Tema 4. Interpolación. Aproximación. Ajuste de datos.

Computación Numérica

Antonio Palacio

Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo

palacioantonio@uniovi.es

Curso 2021-2022

Contenidos I

Contenidos

Introducción

Problema a resolver

Dada una función f , hallar una función ψ que aproxime a f en $[a,b]$.

Aspectos claves

- ¿Qué información tenemos sobre f? (valor de f en algunos puntos, solución de ecuación diferencial, $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$,...)
- ¿Qué clase de función ψ vamos a usar? (polinómica, polinómica a trozos, serie trigonométrica,...)
- ¿Qué criterio (norma) usaremos para medir la distancia entre f y ψ? (norma uniforme, norma en sentido de mínimos cuadrados discretos)

Introducción

Interpolación

- **Datos:** Conjunto discreto de datos $(x_i, f(x_i), [f'(x_i), f''(x_i)...])$.
- **Función de aproximación:** ψ **Polinomio**
- **Criterio de aproximación:** El polinomio y la función deben coincidir en los datos

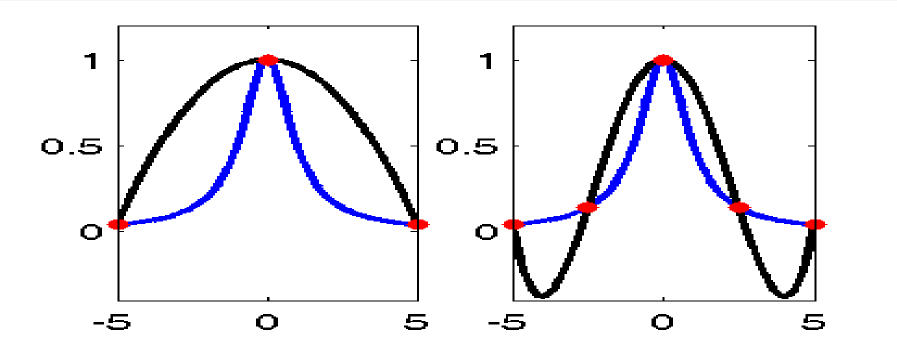

Figura: Interpolación polinómica de grado 2 y 4

El problema de interpolación de Lagrange

Problema a resolver

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función.
- $x_0, \cdots, x_n \in [a,b]$ ($n+1$ **nodos**) con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
- $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ conocidos
- Se plantea el problema:
  Hallar un polinomio $P_n(x)$ con $gr(P_n) \leq n$, tal que, $P_n(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0, 1, \cdots, n$, (**interpola los datos**).

Teorema 4.1

El problema de interpolación de Lagrange tiene solución única que llamaremos polinomio de interpolación de Lagrange.

Problema 4.1

Halle el polinomio de interpolación de Lagrange para:

1. $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$
2. $g(0) = 2$, $g(-1) = 3$ y $g(1) = 4$

Forma de Lagrange del polinomio de interpolación

Procedimiento

Para $i = 0, 1, \cdots, n$ se define:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\overbrace{\cdots}^{\text{falta } (x-x_i)}(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\underbrace{\cdots}_{\text{falta } (x_i-x_i)}(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

- $l_i(x)$ es un polinomio de grado n
- $l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Forma de Lagrange del polinomio de interpolación

Teorema 4.2 (Forma de Lagrange)

El polinomio de interpolación de Lagrange puede expresarse por:

$$P_n(x) = f(x_0)l_0(x) + \cdots + f(x_n)l_n(x)$$

Problema 4.2

Halle el polinomio de interpolación de Lagrange para:

1. $f(0) = 1,\ f(-1) = 0,\ f(1) = 0$
2. $g(0) = 2,\ g(-1) = 3$ y $g(1) = 4$
3. $h(0) = 1,\ h(-1) = 0,\ h(1) = 0,\ h(0{,}5) = 2$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Introducción

Supongamos conocido el polinomio de interpolación de grado $n-1$, $P_{n-1}(x)$, de los datos $(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \cdots,\ (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$. Si añadimos un dato $(x_n, f(x_n))$, se puede demostrar que el polinomio resultante se escribe como:

$$P_n(x) \;=\; P_{n-1}(x) + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (1)$$

siendo c_n la constante definida por:

$$c_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})}$$

que recibe el nombre de **diferencia dividida** de f en los nodos $x_0, \cdots, x_n$ y que se suele denotar por $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

$$\boxed{P_n(x) \;=\; P_{n-1}(x) \;+\; f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}$$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Introducción

La ecuación (1) permite construir el polinomio de interpolación de forma recurrente:
Datos a interpolar: $f(x_0)$ Polinomio de interpolación:

$$P_0(x) = f(x_0) = f[x_0]$$

Datos a interpolar: $f(x_0), f(x_1)$ Polinomio de interpolación:

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

Datos a interpolar: $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ Pol. de interpolación:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Proposición (Propiedad de simetría)

Se cumple que

$$f[x_0, \cdots, x_n] = f[x_{i_0}, \cdots, x_{i_n}]$$

para cualquier permutación de los datos.

Proposición (Fórmula de recurrencia para las diferencias divididas)

Para $m = 0$, se tiene que:

$$f[x_i] = f(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n$$

y para $m = 1, 2, \cdots$, se tiene que:

$$f[x_0, \cdots, x_m] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{m-1}] - f[x_1, \cdots, x_m]}{x_0 - x_m}$$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Cálculo de las diferencias divididas

$$
\begin{array}{llll}
x_0 & f(x_0) & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_0]-f[x_1]}{x_0-x_1} & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1]-f[x_2]}{x_1-x_2} & f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} \\
x_3 & f(x_3) & f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2]-f[x_3]}{x_2-x_3} & f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]}{x_1-x_3}
\end{array}
$$

siendo finalmente:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3}$$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Problema 4.3

Exprese el polinomio de interpolación de Lagrange mediante la forma de Newton para:

- $f(0) = 1,\ f(-1) = 0,\ f(1) = 0$
- $f(0) = 1,\ f(-1) = 0,\ f(1) = 0,\ f(0{,}5) = 2$

Forma de Newton del polinomio de interpolación. Diferencias divididas

Problema 4.4

Exprese el polinomio de interpolación de Lagrange para los datos $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ $f(2) = 7$, *mediante una serie de potencias, mediante la forma de Newton y mediante la forma de Lagrange.*

Estudio del error en la interpolación de Lagrange

Teorema 4.3

Sean $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$, $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ *distintos dos a dos y* $P_n(x)$ *el polinomio que interpola los datos* $(x_0, f(x_0)), \cdots, (x_n, f(x_n))$. *Entonces, para todo* $x \in [a,b]$ *se verifica:*

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{K_n}{(n+1)!} |(x-x_0)\cdots(x-x_n)|$$

con $K_n = \text{máx}_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Estudio del error en la interpolación de Lagrange

Problema 4.5

Sean $f \in \mathscr{C}^3([-1,1])$ *verificando* $f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=0$ *y* $P(x)=1-x^2$. *Compruebe que P es el polinomio de interpolación de Lagrange para dichos datos. Sabiendo que* $|f'''(x)| \leq 1$ *en* $[-1,1]$, *halle una cota del error absoluto cometido al aproximar* $f(0{,}5)$ *por* $0{,}75$.

Estudio del error en la interpolación de Lagrange

Estudio del error

El último término del error hace que, en general, el aumento en el número de nodos no garantice una disminución del error, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

En el año 1900, Runge demostró que si se interpola la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

en $n+1$ puntos uniformemente distribuidos en el intervalo $[-5,5]$, el polinomio de interpolación no converge a la función para $|x| > 3{,}6$ cuando $n \to \infty$.

En el gráfico siguiente se representa la función junto con su polinomio de interpolación para 3, 5, 9 y 17 nodos uniformemente distribuidos en $[-5,5]$.

Estudio del error en la interpolación de Lagrange

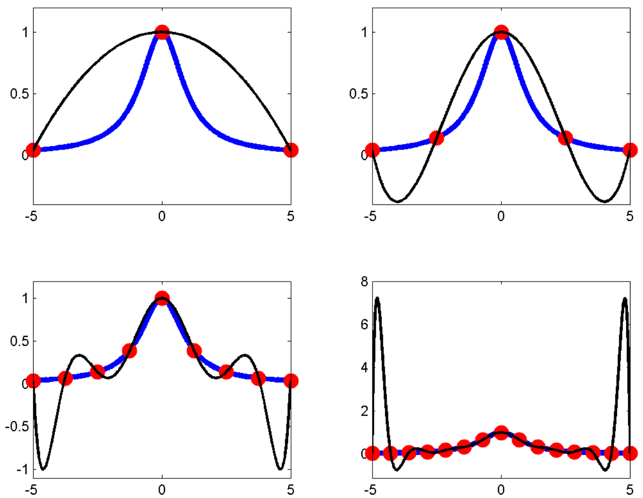

Figura:

Nodos de Chebyshev

Introducción

Sea $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$. Para cada $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$, se denotará:

$$E(x_0,x_1,\cdots,x_n) = \max_{x\in[a,b]} |x-x_0||x-x_1|\cdots|x-x_n|$$

Admitiendo que $|f^{(n+1)}(x)| \leq K_n$ en $[a,b]$ y teniendo en cuenta la notación anterior, el error en la interpolación queda acotado por:

$$|f(x)-P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} K_n\, E(x_0,x_1,\cdots,x_n) \ \ \forall x \in [a,b]$$

Se plantea entonces el problema de encontrar los nodos que hacen mínimo E.

Nodos de Chebyshev

Cálculo de los nodos de Chebyshev

Se puede demostrar que los puntos en los que se alcanza el mínimo están dados por la fórmula:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \quad k = 0,1,\cdots,n$$

y se denominan **nodos de Chebyshev**

Para los nodos de Chebyshev se obtiene la siguiente acotación en el error de interpolación:

$$\boxed{|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{2K_n}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \quad \forall x \in [a,b]}$$

Nodos de Chebyshev

Problema 4.6

Sea $f(x) = e^x$ para $x \in [-1,1]$.

1. *Obtenga los tres primeros nodos de Chebyshev y calcule el polinomio de interpolación $P_2(x)$ asociado.*
2. *Dé una cota del máximo error absoluto cometido al aproximar $f(x)$ por $P_2(x)$ para $x \in [-1,1]$.*
3. *Halle un conjunto de nodos que garanticen que el error absoluto cometido al aproximar e^x por $P_n(x)$ sea menor que 10^{-5}, siendo P_n el polinomio de interpolación para e^x en dichos nodos.*

Nota 4.1

En el gráfico que sigue, se representan los polinomios de interpolación para $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en $[-5,5]$ (ejemplo de Runge) mediante 3, 5, 9 y 17 nodos de Chebyshev. Compárelos con los polinomios obtenidos con nodos uniformemente distribuidos.

Nodos de Chebyshev