Ejercicio 4.1 *Halle el polinomio de interpolación de Lagrange para:*

1. $f(0) = 1,\ f(-1) = 0,\ f(1) = 0$
2. $g(0) = 2,\ g(-1) = 3$ *y* $g(1) = 4$

- Como tenemos tres condiciones, el polinomio tiene que ser de grado 2, o sea, $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Planteamos las condiciones

$$\begin{array}{c} 1 = f(0) = P(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 0 = f(-1) = P(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ 0 = f(1) = P(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{array}\right\}$$

  A la tercera ecuación le restamos la segunda:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ 2b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} c = 1 \\ a - 0 + 1 = 0 \\ b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} c = 1 \\ a = -1 \\ b = 0 \end{array}\right\}$$

  Luego el polinomio de interpolación es $P(x) = 1 - x^2$.

- Como tenemos tres condiciones, el polinomio tiene que ser de grado 2, o sea, $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Planteamos las condiciones

$$\begin{array}{c} 2 = g(0) = P(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 3 = g(-1) = P(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ 4 = g(1) = P(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} c = 2 \\ a - b + c = 3 \\ a + b + c = 4 \end{array}\right\}$$

  A la tercera ecuación le restamos la segunda:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} c = 2 \\ a - b + c = 3 \\ 2b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} c = 2 \\ a - \frac{1}{2} + 2 = 3 \\ b = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} c = 2 \\ a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

  Luego el polinomio de interpolación es $P(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$.

Ejercicio 4.2 *Halle el polinomio de interpolación de Lagrange para:*

1. $f(0) = 1,\ f(-1) = 0,\ f(1) = 0$
2. $g(0) = 2,\ g(-1) = 3$ *y* $g(1) = 4$
3. $h(0) = 1,\ h(-1) = 0,\ h(1) = 0,\ h(0.5) = 2$

1. $f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=0$

$$l_0(x)=\frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{-1}=1-x^2$$

$$P_2(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)=$$
$$1\cdot(1-x^2)+0\cdot l_1(x)+0\cdot l_2(x)=1-x^2$$

2. $g(0)=2,\ g(-1)=3$ y $g(1)=4$; $l_0(x)=1-x^2$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{1}{2}x(x-1)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-(-1))}{(1-0)(1-(-1))}=\frac{1}{2}x(x+1)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$$

$$P_2(x)=2\cdot(1-x^2)+3\cdot\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)+4\cdot\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2}+2$$

3. $h(0)=1,\ h(-1)=0,\ h(1)=0,\ h(0.5)=2$

$$l_0(x)=\frac{(x-(-1))(x-1)(x-\frac{1}{2})}{(0-(-1))(0-1)(0-\frac{1}{2})}=\frac{(x^2-1)(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}=2x^3-x^2-2x+1$$

$$l_1(x)=\frac{(x-(0))(x-1)(x-\frac{1}{2})}{(-1-0)(-1-1)(-1-\frac{1}{2})}=\frac{(x^2-x)(x-\frac{1}{2})}{-3}=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{6}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-(0))(x-(-1))(x-\frac{1}{2})}{(1-0)(1-(-1))(1-\frac{1}{2})}=\frac{(x^2+x)(x-\frac{1}{2})}{1}=x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$$

$$l_3(x)=\frac{(x-(0))(x-(-1))(x-1)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-(-1))(\frac{1}{2}-1)}=\frac{x(x^2-1)}{-\frac{3}{8}}=-\frac{8}{3}x^3+\frac{8}{3}x$$

$$P_3(x)=1\cdot\left(2x^3-x^2-2x+1\right)+0\cdot\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{6}\right)+0\cdot\left(x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)+$$
$$2\cdot\left(-\frac{8}{3}x^3+\frac{8}{3}x\right)=-\frac{10}{3}x^3-x^2+\frac{10}{3}x+1$$

Ejercicio 4.3 *Exprese el polinomio de interpolación de Lagrange mediante la forma de Newton para:*

- $f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=0$
- $f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=0,\ f(0.5)=2$

1. $f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=0$

0	1		
-1	0	$\frac{1-0}{0-(-1)}=1$	
1	0	$\frac{0-0}{-1-1}=0$	$\frac{1-0}{0-1}=-1$

$$P_2(x)=1+1\cdot(x-0)+(-1)\cdot(x-0)(x-(-1))=1-x^2$$

2. $f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=0,\ f(0.5)=2$

0	1			
-1	0	$\frac{1-0}{0-(-1)}=1$		
1	0	$\frac{0-0}{-1-1}=0$	$\frac{1-0}{0-1}=-1$	
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{0-2}{1-\frac{1}{2}}=-4$	$\frac{0-(-4)}{-1-\frac{1}{2}}=-\frac{8}{3}$	$\frac{-1-(-\frac{8}{3})}{0-\frac{1}{2}}=-\frac{10}{3}$

$$P_3(x)=P_2(x)+(-\frac{10}{3})(x-0)(x-(-1))(x-1)=-\frac{10}{3}x^3-x^2+\frac{10}{3}x+1$$

Ejercicio 4.4 *Exprese el polinomio de interpolación de Lagrange para los datos* $f(0)=1$, $f(1)=3$ $f(2)=7$, *mediante una serie de potencias, mediante la forma de Newton y mediante la forma de Lagrange.*

Como serie de potencias, queremos calcular un polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1=f(0)=P(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c & = & c \\ 3=f(1)=P(1)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c & = & a+b+c \\ 7=f(2)=P(2)=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c & = & 4a+2b+c \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} c & = & 1 \\ a+b & = & 2 \\ 4a+2b & = & 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} c & = & 1 \\ a+b & = & 2\Rightarrow 1+b=1\Rightarrow b=1 \\ 2a & = & 2\Rightarrow a=1 \end{array}\right\}$$

$$P(x)=x^2+x+1$$

La forma de Lagrange del polinomio de interpolación es

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x+1$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}=\frac{x(x-2)}{-1}=2x-x^2$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=\frac{x(x-1)}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$$

$$P(x)=1\cdot(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x+1)+3\cdot(2x-x^2)+7\cdot(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2})=x^2+x+1$$

La forma de Newton del polinomio de interpolación es

0	1		
1	3	$\frac{1-3}{0-1} = 2$	
2	7	$\frac{3-7}{1-2} = 4$	$\frac{2-4}{0-2} = 1$

$$P(x) = 1 + 2 \cdot (x-0) + 1 \cdot (x-0)(x-1) = 1 + 2x + (x^2 - x) = x^2 + x + 1$$

Ejercicio 4.5 *Sean $f \in \mathcal{C}^3([-1,1])$ verificando $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$ y $P(x) = 1 - x^2$. Compruebe que P es el polinomio de interpolación de Lagrange para dichos datos. Sabiendo que $|f'''(x)| \leqslant 1$ en $[-1,1]$, halle una cota del error absoluto cometido al aproximar $f(0.5)$ por 0.75.*

Comprobamos que P es el polinomio de interpolación de Lagrange

$$P(0) = 1 - 0^2 = 1; P(-1) = 1 - (-1)^2 = 0; P(1) = 1 - 1^2 = 0$$

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - P_2\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{1}{(2+1)!}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - (-1)\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) f^{(2+1}\left(\xi_{\frac{1}{2}}\right) \right| =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} |f'''(\xi_{\frac{1}{2}})| \leqslant \frac{1}{16}$$

Ejercicio 4.6 *Sea $f(x) = e^x$ para $x \in [-1,1]$.*

1. *Obtenga los tres primeros nodos de Chebyshev y calcule el polinomio de interpolación $P_2(x)$ asociado.*
2. *Dé una cota del máximo error absoluto cometido al aproximar $f(x)$ por $P_2(x)$ para $x \in [-1,1]$.*
3. *Halle un conjunto de nodos que garanticen que el error absoluto cometido al aproximar e^x por $P_n(x)$ sea menor que 10^{-5}, siendo P_n el polinomio de interpolación para e^x en dichos nodos.*

1. Para el cálculo de los nodos, tenemos que aplicar la fórmula para $n = 2$, o sea,

$$x_k = \frac{-1+1}{2} + \frac{1-(-1)}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2 \cdot 2 + 2}\pi\right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$x_0 = \cos\left(\frac{2 \cdot 0 + 1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \cos\left(\frac{2 \cdot 1 + 1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{2\cdot 2+1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Una vez que tenemos los nodos calculamos el polinomio de interpolación usando la forma de Newton

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$		
0	1	$\frac{1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{0-(-\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{2-2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-1}{(\frac{\sqrt{3}}{2}-0)} = \frac{2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-2}{\sqrt{3}}$	$\frac{\frac{2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-2}{\sqrt{3}} - \frac{2-2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}-4}{3}$

-0.866	0.4206		
0	1	$\frac{1-0.4206}{0-(-0.866)} = 0.669$	
0.866	2.3774	$\frac{2.3774-1}{0.866-0} = 1.5905$	$\frac{1.5905-0.669}{0.866-(-0.866)} = 0.532$

$$P_2(x) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{2-2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}(x+\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}-4}{3}x(x+\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}x + \frac{2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}-4}{3}x^2$$

$$P_2(x) = 1 + 1.129772\ldots x + 0.5320418\ldots x^2$$

2. $f'''(x) = e^x$, como es creciente y $x \leqslant 1$, $|f'''(x)| = e^x \leqslant e^1 = e = K$,

$$|f(x) - P_2(x)| \leqslant \frac{2K}{(2+1)!}\left(\frac{1-(-1)}{4}\right)^{2+1} = \frac{e}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{e}{24} = 0.11326\ldots$$

3. Buscamos n tal que $\frac{2\,e}{(n+1)!}\left(\frac{1-(-1)}{4}\right)^{n+1} < 10^{-5}$, lo que se cumple para $n \geqslant 6$.

Ejercicio 4.7 *Se quiere construir una tabla de $n+1$ valores de la función $\cos x$ de modo que a partir de ella y por un procedimiento de interpolación lineal a trozos se aproxime la función para cualquier valor de $x \in [0,\pi]$ con error absoluto menor que 10^{-2}. Considerando puntos igualmente espaciados, se pide:*

1. *Hallar un valor de n que garantice dicha cota para el error absoluto.*

2. *Calcular el valor aproximado de $\cos(\frac{\pi}{5})$ que proporcionaría dicha tabla.*

1. Como
$$M = \max_{\xi\in[0,\pi]} |f''(\xi)| = \max_{\xi\in[0,\pi]} |-\cos(\xi)| = 1$$
se tiene que
$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M\cdot h^2}{8} = \frac{h^2}{8}$$
Como queremos que el error sea menor que 10^{-2},
$$\frac{h^2}{8} < 10^{-2} \Longleftrightarrow h^2 < \frac{8}{100} \Longleftrightarrow h < \frac{2\sqrt{2}}{10}$$
Como $h = \frac{\pi-0}{n}$, sustituyendo queda
$$\frac{\pi}{n} < \frac{2\sqrt{2}}{10} \Longleftrightarrow n > \frac{10\pi}{2\sqrt{2}} \simeq 11.1072$$
Luego $n \geqslant 12$, con lo cual se necesitan 13 nodos.

2. Los nodos son $\{0, \frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}, \ldots, \frac{12\pi}{12} = \pi\}$, como
$$x_2 = \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{5} \leqslant \frac{\pi}{4} = x_3$$
$$f_2 = f(x_2) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad f_3 = f(x_3) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
se tiene que
$$f(\frac{\pi}{5}) \simeq P(\frac{\pi}{5}) = P^2(\frac{\pi}{5}) = f_2 + \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}(x - x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\frac{\pi}{6}}(\frac{\pi}{30}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{10} \simeq 0.8025$$

Ejercicio 4.8 *Determine el conjunto de valores de los parámetros reales a, b, c para los que*
$$s(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + (x-1)^3 & x \in [0,1] \\ a(x-2)^2 & x \in [1,4] \\ b(x-2)^2 + c(x-3)^3 & x \in [4,5] \end{cases}$$
es un spline cúbico con nodos $0, 1, 4, 5$

$$\left.\begin{array}{c} (1-2)^2 + (1-1)^3 = a(1-2)^2 \\ a(4-2)^2 = b(4-2)^2 + c(4-3)^3 \\ 2(1-2) + 3(1-1)^2 = 2a(1-2) \\ 2a(4-2) = 2b(4-2) + 3c(4-3)^2 \\ 2 + 6(1-1) = 2a \\ 2a = 2b + 6c(4-3) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} 1 = a \\ 4a = 4b + c \\ -2 = -2a \\ 4a = 4b + 3c \\ 2 = 2a \\ 2a = 2b + 6c \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a=1 \\ 4a=4b+c \\ 0=2c \\ 2a=2b+6c \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} a=1 \\ a=b \\ c=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} a=1 \\ b=1 \\ c=0 \end{array}\right\}$$

La solución es $a=1$, $b=1$ y $c=0$

Ejercicio 4.9 *Sea*

$$s(x) = \begin{cases} x^3 & x \in [-1,0] \\ a+bx+cx^2+dx^3 & x \in [0,1] \end{cases}$$

Halle, si existen, valores de $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *para que* $s(x)$ *sea un spline cúbico sujeto en* $[-1,1]$ *que interpole los datos* $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=2$, $f'(-1)=3$ *y* $f'(1)=6$ *¿Es un spline natural? ¿Verifica la condición de no un nudo?*

$$\left.\begin{array}{c} 0^3 = a+b\cdot 0+c\cdot 0^2+d\cdot 0^3 \\ 3\cdot 0^2 = b+2c\cdot 0+3d\cdot 0^2 \\ 6\cdot 0 = 2c+6d\cdot 0 \\ f(-1)=s(-1)=(-1)^3=-1 \\ f'(-1)=s'(-1)=3(-1)^2=3 \\ f(0)=s(0)=0^3=0 \\ f(1)=s(1)=a+b+c+d=2 \\ f'(1)=s'(1)=b+2c+3d=6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ -1=-1 \\ 3=3 \\ 0=0 \\ 0+0+0+d=2 \\ 0+2\cdot 0+3d=6 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

La solución es $a=b=c=0$ y $d=2$.

Para ser un spline natural se tiene que cumplir que $s''(-1)=s''(1)=0$: $s''(-1)=(P^0)''(-1)=6\cdot(-1)=-6\neq 0$ luego no es un spline natural.

Para la condición de no un nudo tiene que cumplir que $(P^0)'''(0)=(P^1)'''(0)$, o sea, $6=6d \iff d=1$!!! ($d=2\neq 1$). Luego no cumple la condición de no un nudo.

Ejercicio 4.10 *Halle los coeficientes* A_0, A_1 *para que el polinomio trigonométrico de la forma*

$$S(t) = A_0 + A_1\cos(t)$$

interpole los datos $(0,3)$, $(\pi/2,1)$.

$$\left.\begin{array}{c} 3 = s(0) = A_0 + A_1\cos(0) = A_0 + A_1 \\ 1 = s\left(\frac{\pi}{2}\right) = A_0 + A_1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = A_0 \end{array}\right\} \Rightarrow A_0 = 1\ ,A_1 = 2$$

Ejercicio 4.11 *Una señal de periodo* 2 *es muestreada en los instantes* $0, 0.5, 1, 1.5$ *dando los valores* $5.50, -1.50, 3.50, -5.50$ *respectivamente. demuestre que el polinomio trigonométrico que interpola dichos datos es*

$$S_2(t) = \frac{1}{2} + 2\,\mathrm{sen}(\pi t) + \cos(\pi t) + 4\cos(2\pi t)$$

$$\left(t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \right) = \left(0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1.5 \right)$$

$$\left(f(t_0) \quad f(t_1) \quad f(t_2) \quad f(t_3) \right) = \left(5.5 \quad -1.5 \quad 3.5 \quad -5.5 \right)$$

$$T = 2, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi, \quad \left(a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad b_1 \right) =$$

$$\frac{2}{4} \left(5.5 \quad -1.5 \quad 3.5 \quad -5.5 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left(1 \quad 1 \quad 8 \quad 2 \right)$$

Por lo que el polinomio trigonométrico de interpolación es

$$S_2(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{a_2}{2} \cos(2\omega t) = \frac{1}{2} + \cos(\pi t) + 2 \operatorname{sen}(\pi t) + 4 \cos(2\pi t)$$

Ejercicio 4.12 *Sea la función de periodo 2π cuya restricción en $[-\pi, \pi]$ es $f(x) = |x|$. Se consideran los nodos $x_i = -\pi + i\,h$ para $i = 0, \ldots, 5$. con $h = \pi/3$.*

1. *Halle un polinomio trigonométrico que interpola los datos $(x_i, f(x_i))$ para $i = 0, \ldots, 5$.*
2. *Evalúe el polinomio anterior en $\pi/2$ y en $\pi/3$.*

1.

$$\left(t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \right) = \left(-\pi \quad \tfrac{-2\pi}{3} \quad \tfrac{-\pi}{3} \quad 0 \quad \tfrac{\pi}{3} \quad \tfrac{2\pi}{3} \right)$$

$$\left(f(t_0) \quad f(t_1) \quad f(t_2) \quad f(t_3) \quad f(t_4) \quad f(t_5) \right) = \left(\pi \quad \tfrac{2\pi}{3} \quad \tfrac{\pi}{3} \quad 0 \quad \tfrac{\pi}{3} \quad \tfrac{2\pi}{3} \right)$$

$$a = -\pi, \quad T = \pi - (-\pi) = 2\pi, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \quad \left(a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \right) =$$

$$\frac{1}{3} \left(\pi \quad \tfrac{2\pi}{3} \quad \tfrac{\pi}{3} \quad 0 \quad \tfrac{\pi}{3} \quad \tfrac{2\pi}{3} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \left(\pi \quad \tfrac{4\pi}{9} \quad 0 \quad \tfrac{\pi}{9} \right)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \pi & \frac{2\pi}{3} & \frac{\pi}{3} & 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$S_3(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{9}}{2}\cos(3 \cdot 1(t-(-\pi))) + \frac{4\pi}{9}\cos(1 \cdot 1(t-(-\pi))) + \ldots$$
$$0\,\mathrm{sen}(1 \cdot 1(t-(-\pi))) + 0\cos(2 \cdot 1(t-(-\pi))) + 0\,\mathrm{sen}(2 \cdot 1(t-(-\pi)))$$
$$\text{con } t \in [-\pi, \pi]$$
$$S_3(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{18}\cos(3(t+\pi)) + \frac{4\pi}{9}\cos(t+\pi) \text{ con } t \in [-\pi, \pi]$$
$$S_3(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{18}\cos(3(\frac{\pi}{2}+\pi)) + \frac{4\pi}{9}\cos(\frac{\pi}{2}+\pi) = \frac{\pi}{2} \simeq 1.570796\ldots$$

$$S_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \simeq 1.047197\ldots$$

Ejercicio 4.13 *Calcule los coeficientes de un polinomio trigonométrico que interpole los datos* $1, 0.5, -0.5, -1, -0.5, 0.5$.

$$a = 0 \quad T = n = 6 \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_3(t) = \frac{0}{2} + \frac{0}{2}\cos(3 \cdot \frac{\pi}{3}(t-0)) + 1 \cdot \cos(1 \cdot \frac{\pi}{3}(t-0)) + \ldots$$
$$0\,\mathrm{sen}(1 \cdot \frac{\pi}{3}(t-0)) + 0\cos(2 \cdot \frac{\pi}{3}(t-0)) + 0\,\mathrm{sen}(2 \cdot \frac{\pi}{3}(t-0))$$

$$\text{con } t \in [0,6]$$

$$S_3(t) = \cos(\frac{\pi t}{3}) \text{ con } t \in [0,6]$$

Ejercicio 4.14 *Halle la función de la forma $ae^x + be^{2x}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ que mejor ajusta la siguiente tabla de datos por mínimos cuadrados:*

x_i	-1	0	1
Y_i	0.5	2	10

$$A = \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-2} \\ 1 & 1 \\ e & e^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{b} = A^t \cdot Y = \begin{pmatrix} e^{-1} & 1 & e \\ e^{-2} & 1 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29.3 \\ 75.9 \end{pmatrix}$$

$$H = A^t \cdot A = \begin{pmatrix} e^{-1} & 1 & e \\ e^{-2} & 1 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-2} \\ 1 & 1 \\ e & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.52\ldots & 21.1\ldots \\ 21.1\ldots & 55.6\ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8.52\ldots & 21.1\ldots \\ 21.1\ldots & 55.6\ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29.3 \\ 75.9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.017\ldots \\ 0.979\ldots \end{pmatrix}$$

$$y = 1.017\ldots e^x + 0.979\ldots e^{2x}$$

Ejercicio 4.15 *La ley de Hooke establece que la elongación x de un muelle es proporcional a la fuerza F aplicada: $F(x) = k(x - x_0)$, siendo k y x_0 constantes características del muelle. A partir de los datos recogidos en la siguiente tabla, obtenga k y x_0 mediante ajuste de datos por mínimos cuadrados.*

$F(x)$	0	2	4	6
x	5.3	7	9.4	12.3

Llamando $t = k * x_0$ y $y = k$, se tiene que $F(x) = -y + tx$, por lo que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5.3 \\ -1 & 7 \\ -1 & 9.4 \\ -1 & 12.3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 5.3 \\ 7 \\ 9.4 \\ 12.3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$H = A^t A = \begin{pmatrix} 4 & -34 \\ -34 & 316.74 \end{pmatrix}, \quad b = A^t * Y = \begin{pmatrix} -34 \\ 316.74 \end{pmatrix}$$

por lo que $t = 0$, $y = 1$, es decir $k = 1$, $x_0 = 0$.

Ejercicio 4.16 *Halle la recta que ajusta la siguiente tabla de datos por mínimos cuadrados:*

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Y_i	*0.5*	*2.5*	*2.0*	*4*	*3.5*	*6*	*5.5*

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\\1&4\\1&5\\1&6\\1&7\end{pmatrix}\Longrightarrow\vec{b}=A^t\cdot Y=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.5\\2.5\\2.0\\4\\3.5\\6\\5.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\119.5\end{pmatrix}$$

$$H=A^t\cdot A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\\1&4\\1&5\\1&6\\1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&28\\28&140\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7&28\\28&140\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\119.5\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.0714\ldots\\0.839\ldots\end{pmatrix}$$

Entonces la recta buscada es

$$r\equiv\{y=0.839x+0.0714$$

Ejercicio 4.17 *La caída de un cuerpo por la acción de la gravedad viene descrita por la ecuación* $e=e_0-v_0\,t-\dfrac{1}{2}g\,t^2$*, donde* e *es el espacio recorrido hasta el instante* t*,* e_0 *y* v_0 *la altura y velocidad iniciales y* g *la gravedad. Utilizando dicha ecuación y los datos de la tabla:*

t	*0*	*1*	*2*	*4*	*6*
e	*200*	*195*	*180*	*120*	*25*

halle una aproximación de g*.*

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\\1&4&16\\1&6&36\end{pmatrix}\Longrightarrow\vec{b}=A^t\cdot Y=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&4&6\\0&1&4&9&36\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\195\\180\\120\\25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}720\\1185\\3735\end{pmatrix}$$

$$H = A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 57 \\ 13 & 57 & 289 \\ 57 & 289 & 1569 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 13 & 57 \\ 13 & 57 & 289 \\ 57 & 289 & 1569 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 720 \\ 1185 \\ 3735 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{94005}{469} \\ \frac{-2115}{1876} \\ \frac{-8805}{1876} \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} g = \frac{-8805}{1876} \Longrightarrow g = \frac{17610}{1876} = 9.38699\ldots$$

Ejercicio 4.18 *Ajuste la siguiente tabla de datos a un modelo exponencial* $y = ae^{bx}$

x_i	*1.0*	*1.25*	*1.50*	*1.75*	*2.00*
Y_i	*5.10*	*5.79*	*6.53*	*7.45*	*8.46*

$$Y' = \log(Y) = (1.629\ldots, 1.756\ldots, 1.876\ldots, 2.008\ldots, 2.135\ldots)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.25 \\ 1 & 1.5 \\ 1 & 1.75 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{b} = A^t \cdot Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.25 & 1.5 & 1.75 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.629 \\ 1.756 \\ 1.876 \\ 2.008 \\ 2.135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.405\ldots \\ 14.424\ldots \end{pmatrix}$$

$$H = A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.25 & 1.5 & 1.75 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.25 \\ 1 & 1.5 \\ 1 & 1.75 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7.5 \\ 7.5 & 11.875 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7.5 \\ 7.5 & 11.875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.405\ldots \\ 14.424\ldots \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.122\ldots \\ 0.5057\ldots \end{pmatrix}$$

$$y = e^{1.122\ldots} \cdot e^{0.5057\ldots x} = 3.072\ldots e^{0.5057\ldots x}$$

Ejercicio 4.19 *Ajuste los siguientes datos a un modelo de crecimiento con saturación* $y = a\frac{x}{b+x}$ *utilizando la técnica de linealización*

x	*2*	*2.5*	*4*	*6*
y	*0.7*	*0.8*	*1.0*	*1.2*

Construimos una nueva tabla de valores con el cambio de variable

$$x' = \frac{1}{x} \quad y' = \frac{1}{y} \quad a' = \frac{1}{a} \quad b' = \frac{b}{a}$$

$x' = 1/x$	0.5	0.4	0.25	0.1667
$y' = 1/y$	1.4286	1.25	1	0.8333

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 0.4 \\ 1 & 0.25 \\ 1 & 0.1667 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\vec{b}=A^t \cdot Y'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.4 & 0.25 & 0.1667 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.4286 \\ 1.25 \\ 1 \\ 0.8333 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4.5119\ldots \\ 1.60317\ldots \end{pmatrix}$$

$$H=A^t \cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.4 & 0.25 & 0.1667 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 0.4 \\ 1 & 0.25 \\ 1 & 0.1667 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1.3167 \\ 1.3167 & 0.5003 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1.3167 \\ 1.3167 & 0.5003 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4.5119\ldots \\ 1.60317\ldots \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5471369\ldots \\ 1.76457\ldots \end{pmatrix}$$

$$y' = 0.5471369 + 1.76457x'$$

$$a = \frac{1}{a'} = \frac{1}{0.5471369} = 1.827696\ldots$$

$$b = \frac{b'}{a'} = \frac{1.76457}{0.5471369} = 3.2251\ldots$$

$$y = \frac{1.827696x}{x + 3.2251}$$