Computación Numérica

Segundo Parcial - Abril 2014

1. **Dados los nodos:**

x	-1	0	1
y	1	0	2

Si escribimos el spline natural que los ajusta como

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{si } x \in [-1, 0] \\ s_2(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

plantear las ecuaciones del sistema cuya solución cuya solución son los coeficientes a**,** b**,** c**,** d**,** e**,** f**,** g **y** h**. Especificar las condiciones aplicadas.**

Se tienen que cumplir las siguientes condiciones:
Condiciones de interpolación: la curva ha de pasar por los tres puntos. Por lo tanto:

$$s_1(-1) = 1,\ s_1(0) = 0,\ s_2(0) = 0,\ s_2(1) = 2.$$

Condiciones de continuidad: han de coincidir las derivadas primera y segunda en los puntos intermedios:

$$s_1'(0) = s_2'(0),\ s_1''(0) = s_2''(0).$$

Y como hay 8 incógnitas y de momento sólo tenemos 6 condiciones (ecuaciones) imponemos dos más en los extremos. Como el spline es natural las condiciones adicionales son:

$$s_1''(-1) = 0,\ s_2''(1) = 0.$$

Calculamos

$$s'(x) = \begin{cases} s_1'(x) = 3ax^2 + 2bx + c & \text{si } x \in [-1, 0] \\ s_2'(x) = 3ex^2 + 2fx + g & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} s_1''(x) = 6ax + 2b & \text{si } x \in [-1, 0] \\ s_2''(x) = 6ex + 2f & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

y las ecuaciones son:

1. $s_1(-1) = 1 \Longrightarrow -a + b - c + d = 1$
2. $s_1(0) = 0 \Longrightarrow d = 0$
3. $s_2(0) = 0 \Longrightarrow h = 0$
4. $s_2(1) = 2 \Longrightarrow e + f + g + h = 2$
5. $s_1'(0) = s_2'(0) \Longrightarrow c = g$
6. $s_1''(0) = s_2''(0) \Longrightarrow 2b = 2f$
7. $s_1''(-1) = 0 \Longrightarrow -6a + 2b = 0$
8. $s_2''(1) = 0 \Longrightarrow 6e + 2f = 0$

Y tenemos un sistema lineal de ocho ecuaciones para calcular ocho incógnitas.

2. **Dados los puntos $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, y $x_3 = 1$ de la función $f(x) = |x|$ calcular el polinomio de la forma $P(x) = a + bx^2$ que aproxima los puntos de la función. Utilizar la base de polinomios $\{P_0, P_2\} = \{1, x^2\}$.**

   Para una base de polinomios $\{P_0, P_2\}$ el polinomio de aproximación es de la forma $P(x) = a_0 P_0(x) + a_2 P_2(x)$ donde los coeficientes a_0y a_2 son la solución del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} \langle P_0, P_0\rangle & \langle P_0, P_2\rangle \\ \langle P_2, P_0\rangle & \langle P_2, P_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle P_0, f(x)\rangle \\ \langle P_2, f(x)\rangle \end{pmatrix}.$$

   En este caso el producto escalar es

$$\langle g(x), h(x)\rangle = \sum_{k=1}^{3} g(x_k)\, h(x_k).$$

   Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} 1 \times 1 & \sum_{k=1}^{3} 1 \times x_k^2 \\ \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \times 1 & \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \times x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} 1 \times f(x_k) \\ \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \times f(x_k) \end{pmatrix},$$

   es decir

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} 1 & \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \\ \sum_{k=1}^{3} x_k^2 & \sum_{k=1}^{3} x_k^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} |x_k| \\ \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \times |x_k| \end{pmatrix}.$$

   Construyamos una tabla para calcular estos valores

	1	x_k	x_k^2	x_k^4	$\|x_k\|$	$x_k^2 \|x_k\|$
	1	-2	4	16	2	8
	1	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1
$\sum$	3		5	17	3	9

   Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

   Tenemos dos ecuaciones

$$\begin{cases} 3a_0 + 5a_2 = 3 \\ 5a_0 + 17a_2 = 9 \end{cases}.$$

   Despejando a_0 en la primera ecuación $a_0 = \frac{1}{3}(3 - 5a_2)$. Y sustituyéndo en la segunda ecuación:

$$\frac{5}{3}(3 - 5a_2) + 17a_2 = 9 \Longrightarrow 13a_2 = 6 \Longrightarrow a_2 = \frac{6}{13} = 0.46.$$

   Entonces

$$a_0 = \frac{1}{3}(3 - 5a_2) = \frac{1}{3}(3 - 5\frac{6}{13}) = \frac{3}{13} = 0.23.$$

   Y el polinomio que aproxima los puntos es

$$P(x) = a_0 P_0(x) + a_2 P_2(x) = \frac{6}{13} \times 1 + \frac{3}{13} \times x^2 = 0.23 + 0.46x^2.$$

3. **Un vehiculo que se mueve supuestamente con velocidad constante parte en el instante inicial del punto al que se cuenta la distancia. Los datos de las medidas de la posición en cuatro tiempos diferentes son las siguientes:**

tiempo (s)	**0**	**20**	**40**	**60**
posición (m)	**0**	**358**	**725**	**1078**

Calcular la recta que pasa por el origen y que minimiza los errores cuadráticos. Deducir la fórmula empleada para calcular la recta a partir de los errores cuadráticos. Calcular la velocidad del vehículo que se deduce de la recta.

Una recta que pasa por el origen será de la forma:

$$P(x) = mx$$

Queremos calcular la recta que minimiza la suma de los errores cuadráticos:

$$E(m) = \sum_{k=1}^{4}(P(x_k) - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{4}(m \times x_k - y_k)^2.$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} E(m) &= (P(0) - 0)^2 + (P(20) - 358)^2 + (P(40) - 725)^2 + (P(60) - 1078)^2 = \\ &= (m \times 0 - 0)^2 + (m \times 20 - 358)^2 + (m \times 40 - 725)^2 + (m \times 60 - 1078)^2 \end{aligned}$$

Para hallar el error mínimo derivamos:

$$\begin{aligned} E'(m) &= \sum_{k=1}^{4} 2(m \times x_k - y_k)x_k = \sum_{k=1}^{4} 2(m \times x_k^2 - y_k x_k) = 0 \\ & \quad m\sum_{k=1}^{4} x_k^2 - \sum_{k=1}^{4} y_k x_k = 0 \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$m = \frac{\sum_{k=1}^{4} y_k x_k}{\sum_{k=1}^{4} x_k^2}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} E'(m) &= 2(m \times 0 - 0) \times 0 + 2(m \times 20 - 358) \times 20 + 2(m \times 40 - 725) \times 40 + 2(m \times 60 - 1078) \times 60 \\ &= 2m(0 \times 0 + 20 \times 20 + 40 \times 40 + 60 \times 60) - 2(0 \times 0 + 20 \times 358 + 40 \times 725 + 60 \times 1078) = 0 \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$m = \frac{0 \times 0 + 20 \times 358 + 40 \times 725 + 60 \times 1078}{0 \times 0 + 20 \times 20 + 40 \times 40 + 60 \times 60} = \frac{100800}{5660} = 18$$

Y la recta de aproximación es

$$P(x) = 18x$$

y como x es tiempo y $P(x)$ posición, m es la velocidad constante y es 18 m/s.

4. **Supongamos que tenemos tres puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de una función f, de forma que $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$ con $0 < h < 1$. Construir una fórmula de derivación de tipo interpolatorio que aproxime $f'(x_0)$ o $f'(x_2)$ que utilice estos tres puntos.**

   Si usamos un polinomio de interpolación de f de 2^o grado en x_0, x_1, x_2, siendo $y_j = f(x_j)$, el polinomio de interpolación en la forma de Newton es:

$$p(x) = [y_0] + [y_0, y_1](x - x_0) + [y_0, y_1, y_2](x - x_0)(x - x_1)$$

   con

$$[y_0] = y_0, \quad [y_0, y_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_1 - y_0}{h},$$

$$[y_0, y_1, y_2] = \frac{[y_0, y_1] - [y_1, y_2]}{x_0 - x_2} = \frac{1}{2h}\Big(\frac{y_0 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_2}{h}\Big) = \frac{1}{2h^2}\big(y_0 - 2y_1 + y_2\big).$$

$$[y_0] = y_0, \quad [y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad [y_0, y_1, y_2] = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2).$$

   Si derivamos $p(x)$

$$f'(x) \approx p'(x) = [y_0, y_1] + [y_0, y_1, y_2]((x - x_0) + (x - x_1)),$$

   y para el caso particular del punto x_0

$$f'(x_0) \approx p'(x_0) = [y_0, y_1] + [y_0, y_1, y_2]((x_0 - x_0) + (x_0 - x_1)),$$

$$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{1}{2h^2}\big(y_0 - 2y_1 + y_2\big)(-h),$$

$$f'(x_0) \approx \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}.$$

   Y si aproximamos la derivada en el punto x_2

$$f'(x_2) \approx p'(x_2) = [y_0, y_1] + [y_0, y_1, y_2]((x_2 - x_0) + (x_2 - x_1)),$$

$$f'(x_2) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{1}{2h^2}\big(y_0 - 2y_1 + y_2\big)(2h + h),$$

$$f'(x_2) \approx \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}.$$

5. **Sea la integral:**

$$I = \int_2^3 \frac{dx}{x}$$

(a) **Obtener el valor aproximado de la integral mediante la regla del trapecio compuesta con tres subintervalos.**

Dividimos el intervalo $[2, 3]$ en 3 trozos de igual longitud

$$h = \frac{b-a}{3} = \frac{3-2}{3} = 0.33.$$

Los nodos serán

$$\begin{aligned} x_0 &= a = 2 \\ x_1 &= x_0 + h = 2 + 0.33 = 2.33 \\ x_2 &= x_1 + h = 2.33 + 0.33 = 2.66 \\ x_3 &= x_3 + h = 2.66 + 0.33 = 3 = b \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula simple de los Trapecios 3 veces:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{x} \approx & \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = \\ =& \frac{x_1 - x_0}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \frac{x_2 - x_1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \frac{x_3 - x_2}{2}\left(f(x_2) + f(x_3)\right) = \\ =& \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + f(x_3)\right) = \\ =& \frac{0.33}{2}\left(\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2.33} + \frac{1}{2.66}\right) + \frac{1}{3}\right) = 0.406746 \end{aligned}$$

(b) **Determinar el número n de subintervalos de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de I con un error menor que 10^{-3}**

$$E_h^T = -\frac{(b-a)\,h^2}{12} f''(c), \quad c \in (a, b)$$

Tenemos

$$a = 2,\ b = 3,\ h = \frac{b-a}{n},\ f''(c) = \frac{2}{c^3}.$$

Como es una función estrictamente decreciente en $[2, 3]$

$$|f''(c)| \leq |f''(2)| = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}.$$

Utilizando la fórmula del error

$$\left|E_h^T\right| = \frac{(b-a)\,h^2}{12}\left|f''(c)\right| \leq \frac{h^2}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12 \times 4 \times n^2} < 0.001,$$

$$\frac{1}{12 \times 4 \times n^2} < 0.001$$

$$\frac{1}{12 \times 4 \times 0.001} < n^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{12 \times 4 \times 0.001}} < n \Longrightarrow 4.56 < n$$

Y si tomamos $n = 5$ podemos garantizar que el error al aproximar la integral con la regla del Trapecio compuesta va a ser menor que 10^{-3}.