# Tema 2. Resolución numérica de ecuaciones no lineales.

Computación Numérica

Antonio Palacio

Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo

*palacioantonio@uniovi.es*

Curso 2021-2022



## Contenidos I







## Contenidos







## Introducción

**¿Para qué usamos métodos numéricos?**

Las cuotas mensuales para pagar un préstamo de $d$ euros en $n$ meses y con un interés anual $i$ es

$$c = \frac{d\dfrac{i}{12}}{1-\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{-n}}$$

Si nos hacen un préstamo de 18030,36 euros a devolver en 10 años con cuotas mensuales de 258,68 euros, ¿qué interés nos están aplicando?. Sustituyendo en la fórmula los datos del problema, denotando por $x$ la incógnita (el interés) y agrupando en el primer miembro se obtiene la ecuación:

$$f(x) = 5{,}8085x + \left(1+\frac{x}{12}\right)^{-120} - 1 = 0 \tag{1}$$

En esta ecuación no es posible “despejar” $x$ y necesitamos el uso de algún método numérico.

## Introducción

### ¿Cómo funcionan los métodos numéricos?

Los métodos numéricos pueden diseñarse utilizando directamente la función $f$, como en el **método de bisección y en el de Newton**, o introducir una nueva función que cambie el enfoque del problema como ocurre en los **métodos de punto fijo**.
Por ejemplo, si conocemos un valor aproximado $x_0$ del interés buscado $x$, podemos simplificar la ecuación 1 del siguiente modo:
$5{,}8085x + \left(1+\frac{x_0}{12}\right)^{-120} - 1 = 0$ y podemos despejar $x$ fácilmente,

$$x = \frac{1}{5{,}8085}\left(1-\left(1+\frac{x_0}{12}\right)^{-120}\right) \tag{2}$$

Pero el valor obtenido solo será el correcto si $x = x_0$. Estaríamos entonces resolviendo el problema $g(x) = x$ siendo

$$g(x) = \frac{1}{5{,}8085}\left(1-\left(1+\frac{x}{12}\right)^{-120}\right) \tag{3}$$





## Introducción

### Problema planteado

Dada la ecuación $f(x) = 0$ o $g(x) = x$ con $f$ y $g$ funciones reales de variable real, se quiere encontrar $r \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(r) = 0 \quad \text{o} \quad g(r) = r$$

### Procedimiento

Se construye una sucesión de aproximaciones que converja a la solución:

$$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots \xrightarrow[n\to\infty]{} r$$

y se realiza la aproximación:

$$x_N \approx r$$

para algún $N \in \mathbb{N}$.





## Introducción

### Convergencia

El error absoluto se denota $e_n = |x_n - r|$. Para que un método sea convergente debe verificarse que

$$e_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

La rapidez con la que la sucesión de errores $\{e_n\}$ converge a 0 influye en la eficacia de un método.
Por ejemplo, para $a = 1 - 10^{-16}$ las sucesiones $e_n = a^n$ y $e'_n = a^{2^n}$ convergen a 0 con rapidez muy distinta:

- $e_n = 0{,}9999999888977699$ para $n = 100000000$
- $e'_n = 0$ para $n = 63$ (operando con números reales en doble precisión)





## Contenidos

## Métodos que usan intervalos

**Teorema 2.1 (Teorema de Bolzano)**

*Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Si $f(a)f(b)<0$ entonces existe al menos una raíz de $f$ en $(a,b)$.*

**Teorema 2.2**

*Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivable $k$ veces en $(a,b)$ y verificando $f^{(k)}(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$. Entonces $f$ posee a lo sumo $k$ raíces reales.*

**Problema 2.1**

*Razone que $f(x)=x^5+x-1$ tiene una única raíz real.*





## Método de bisección

**Procedimiento**

Se conoce como método de bisección al siguiente procedimiento:

- Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y con $f(a)f(b)<0$.
- Se denota $\begin{cases} a_1=a \\ b_1=b \end{cases}$ y $x_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$.
- Si $f(x_1)=0$ entonces $x_1$ es raíz. En caso contrario:
  - Si $f(a_1)f(x_1)<0$ se denota: $\begin{cases} a_2=a_1 \\ b_2=x_1 \end{cases}$ y $x_2=\dfrac{a_2+b_2}{2}$.
  - Si $f(a_1)f(x_1)>0$ se denota: $\begin{cases} a_2=x_1 \\ b_2=b_1 \end{cases}$ y $x_2=\dfrac{a_2+b_2}{2}$.
- Al cabo de $n$ etapas, se obtiene un intervalo $[a_n,b_n]$ que verifica:
  - Su longitud es la mitad que el anterior.
  - Contiene al menos una raíz $r$ de $f$.
  - Se toma $x_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ como aproximación de $r$.





## Método de bisección

**Teorema 2.3**

*Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua con $f(a)f(b)<0$. Entonces, la sucesión $\{x_n\}$ generada por el método de bisección converge a alguna una raíz $r$ de $f$ verificándose además:*

$$e_n=|x_n-r|\leq\frac{1}{2^n}(b-a)$$

**Ejemplo 2.1**

*Sea $f(x)=x^5+x^3+x-3$.*

1. *Razone que $f$ tiene raíz única en $[0,3]$ y que el método de bisección, comenzando en $[0,3]$, converge a dicha raíz.*
2. *Calcule el término $x_3$ de la sucesión obtenida por bisección.*
3. *Halle $N\in\mathbb{N}$ de forma que el término $x_N$ de la sucesión obtenida por bisección aproxime la raíz con al menos ocho dígitos.*





## Método de Regula Falsi

**Procedimiento**

- Se genera una colección de intervalos $[a_n,b_n]$ que contienen una raíz como en el método de bisección.
- Cambia la forma de elegir el valor de $x_n$:
  - Se construye la recta que une los puntos $(a_n,f(a_n))$ y $(b_n,f(b_n))$
  - Se define $x_n$ como la intersección de esta recta con el eje $X$.

## Método de bisección y Régula Falsi

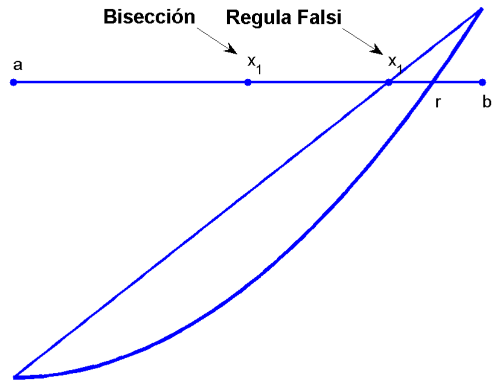



Figura: Método de bisección. Método de Regula Falsi.





## Contenidos







## Métodos de punto fijo

**Definición 2.1**

*Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $g : A \to \mathbb{R}^n$. Se dice que $r \in A$ es* ***punto fijo*** *de $g$ si $g(r) = r$.*

**Procedimiento**

- Dada la ecuación $f(x) = 0$, se busca $g$ (**función de iteración**) tal que: $g(x) = x \Rightarrow f(x) = 0$
- Se plantea: $\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$





## Métodos de punto fijo

**Ejemplo 2.2**

*Sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$. Razone que $f$ posee una única raíz en el intervalo $[1,2]$ y plantee dos métodos de punto fijo asociados al cálculo de las raíces de $f$.*

### Teorema 2.4 (Teorema de convergencia local)

*Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función con derivada continua y sea $r\in[a,b]$ un punto fijo de $g$ en el que se cumple $|g'(r)|<1$. Entonces existe $\delta>0$ tal que si $x_0\in[r-\delta,r+\delta]$ la sucesión $x_{n+1}=g(x_n)$, $n=0,1,..$ converge a $r$.*

### Problema 2.2

*Sea $f(x)=x-0{,}5\operatorname{sen}x-2$.*

1. *Razone que la ecuación $f(x)=0$ tiene una única raíz real en $[0,3]$.*
2. *Verifique que los puntos fijos de $g(x)=2+0{,}5\operatorname{sen}x$ son raíces de $f$*
3. *Compruebe que $g$ verifica las hipótesis del teorema convergencia local en $[0,3]$.*





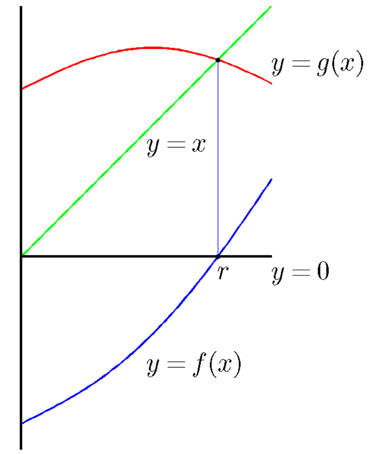



Figura: Equivalencia entre raíz y punto fijo (ejercicio 2.2).





### Corolario

*Con las hipótesis del Teorema 2.4, si además $e_n=|x_n-r|$ es no nulo para todo $n$, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n}=|g'(r)|$$

*Si $|g'(r)|\neq 0$, se dice que $e_n$ converge a $0$ con orden 1 o que el método tiene convergencia de orden 1.*

### Nota 2.1

*La convergencia teórica no garantiza la convergencia en la práctica: Por ejemplo, $g(x)=cx$ para $x\in[0,1]$, con $c\in(0,1)$ verifica las hipótesis del teorema de convergencia local en $[0,1]$ siendo $x=0$ su punto fijo. Sin embargo, para $x_0=1$ y $c=1-10^{-10}$ se obtiene $x_n=0{,}99$ con $n=10^8$ (recuerde que $x_n$ debe converger al punto fijo $x=0$) y para $c=1-10^{-20}$, se obtiene $x_n=1$ para todo $n$ con aritmética de 16 dígitos.*





### Teorema 2.5 (de no convergencia)

*Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función con derivada continua y sea $r\in(a,b)$ un punto fijo de $g$ en el que se cumple $|g'(r)|>1$. Entonces las únicas sucesiones de la forma $x_{n+1}=g(x_n)$, $n=0,1,..$ que convergen a $r$ son aquellas en las que los términos son igual a $r$ a partir de uno en adelante.*

### Nota 2.2

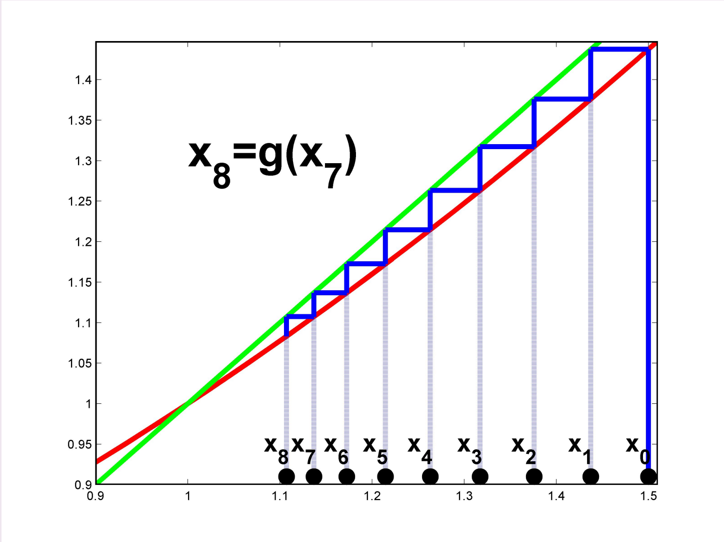
*No es razonable aplicar el método del punto fijo cuando la función $g$ está en las hipótesis del teorema anterior.*

### Problema 2.3

*Sea $g(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.*

1. *Demuestre que $x=1$ y $x=2$ son los únicos puntos fijos de $g$.*
2. *Demuestre que en $x=1$ se cumplen las hipótesis del teorema de convergencia local (Teorema 2.4) pero no en $x=2$.*
3. *Halle $x_0\neq 2$ tal que la sucesión $x_{n+1}=g(x_n)$, $n\geq 0$ converja a 2.*

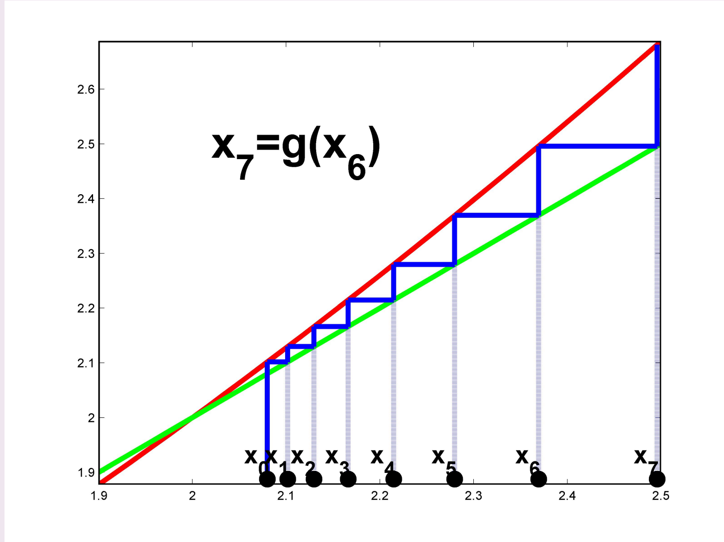
### Convergencia del método del punto fijo








### No convergencia del método del punto fijo














### Procedimiento

- Sean $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$ y $r \in [a,b]$ una raíz de $f$.
- $x_0$ aproximación inicial de $r$.
- Se aproxima la curva $y = f(x)$ por su recta tangente en $x_0$:

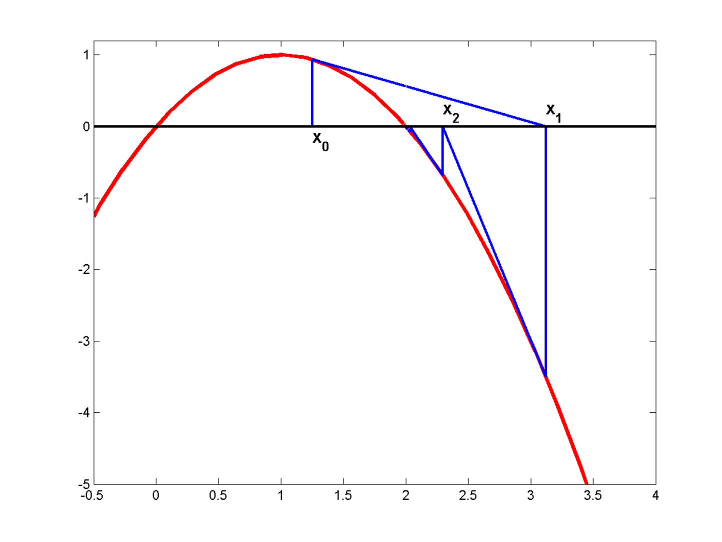
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Se utiliza el cero de la recta tangente como nueva aproximación de $r$:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

## Método de Newton

### Interpretación geométrica del método de Newton








## Método de Newton

### Método de Newton-Raphson

- $$x_0 \in [a,b] \text{ dado}$$
  $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$
- Es un método de punto fijo para la función:
  $$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
  Además, esta función verifica que $g'(r) = 0$.
- Si $f'(x_n) = 0$ para algún $n$, el método no puede ser implementado.





## Método de Newton

### Teorema 2.6 (Convergencia local del método de Newton-Raphson)

*Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase dos y $r \in [a,b]$ una raíz de $f$. Si $f'(r) \neq 0$, entonces:*

1. *$\exists \delta > 0$ tal que si $x_0 \in [r-\delta, r+\delta]$ la sucesión $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \in \mathbb{N}$ converge a $r$.*
2. *Si $f$ es $\mathscr{C}^3$ y $e_n = |x_n - r|$ es no nulo para todo $n$, se verifica que*
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|$$

### Nota 2.3

*Si $|f''(r)| \neq 0$, se dice que el método tiene convergencia de orden 2.*





## Método de Newton

### Problema 2.4

*Razone que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ verifica las hipótesis del teorema de convergencia local del método de Newton en $[1,2]$ y realice dos iteraciones de dicho método con $x_0 = 1{,}5$.*

### Nota 2.4

*Tomando $x_0 = 1{,}5$ y utilizando $r = 1{,}365230013$ como la única raíz de $f$ en $[1,2]$, se obtiene que con el método del punto fijo para $g(x) = \dfrac{\sqrt{10 - x^3}}{2}$ son necesarias 30 iteraciones para aproximar $r$ con una precisión de 10 dígitos, mientras que el método de Newton solamente necesita 4 iteraciones.*

### Observaciones

- La ventaja principal del método es que tiene convergencia cuadrática.
- Es un método esencialmente local, con una dependencia importante del punto de partida. Se suele combinar con otros métodos (por ejemplo, bisección) para obtener una buena estimación inicial.
- Se necesita evaluar $f'$ en cada iteración lo que puede reducir su eficiencia.
- Cuando $f(r) = f'(r) = 0$ no se verifica la hipótesis del teorema. No obstante, si $f'(x) \neq 0$ en torno a $r$, el método se puede implementar, aunque la convergencia obtenida ya no es cuadrática.





Intentan evitar o reducir el uso de $f'$.

### Métodos Cuasi-Newton.

La derivada $f'(x_n)$ solo se actualiza cada cierto número de iteraciones. Cuando se sustituye $f'$ por un valor constante en todas las iteraciones se conoce como el método de **Whittaker**.

### Cálculo aproximado de la derivada

Se realiza la aproximación

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}$$

siendo $h$ un parámetro a elegir.





### Método de la secante.

Dados $x_0$ y $x_1$ se plantea el método:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Geométricamente, consiste en aproximar la curva por la secante en dos puntos y calcular la raíz generada por esta secante.

Tiene convergencia local de orden $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$ bajo las mismas hipótesis que el método de Newton.





### Problema 2.5

*Sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ . Realice una iteración del método de la secante con $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$.*

## Variantes del método de Newton

### Método de Newton para raíces múltiples.

Sea $f(r) = f'(r) = \cdots = f^{(k)}(r) = 0$ y $f^{(k+1)}(r) \neq 0$. Para $k \geq 1$ la función $f$ no verifica la hipótesis del teorema de convergencia del método de Newton. Se define entonces la función

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{f'(x)} & \text{si} \quad x \neq r \\ 0 & \text{si} \quad x = r \end{cases}$$

que tiene en $x = r$ un cero simple. Se aplica el método de Newton a la función $h$ para obtener dicha raíz.





## Contenidos







## Ecuaciones algebraicas

### Definición 2.2

*Una **ecuación algebraica o polinómica** es una expresión de la forma*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0, \ con \ a_i \in \mathbb{R} \ \forall \ i = 0, 1, \ldots, n \ y \ a_n \neq 0.$$

### Observaciones

- Un polinomio está determinado unívocamente por sus coeficientes. Por ejemplo, en Matlab se representa por: **P=[$\mathbf{a_n}$ $\mathbf{a_{n-1}}$ $\cdots$ $\mathbf{a_1}$ $\mathbf{a_0}$]**
- Son un caso particular de ecuaciones en una variable y por tanto son aplicables los métodos de la sección anterior.
- Existen resultados específicos para este tipo de ecuaciones.





## Resultados sobre existencia y acotación de raíces

### Propiedades

- Si $r$ es raíz de un polinomio $P$ entonces
$$P(x) = (x-r)Q(x) \quad \text{con} \quad gr(Q) < gr(P)$$
y toda raíz de $Q$ lo es también de $P$.
- Todo polinomio puede ser factorizado en $\mathbb{C}$ del siguiente modo:
$$P(x) = a_n \, (x-r_1)^{k_1} \cdots (x-r_m)^{k_m}$$
siendo $r_i \in \mathbb{C}$ y $k_1 + \cdots + k_m = n$.
- Si un complejo $r$ es raíz de $P$ entonces también lo es su conjugado $\bar{r}$.
- Si $n$ es impar, existe al menos una raíz real.
- Si $P^{(k}(x)$ no tiene ceros reales, entonces $P(x)$ tiene a lo sumo $k$ raíces reales.

## Resultados sobre existencia y acotación de raíces

### Teorema 2.7

*Supongamos que* $a_0 \neq 0$ *y sean* $\lambda = \dfrac{\text{máx}\{|a_0|,\dots,|a_{n-1}|\}}{|a_n|}$ *y* $\mu = \dfrac{\text{máx}\{|a_1|,\dots,|a_n|\}}{|a_0|}$.
*Entonces si r es raíz de* $P(x)$ *(real o compleja) debe verificar que* $\dfrac{1}{1+\mu} \leq |r| \leq 1+\lambda$.

### Ejemplo 2.3

*Se considera el polinomio* $x^5+2x^4+6x^3+24x^2+2x$. *Puesto que* $x=0$ *es una de las raíces, podemos realizar la descomposición:* $x^5+2x^4+6x^3+24x^2+2x = P(x)x$, *siendo* $P(x)=x^4+2x^3+6x^2+24x+2$ *y en el que el coeficiente* $a_0$ *es no nulo. Razone que P tiene, a lo sumo, dos raíces reales. Halle* $a,b \in \mathbb{R}$ *tal que las raíces de P verifiquen* $a \leq |r| \leq b$.





## Algoritmo de Horner

### Procedimiento

$$P(\alpha) = a_0 + \alpha\underbrace{(a_1 + \alpha(a_2 + \cdots (\underbrace{a_{n-2} + \alpha\underbrace{(a_{n-1} + \alpha \underbrace{a_n}_{b_{n-1}}}_{b_{n-2}}}_{b_{n-3}}))))}_{b_0}$$

### Programación

- $b_{n-1} = a_n$
- Para $j = n-2,\cdots,0$, $b_j = a_{j+1} + \alpha b_{j+1}$
- $P(\alpha) = a_0 + \alpha b_0$

### Nota 2.5

*En general, el método de Horner necesita n sumas/restas y n multiplicaciones para calcular* $P(\alpha)$ *mientras que el método directo utiliza n sumas/restas y* $2n-1$ *multiplicaciones.*





## Algoritmo de Horner

### Ejemplo 2.4

*Sean* $P(x) = x^3-6x^2+3x-0{,}149$, $a=4{,}71$ *y* $P(a) = -14{,}636489$. *Usando aritmética de tres dígitos, halle el error relativo cometido al evaluar* $P(a)$ *directamente y por método de Horner.*





## Algoritmo de Horner

### Teorema 2.8

*Sean* $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ *los coeficientes asociados al número real* $\alpha$ *siguiendo el Algoritmo de Horner. Entonces:*

1. $P(x) = Q(x)(x-\alpha) + P(\alpha)$ *siendo* $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$.
2. $P'(\alpha) = Q(\alpha)$.

### Ejemplo 2.5

*Sea* $P(x) = 2x^4-3x^2+3x-4$. *Realice una iteración del método de Newton con* $x_0=-2$ *y utilizando el algoritmo de Horner para evaluar* $P(-2)$ *y* $P'(-2)$.

## Cálculo de raíces por deflacción

### Procedimiento

- Sea $r$ una raíz del polinomio $P(x)$. Entonces:
- $P(x) = Q(x)(x-r)$ con $gr(Q) < gr(P)$.
- Se obtiene una nueva raíz de $P$ calculando una raíz de $Q$.
- El procedimiento se reitera hasta que $gr(Q) = 1$.

### Ejemplo 2.6

*Sea $P(x) = x^4 - 1$, cuyas raíces reales son $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$. Calcule, mediante el método de Horner y con aritmética de 4 dígitos, la descomposición:*

$$P(x) = Q^*(x)(x - 0{,}9999) + P(0{,}9999).$$

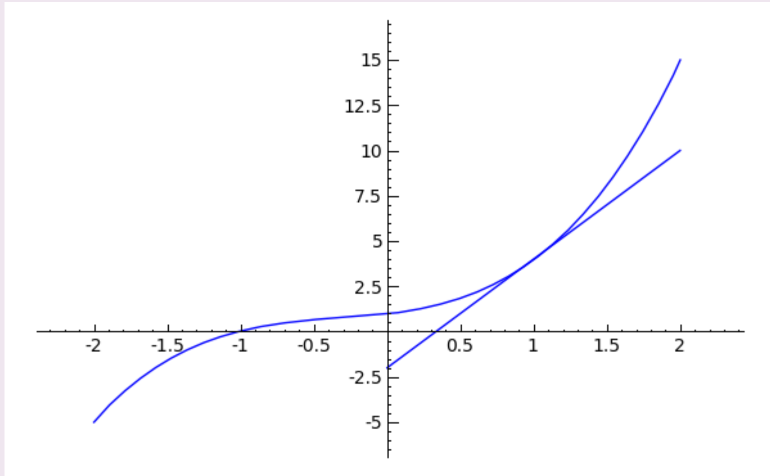
*Realice una iteración del método de Newton para $Q^*$ con $x_0 = 1$.*





## Cálculo de raíces por deflacción

### Solución del Ejemplo 2.6

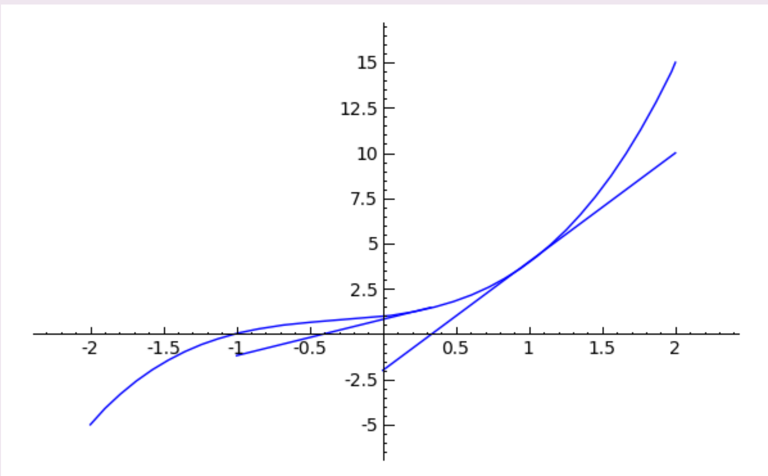







## Cálculo de raíces por deflacción

### Solución del Ejemplo 2.6








## Método de Muller

### Procedimiento

- Sean $x_0, x_1$ y $x_2$ aproximaciones de $r$ tal que:
  - Son distintas entre si.
  - Ninguna de ellas es raíz de $P$.
  - $P(x_2) \neq P(x_1)$ ó $P(x_2) \neq P(x_0)$ (es decir, los tres puntos no están sobre una recta horizontal).
- Se construye $h(x)$, polinomio de grado menor o igual que dos que pasa por $\big(x_0, P(x_0)\big)$, $\big(x_1, P(x_1)\big)$ y $\big(x_2, P(x_2)\big)$.
- Se elige como nueva aproximación $x_3$ de $r$ la raíz de $h$ mas cercana a $x_2$.
- Se comienza de nuevo con $x_1$, $x_2$, $x_3$.

## Método de Muller

### Interpretación geométrica del método de Muller

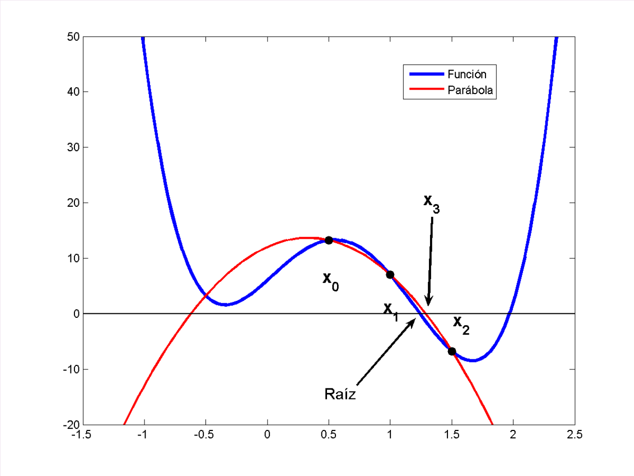



Figura: Interpretación geométrica del método de Muller.





## Método de Muller

### Problema 2.6

*Se considera la ecuación $e^x + x - 2 = 0$ y se pide:*

1. *Razone que posee una única raíz real.*
2. *Demuestre que el método de Newton converge localmente.*
3. *Realice una iteración de dicho método siendo $x = 0$ la estimación inicial.*
4. *Realice una iteración del método de la secante siendo $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$ las estimaciones iniciales.*
5. *Halle $n \in \mathbb{N}$ de forma que el término $x_n$ de la sucesión obtenida por bisección en $[0,1]$ garantice una aproximación a la raíz de al menos dos dígitos.*