Tema 5: Integración numérica.

Ejercicio 1 *Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, deduzca la fórmula de cuadratura de Newton-Cotes cerrada para tres puntos (es decir, la fórmula de Simpson). Aplique dicha fórmula al cálculo de la integral de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x \in [0, \pi/2]$. Aproxime dicha integral mediante las fórmulas del punto medio y del Trapecio.*

Ejercicio 2 *Dada la Regla de Simpson Compuesta*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(\xi); \quad h = \frac{b-a}{2m}$$

halla un valor de $n = 2m$ que garantice que el error de truncamiento es menor que 10^{-3} cuando se utiliza dicha fórmula en el cálculo de la integral $\int_0^2 \ln(x+2)\,dx$. Calcule la aproximación de la integral con el valor de n obtenido.

Ejercicio 3 *Sea $I = \int_1^3 e^x \operatorname{sen} x\,dx$. Empleando la regla de Simpson compuesta descrita en el ejercicio anterior, determine valores de $n = 2m$ que permitan aproximar la integral con un error de truncamiento menor que 10^{-3}.*

Ejercicio 4 *Calcule, mediante la fórmula de Simpson compuesta, una aproximación de $I = \int_1^5 f(x)dx$ a partir de los siguientes datos:*

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
f(x)	0.0	0.41	0.69	0.92	1.10	1.25	1.39	1.50	1.61

Ejercicio 5 *Sea $I = \int_1^{10} \ln x\,dx$. Calcule el número de nodos que garantizan un error de truncamiento menor que 10^{-4} para la regla de Simpson Compuesta y para la regla del Trapecio Compuesta.*

Ejercicio 6 *Aplique la regla de Simpson Compuesta para aproximar la integral $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$ con un error de truncamiento menor que 10^{-2}.*

Ejercicio 7 *Sabiendo que el polinomio de Legendre de grado 3 es $L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, obtenga los nodos y los pesos de la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre en $[-1,1]$ con 3 nodos:*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{3} c_i f(r_i)$$

Aplique dicha fórmula y un cambio de variable para aproximar la integral $I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx$.

Ejercicio 8 *Aproxime $I = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}(x) + \cos(x))\,dx$ mediante Integración Gaussiana con 4 nodos, sabiendo que en $[-1,1]$ los nodos y sus respectivos pesos son: $r_1 = -\sqrt{\frac{2\sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7}}$, $r_2 = -\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2\sqrt{30}}{35}}$, $r_3 = -r_2$, $r_4 = -r_1$, $c_1 = c_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}$, $c_2 = c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$.*