Computación Numérica

Segundo Parcial - Abril 2016

1. Tenemos los siguientes datos del movimiento de un cuerpo

$t(s)$	0	2	4	6	8	10
$v(m/s)$	0	6	20	42	72	110

¿Cuál será la velocidad a los 6,2 s? Usar interpolación polinomial cuadrática con el polinomio interpolante en la forma de Newton. ¿Y la aceleración? Utilizar derivación numérica con $h = 0{,}1$.

Para interpolar con un polinomio de grado dos, necesitamos tres puntos. Los t más próximos a 6,2 son 4, 6 y 8. Además el intervalo $[4, 8]$ contiene a 6,2.
Para usar la notación habitual $x = t$ y $f(x) = v(t)$. Construimos la tabla de diferencias divididas con $x_0 = 4$, $x_1 = 6$ y $x_2 = 8$:

$$
\begin{array}{cccc}
x & f(x) & & \\
4 & 20 & & \\
 & & \dfrac{42-20}{6-4} = 11 & \\
6 & 42 & & \dfrac{15-11}{8-4} = 1 \\
 & & \dfrac{72-42}{8-6} = 15 & \\
8 & 72 & &
\end{array}
$$

Ya tenemos

$$f[x_0] = 20, \quad f[x_0, x_1] = 11, \quad f[x_0, x_1, x_2] = 1$$

Construímos el polinomio interpolante en la forma de Newton

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
P_2(x) &= 20 + 11(x - 4) + 1(x - 4)(x - 6)
\end{aligned}
$$

y entonces

$$v(6{,}2) \approx P_2(6{,}2) = 20 + 11(6{,}2 - 4) + 1(6{,}2 - 4)(6{,}2 - 6) = 44{,}64\,\mathrm{m/s}$$

$$v(6{,}2) \approx 44{,}64\,\mathrm{m/s}$$

Podemos aproximar la derivada de una función usando la fórmula centrada:

$$f'(t) \approx \frac{1}{2h}(f(t+h) - f(t-h))$$

Si $f = P_2$, $t = 6{,}2$ y $h = 0{,}1$

$$a(6{,}2) \approx \frac{1}{2h}(P_2(6{,}2+0{,}1) - P_2(6{,}2+0{,}1)) = \frac{1}{2(0{,}1)}(45{,}99 - 43{,}31) = 13{,}4\,\mathrm{m/s^2}$$

2. Dada la función $f(x) = e^{-x}$ en $[0,2]$ calcular la parábola que aproxima de forma continua esta función en este intervalo utilizando la base de polinomios ortonormales (para el producto escalar correspondiente)

$$B = \{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}(x-1), \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-6x+2) \right\}.$$

$$\int_0^2 e^{-x}dx = 0{,}8646, \qquad \int_0^2 x\,e^{-x}dx = 0{,}5940, \qquad \int_0^2 x^2e^{-x}dx = 0{,}6466$$

Para una base de polinomios $\{P_0, P_1, P_2\}$ el polinomio de aproximación es de la forma

$$P(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x)$$

donde los coeficientes a_0, a_1 y a_2 son la solución del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} \langle P_0,P_0\rangle & \langle P_0,P_1\rangle & \langle P_0,P_2\rangle \\ \langle P_1,P_0\rangle & \langle P_1,P_1\rangle & \langle P_1,P_2\rangle \\ \langle P_2,P_0\rangle & \langle P_2,P_1\rangle & \langle P_2,P_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle P_0,f\rangle \\ \langle P_1,f\rangle \\ \langle P_2,f\rangle \end{pmatrix}.$$

Si los polinomios son ortonormales para el producto escalar utilizado se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle P_0,f\rangle \\ \langle P_1,f\rangle \\ \langle P_2,f\rangle \end{pmatrix},$$

y entonces

$$a_0 = \langle P_0, f\rangle \quad a_1 = \langle P_1, f\rangle \quad a_2 = \langle P_2, f\rangle.$$

En este caso el producto escalar es

$$\langle g, h\rangle = \int_0^2 g(x)\,h(x)\,dx.$$

Si hacemos los cálculos:

$$a_0 = \langle P_0, f(x)\rangle = \int_0^2 P_0(x)\,f(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^2 e^{-x}dx = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2}0{,}8647 = 0{,}6114$$

$$a_1 = \langle P_1, f(x)\rangle = \int_0^2 P_1(x)\,f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{6}}{2}(x-1)\,e^{-x}dx = \\ = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\int_0^2 x\,e^{-x}dx - \int_0^2 e^{-x}dx\right) = \\ = \frac{\sqrt{6}}{2}(0{,}5940 - 0{,}8647) = -0{,}3315$$

$$a_2 = \langle P_2, f(x)\rangle = \int_0^2 P_2(x)\, f(x)\, dx = \frac{\sqrt{10}}{4}\int_0^2 (3x^2-6x+2)\, e^{-x} dx =$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{4}\left(3\int_0^2 x\, e^{-x} dx - 6\int_0^2 x\, e^{-x} dx + 2\int_0^2 e^{-x} dx\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{4}\,(3\times 0{,}6466 - 6\times 0{,}5940 + 2\times 0{,}8647) = 0{,}08325$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) = \\ &= 0{,}6114\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}3315\frac{\sqrt{6}}{2}(x-1) + 0{,}08325\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-6x+2) = \\ &= 0{,}4323 - 0{,}4060\,(x-1) + 0{,}0658\,(3x^2-6x+2) \end{aligned}$$

3. Dada la función $\mathbf{f}(x,y) = (f_1,f_2) = \left(x^2+y, x^2-y\right)$ calcular una aproximación de la divergencia $\mathrm{div}\mathbf{f}(x,y)$ para $(x,y)=(2,1)$ con $h_x = h_y = 0{,}1$.

El primer término será:

$$\begin{aligned} \partial_x f_1(x_m,y_n) &\approx \frac{f_1(x_m+h_x,y_n) - f_1(x_m-h_x,y_n)}{2h_x} = \frac{f_1(2+0{,}1,1) - f_1(2-0{,}1,1)}{2\,(0{,}1)} = \\ &= \frac{\left((2+0{,}1)^2+1\right) - \left((2-0{,}1)^2+1\right)}{2\,(0{,}1)} = \\ &= \frac{5{,}41-4{,}61}{0{,}2} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4 \end{aligned}$$

Y el segundo término

$$\begin{aligned} \partial_y f_2(x_m,y_n) &\approx \frac{f_2(x_m,y_n+h_y) - f_2(x_m,y_n-h_y)}{2h_y} = \frac{f_2(2,1+0{,}1) - f_2(2,1-0{,}1)}{2\,(0{,}1)} = \\ &= \frac{\left(2^2-(1+0{,}1)\right) - \left(2^2-(1-0{,}1)\right)}{2\,(0{,}1)} = \\ &= \frac{2{,}9-3{,}1}{0{,}2} = \frac{-0{,}2}{0{,}2} = -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{div}(\mathbf{f}(2,1)) = \partial_x f_1(2,1) + \partial_y f_2(2,1) \approx 4-1 = 3$$

4. Obtener x_0 y x_1 para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq f(x_0) + f(x_1)$$

tenga grado de precisión al menos dos. Estudiar cuál es su grado de precisión.
Usar la fórmula obtenida para calcular un valor aproximado de:

$$\int_{-3}^{3} (2x^3 + 1)\,dx$$

realizando previamente un cambio de variable adecuado
¿Qué error se comete al aplicar dicha fórmula en este ejercicio? Justificar la respuesta sin hacer la integral exacta.

Para que una fórmula de cuadratura sea exacta para un polinomio P_n de grado n, o lo que es lo mismo, tenga precisión n, dicha fórmula ha de ser exacta para las funciones 1, x, x^2, ..., x^n y no serlo para x^{n+1}. Si buscamos una fórmula de precisión *al menos* 2 habrá de ser exacta para las funciones 1, x, x^2. Si imponemos estas tres condiciones a la fórmula

$$\begin{array}{llllll}
\text{Exacta para } f(x)=1 & \int_{-1}^{1} 1dx = & 2 = & f(x_0)+f(x_1) = & 1+1 & 1+1=2 \\
\text{Exacta para } f(x)=x & \int_{-1}^{1} xdx = & 0 = & f(x_0)+f(x_1) = & x_0+x_1 & x_0+x_1=0 \\
\text{Exacta para } f(x)=x^2 & \int_{-1}^{1} x^2dx = & \frac{2}{3} = & f(x_0)+f(x_1) = & x_0^2+x_1^2 & x_0^2+x_1^2=\frac{2}{3}
\end{array}$$

Por lo tanto tenemos el sistema

$$\begin{array}{lllll}
x_0 + x_1 = & 0 \rightarrow & x_1 = -x_0 & & \\
x_0^2 + x_1^2 = & \frac{2}{3} & \searrow & x_0^2 + (-x_0)^2 = \frac{2}{3} \rightarrow \quad 2x_0^2 = \frac{2}{3} \rightarrow & x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{array}$$

Y la solución es

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

y la fórmula es

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{1}$$

Sabemos que tiene precisión al menos 2. Estudiemos qué precisión tiene:

$$¿\text{Exacta para } f(x)=x^3? \qquad \int_{-1}^{1} x^3dx = \quad 0 \stackrel{?}{=} \quad f(x_0)+f(x_1) = \quad x_0^3 + x_1^3$$

y

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 0$$

Por lo tanto la fórmula es exacta para polinomios de grado 3. Veamos si es cierta para polinomios de grado 4 :

$$¿Exacta\, para\, f(x) = x^4? \qquad \int_{-1}^{1} x^4 dx = \quad \frac{2}{5} \stackrel{?}{=} \quad f(x_0) + f(x_1) = \quad x_0^4 + x_1^4$$

y

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 \neq \frac{2}{5}$$

Como es exacta para 1, x, x^2 y x^3 pero no para x^4, es exacta para polinomios de hasta grado 3 pero no para grado 4 y la preción de la fórmula es 3.
Calculemos la integral

$$I = \int_{-3}^{3} (x^3 + 1)\, dx$$

Hacemos una transformación lineal para cambiar de intervalo $x = mx + n$ y como cuando $x = -3$ se tiene que $t = -1$

$$-3 = -m + n \tag{2}$$

y como cuando $x = 3$ se tiene que $t = 1$

$$3 = m + n \tag{3}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (2) y (3) $m = 3$ y $n = 0$ por lo que el cambio de variable es $x = 3t$ y $dx = 3dt$. Por lo tanto

$$I = \int_{-1}^{1} ((3t)^3 + 1)\, 3\, dt I = 3 \int_{-1}^{1} (9t^3 + 1)\, dt$$

Y teniendo en cuenta la fórmula obtenida (1)

$$3 \int_{-1}^{1} f(t)\, dt \approx 3 \left(f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = 3 \left(9 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 1 + 9 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 1\right) = 3 \times 2 = 6$$

Como la fórmula tiene precisión 3 y la función integrando es un polinomio de grado 3, la integral es exacta y el error es cero.