Computación Numérica

Segundo Parcial - Abril 2017

1. Consideremos la función $f(x) = \ln(x)$ y su polinomio interpolador con los nodos x_0 y x_1.

   (a) Demostrar que el error cometido al aproximar $f(x)$ mediante tal polinomio en cualquier punto de $[x_0, x_1]$ está acotado por $\frac{(x_1-x_0)^2}{8x_0^2}$.

   (b) Construir el polinomio interpolante, utilizando el método de Newton para $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ y dar una cota del error cometido.

   (c) Se desea tabular $f(x)$ para ser capaces de obtener, utilizando interpolación lineal en dos puntos consecutivos, cualquier valor de $f(x)$ con un error menor que 10^{-2}. Calcular el número de subintervalos necesarios, considerando los puntos igualmente espaciados, cuando $[x_0, x_n] = [1, 100]$.

(a)

El error de interpolación viene dado por

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!},$$

donde las x_i son los puntos de interpolación, c un punto del intervalo de interpolación, f la función a interpolar y P_n el polinomio de interpolación obtenido con los puntos de interpolación. En este caso, como tenemos dos nodos de interpolación, la interpolación es lineal y el error es

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \left|f^{(2)}(c)\right| \frac{|(x-x_0)(x-x_1)|}{2!}.$$

Por una parte, suponiendo $x_0 < x_1$, y como $c \in (x_0, x_1)$ tenemos

$$\left|f^{(2)}(c)\right| = \frac{1}{c^2} < \frac{1}{x_0^2}$$

Por otra parte

$$g(x) = |(x-x_0)(x-x_1)| = (x-x_0)(x_1-x)$$

y

$$g'(x) = (x_1 - x) + (x - x_0)(-1) = -2x + x_0 + x_1 = 0$$

con lo que el extremo está en

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Y como $g''(x) = -2$ en este punto tenemos un máximo. El valor de la función g en este máximo es

$$g\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0\right)\left(x_1 - \frac{x_0 + x_1}{2}\right) = \left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right) = \frac{1}{4}(x_1 - x_0)^2.$$

Por lo tanto se verifica que

$$|E(x)| = |f(x) - P_1(x)| = \left|f^{(2)}(c)\right| \frac{|(x - x_0)(x - x_1)|}{2!} < \frac{1}{x_0^2}\frac{1}{4}(x_1 - x_0)^2 \frac{1}{2!} = \frac{(x_1 - x_0)^2}{8x_0^2} \quad (1).$$

(b)

Para construir el polinomio

x	$f(x)$	
1	0	
		$\frac{\ln 2 - 0}{2 - 1} = \ln 2$
2	$\ln 2$	

Ya tenemos los coeficientes del polinomio

$$f[x_0] = 0, \quad f[x_0, x_1] = \ln 2.$$

Construímos el polinomio interpolante en la forma de Newton

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ P_1(x) &= 0 + \ln 2\,(x - 1) \\ P_1(x) &= \ln 2\,(x - 1) \end{aligned}$$

Y, teniendo en cuenta (1) la cota del error es

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{8x_0^2} = \frac{(2-1)^2}{8(1)^2} = \frac{1}{8} = 0.125$$

(c)

Si dividimos el intervalo $[1, 100]$ en n intervalos iguales de longitud h tendremos que

$$h = \frac{100 - 1}{n} = \frac{99}{n} \quad (2).$$

Los extremos de los intervalos serán

$$x_i = 1 + i\,h \quad i = 0, \dots, n.$$

Y los intervalos serán de la forma

$$[x_i, x_{i+1}] \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Teniendo en cuenta (1) para cada uno de estos intervalo la cota de error será

$$|E(x)| < \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8x_i^2}.$$

Como $h = x_{i+1} - x_i$ es la longitud de todos los intervalos

$$|E(x)| < \frac{h^2}{8x_i^2}.$$

Y por la fórmula (2)

$$|E(x)| < \frac{(99/n)^2}{8x_i^2}.$$

Por otra parte, dado que todos los x_i están en el intervalo $[1, 100]$ el menor valor que puede tomar x_i es 1 y podemos decir

$$|E(x)| < \frac{(99/n)^2}{8x_i^2} < \frac{(99/n)^2}{8(1)^2} = \frac{99^2}{8n^2}.$$

Si hacemos

$$\frac{99^2}{8n^2} < 10^{-2} \quad (3)$$

entonces

$$|E(x)| < 10^{-2}$$

que es lo que estamos buscando. Veamos cuantos intervalos necesitamos como mínimo para que se cumpla (3).

$$\frac{99^2}{8n^2} < 10^{-2} \iff \frac{99^2}{(8)(10^{-2})} < n^2 \iff \sqrt{\frac{99^2 10^2}{8}} < n \iff 350.02 < n$$

y si dividimos el intervalo $[1, 100]$ en $n = 351$ subintervalos iguales y realizamos interpolación lineal en cada uno de ellos podemos garantizar que el error de interpolación $|E(x)| < 10^{-2}$.

2. Dados siete puntos equiespaciados en el intervalo $[-1, 1]$ de la función $f(x) = \tan x$ plantear el sistema cuya solución nos daría los coeficientes del polinomio de la forma $P(x) = a_1 x + a_3 x^3$ que aproxima los puntos de la función. Utilizar la base de polinomios $\{P_1, P_3\} = \{x, x^3\}$.

La solución al problema planteado sería la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \langle P_1, P_3 \rangle \\ \langle P_3, P_1 \rangle & \langle P_3, P_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle P_1, f(x) \rangle \\ \langle P_3, f(x) \rangle \end{pmatrix}$$

siendo el producto escalar

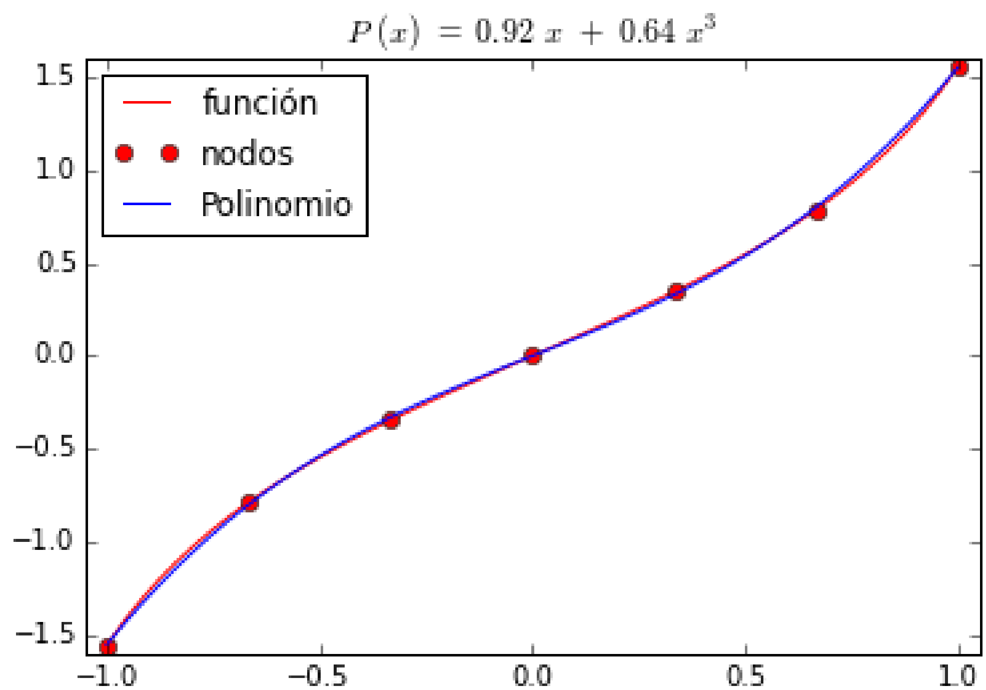
$$\langle g(x), h(x) \rangle = \sum_{k=1}^{7} g(x_k)\, h(x_k).$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{7} x_k \times x_k & \sum_{k=1}^{7} x_k \times x_k^3 \\ \sum_{k=1}^{7} x_k^3 \times x_k & \sum_{k=1}^{7} x_k^3 \times x_k^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{7} x_k \times f(x_k) \\ \sum_{k=1}^{7} x_k^3 \times f(x_k) \end{pmatrix},$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{7} x_k^2 & \sum_{k=1}^{7} x_k^4 \\ \sum_{k=1}^{7} x_k^4 & \sum_{k=1}^{7} x_k^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{7} x_k \times \tan x_k \\ \sum_{k=1}^{7} x_k^3 \times \tan x_k \end{pmatrix}.$$



3. $\boxed{\text{Dada la función } \mathbf{f}(x,y) = (f_1, f_2) = (x\,y, x^3 - y^2) \text{ calcular una aproximación de la divergencia } \operatorname{div}\mathbf{f}(x,y) \text{ para } (x,y) = (3,2) \text{ con } h_x = h_y = 0.1.}$

El primer término será:

$$\begin{aligned}
\partial_x f_1(x_m, y_n) \approx & \frac{f_1\left(x_m + h_x, y_n\right) - f_1\left(x_m - h_x, y_n\right)}{2h_x} = \frac{f_1\left(3+0.1, 2\right) - f_1\left(3-0.1, 2\right)}{2\left(0.1\right)} = \\
= & \frac{\left(\left(3+0.1\right) \times 2\right) - \left(\left(3-0.1\right) \times 2\right)}{2\left(0.1\right)} = \frac{\left(3.1 \times 2\right) - \left(2.9 \times 2\right)}{2\left(0.1\right)} = \\
= & \frac{6.2 - 5.8}{0.2} = \frac{0.4}{0.2} = 2
\end{aligned}$$

Y el segundo término

$$\begin{aligned}
\partial_y f_2(x_m, y_n) \approx & \frac{f_2\left(x_m, y_n + h_y\right) - f_2\left(x_m, y_n - h_y\right)}{2h_y} = \frac{f_2\left(3, 2+0.1\right) - f_2\left(3, 2-0.1\right)}{2\left(0.1\right)} = \\
= & \frac{\left(3^3 - \left(2+0.1\right)^2\right) - \left(3^3 - \left(2-0.1\right)^2\right)}{2\left(0.1\right)} = \frac{\left(3^3 - 2.1^2\right) - \left(3^3 - 1.9^2\right)}{2\left(0.1\right)} = \\
= & \frac{22.59 - 23.39}{0.2} = \frac{-0.8}{0.2} = -4
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}(3,2)) = \partial_x f_1(3,2) + \partial_y f_2(3,2) \approx 2 - 4 = -2$$

4. (a) Deducir la fórmula de los Trapecios Simple para aproximar la integral

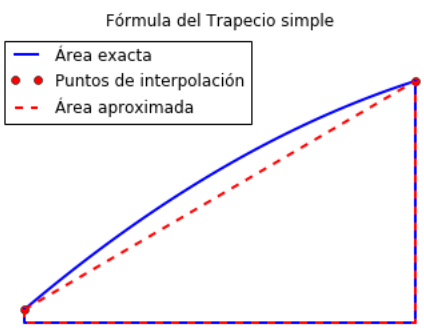
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

(b) Demostrar que su orden de precisión es 1.

(c) Aplicar la fórmula compuesta de los Trapecios con tres subintervalos al cálculo de la integral

$$\int_{-1}^2 x^3 dx$$

(a)



La fórmula de los Trapecios se obtiene integrando el polinomio de grado 1 que pasa por los extremos del intervalo de integración. Si escribimos este polinomio en la forma de Lagrange

$$P_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

y entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_1(x)\,dx = \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx =$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]_a^b + \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b = \frac{f(a)}{a-b}\,\frac{-(a-b)^2}{2} + \frac{f(b)}{b-a}\,\frac{(b-a)^2}{2} =$$

$$= f(a)\,\frac{-(a-b)}{2} + f(b)\,\frac{(b-a)}{2} = \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$$

Por lo tanto, la regla del trapecio simple es

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$$

Y si llamamos $h = b-a$ a la longitud del intervalo de integración, podemos escribir la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\,(f(a)+f(b))$$

(b)
Para que una fórmula de cuadratura sea exacta para un polinomio P_n de grado n, o lo que es lo mismo, tenga precisión n, dicha fórmula ha de ser exacta para las funciones 1, x, x^2, $\ldots$, x^n y no serlo para x^{n+1}.

Veamos la fórmula de los Trapecios:

¿Es exacta para $f(x)$ =1? Sí, porque

$$\int_a^b 1dx = b - a$$

y para este intervalo y esta función la fórmula de los trapecios es

$$\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) = \frac{b-a}{2}(1+1) = b-a$$

¿Es exacta para $f(x) = x$? Sí, porque

$$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

y para este intervalo y esta función la fórmula de los trapecios es

$$\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) = \frac{b-a}{2}(a+b) = \frac{(b+a)(b-a)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

¿Es exacta para $f(x) = x^2$? No, porque

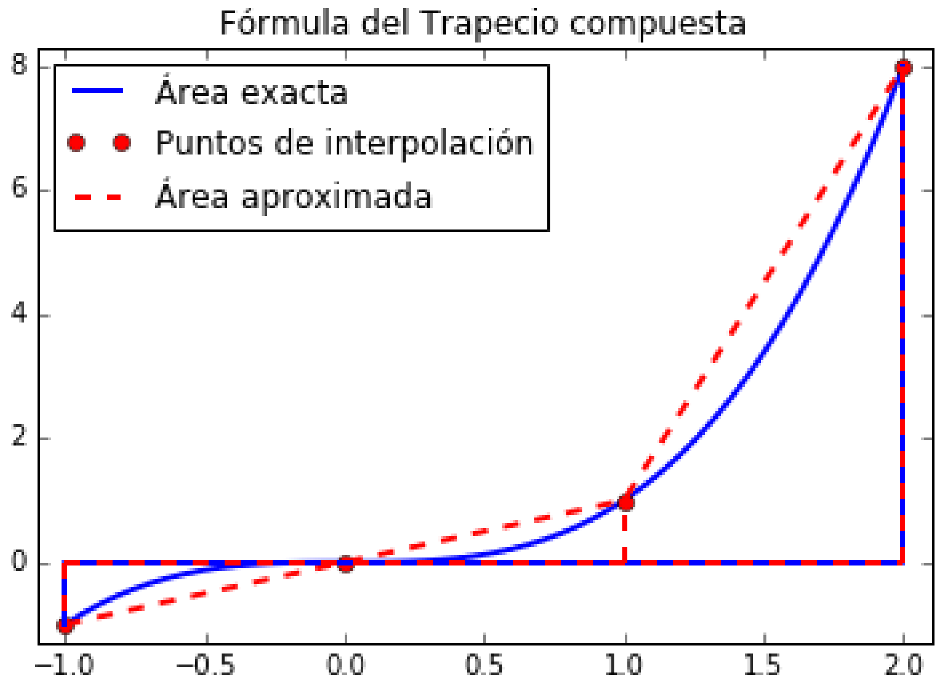
$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3-a^3}{3}$$

y para este intervalo y esta función la fórmula de los trapecios es

$$\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) = \frac{b-a}{2}\left(a^2+b^2\right) = \frac{b^3-ab^2+a^2b-a^3}{2}$$

Como es exacta para 1 y x pero no para x^2, es exacta para polinomios de hasta grado 1 pero no para grado 2 y la precisión de la fórmula es 1.

(c)



Aplicar la regla del Trapecio Compuesta con tres subintervalos equivale a decir que dividamos el intervalo de intergración, en este caso $[-1,2]$, en tres subintervalos iguales y apliquemos la fórmula de los Trapecios simple en cada uno de ellos. Para $n=3$ intervalos, la longitud de cada subintervalo será

$$h=\frac{b-a}{3}=\frac{2-(-1)}{3}=1$$

Los nodos se calculan

$$\begin{aligned}
x_0 &= a = -1\\
x_1 &= x_0+h=-1+1=0\\
x_2 &= x_1+h=0+1=1\\
x_3 &= x_2+h=1+1=2
\end{aligned}$$

Aplicando la regla del Trapecio a cada uno de los tres subintervalos tenemos

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx\approx$$

$$\approx\frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right)+\frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+\frac{h}{2}\left(f(x_2)+f(x_3)\right)=$$

$$=\frac{h}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+f(x_3)\right)=\frac{h}{2}\left(f(x_0)+2\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+f(x_3)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_0^3+2\left(x_1^3+x_2^3\right)+x_3^3\right)=\frac{1}{2}\left((-1)^3+2\left(0^3+1^3\right)+2^3\right)=\frac{1}{2}(-1+2+8)=4.5$$