Tema 4. Interpolación. Aproximación. Ajuste de datos.

Computación Numérica

Antonio Palacio

Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo

palacioantonio@uniovi.es

Curso 2021-2022

Contenidos I

Contenidos

Introducción

Problema a resolver

Dada una función f , hallar una función ψ que aproxime a f en $[a,b]$.

Aspectos claves

- ¿Qué información tenemos sobre f? (valor de f en algunos puntos, solución de ecuación diferencial, $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$,...)
- ¿Qué clase de función ψ vamos a usar? (polinómica, polinómica a trozos, serie trigonométrica,...)
- ¿Qué criterio (norma) usaremos para medir la distancia entre f y ψ? (norma uniforme, norma en sentido de mínimos cuadrados discretos)

Introducción

Interpolación

- **Datos:** Conjunto discreto de datos $(x_i, f(x_i), [f'(x_i), f''(x_i)...])$.
- **Función de aproximación: ψ Polinomio**
- **Criterio de aproximación:** El polinomio y la función deben coincidir en los datos

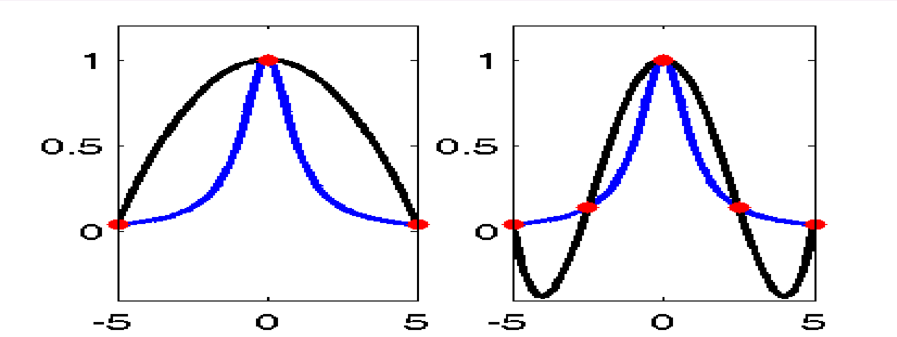


Figura: Interpolación polinómica de grado 2 y 4

El problema de interpolación de Lagrange

Problema a resolver

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función.
- $x_0, \cdots, x_n \in [a,b]$ ($n+1$ **nodos**) con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
- $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ conocidos
- Se plantea el problema:
  Hallar un polinomio $P_n(x)$ con $gr(P_n) \leq n$, tal que, $P_n(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0, 1, \cdots, n$, (**interpola los datos**).

Teorema 4.1

El problema de interpolación de Lagrange tiene solución única que llamaremos polinomio de interpolación de Lagrange.

El problema de interpolación de Lagrange

Problema 4.1

Halle el polinomio de interpolación de Lagrange para:

1. $f(0) = 1,\ f(-1) = 0,\ f(1) = 0$
2. $g(0) = 2,\ g(-1) = 3$ y $g(1) = 4$

Forma de Lagrange del polinomio de interpolación

Procedimiento

Para $i = 0, 1, \cdots, n$ se define:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\overbrace{\cdots}^{\text{falta } (x-x_i)}(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\underbrace{\cdots}_{\text{falta } (x_i-x_i)}(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

- $l_i(x)$ es un polinomio de grado n
- $l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Forma de Lagrange del polinomio de interpolación

Teorema 4.2 (Forma de Lagrange)

El polinomio de interpolación de Lagrange puede expresarse por:

$$P_n(x) = f(x_0)l_0(x) + \cdots + f(x_n)l_n(x)$$

Problema 4.2

Halle el polinomio de interpolación de Lagrange para:

1. $f(0) = 1,\ f(-1) = 0,\ f(1) = 0$
2. $g(0) = 2,\ g(-1) = 3$ *y* $g(1) = 4$
3. $h(0) = 1,\ h(-1) = 0,\ h(1) = 0,\ h(0{,}5) = 2$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Introducción

Supongamos conocido el polinomio de interpolación de grado $n-1$, $P_{n-1}(x)$, de los datos $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \cdots,\ (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$. Si añadimos un dato $(x_n, f(x_n))$, se puede demostrar que el polinomio resultante se escribe como:

$$P_n(x) \ = \ P_{n-1}(x) + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (1)$$

siendo c_n la constante definida por:

$$c_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

que recibe el nombre de **diferencia dividida** de f en los nodos $x_0, \cdots, x_n$ y que se suele denotar por $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

$$\boxed{P_n(x) \ = \ P_{n-1}(x) \ + \ f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}$$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Introducción

La ecuación (1) permite construir el polinomio de interpolación de forma recurrente:
Datos a interpolar: $f(x_0)$ Polinomio de interpolación:

$$P_0(x) = f(x_0) = f[x_0]$$

Datos a interpolar: $f(x_0), f(x_1)$ Polinomio de interpolación:

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0)$$

Datos a interpolar: $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ Pol. de interpolación:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Proposición (Propiedad de simetría)

Se cumple que

$$f[x_0, \cdots, x_n] = f[x_{i_0}, \cdots, x_{i_n}]$$

para cualquier permutación de los datos.

Proposición (Fórmula de recurrencia para las diferencias divididas)

Para $m = 0$, se tiene que:

$$f[x_i] = f(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n$$

y para $m = 1, 2, \cdots$, se tiene que:

$$f[x_0, \cdots, x_m] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{m-1}] - f[x_1, \cdots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Cálculo de las diferencias divididas

$$\begin{array}{llll}
x_0 & f(x_0) & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_0]-f[x_1]}{x_0-x_1} & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1]-f[x_2]}{x_1-x_2} & f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} \\
x_3 & f(x_3) & f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2]-f[x_3]}{x_2-x_3} & f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]}{x_1-x_3}
\end{array}$$

siendo finalmente:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3}$$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Problema 4.3

Exprese el polinomio de interpolación de Lagrange mediante la forma de Newton para:

- $f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=0$
- $f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=0,\ f(0{,}5)=2$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Problema 4.4

Exprese el polinomio de interpolación de Lagrange para los datos $f(0)=1$, $f(1)=3$ $f(2)=7$, mediante una serie de potencias, mediante la forma de Newton y mediante la forma de Lagrange.

Estudio del error en la interpolación de Lagrange

Teorema 4.3

Sean $f\in\mathscr{C}^{n+1}([a,b])$, $x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$ distintos dos a dos y $P_n(x)$ el polinomio que interpola los datos $(x_0,f(x_0)),\cdots,(x_n,f(x_n))$. Entonces, para todo $x\in[a,b]$ se verifica:

$$|f(x)-P_n(x)|\le\frac{K_n}{(n+1)!}|(x-x_0)\cdots(x-x_n)|$$

con $K_n=\text{máx}_{t\in[a,b]}|f^{(n+1)}(t)|$.

Estudio del error en la interpolación de Lagrange

Problema 4.5

Sean $f \in \mathscr{C}^3([-1,1])$ *verificando* $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$ *y* $P(x) = 1 - x^2$. *Compruebe que* P *es el polinomio de interpolación de Lagrange para dichos datos. Sabiendo que* $|f'''(x)| \leq 1$ *en* $[-1,1]$, *halle una cota del error absoluto cometido al aproximar* $f(0{,}5)$ *por* $0{,}75$.

Estudio del error en la interpolación de Lagrange

Estudio del error

El último término del error hace que, en general, el aumento en el número de nodos no garantice una disminución del error, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

En el año 1900, Runge demostró que si se interpola la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

en $n+1$ puntos uniformemente distribuidos en el intervalo $[-5,5]$, el polinomio de interpolación no converge a la función para $|x| > 3{,}6$ cuando $n \to \infty$.

En el gráfico siguiente se representa la función junto con su polinomio de interpolación para 3, 5, 9 y 17 nodos uniformemente distribuidos en $[-5,5]$.

Estudio del error en la interpolación de Lagrange

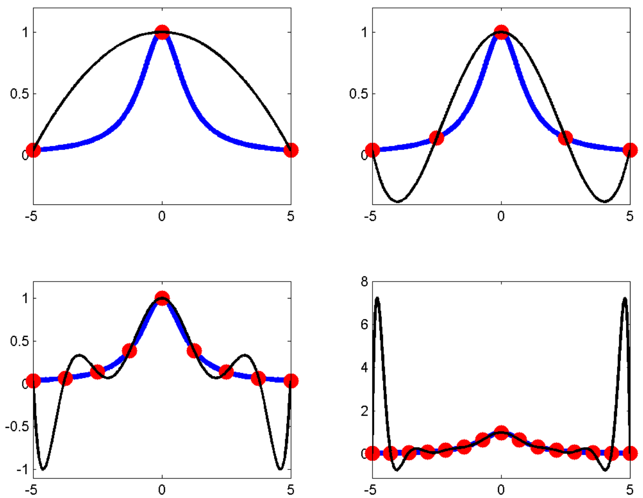


Figura:

Nodos de Chebyshev

Introducción

Sea $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$. Para cada $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$, se denotará:

$$E(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \max_{x \in [a,b]} |x - x_0||x - x_1| \cdots |x - x_n|$$

Admitiendo que $|f^{(n+1)}(x)| \leq K_n$ en $[a,b]$ y teniendo en cuenta la notación anterior, el error en la interpolación queda acotado por:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} K_n \, E(x_0, x_1, \cdots, x_n) \;\; \forall x \in [a,b]$$

Se plantea entonces el problema de encontrar los nodos que hacen mínimo E.

Nodos de Chebyshev

Cálculo de los nodos de Chebyshev

Se puede demostrar que los puntos en los que se alcanza el mínimo están dados por la fórmula:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \quad k = 0,1,\cdots,n$$

y se denominan **nodos de Chebyshev**

Para los nodos de Chebyshev se obtiene la siguiente acotación en el error de interpolación:

$$\boxed{|f(x)-P_n(x)| \leq \frac{2K_n}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \quad \forall x \in [a,b]}$$

Nodos de Chebyshev

Problema 4.6

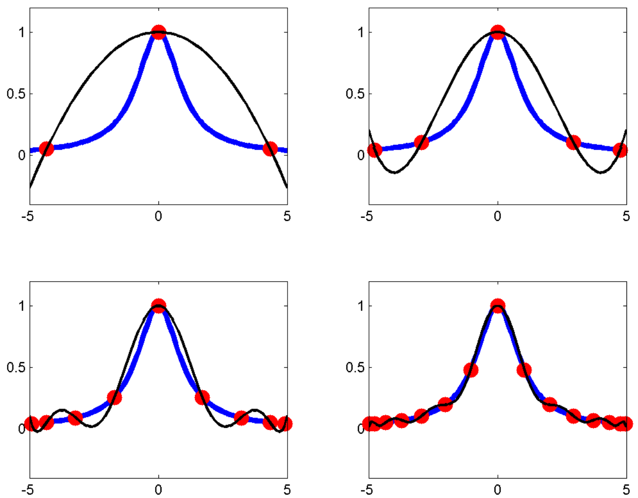
Sea $f(x) = e^x$ para $x \in [-1,1]$.

1. *Obtenga los tres primeros nodos de Chebyshev y calcule el polinomio de interpolación $P_2(x)$ asociado.*
2. *Dé una cota del máximo error absoluto cometido al aproximar $f(x)$ por $P_2(x)$ para $x \in [-1,1]$.*
3. *Halle un conjunto de nodos que garanticen que el error absoluto cometido al aproximar e^x por $P_n(x)$ sea menor que 10^{-5}, siendo P_n el polinomio de interpolación para e^x en dichos nodos.*

Nota 4.1

En el gráfico que sigue, se representan los polinomios de interpolación para $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en $[-5,5]$ (ejemplo de Runge) mediante 3, 5, 9 y 17 nodos de Chebyshev. Compárelos con los polinomios obtenidos con nodos uniformemente distribuidos.

Nodos de Chebyshev



Interpolación lineal a trozos

Motivación

Cuando en un problema de interpolación el número de nodos aumenta considerablemente, el polinomio de Lagrange no suele ofrecer resultados satisfactorios debido a la aparición de grandes oscilaciones. Una alternativa que evita este problema es usar como interpolantes funciones polinómicas a trozos.

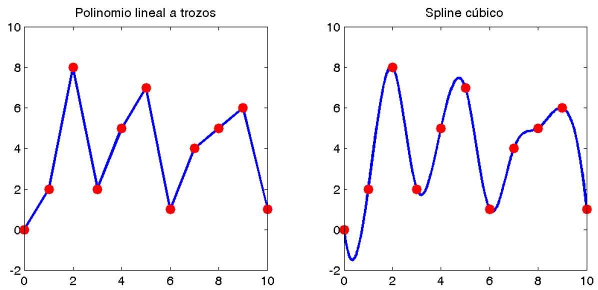
Definición 4.1

*Se dice que una función es **polinómica a trozos** en un intervalo $[a,b]$ si es de la forma:*

$$p(x) = \begin{cases} p^0(x) & en & [x_0, x_1] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p^i(x) & en & [x_i, x_{i+1}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p^{n-1}(x) & en & [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

siendo p^i un polinomio en $[x_i, x_{i+1}]$, $\forall\, i = 0,1,\cdots,n-1$ y $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Interpolación lineal a trozos



Interpolación lineal a trozos

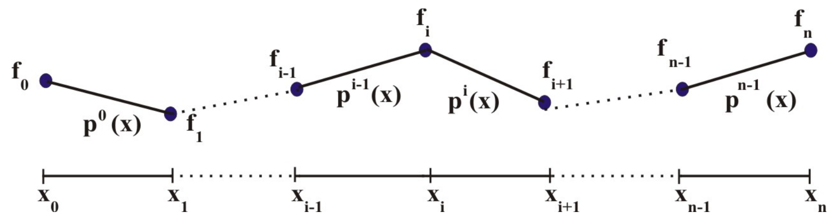
Procedimiento

En la **interpolación lineal a trozos** cada polinomio p^i debe ser de grado menor o igual que uno:

$$p^i(x) = a_i + b_i x \qquad , \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

La condición de interpolación global $p(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \cdots, n$ se convierte en un problema de interpolación mediante polinomios de grado menor o igual que uno sobre cada subintervalo:

$$p^i(x) \quad \text{interpola los datos} \quad (x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$$



Interpolación lineal a trozos

Polinomio de interpolación mediante Newton

Utilizando la forma de Newton para el polinomio $p^i(x)$ se obtiene:

$$p^i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \text{ en } [x_i, x_{i+1}]$$

Además, del teorema 4.3 se deduce la siguiente cota para el error en la interpolación mediante polinomios lineales a trozos:

Teorema 4.4

Si $f \in C^{(2)}([x_0, x_n])$, *entonces:*

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p(x)| \le \frac{M}{8} h^2$$

siendo $h = \max_i (x_{i+1} - x_i)$ *y* $M = \max_{\xi \in [x_0, x_n]} |f''(\xi)|$.

Interpolación lineal a trozos

Problema 4.7

Se quiere construir una tabla de $n+1$ *valores de la función* $\cos x$ *de modo que a partir de ella y por un procedimiento de interpolación lineal a trozos se aproxime la función para cualquier valor de* $x \in [0, \pi]$ *con error absoluto menor que* 10^{-2}. *Considerando puntos igualmente espaciados, se pide:*

1. *Hallar un valor de n que garantice dicha cota para el error absoluto.*
2. *Calcular el valor aproximado de* $\cos(\frac{\pi}{5})$ *que proporcionaría dicha tabla.*

Interpolación mediante splines cúbicos

Splines

- En algunas aplicaciones prácticas (por ejemplo en la obtención de gráficos por computador) es deseable disponer de funciones polinómicas a trozos que tengan curvatura continua en todo el intervalo.
- Puesto que la curvatura de una curva se obtiene por medio de la derivada segunda, es natural exigir que estos interpolantes sean funciones de clase dos.

Definición 4.2 (Spline cúbico)

*Llamamos **spline cúbico** a toda función polinómica a trozos*

$$s(x) = \begin{cases} p^0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0 & en \quad [x_0, x_1] \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ p^i(x) = a_ix^3 + b_ix^2 + c_ix + d_i & en \quad [x_i, x_{i+1}] \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ p^{n-1}(x) = a_{n-1}x^3 + b_{n-1}x^2 + c_{n-1}x + d_{n-1} & en \quad [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

*que sea de **clase dos** en $[x_0, x_n]$.*

Interpolación mediante splines cúbicos

Cálculo de los splines cúbicos

Un spline cúbico está determinado por los $4n$ coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 0, \cdots, n-1$. La condición de que sea función de clase dos, obliga a que estos coeficientes verifiquen $3(n-1)$ ecuaciones, obtenidas mediante condiciones sobre los nodos interiores, $x_1, \cdots, x_{n-1}$ y que pueden resumirse del siguiente modo:

- Continuidad:
$$p^{i-1}(x_i) = p^i(x_i) \qquad i = 1\cdots, n-1$$
- Continuidad de la derivada primera
$$(p^{i-1})'(x_i) = (p^i)'(x_i) \qquad i = 1\cdots, n-1$$
- Continuidad de la derivada segunda
$$(p^{i-1})''(x_i) = (p^i)''(x_i) \qquad i = 1\cdots, n-1$$

En consecuencia, harían falta $4n - 3(n-1) = n+3$ nuevas ecuaciones para igualar el número de ecuaciones y el de parámetros.

Interpolación mediante splines cúbicos

Problema 4.8

Determine el conjunto de valores de los parámetros reales a, b, c para los que

$$s(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + (x-1)^3 & x \in [0,1] \\ a(x-2)^2 & x \in [1,4] \\ b(x-2)^2 + c(x-3)^3 & x \in [4,5] \end{cases}$$

es un spline cúbico con nodos $0, 1, 4, 5$.

Interpolación mediante splines cúbicos

Nota 4.2

Cuando se plantea el problema de interpolar los datos

$$(x_0, f(x_0)), \cdots, (x_n, f(x_n))$$

mediante un spline cúbico, se obtienen $n+1$ nuevas ecuaciones:

$$p^i(x_i) = f_i \qquad i = 0, \cdots, n-1$$

$$p^{n-1}(x_n) = f_n$$

que deben añadirse a las $3(n-1)$ ecuaciones asociadas a la definición de spline. Por tanto, los $4n$ parámetros que determinan el spline cúbico estarían obligados a verificar solamente $4n-2 = 3(n-1) + (n+1)$ ecuaciones. Por ello es necesario añadir dos condiciones mas para resolver el problema.

Condiciones adicionales en interpolación mediante splines

Se pueden imponer restricciones sobre el tipo de spline:

- **Spline Natural o Libre**.

$$(p^0)''(x_0) = 0 \qquad (p^{n-1})''(x_n) = 0$$

- **Condición no un nudo**.

$$s'''(x) \quad \text{continua en} \quad x_1 \quad \text{y en} \quad x_{n-1}$$

(en este caso se tiene que $p^0 \equiv p^1$ y $p^{n-2} \equiv p^{n-1}$)

O se pueden añadir nuevas condiciones de interpolación:

- **Spline sujeto**.

$$f'_0 = (p^0)'(x_0) \qquad f'_n = (p^{n-1})'(x_n)$$

Nota 4.3

Las dos últimas opciones están implementadas en Matlab en las funciones ***interp1*** *y* ***spline***.

Nota 4.4

El problema de interpolación mediante splines cúbicos, con alguna de las condiciones adicionales anteriores, tiene solución única. Eligiendo adecuadamente las incógnitas para representar a $s(x)$, la solución se obtiene resolviendo un sistema $(n+1)\times(n+1)$, con matriz tridiagonal, que requiere un número de operaciones proporcional a n.

Problema 4.9

Sea $s(x) = \begin{cases} x^3 & x \in [-1,0] \\ a+bx+cx^2+dx^3 & x \in [0,1] \end{cases}$.

Halle, si existen, valores de $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ para que $s(x)$ sea un spline cúbico sujeto en $[-1,1]$ que interpole los datos $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f'(-1) = 3$ y $f'(1) = 6$ ¿Es un spline natural? ¿Verifica la condición de no un nudo?

Proposición (Acotación del error)

Si $f \in C^4([x_0,x_n])$, entonces el error cometido al utilizar el spline con condiciones $(p^0)'(x_0) = f'_0$, $\quad (p^{n-1})'(x_n) = f'_n$ verifica la siguiente acotación

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - s(x)| \le \frac{5M}{384} h^4$$

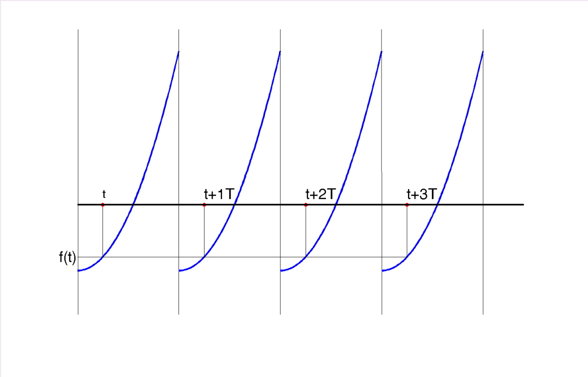
con

$$M = \max_{\xi\in[x_0,x_n]} |f^{(4)}(\xi)| \qquad h = \max_i h_i = \max_i \{(x_{i+1} - x_i)\}$$

Contenidos

Motivación

En diferentes campos de la ingeniería (*señales, ondas etc...*), es frecuente encontrarse con el problema de aproximar funciones periódicas (f es **periódica** si existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = f(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$).



Motivación

Para este tipo de funciones resulta mas adecuado el uso de polinomios trigonométricos y polinomios mediante exponenciales complejas que el de los polinomios algebraicos clásicos.

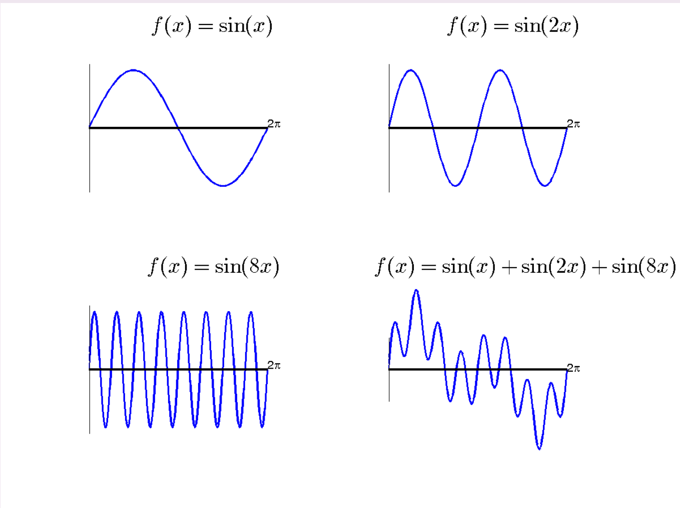
Un ejemplo de **polinomio trigonométrico** podría ser la función:

$$S(t) = A_0 + A_1 \cos(t) + A_2 \operatorname{sen}(t) + A_3 cos(2t)$$

y un **polinomio en exponenciales complejas**:

$$p(t) = c_0 + c_1 e^{t\,i} + c_2 \left(e^{t\,i}\right)^2 + c_3 \left(e^{t\,i}\right)^3$$

Algunos ejemplos de polinomios trigonométricos



Problema 4.10

Halle los coeficientes A_0, A_1 para que el polinomio trigonométrico de la forma

$$S(t) = A_0 + A_1 \cos(t)$$

interpole los datos $(0,3)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Observación 4.4

En el ejercicio anterior se planteó un problema de interpolación trigonométrica con 2 datos únicamente. En los problemas prácticos el número de datos puede llegar a ser del orden 10^6.

Procedimiento

Sea f una función periódica de periodo T y sea $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, que denominaremos **frecuencia angular**. En el intervalo $[0,T]$ se consideran n nodos uniformemente distribuidos:

$$0, \frac{T}{n}, 2\frac{T}{n}, \cdots, (n-1)\frac{T}{n}$$

es decir,

$$t_j = j\frac{T}{n}, \quad j = 0,1,\ldots,n-1 \tag{2}$$

Supondremos que n es par y denotaremos $m = \frac{n}{2}$.

Problema de interpolación mediante polinomios trigonométricos

Dados los datos $(t_j, f(t_j))$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, se plantea el problema de interpolar dichos datos mediante el polinomio trigonométrico:

$$S_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\left[a_k \cos\left(k\,\omega_0\, t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(k\,\omega_0\, t\right)\right] + \\ + \frac{a_m}{2}\cos\left(m\omega_0\, t\right) \tag{3}$$

es decir, nos planteamos encontrar $n = 2m$ coeficientes reales:

$$a_0, a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_{m-1}$$

$$\text{tal que} \quad S_m(t_j) = f(t_j), \quad j = 0,1,\ldots,n-1 \tag{4}$$

Observación 4.4

- *El problema anterior consiste en resolver un sistema lineal de orden $n \times n$.*
- *Diremos que la expresión dada en (3) es un polinomio trigonométrico de grado menor o igual que m. Conviene observar que no existe unanimidad en la bibliografía sobre el término grado (en nuestra definición siempre se involucran un número par de coeficientes).*
- *El polinomio trigonométrico anterior es función periódica con periodo*

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Problema de interpolación mediante exponenciales complejas

Dados los datos $(t_j, f(t_j))$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, se plantea el problema de interpolar dichos datos mediante el polinomio en exponenciales complejas:

$$p(t) = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots + c_{n-1} X^{n-1} \tag{5}$$

donde

$$X = e^{i\,\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Este problema se reduce a encontrar $n = 2m$ coeficientes complejos $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ tales que

$$p(t_j) = f(t_j), \quad j = 0,1,\ldots,n-1 \tag{6}$$

Interpolación trigonométrica y transformada discreta de Fourier

La solución de los problemas (4) y (6) se resume en el siguiente teorema.

Teorema 4.5

Para $n = 2m$ con los nodos equiespaciados, los problemas de interpolación (4) y (6) tienen solución única definida por:

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\cos\left(k\frac{2\pi}{n}j\right) \qquad k = 0,1,\dots,m \tag{7}$$

$$b_k = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\,\text{sen}\left(k\frac{2\pi}{n}j\right) \qquad k = 1,\dots,m-1 \tag{8}$$

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\, e^{-k\,(2\pi/n)\,j\,i} \quad k = 0,1,\dots,n-1 \tag{9}$$

Interpolación trigonométrica y transformada discreta de Fourier

Corolario

En las hipótesis del teorema (5) si además $f(t)$ es **real**, *se tienen las siguientes relaciones entre ambas interpolaciones:*

$$a_k - i\,b_k \;=\; 2c_k, \qquad k = 0,1,\dots,m-1,m \tag{10}$$

$$c_{n-k} = \bar{c}_k, \qquad k = 1,\dots,m-1 \tag{11}$$

donde se debe interpretar que $b_0 = b_m = 0$. Inversamente:

$$a_k = \text{Real}(2c_k), \qquad k = 0,1,\dots,m-1,m \tag{12}$$

$$b_k = \text{Imag}(-2c_k), \qquad k = 1,\dots,m-1 \tag{13}$$

Interpolación trigonométrica y transformada discreta de Fourier

Observación 4.4

Las fórmulas (7) y (8) pueden expresarse en forma matricial. Por ejemplo, para $n = 4$ (y por tanto $m = 2$) los coeficientes a_0, a_1, a_2 y b_1 pueden calcularse mediante:

$$(a_0\; a_1\; a_2\; b_1) = \frac{2}{4}(f_0\; f_1\; f_2\; f_3)A$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\left(0\frac{2\pi}{4}0\right) & \cos\left(1\frac{2\pi}{4}0\right) & \cos\left(2\frac{2\pi}{4}0\right) & \text{sen}\left(1\frac{2\pi}{4}0\right) \\ \cos\left(0\frac{2\pi}{4}1\right) & \cos\left(1\frac{2\pi}{4}1\right) & \cos\left(2\frac{2\pi}{4}1\right) & \text{sen}\left(1\frac{2\pi}{4}1\right) \\ \cos\left(0\frac{2\pi}{4}2\right) & \cos\left(1\frac{2\pi}{4}2\right) & \cos\left(2\frac{2\pi}{4}2\right) & \text{sen}\left(1\frac{2\pi}{4}2\right) \\ \cos\left(0\frac{2\pi}{4}3\right) & \cos\left(1\frac{2\pi}{4}3\right) & \cos\left(2\frac{2\pi}{4}3\right) & \text{sen}\left(1\frac{2\pi}{4}3\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Interpolación trigonométrica y transformada discreta de Fourier

Caso general

$$(a_0\; a_1\; \cdots\; a_m) = \frac{2}{n}(f_0\; f_1\; \cdots\; f_{n-1})\cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\left(0\frac{2\pi}{n}0\right) & \cos\left(1\frac{2\pi}{n}0\right) & \cdots & \cos\left(m\frac{2\pi}{n}0\right) \\ \cos\left(0\frac{2\pi}{n}1\right) & \cos\left(1\frac{2\pi}{n}1\right) & \cdots & \cos\left(m\frac{2\pi}{n}1\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\left(0\frac{2\pi}{n}(n-1)\right) & \cos\left(1\frac{2\pi}{n}(n-1)\right) & \cdots & \cos\left(m\frac{2\pi}{n}(n-1)\right) \end{pmatrix}$$

Interpolación trigonométrica y transformada discreta de Fourier

Caso general

$$(b_1 \cdots b_{m-1}) = \frac{2}{n}(f_0\, f_1 \cdots f_{n-1}) \cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\left(1\frac{2\pi}{n}0\right) & \cdots & \operatorname{sen}\left((m-1)\frac{2\pi}{n}0\right) \\ \operatorname{sen}\left(1\frac{2\pi}{n}1\right) & \cdots & \operatorname{sen}\left((m-1)\frac{2\pi}{n}1\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \operatorname{sen}\left(1\frac{2\pi}{n}(n-1)\right) & \cdots & \operatorname{sen}\left((m-1)\frac{2\pi}{n}(n-1)\right) \end{pmatrix}$$

Interpolación trigonométrica y transformada discreta de Fourier

Problema 4.11

Una señal de periodo 2 es muestreada en los instantes 0, $0{,}5$, 1, $1{,}5$ *dando los valores* $5{,}50$, $-1{,}50$, $3{,}50$, $-5{,}50$ *respectivamente. Demuestre que el polinomio trigonométrico que interpola dichos datos es*

$$S_2(t) = \frac{1}{2} + 2\operatorname{sen}(\pi t) + \cos(\pi t) + 4\cos(2\pi t)$$

Interpolación trigonométrica y transformada discreta de Fourier

Interpolación en intervalos de la forma $[c, c+T]$

Cuando se trabaja sobre un intervalo $[c, c+T]$, para algún $c \neq 0$, el teorema 5 sigue siendo cierto considerando los nodos $t_j = c + j\frac{T}{n}$ y reemplazando t por $t-c$ en la expresión de S_m.

Problema 4.12

Sea la función de periodo 2π *cuya restricción en* $[-\pi, \pi]$ *es* $f(x) = |x|$. *Se consideran los nodos* $x_i = -\pi + ih$ *para* $i = 0, \ldots, 5$. *con* $h = \pi/3$.

1. *Halle un polinomio trigonométrico que interpola los datos* $(x_i, f(x_i)$ *para* $i = 0, \ldots, 5$.
2. *Evalúe el polinomio anterior en* $\frac{\pi}{2}$ *y en* $\frac{\pi}{3}$.

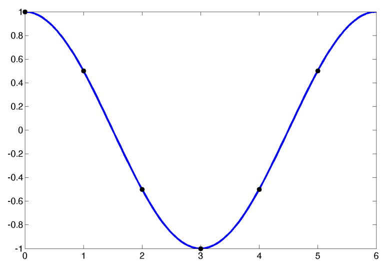
Interpolación trigonométrica y transformada discreta de Fourier

Observación 4.4

En ocasiones solo se conocen el valor de la función en los datos $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$, *que son periódicos* ($f_n = f_0$, $f_{n+1} = f_1, \ldots$) *y que están muestreados a razón constante, pero se desconoce el valor inicial c y el periodo* T. *A pesar de ello, es posible calcular los coeficientes* a_k *y* b_k, *de acuerdo con las fórmulas del teorema (5).*

Problema 4.13

Calcule los coeficientes de un polinomio trigonométrico que interpole los datos $1, 0{,}5, -0{,}5, -1, -0{,}5, 0{,}5$.



Contenidos

Introducción

Motivación

En ocasiones los datos utilizados para aproximar una función proceden de medidas experimentales, y por tanto, susceptibles de contener errores. Por otra parte, a veces se desea utilizar los datos de una función para predecir su comportamiento futuro (*extrapolación*). En ambos casos puede ser aconsejable utilizar la técnica de ajuste de datos por mínimos cuadrados que aproximar mediante el método interpolatorio. Este tipo de problema surge, por ejemplo, cuando se pretende calcular experimentalmente la constante de elasticidad de un muelle. La ley de Hooke establece que la elongación x de un muelle es proporcional a la fuerza F aplicada

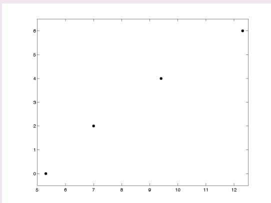
$$F(x) = k(x - x_0) \tag{14}$$

siendo k y x_0 constantes características del muelle y que se pretenden calcular experimentalmente. En el laboratorio se hacen diferentes pruebas y se obtienen los datos recogidos en la siguiente tabla:

Introducción

Motivación

$F(x)$	0	2	4	6
x	5.3	7	9.4	12.3



Sin embargo, no existe ningún valor de k y x_0 que hagan cierta la fórmula (14) con los 4 datos simultáneamente (observe el gráfico adjunto). Se plantea entonces el problema de hallar valores para k y x_0 de forma que (14) aproxime, razonablemente, los datos obtenidos. Este tipo de problemas se suelen denominar **Ajuste de datos**.

Introducción

Motivación

De forma general, se considera el conjunto de datos:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \cdots, (x_n, y_n)$$

donde se supone que y_i representa el valor de cierta función f (desconocida) en el nodo x_i. Si aproximamos f mediante una función h (por ejemplo un polinomio, un spline,...) los errores absolutos cometidos en cada nodo están definidos por

$$E_i(h) = |y_i - h(x_i)| \quad i = 1, \cdots, n$$

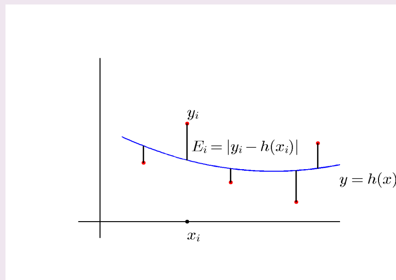


Figura: Errores locales.

Introducción

Búsqueda de una función de un tipo determinado

La aproximación por interpolación consistía en obtener h de forma que dichos errores son cero. Pero si restringimos el tipo de funciones h admisibles, es posible que dicho interpolante no exista (como ocurría en el cálculo de la constante del muelle), planteándose entonces un *ajuste de datos*, que consiste en encontrar la función de un determinado conjunto $\mathscr{F}$ (por ejemplo polinomios de grado menor o igual que uno) que proporcione el menor error posible (que posiblemente no será cero). La forma natural de medir el *error total* será a través de la norma del vector $(E_1, \cdots, E_n)$.

Criterios de medición del error

Los más habituales son:

- Criterio asociado a $||.||_1$: $E_1(h) + \cdots + E_n(h)$
- Criterio asociado a $||.||_\infty$: $\max\{E_1(h), \cdots, E_n(h)\}$
- Criterio asociado a $||.||_2$: $\sqrt{E_1(h)^2 + \cdots + E_n(h)^2}$

Ajuste de datos

Ajuste de datos por mínimos cuadrados

Cuando se minimize el error asociado a la norma $||.||_2$ se hablará de **Ajuste de Datos por Mínimos Cuadrados**. En la práctica se utiliza como criterio $(||.||_2)^2$ que genera la misma solución pero con cálculos mas sencillos.

El problema a resolver consiste en encontrar la función h de cierto conjunto $\mathscr{F}$ que hace mínimo el número $E_1(h)^2 + \cdots + E_n(h)^2$. Esto se resume en:

$$\min_{h \in \mathscr{F}} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - h(x_i)\right)^2 \tag{15}$$

El conjunto $\mathscr{F}$ se elige en función del problema concreto a resolver.

Ajuste de datos

Ejemplos de ajustes

Ajuste Polinomial.

$$\mathscr{F} = \mathbb{R}_m[x] = \{\, h(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \}$$

Ajuste Trigonométrico.

$$\mathscr{F} = \mathscr{T}_m = \{\, h(x) = a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_m \cos mx + $$
$$+ b_1 \operatorname{sen} x + \cdots + b_{m-1} \operatorname{sen}(m-1)x \,\}$$

Ajuste Exponencial.

$$\mathscr{F} = \{\, h(x) = a\, e^{bx} \,\}$$

Ajuste de Potencias.

$$\mathscr{F} = \{\, h(x) = a\, x^b \,\}$$

Ajuste de Saturación.

$$\mathscr{F} = \left\{ h(x) = a \frac{x}{x+b} \right\}$$

Ajuste lineal

Introducción

Cuando el conjunto $\mathscr{F}$ está definido por combinaciones lineales de ciertas funciones base, es decir, que puede ser expresado por:

$$\mathscr{F} = \{\, h(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \cdots + \alpha_m \varphi_m(x) \;/\; \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

se habla de **Ajuste Lineal**. En los ejemplos anteriores, el ajuste polinomial y el ajuste trigonométrico son lineales.

En este tipo de conjuntos, el problema de minimización (15) se reduce al problema de hallar el mínimo en $\mathbb{R}^m$ de la función:

$$E(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \left(\alpha_1 \varphi_1(x_i) + \cdots + \alpha_m \varphi_m(x_i)\right)\right)^2$$

Resolución del problema

Aplicando la condición de extremo para funciones de varias variables el problema de minimización se resuelve por medio del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial E}{\partial \alpha_1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \frac{\partial E}{\partial \alpha_m}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) & = & 0 \end{array}\right\}$$

Al ser $\mathscr{F}$ un espacio vectorial, este sistema es lineal y sus ecuaciones suelen denominarse **Ecuaciones Normales**.

Resolución del problema

Denotando:

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \text{ e } \vec{Y} = (Y_1,\cdots,Y_n)$$

dicho sistema puede expresarse por $(A^tA)\vec{\alpha} = A^t\vec{Y}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_j(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(x_i) & \cdots & \varphi_j(x_i) & \cdots & \varphi_m(x_i) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_j(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}$$

Observación 4.4

Se observa que la columna $j-$ésima de A se obtiene evaluando la función φ_j en todos los nodos (por tanto en la posición (i,j) aparece $\varphi_j(x_i)$). El sistema lineal tiene solución única si estos vectores columna son linealmente independientes (es decir, $rg(A) = m$). El hecho de que en las aplicaciones prácticas **n** $>>$ **m** *facilita la verificación de dicha condición.*

Problema 4.14

Halle la función de la forma $ae^x + be^{2x}$ con $a,b \in \mathbb{R}$ que mejor ajusta la siguiente tabla de datos por mínimos cuadrados:

x_i	-1	0	1
Y_i	0.5	2	10

Problema 4.15

La ley de Hooke establece que la elongación x de un muelle es proporcional a la fuerza F aplicada: $F(x) = k(x - x_0)$, siendo k y x_0 constantes características del muelle. A partir de los datos recogidos en la siguiente tabla, obtenga k y x_0 mediante ajuste de datos por mínimos cuadrados.

$F(x)$	0	2	4	6
x	5.3	7	9.4	12.3

Recta de regresión

Cuando el ajuste se realiza mediante polinomios de grado menor o igual que uno, la recta de ajuste se suele denominar **recta de regresión**. En este caso,

$$\mathscr{F} = \{\, h(x) = a_0 + a_1 x \;/\; a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

siendo $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\alpha_1 = a_0$, $\alpha_2 = a_1$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

Ajuste lineal

Solución del sistema

Las ecuaciones normales dan lugar a un sistema de orden 2 cuya solución es:

$$\boxed{a_1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n\bar{x}\overline{Y}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad a_0 = \overline{Y} - a_1 \bar{x}}$$

donde $\overline{Y} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$ y $\bar{x} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ son las medias de los datos. La recta de regresión sería entonces:

$$y = a_0 + a_1 x = \overline{Y} + a_1(x - \bar{x})$$

Ajuste lineal

Caso general

En el caso general con polinomios de grado m, se tiene que

$$\varphi_1(x) = 1,\ \varphi_2(x) = x, \cdots, \varphi_{m+1}(x) = x^m$$

obteniéndose que

$$A^tA = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+m} \end{pmatrix}$$

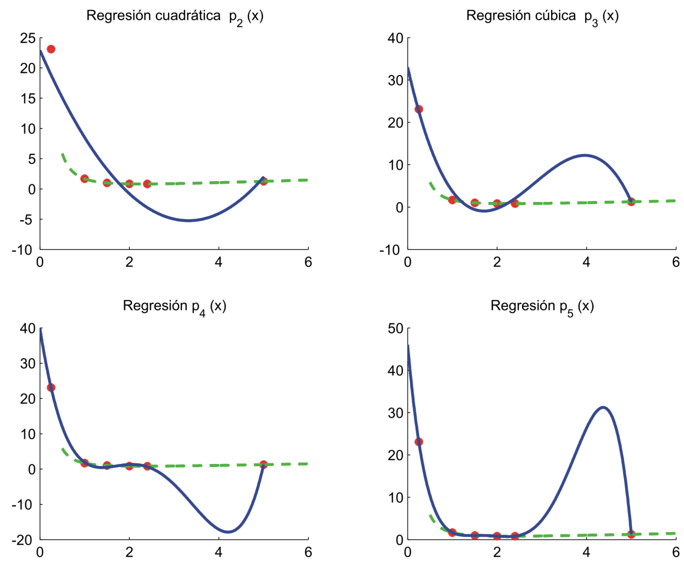
Ajuste lineal

Observación 4.4

- *Para valores altos de m la matriz anterior está muy mal condicionada.*
- *El sistema general de ecuaciones normales se puede resolver en Matlab con la instrucción:* ***A\Y***
- *Recuerde que si* $n = m + 1$ *la solución del problema del ajuste es el polinomio de interpolación, pues para este polinomio el error sería cero.*
- *En el gráfico que sigue, pueden observarse los polinomios de grado 2, 3, 4 y 5 que mejor ajustan los datos de la siguiente tabla:*

x_i	0.25	1	1.5	2.0	2.4	5
Y_i	23.1	1.68	1.0	0.84	0.826	1.257

Ajuste lineal



Problema 4.16

Halle la recta que ajusta la siguiente tabla de datos por mínimos cuadrados:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
Y_i	0.5	2.5	2.0	4	3.5	6	5.5

Problema 4.17

La caída de un cuerpo por la acción de la gravedad viene descrita por la ecuación $e = e_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, *donde* e *es el espacio recorrido hasta el instante* t, e_0 *y* v_0 *la altura y velocidad iniciales y* g *la gravedad. Utilizando dicha ecuación y los datos de la tabla:*

t	0	1	2	4	6
e	200	195	180	120	25

halle una aproximación de g.