Tema 2: Resolución numérica de ecuaciones no lineales.

Ejercicio 1 *Sea* $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.

(a) *Razone que* f *tiene una única raíz en* $[1,2]$ *y que el método de bisección converge a dicha raíz.*

(b) *Calcule el término* x_3 *de la sucesión obtenida por bisección en* $[1,2]$.

(c) *Halle* $N \in \mathbb{N}$ *de forma que el término* x_N *de la sucesión obtenida por bisección garantice una aproximación a la raíz de al menos ocho dígitos.*

Ejercicio 2 *Obtenga la fórmula para calcular* x_n *en el método regula falsi y aplíquela para obtener el término* x_3 *de la sucesión, para la ecuación* $f(x) = x^5 + x^3 + x - 3 = 0$ *en el intervalo* $[0,3]$.

Ejercicio 3 *Realice una iteración del método regula falsi para* $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ *en* $[1,2]$.

Ejercicio 4 *Sea* $g(x) = -0.25x^2 + x + 1$.

(a) *Compruebe que* $x = 2$ *y* $x = -2$ *son los únicos puntos fijos de* g.

(b) *Compruebe que se verifican las hipótesis del teorema de convergencia local en el intervalo* $[1,3]$.

(c) *Realice tres iteraciones del método de punto fijo con* $x_0 = 1$ *y calcule con cuantas cifras significativas aproxima* x_3 *al punto fijo* $x = 2$.

(d) *Justifique teóricamente que no es razonable utilizar la función de iteración* g *para obtener el punto fijo* $x = -2$.

(e) *Halle un valor de* x_0, *distinto de* -2, *para que la sucesión* $x_{n+1} = g(x_n)$ *converja a* -2.

Ejercicio 5 *Se considera la ecuación* $f(x) = x^2 - 3x - 1 = 0$. *Halle una función de iteración* g *que verifique las hipótesis del teorema de convergencia local en el intervalo* $[-1,1]$. *(Sugerencia: despeje la* x *del monomio* $3x$*)*

Ejercicio 6 *Sea* $f(x) = 10x + \cos(x) + 2$. *Razone que* f *posee alguna raíz en* $[-1,1]$ *y halle una función* $g(x)$ *cuyos puntos fijos sean raíces de* f *y que verifique el teorema de convergencia local del método del punto fijo.*

Ejercicio 7 *Se considera la ecuación* $f(x) = 2x - x^2 = 0$ *cuyas raíces son* 0 *y* 2. *Se pide:*

(a) *Razone que el método de Newton converge localmente en ambas raíces.*

(b) *Demuestre que el método de Newton está definido por la relación:* $x_{n+1} = g(x_n)$, *siendo* $g(x) = \frac{-x^2}{2-2x}$.

(c) *Utilizando que g' es función monótona en $\mathbb{R}$, compruebe que la función de iteración asociada al método de Newton, $g(x) = \dfrac{-x^2}{2-2x}$ verifica las hipótesis del teorema de convergencia local para el método de punto fijo en el intervalo $[-0.5, 0.25]$.*

Ejercicio 8 *Realice (puedes utilizar Matlab) una iteración del método de Muller para la ecuación $f(x) = x^4 - 1 = 0$ usando los datos iniciales $x_0 = 0.5$, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 1.5$.*

Ejercicio 9 *Se considera la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ y se pide:*

(a) *Razone que posee una única raíz real.*

(b) *Demuestre que el método de Newton converge localmente.*

(c) *Realice una iteración de dicho método siendo $x = 0$ la estimación inicial.*

(d) *Realice una iteración del método de la secante siendo $x = 0$ y $x = 1$ las estimaciones iniciales.*

(e) *Halle $n \in \mathbb{N}$ de forma que el término x_n de la sucesión obtenida por bisección en $[0, 1]$ garantice una aproximación a la raíz de al menos dos dígitos.*

Ejercicio 10 *Sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.*

(a) *Realice (puedes utilizar Matlab) una iteración del método de Muller tomando como datos iniciales $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ y $x_2 = 1.5$.*

(b) *Evalúe $f(1.5)$ y $f'(1.5)$ mediante el método de Horner con aritmética de 3 dígitos.*