# Tema 3: Métodos numéricos para la resolución de sistemas.

**Ejercicio 1** *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

*Calcule una factorización LU de A y utilícela para resolver el sistema* $A\vec{x} = \vec{b}$.

**Ejercicio 2** *Aplique el método de eliminación de Gauss al sistema* $A\vec{x} = \vec{b}$, *siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 15 & 19 & 23 \\ 8 & 42 & 60 & 70 \\ 12 & 60 & 1 & 17 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 30 \\ 98 \\ 144 \end{pmatrix}.$$

*Calcule la factorización LU de la matriz asociada al sistema y resuelva el sistema usando dicha descomposición.*

**Ejercicio 3** *Se considera el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 0.3\times 10^2 & x & + & 0.5914\times 10^6 y & = & 0.5917\times 10^6 \\ 0.5291\times 10 & x & - & 0.6130\times 10 y & = & 0.4678\times 10^2 \end{array}\right\}$$

*cuya solución exacta es* $x_e = 10$, $y_e = 1$. *Resuelva el sistema utilizando aritmética de cuatro dígitos, resolviendo por Gauus sin pivoteo y por Gauss con pivoteo parcial con factor de escala.*

**Ejercicio 4** *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Halle una matriz de permutación P tal que* $P\cdot A$ *admita factorización LU y calcule L y U.*

**Ejercicio 5** *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ 29 \end{pmatrix}$$

*Resuelva el sistema* $A\vec{x} = \vec{b}$ *utilizando la factorización de Cholesky.*

**Ejercicio 6** *El sistema*

$$\begin{pmatrix} 10^{-5} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*tiene como solución* $x_1 = 1.0000100001$, $x_2 = 0.9999899999$. *Utilizando aritmética de cuatro cifras con redondeo y sabiendo que la matriz del sistema está bien condicionada, se pide:*

(a) *Resolver dicho sistema mediante eliminación Gaussiana sin pivoteo.*

(b) *Explicar las razones de la mala solución obtenida en el caso anterior y proponer un procedimiento que permita obtener (con aritmética de cuatro cifras) una solución con error relativo del orden de* $10^{-5}$.

**Ejercicio 7** *Se considera el sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

*Utilizando aritmética de tres cifras con redondeo, se pide:*

(a) *Resolver dicho sistema mediante eliminación Gaussiana utilizando pivoteo parcial con factor de escala.*

(b) *Hallar la descomposición LU de la matriz del sistema obtenido después de realizar el pivoteo.*

(c) *Resolver el sistema mediante la factorización de Cholesky.*

**Ejercicio 8** *Calcule, si existe, la factorización de Cholesky de*

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 9** *Se considera el sistema* $x+2y=3$, $3x+24y=2$ *y sea* $(x^{(0)}, y^{(0)})$ *una solución aproximada del mismo.*

(a) *Halle las ecuaciones del método de Jacobi para la resolución de dicho sistema y deduzca de ellas las del método de Gauss-Seidel.*

(b) *Estudie la convergencia de los dos métodos anteriores y diga cual tiene mayor velocidad de convergencia.*

(c) *Realice dos iteraciones de ambos métodos, tomando como dato inicial el vector* $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0,0)$.

**Ejercicio 10** *Sea* $\{\vec{x}^k\}$ *la sucesión definida por* $\vec{x}^{k+1} = B_\lambda \vec{x}^k + \vec{c}$, *con* $B_\lambda = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/(1+\lambda^2) \end{pmatrix}$, $\vec{c} = (1,1)$ *y* $\vec{x}^0$ *dado. Estudie para qué valores de* $\lambda$ *y de* $\vec{x}^0$ *es convergente la sucesión* $\{\vec{x}^k\}$.

**Ejercicio 11** *Se considera el sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \end{pmatrix}$$

*siendo* $a \in \mathbb{R}$.

(a) *Resuelva el sistema mediante la factorización de Cholesky para aquellos valores de a en los que este procedimiento tenga sentido.*

(b) *Plantee el método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel para la resolución de dicho sistema y estudie para qué valores de a son convergentes para cualquier dato inicial.*

(c) *Utilizando aritmética de tres dígitos con redondeo y tomando $a = 10^4$, resuelva dicho sistema mediante eliminación Gaussiana utilizando pivoteo parcial con factor de escala.*

**Ejercicio 12** *Se considera el sistema $2x+y=3$, $24x+3y=2$ y sea $(x^{(0)},y^{(0)})$ una solución aproximada del mismo.*

(a) *Halle las ecuaciones del método de Jacobi para la resolución de dicho sistema y deduzca de ellas las del método de Gauss-Seidel.*

(b) *Estudie la convergencia de los dos métodos anteriores y diga cual tiene mayor velocidad de convergencia.*

**Ejercicio 13** *Se considera el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

*y $\vec{b} = (7,-21,5)$. Realice una iteración del método de Jacobi y otra del método de Gauss-Seidel tomando como dato inicial $(1,2,2)$. Analice la convergencia de ambos métodos y diga cual tiene mayor velocidad de convergencia.*

**Ejercicio 14** *Obtenga en función de $a \in \mathbb{R}$, condiciones suficientes para la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando se aplican a un sistema cuya matriz de coeficientes es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 15** *Se considera el sistema no lineal: $x^4+2y^4-9x=0$, $x^2+y^2-5y=0$. Se pide:*

(a) *Construir un método de punto fijo mediante la técnica de Gauss-Seidel y realizar una iteración del mismo con $(x^{(0)},y^{(0)}) = (1,1)$.*

(b) *Realizar una iteración del método de Newton en dicho sistema tomando como dato inicial $(1,1)$.*

**Ejercicio 16** *Compruebe que se verifican las hipótesis del teorema de convergencia local del método de Newton en el punto* $(0,0)$ *para el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2-5x & = & 0 \\ 2x^4+y^4-9y & = & 0 \end{array}\right\}$$

**Ejercicio 17** *Se considera el sistema no lineal* $x^2+y^2-x=0$*,* $x^2-y^2-y=0$*. Se pide:*

*(a) Construir un método de punto fijo mediante la técnica de Gauss-Seidel.*

*(b) Razonar que existe un entorno* $U$ *de* $(0,0)$ *tal que para todo* $(x_0,y_0)\in U$*, la sucesión generada por el método de Newton converge a* $(0,0)$*.*

*(c) Realizar una iteración del método de Newton tomando como dato inicial* $(x^{(0)},y^{(0)})=(0.5,0.5)$*.*

**Ejercicio 18** *Se considera el sistema no lineal*

$$\left.\begin{array}{r} -e^{-x}+10x+\cos(y)=0 \\ x+3y-1=0 \end{array}\right\}$$

*Sabiendo que dicho sistema posee una raíz en* $[0,1]\times[0,1]$ *se pide:*

*(a) Demuestre que se verifican las hipótesis del teorema de convergencia local del método de punto fijo para la función de ieteración* $\mathbf{g}$ *que se obtiene al despejar* $x$ *del* $10x$ *de la primera ecuación y la variable* $y$ *de la segunda*

*(b) Realice dos iteraciones del método del punto fijo tomando como dato inicial* $(x^{(0)},y^{(0)})=(1,1)$*.*

*(c) Demuestre que se verifican las hipótesis del teorema de convergencia local del método de Newton.*

*(d) Realice dos iteraciones del método de Newton tomando como punto inicial* $(x^{(0)},y^{(0)})=(0,0)$*.*

*(e) Transforme el sistema inicial en una ecuación no lineal en la variable* $x$ *y realice dos iteraciones del método de Newton para funciones de una variable con* $x_0=0$*.*