Ejercicio 5.1 *Calcula con la regla del trapecio y de Simpson la integral* $\int_0^1 x^3\,dx$ *y halla una cota del error de truncamiento.*

Regla del trapecio

$$\int_0^1 x^3\,dx \approx \frac{1-0}{2}\,(0^3+1^3) = \frac{1}{2}$$

Cota del error

$$|\mathcal{E}| = \left|-\frac{(1-0)^3}{12}\,f''(\xi)\right| = \frac{|6\xi|}{12} \leqslant \frac{1}{2}$$

Regla de Simpson

$$\int_0^1 x^3\,dx \approx \frac{\frac{1-0}{2}}{3}\left(0^3+4\left(\frac{0+1}{2}\right)^3+1^3\right) = \frac{1}{6}(0+\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{4}$$

Cota del error

$$|\mathcal{E}| = \left|-\frac{1}{90}\left(\frac{1-0}{2}\right)^5 f^{(iv)}(\xi)\right| = \frac{1}{90}\cdot\frac{1}{32}\cdot 0 = 0$$

Ejercicio 5.2 *Construye la fórmula de cuadratura interpolatoria basada en los valores de la función en los nodos* $x_i = 0, 1, 3, 4$ *en el intervalo* $[0, 4]$.

Regla para los nodos 0, 1, 3 y 4:

$$\int_0^4 f(x)\,dx \approx \int_0^4 P_3(x)\,dx = \int_0^4\left(\sum_{i=0}^{3} f(x_i)\cdot l_i(x)\right)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{3}\left(f(x_i)\cdot\int_0^4 l_i(x)dx\right)$$

$$\int_0^4 l_0(x)dx = \int_0^4 \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)}dx =$$

$$= \frac{-1}{12}\int_0^4 (x^3-8x^2+19x-12)dx = \frac{-1}{12}\cdot\frac{-8}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\int_0^4 l_1(x)dx = \int_0^4 \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)}dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^4 (x^3-7x^2+12x)dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{32}{3} = \frac{16}{9}$$

$$\int_0^4 l_2(x)dx = \int_0^4 \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)}dx =$$

$$= \frac{-1}{6}\int_0^4 (x^3 - 5x^2 + 4x)dx = \frac{-1}{6} \cdot \frac{-32}{3} = \frac{16}{9}$$

$$\int_0^4 l_3(x)dx = \int_0^4 \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)}dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^4 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx = \frac{1}{12} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx \;\approx\; \frac{2}{9}f(0) + \frac{16}{9}f(1) + \frac{16}{9}f(3) + \frac{2}{9}f(4)$$

Ejercicio 5.3 *Determina los valores de n y h que aseguren una aproximación de* $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x+4}\,dx$ *con un error de truncamiento menor que 10^{-5} utilizando:*

1. *Regla del Trapecio Compuesta.*
2. *Regla de Simpson Compuesta. Calcula, en este caso, el valor aproximado de la integral.*

1. En la Regla del Trapecio Compuesta se tiene que una cota del error es

   $$|\text{Error Trunc.}\,| \leqslant \frac{(b-a)h^2}{12}\,M \qquad \text{con} \qquad M = \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)|$$

   como la derivada segunda es decreciente,

   $$|f''(x)| = \frac{2}{|(x+4)^3|} \leqslant \frac{2}{|(0+4)^3|} = \frac{1}{32} = M$$

   para asegurar la tolerancia permitida, se ha de cumplir

   $$\frac{(b-a)h^2}{12}\,M = \frac{2h^2}{12}\frac{1}{32} \;<\; 10^{-5} \Longleftrightarrow \frac{h^2}{192} \;<\; 10^{-5} \Longleftrightarrow h \;<\; 0.04382$$

   Como $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

   $$\frac{2}{n} <\; 0.04382 \Longleftrightarrow n > \frac{2}{0.04382} = 45.64 \Longleftrightarrow n \geqslant 46$$

2. Con la Regla de Simpson Compuesta

   $$|\text{Error Trunc.}\,| \leqslant \frac{(b-a)h^4}{180}\,M \qquad \text{con} \qquad M = \max_{\xi\in[a,b]} |f^{(iv)}(\xi)|$$

   como la derivada cuarta es decreciente

   $$f^{(iv)}(x) = \frac{24}{(x+4)^5} \leqslant \frac{24}{(0+4)^5} = \frac{3}{128} = M$$

para asegurar la tolerancia permitida, se ha de cumplir

$$\frac{(b-a)h^4}{180}M = \frac{2h^4}{180}\frac{3}{128} < 10^{-5} \Longleftrightarrow \frac{h^4}{3840} < 10^{-5} \Longleftrightarrow h < 0.44267$$

Como $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

$$\frac{2}{n} < 0.44267 \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow n > \frac{2}{0.44267} = 4.51905 \Longleftrightarrow n \geqslant 6 \text{ (par)}$$

Para el cálculo de la integral, tendremos los nodos:

$$x_j = x_0 + jh \qquad j = 0, \ldots, 6 \text{ con } h = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3}\ m = 3$$

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(0) + 2\sum_{j=1}^{2} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{3} f(x_{2j-1}) + f(2)\right] =$$

$$\frac{1}{9}\left[f(0) + 2\left(f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right)\right) + 4\left(f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{3}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right)\right) + f(2)\right] =$$

$$\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4} + 2\left(\frac{3}{14} + \frac{3}{16}\right) + 4\left(\frac{3}{13} + \frac{1}{5} + \frac{3}{17}\right) + \frac{1}{6}\right] = 0.40546637458$$

que se ajusta al error permitido pues el valor exacto es

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4}\,dx = [\log(x+4)]_0^2 = log(6) - log(4) = 0.405465108$$

Ejercicio 5.4 *Calcula el error real cometido con las Reglas Compuestas del Trapecio y Simpson en el cálculo de la integral*

$$\int_0^2 e^x - 3x^2\,dx = -1.6109439\ldots$$

utilizando el paso $h = 0.5$*. Halla una cota del error de truncamiento y compárala con el error real.*

$$h = 0.5 \Longleftrightarrow \frac{2}{n} = 0.5 \Longleftrightarrow n = 4;$$

$$x_0 = 0; x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 1; x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = 2$$

Con la regla del Trapecio,

$$\int_0^2 e^x - 3x^2\,dx \approx \frac{0.5}{2}\left[f(0) + 2\sum_{j=1}^{3} f(x_j) + f(2)\right] = -1.7283898\ldots$$

Con la regla de Simpson, $n = 4$ y $m = 2$:

$$\int_0^2 e^x - 3x^2 dx \approx \frac{h}{3}\left[f(0) + 2\sum_{j=1}^{1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{2} f(x_{2j-1}) + f(2) \right] = -1.6087898\ldots$$

$$f''(x) = e^x - 6 \qquad\qquad f^{(iv)}(x) = e^x$$

Los máximos de los valores absolutos de ambas funciones son $|e^0 - 6| = 5$ y e^2 respectivamente, luego la cota del error para la regla del Trapecio es

$$|error| \leqslant \frac{(2-0)(0.5)^2}{12} \cdot 5 = 0.20833\ldots$$

el error real es

$$|-1.6109439\ldots - (-1.7283898\ldots)| = 0.1174459\ldots$$

con la regla de Simpson la cota del error es

$$|error| \leqslant \frac{(2-0)(0.5)^4}{180} \cdot e^2 = 0.005131\ldots$$

el error real es

$$|-1.6109439\ldots - (-1.6087898\ldots)| \approx 0.0021541$$

Ejercicio 5.5 *1. Deduzca la fórmula de Cuadratura Gaussiana en $[-1,1]$ que es exacta para polinomios de grado $\leqslant 5$.*

2. Utilice la fórmula anterior para aproximar $I = \displaystyle\int_0^3 (x^6 + 5x^2 + 2)\, dx$.

3. ¿Cuál es el mínimo número de nodos para que el resultado sea exacto con cualquier polinomio de grado 6?.

1. Para alcanzar el grado de exactitud $5 = 2n - 1$ se necesitan $n = 3$ nodos. Los nodos serán las raíces del polinomio de Legendre $L_3(x)$, el cual se calcula por recurrencia

$$L_3(x) = \frac{5}{3}xL_2(x) - \frac{2}{3}L_1(x) = \frac{1}{3}\left[5x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) - 2x\right] = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$\text{Sus raíces son } r_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \qquad r_2 = 0 \qquad r_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

y los coeficientes c_i

$$c_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(x-0)\left(x - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - 0\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)} dx = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}x\right) dx =$$

$$\frac{5}{6}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{5}{3}\int_{0}^{1} x^2dx = \frac{5}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{9}$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} \frac{\left(x-\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)\left(x-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(0-\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)\left(0-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}dx = -\frac{5}{3}\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{3}{5}\right)dx =$$

$$-\frac{10}{3}\int_0^1 x^2dx = -\frac{10}{3}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{5}x\right]_0^1 = -\frac{10}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\right) = -\frac{10}{3}\cdot\frac{-4}{15} = \frac{8}{9}$$

$$c_3 = \int_{-1}^{1} \frac{\left(x-\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)(x-0)}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}-\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)\left(\sqrt{\frac{3}{5}}-0\right)}dx = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1}\left(x^2+\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)dx =$$

$$\frac{5}{6}\int_{-1}^{1} x^2dx = c_1 = \frac{5}{9}$$

La fórmula de cuadratura es: $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

El cambio de variable será

$$\begin{array}{ccc} [0,3] & \longleftrightarrow & [-1,1] \\ x & & t \\ x = \dfrac{3(t+1)}{2} & & t = \dfrac{2}{3}x-1 \\ dx = \dfrac{3}{2}dt & & dt = \dfrac{2}{3}dx \end{array}$$

y la integral se transforma en

$$\int_0^3 (x^6+5x^2+2)dt \ = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{3(t+1)}{2}\right)^6 + 5\left(\frac{3(t+1)}{2}\right)^2 + 2\right)dt$$

2. Aplicando la fórmula con los nodos y coeficientes de la tabla

$$\int_0^3 \left(x^6+5x^2+2\right)dt \approx \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{3} c_i\left(\left(\frac{3(r_i+1)}{2}\right)^6 + 5\left(\frac{3(r_i+1)}{2}\right)^2 + 2\right) =$$

$$\frac{5}{9}\cdot\frac{197876-50427\sqrt{15}}{1000} + \frac{8}{9}\cdot\frac{1577}{64} + \frac{5}{9}\cdot\frac{197876+50427\sqrt{15}}{1000} =$$

$$\frac{145059}{400} = 362.6475 \simeq 363.42857 = \frac{2544}{7} = \int_0^3 \left(x^6+5x^2+2\right)dx$$

3. 4 nodos.

Ejercicio 5.6 *Aproxima la integral*

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \, dt$$

mediante Cuadratura Gaussiana con cuatro nodos.

El cambio de variable será

$$\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longleftrightarrow & [-1,1] \\ t & & x \\ t = \dfrac{\pi(x+1)}{2} & & x = \dfrac{2t-\pi}{\pi} \\ dt = \dfrac{\pi}{2} dx & & dx = \dfrac{2}{\pi} dt \end{array}$$

y la integral se transforma en

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \, dt = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right) dx$$

aplicando la fórmula con los nodos y coeficientes de la tabla

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \, dt \approx \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{4} c_i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(r_i+1)}{2}\right) = 1.999984228$$