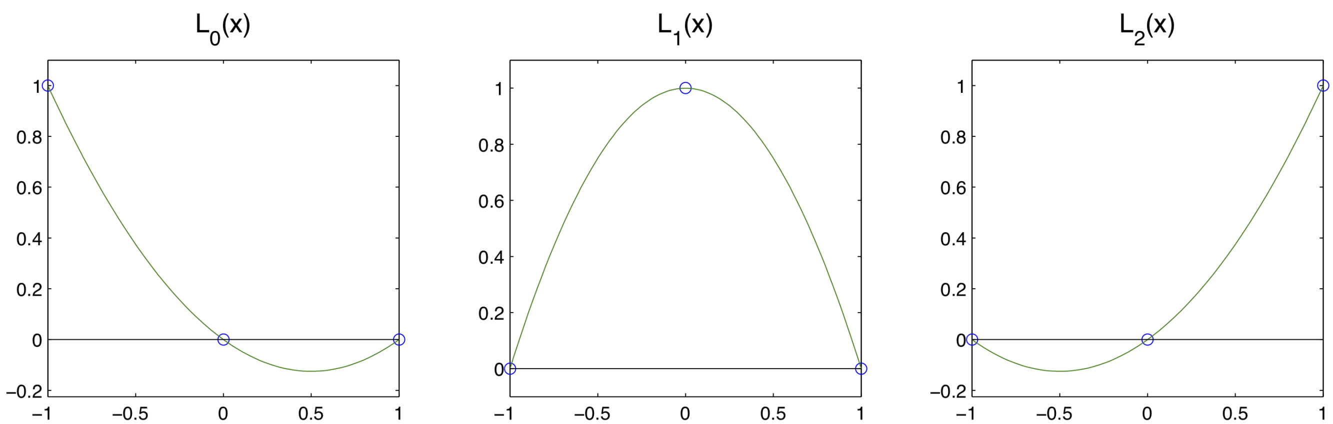
   (a) Calcular los polinomios fundamentales de Lagrange y dibujarlos.

   (b) Calcular el polinomio interpolante por el método de Lagrange.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{1}{2}x(x - 1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - (-1))(x - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = -(x + 1)(x - 1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - (-1))(x - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \frac{1}{2}(x + 1)x$$



El polinomio interpolante de Lagrange viene dado por

$$\begin{aligned}
P_2(x) =& f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\
P_2(x) =& (-2) \cdot L_0(x) + 0 \cdot L_1(x) + 0 \cdot L_2(x) \\
P_2(x) =& -2 \cdot L_0(x) = -\frac{2}{2}x(x - 1) \\
P_2(x) =& x - x^2
\end{aligned}$$

2. Consideremos la función $f(x) = \ln(x)$ y su polinomio interpolador utilizando los nodos x_0 y x_1.

   (a) Demostrar que el error cometido al aproximar $f(x)$ mediante tal polinomio en cualquier punto de $[x_0, x_1]$ está acotado por $\frac{(x_1-x_0)^2}{8x_0^2}$ (1 punto).

   (b) Construir el polinomio interpolante, utilizando el método de Newton para $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ (1 punto) y dar una cota del error cometido (0.5 puntos).

El error de interpolación viene dado por

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!},$$

donde las x_i son los puntos de interpolación y c un punto del intervalo de interpolación. En este caso, como tenemos dos nodos de interpolación, la interpolación es lineal y el error es

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \left|f^{(2)}(c)\right| \frac{|(x-x_0)(x-x_1)|}{2!}.$$

Por una parte tenemos que $\left|f^{(2)}(c)\right| = \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{x_0^2}$ suponiendo $x_0 < x_1$.

Por otra parte $g(x) = |(x-x_0)(x-x_1)| = (x-x_0)(x_1-x) = -x^2 + x_0x + x_1x + x_0x_1$ como $g'(x) = -2x + x_0 + x_1 = 0$ para $x = \dfrac{x_0+x_1}{2}$. Y como $g''(x) = -2$ en este punto tenemos un máximo. El valor de la función g en este máximo es $g\left(\dfrac{x_0+x_1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(x_0-x_1)^2$. Por lo tanto se verifica que

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \left|f^{(2)}(c)\right| \frac{|(x-x_0)(x-x_1)|}{2!} < \frac{1}{x_0^2}\frac{1}{4}(x_0-x_1)^2\frac{1}{2!} = \frac{(x_1-x_0)^2}{8x_0^2}.$$

Para construir el polinomio

x	$f(x)$	
1	0	
		$\dfrac{\ln 2 - 0}{2-1} = \ln 2$
2	$\ln 2$	

Ya tenemos

$$f[x_0] = 0, \quad f[x_0, x_1] = \ln 2.$$

Construímos el polinomio interpolante en la forma de Newton

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ P_1(x) &= 0 + \ln 2\,(x-1) \\ P_1(x) &= \ln 2\,(x-1) \end{aligned}$$

Y la cota del error es

$$\frac{(x_1-x_0)^2}{8x_0^2} = \frac{(2-1)^2}{8(1)^2} = \frac{1}{8} = 0.125$$

3. Calcular la recta que minimiza los errores cuadráticos. Dada la tabla de valores

x	0	1	2	3
y	2	5	8	13

hallar el ajuste lineal (recta de regresión) por mínimos cuadrados.

La recta será de la forma:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Queremos calcular la recta que minimiza la suma de los errores cuadráticos:

$$E(a_0, a_1) = \sum_{k=1}^{4} (P_1(x_k) - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{4} (a_0 + a_1 x_k - y_k)^2.$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} E(a_0, a_1) &= (P_1(0) - 2)^2 + (P_1(1) - 5)^2 + (P_1(2) - 8)^2 + (P_1(3) - 13)^2 = \\ &= (a_0 + a_1(0) - 2)^2 + (a_0 + a_1(1) - 5)^2 + (a_0 + a_1(2) - 8)^2 + (a_0 + a_1(3) - 13)^2 \end{aligned}$$

Para hallar el error mínimo calculamos las derivadas parciales respecto a las dos variables y las igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_0} &= \sum_{k=1}^{4} 2(a_0 + a_1 x_k - y_k) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_0} &= \sum_{k=1}^{4} 2(a_0 + a_1 x_k - y_k) x_k = \sum_{k=1}^{4} 2(a_0 x_k + a_1 x_k^2 - x_k y_k) = 0 \end{aligned}$$

Que equivale a

$$\begin{array}{rcrcl} a_0 \sum_{k=1}^4 1 & + & a_1 \sum_{k=1}^4 x_k & = & \sum_{k=1}^4 y_k \\ a_0 \sum_{k=1}^4 x_k & + & a_1 \sum_{k=1}^4 x_k^2 & = & \sum_{k=1}^4 x_k y_k \end{array}$$

Sistema, que expresado matricailmente es:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^4 1 & \sum_{k=1}^4 x_k \\ \sum_{k=1}^4 x_k & \sum_{k=1}^4 x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^4 y_k \\ \sum_{k=1}^4 x_k y_k \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_0} &= 2(a_0 + a_1(0) - 2) + 2(a_0 + a_1(1) - 5) + 2(a_0 + a_1(2) - 8) + 2(a_0 + a_1(3) - 13) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_0} &= 2(a_0(0) + a_1(0)^2 - (0)(2)) + 2(a_0(1) + a_1(1)^2 - (1)(5)) + \\ &+ 2(a_0(2) + a_1(2)^2 - (2)(8)) + 2(a_0(3) + a_1(3)^2 - (3)(13)) = 0 \end{aligned}$$

Sacando a_0 y a_1 factor común

$$\begin{array}{rcrcl} a_0(1+1+1+1) & + & a_1(0+1+2+3) & = & 2+5+8+13 \\ a_0(0+1+2+3) & + & a_1(0^2+1^2+2^2+3^2) & = & (0)(2)+(1)(5)+(2)(8)+(3)(13) \end{array}$$

Que es

$$\begin{array}{rcrcl} 4a_0 & + & 6a_1 & = & 28 \\ 6a_0 & + & 14a_1 & = & 60 \end{array}$$

Resolvemos el sistema por Gauss: la segunda ecuación $e_2 \to e_2 - (6/4)e_1$

$$\begin{array}{rcrcl} 4a_0 & + & 6a_1 & = & 28 \\ & & 5a_1 & = & 18 \end{array}$$

y por sutitución reversiva

$$\begin{array}{rcccl} a_1 & = & 18/5 & = & 3.6 \\ a_0 & = & (28 - 6a_1)/4 & = & 1.6 \end{array}$$

Y la recta de regresión mínimo cuadrática es

$$P_1(x) = 1.6 + 3.6x$$

4. $\boxed{\text{Dada la función } f(x,y)=x^2+y^2\text{, calcular la aproximación de } \Delta f(x,y) \text{ para } (x,y)=(1,-1) \text{ con } h_x=h_y=0.2.}$

El Laplaciano viene dado por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

La primera componente del vector será:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx & \frac{f(x_m+h_x,y_n)-2f(x_m,y_n)+f(x_m-h_x,y_n)}{h_x^2} = \frac{f(1+0.2,-1)-2f(1,-1)+f(1-0.2,-1)}{(0.2)^2} = \\
= & \frac{\left((1+0.2)^2+(-1)^2\right)-2\left((1)^2+(-1)^2\right)+\left((1-0.2)^2+(-1)^2\right)}{(0.2)^2} = \\
= & \frac{2.44-4+1.64}{0.04} = \frac{0.08}{0.04} = 2.
\end{aligned}$$

Y la segunda componente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx & \frac{f(x_m,y_n+h_y)-2f(x_m,y_n)+f(x_m,y_n-h_y)}{h_y^2} = \frac{f(1,-1+0.2)-2f(1,-1)+f(1,-1-0.2)}{(0.2)^2} = \\
= & \frac{\left((1)^2+(-1+0.2)^2\right)-2\left((1)^2+(-1)^2\right)+\left((1)^2+(-1-0.2)^2\right)}{(0.2)^2} = \\
= & \frac{1.64-4+2.44}{0.4} = \frac{0.08}{0.04} = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta f(1,-1) \approx 2+2=4$$

5. Calcular utilizando 5 nodos y la regla de Simpson compuesta la integral

$$I = \int_1^2 \ln x \, dx.$$

Determinar el número de subintervalos n suficientes para que la fórmula de Simpson compuesta proporcione un valor aproximado de I con un error menor que 10^{-4}.

Dividimos el intervalo $[1,2]$ en $n$subintervalos, cada uno de ellos de longitud $2h$. Se verifica

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{2-1}{2(2)} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Los nodos serán

$$\begin{aligned} x_0 =& a = 1 \\ x_1 =& x_0 + h = 1 + 0.25 = 1.25 \\ x_2 =& x_1 + h = 1.25 + 0.25 = 1.5 \\ x_3 =& x_2 + h = 1.5 + 0.25 = 1.75 \\ x_4 =& x_3 + h = 1.75 + 0.25 = 2 = b \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula simple de Simpson 2 veces:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x dx \approx & \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{4_3} f(x)dx = \\ =& \frac{x_2 - x_0}{6} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right) + \frac{x_4 - x_2}{6} \left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right) = \\ =& \frac{2h}{6} \left(f(x_0) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) \right) + 2f(x_2) + f(x_4) \right) = \\ =& \frac{2(0.25)}{6} \left(\ln 1 + 4\left(\ln 1.25 + \ln 1.75 \right) + 2 \ln 1.5 + \ln 2 \right) = 0.3863 \end{aligned}$$

La fórmula del error de la regla de Simpson es:

$$E_h^S = -(b-a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(c), \quad c \in (a,b)$$

En este caso, tenemos

$$a = 1,\ b = 2,\ h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{2n}$$

Y además

$$f(c) = \ln c,\ f'(c) = \frac{1}{c},\ f''(c) = -\frac{1}{c^2},\ f'''(c) = \frac{2}{c^3},\ f^{(4)}(c) = -\frac{6}{c^4}.$$

Y como $\left| f^{(4)}(c) \right|$ es una función estrictamente decreciente en $[1,2]$ el valor en 1 es una cota superior del valor de la función en el intervalo

$$\left| f^{(4)}(c) \right| = \frac{6}{c^4} < \frac{6}{1^4} = 6.$$

Utilizando la fórmula del error

$$\left| E_h^S \right| = (b-a) \frac{h^4}{180} \left| f^{(4)}(c) \right| \leq \frac{h^4}{180} \times 6 = \frac{1}{15} \frac{1}{(2n)^4} < 0.0001,$$

$$\frac{1}{15 \times 16 \times n^4} < 0.0001$$

$$\frac{10000}{15 \times 16} < n^4$$

$$\sqrt[4]{\frac{10000}{15 \times 16}} < n \Longrightarrow 2.54 < n$$

Y si tomamos $n = 3$ (aplicamos tres veces la regla de Simpson simple) el número de nodos será $2n + 1 = 7$ y podemos garantizar que el error al aproximar la integral con la regla del Simpson compuesta va a ser menor que 10^{-4}.