SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mislav Žanić

EFIKASNE IMPLEMENTACIJE PRIORITETNOG REDA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Goranka Nogo

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Samom sebi

Sadržaj

Uvod

...

Poglavlje 1

Fibonacci Heap

Poglavlje 2

Brodalov Queue

2.1 Uvod

Apstraktna struktura podataka prezentirana u ovom poglavlju zadovoljava asimptotske granice $O(1)$ za `FindMin`, `Meld`, `Insert` i `DecreaseKey`, te $O(\log n)$ za `DeleteMin`. U poglavlju 3.3 opisujem pomoćnu strukturu podataka potrebnu za realizaciju nekih ograničenja Brodalovog reda.

2.2 Opis ASP-a

U ovom potpoglavlju navodim pravila koja Brodalov red treba poštovati izmedu svake dvije operacije, dokazujem tvrdnje koje proizlaze iz tih pravila i objašnjavam okvirnu strukturu Brodalovog reda. Prioritetan red definiramo kao skup od dva stabla T_1 i T_2. Čvorove korijene stabla T_i označavati ću sa t_i. Dalje navodim invarijante koje struktura podataka treba zadovoljavati.

Definicija 2.2.1 (Invarijante čvorova)**.** *Neka je x čvor Brodalovog reda. Tada za čvor x trebaju vrijediti sljedeće invarijante:*

S1: Ako je x list, onda je $r(x) = 0$,
S2: $r(x) < r(p(x))$,
S3: Ako $r(x) > 0$, onda $n_{r(x)-1}(x) \geq 2$,
S4: $n_i(x) \in \{0, 2, \ldots, 7\}$,
S5: $T_2 = \emptyset$ ili $r(t_1) \leq r(t_2)$.

S1 i S2 kažu da je rang lista jednak 0 i da rang čvora x strogo raste prema korijenu. S3 kaže da čvor ranga $k > 0$ mora imat barem dvoje dijece ranga $k - 1$. S5 kaže da je T_2

prazno stablo, ili ima rang veči od T_1 S4 kaže da je broj djece ranga i čvora x konstantan i ne smije biti 1. Ne dopuštamo da broj čvorova stabla bude 1 kako bi i dalje vrijedila invarijanta S3 nakon što odrežemo dijecu največeg ranga nekog čvora. $n_i(x) \leq 7$ je posljedica konstrukcije koju kasnije objašnjavamo. Iz S1 i S3 slijedi sljedeća lema.

Lema 2.2.2. *Neka je x čvor nekog stabla T koje zadovoljava S1 i S3. Podstablo sa korijenom x, ranga $r(x)$ ima barem $2^{r(x)+1} - 1$ čvorova.*

Dokaz. Dokaz indukcijom po rangu čvora x.
Baza: $r(x) = 0$.

Iz S1 slijedi da je x list, pa podstablo sa korijenom u x ima $1 = 2^{0+1} - 1$ čvorova.
Pretpostavka: za čvor x ranga $r(x) = n \in \mathbb{N}$ vrijedi tvrdnja.
Korak:

Neka je x čvor ranga $r(x) = n + 1$. Tada, po S3, slijedi da x ima barem dvoje dijece ranga n. Tada podstablo sa korijenom u čvoru x ima barem $2(2^{k+1} - 1)$ dijece iz čega slijedi tvrdnja. □

Lema 2.2.3. *Neka je x čvor ranga $r(x)$ nekog stabla T koje zadovoljava S1-S5 i neka je $n \in \mathbb{N}$ broj čvorova u T. Tada su rang i stupanj čvora x $O(\log n)$.*

Dokaz. Dovoljno je tvrdnju pokazat za korijen stabla T. Označimo ga sa t. Iz S1-S4 slijedi da n možemo ograničiti odozgo sa $7^{r(t)} + 1$ i da se ta granica može positći (svi čvorovi osim listova imaju po 7 djece svakog ranga manjeg od svog ranga). Iz toga slijedi $r(t) \in O(\log n)$, a iz toga i da je stupanj t iz $O(\log n)$. □

Definicija 2.2.4 (Invarijante strukture)**.** *Neka je $w_i(x)$ broj čvorova u $W(x)$ ranga i.*

O1: $t_1 = \min T_1 \cup T_2$,
O2: ako $y \in V(x) \cup W(x)$, *onda* $y \geq x$,
O3: ako $y \leq p(y)$, *onda* $\exists x \neq y$ *tako da* $y \in W(x) \cup V(x)$,
O4: $w_i(x) \leq 6$,
O5: ako $V(x) = (y_{|V(x)|-1}, \dots, y_1, y_0)$, *onda* $r(y_i) \geq \lfloor \frac{i}{\alpha} \rfloor$, *za* $i = 0, 1, \dots, |V(x)| - 1$, *gdje je* α *konstanta.*

Definicija 2.2.5 (Invarijante korijena)**.** *Neka je x čvor Brodalovog reda. Tada za čvor x trebaju vrijediti sljedeće invarijante:*

R1: $n_i(t_j) \in \{2, 3, \dots, 7\}$, *za* $i = 0, 1, \dots, r(t_j) - 1$,
R2: $|V(t_1)| \leq \alpha r(t_1)$,
R3: ako $y \in W(t_1)$, *onda* $r(y) < r(t_1)$.

2.3 Vodilja

U ovom dijelu opisujem pomoćnu apstraktnu strukturu podataka *vodilji*. Probleme koje riješavaju vodilje može se opisati ovako.

Definicija 2.3.1 (Problem vodilje)**.** *Pretpostavimo da imamo niz cijelih brojeva $x_n, \ldots, x_1$ za koji želimo da vrijedi invarijanta $x_i \leq T, T \in \mathbb{Z}, i \in \{1, \ldots, n\}$. Za svaki inkrement nekog od $x_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ t.d. $x_i > T$ trebamo $O(1)$ operacija redukcije kojima ponovno uspostavljamo invarijantu.*

Definicija 2.3.2. *Neka je $x_n, \ldots, x_1$ proizvoljan niz cijelih brojeva. Operacija redukcije nad $x_i, i \in \{1, \ldots, n-1\}$ definiramo kao dekrement x_i za barem 2 i inkrement x_{i+1} za najviše 1. Za x_n, operaciju redukcije definiramo analogno, bez inkrementa sljedečeg elementa niza.*

2.4 Opis implementacije

Sažetak

Ukratko ...

Summary

In this ...

Životopis

Dana ...