



İçindekiler

- [1 Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Salınımıları](#)
 - [1.1 Sürekli ipin genel hareketi ve Fourier çözümlemesi](#)
 - [1.1.1 Kare dalgaının Fourier açılımı](#)
 - [1.1.2 Zaman periyotlu bir \$F\(t\)\$ fonksiyonu için Fourier açılımı](#)
 - [1.1.3 Tam fonksiyonlar kümlesi](#)
 - [1.1.3.1 Düzgün kütle yoğunluklu ip](#)
 - [1.1.3.2 Değişken kütle yoğunluklu ip](#)
 - [1.2 N serbestlik dereceli sürekli sistemlerin kipleri](#)
 - [1.2.1 Bir ipde dizilmiş bobinlerin enine salınımıları](#)
 - [1.2.2 Sürekliklik veya uzun dalga boyu yaklaşılığı](#)
 - [1.2.3 Yaylar ve küteler sisteminin boyuna salınımıları](#)
 - [1.2.4 Birim uzunluk başına ters yay sabiti \(\$K^{-1}\$ \)](#)
 - [1.2.5 Gevşek yay \(Slinky\)](#)
 - [1.2.6 LC örgüsü](#)
 - [1.2.7 Çiftlenimli Sarkaçlar](#)
 - [1.2.8 Plazma salınımıları](#)
 - [1.3 Kaynaklar](#)

TİTREŞİM ve DALGAR / FİZ220

Doç. Dr. Mesut Karakoç

Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü
2018 - 2019 Bahar Dönemi



1 Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Salınımıları

1.1 Sürekli ipin genel hareketi ve Fourier çözümlemesi

İki ucu sabitlenmiş sürekli bir ipin enine salınımının en genel hali,

$$\psi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n z) \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (1)$$

$$= A_1 \sin(k_1 z) \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(k_2 z) \cos(\omega_2 t + \phi_2) + A_3 \sin(k_3 z) \cos(\omega_3 t + \phi_3) + \dots \quad (2)$$

ile ifade edilir. Bu oluşan serideki her bir terim ipin her bir (duran dalga) kipine denk gelmektedir. Aşağıda tek başına yeniden yazılan ve bir kipi temsil eden terimlerin üst üste gelmesiyle yukarıdaki en genel çözüm (veya seri) elde edilmiş olur.

$$\psi_n(z, t) = A_n \sin(k_n z) \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (3)$$

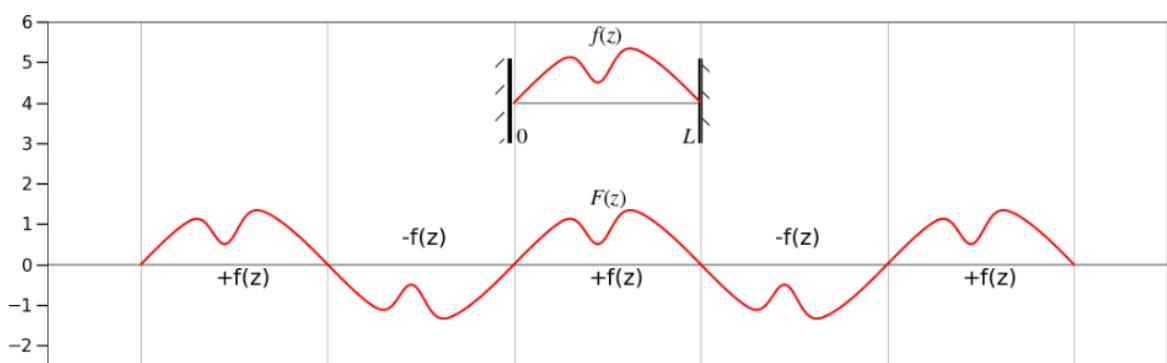
Bu kiplerin her biri için k_n dalga sayısı, daha önce yapıldığı gibi, $z = 0$ ve $z = L$ sınır şartlarıyla belirlenmiş olur. ω ise daha önce tartışmasının yaptığı gibi k 'nın $\omega(k)$ şeklinde bir fonksiyonudur. Geriye kalan A_n genellikleri ve ϕ_n faz sabitleri ise $t=0$ (başlangıç) anındaki, $\psi_n(z, t)$ ve $v(z, t) = \frac{d\psi_n(z, t)}{dt}$, yer değiştirme ve hız değerleri kullanılarak bulunur.

İki ucu sabitlenmiş bu ipin harekete başlamadan önce $f(z)$ fonksiyonuyla belirlenen bir şeyle getirildiğini ve bu şekilde durgun harekete başladığını kabul edelim. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$f(z) = \psi(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n z) \quad (4)$$

$$= A_1 \sin(k_1 z) + A_2 \sin(k_2 z) + A_3 \sin(k_3 z) + \dots \quad (5)$$

Burada ϕ_n 'lerin $A_n \cos \phi_n \rightarrow A_n$ olacak şekilde saklandığını düşünebilirsiniz. Çünkü faz sabitleri sadece genliğin büyüklüğünü ve/veya işaretini değiştireceklerdir.





İpin $t = 0$ anındaki başlangıç davranışını belirleyen, üstteki şekilde gösterilen gibi, bir $f(z)$ fonksiyonu herhangi bir şekilde olabilir yeter ki,

- $f(z=0) = 0$,
- $f(z=L) = L$,
- $f(z)$ yavaş değişen bir fonksiyonu ve
- $f(z)$ klasiğik dalga denkleminin bir çözümü

olsun. Bu şartları sağlayan her $f(z)$ fonksiyon yukarıda elde edilen ve sinüslü terimler içeren bir seride açılabilir. Bu seri **Fourier serisi** veya **Fourier açılımı** olarak isimlendirilir. Elde edilen Fourier serisi özel olarak uçları sabitlenmiş ip vb. gibi sistemler için elde edilmiştir. Fakat daha genel durumlar için de Fourier açılımı mümkündür.

Bir ipin sabit uçlarında $f(z) = 0$ olacak durum için bir seri elde edilmiş olsa da, serideki sinüslü terimler $z \in (-\infty, \infty)$ aralığında tanımlıdır. Bütün terimler hem $\lambda_1 = 2L$ 'e göre hem de kendi dalga boyalarına göre periyotluurlar. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu da yani serinin toplamı da λ_1 periyotluur.

$f(z)$ fonksiyonu kullanılarak oluşturulan, yukarıdaki şekildeki gibi, yeni bir fonksiyon $F(z)$ fonksiyonu için de benzeri bir Fourier seri açılımı yapılabilir. Çünkü $f(z)$ de $F(z)$ de λ_1 periyotlu olacaktır.

İlk elde ettigimiz Fourier serisini iki ucu sabitlenmiş bir sistem için elde etmiş olabilirdi belki, fakat her sistem böyle olmak zarurunda değildir. Hatırlanırsa duran dalga çözümlerini elde edebilmek için klasiğik dalga denkleminin genel çözümündeki cosinuslu terimler atılmak zarurunda kalınmıştır. Bu terimlerin kaybolmadığı bir sistem ve onun $F(z) = F(z + \lambda_1)$ periyotlu çözümü için,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \sin(n \frac{2\pi}{\lambda_1} z) + B_n \cos(n \frac{2\pi}{\lambda_1} z) \right] \quad (6)$$

$$= A_0 + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(nk_1 z) + B_n \cos(nk_1 z)] \quad (7)$$

şeklinde bir Fourier (serisi) açılımı ortaya çıkar. Bilinen bir $F(z)$ fonksiyonu için serideki A_n ve B_n katsayıları bulunabilir. A_n 'ler içinden herhangi bir A_m ($0 \leq m \leq n$) katsayısını bulabilmek için Denk. 6'deki eşitliğin her iki tarafını $\sin(mk_1 z)$ ile çarpıp, her iki tarafın $[z, z + \lambda_1]$ aralığında, yani bir periyot üzerinden, integralini almalıyız. Benzerini B_n 'ler arasından herhangi bir B_m katsayısı için yapmalıyız, bir farkla Denk 6'ün her iki tarafı $\cos(mk_1 z)$ ile çarpılmıştır. Böylece herhangi bir A_m için,

$$\int_z^{z+\lambda_1} \sin(mk_1 z) F(z) dz = (A_0 + B_0) \int_z^{z+\lambda_1} \sin(mk_1 z) dz + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \int_z^{z+\lambda_1} \sin(nk_1 z) \sin(mk_1 z) dz + B_n \int_z^{z+\lambda_1} \cos(nk_1 z) \sin(mk_1 z) dz \right] \quad (8)$$

ve herhangi bir B_m için de,

$$\int_z^{z+\lambda_1} \cos(mk_1 z) F(z) dz = (A_0 + B_0) \int_z^{z+\lambda_1} \cos(mk_1 z) dz + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \int_z^{z+\lambda_1} \sin(nk_1 z) \cos(mk_1 z) dz + B_n \int_z^{z+\lambda_1} \cos(nk_1 z) \cos(mk_1 z) dz \right] \quad (9)$$

olur. Yukarıdaki integralerdeki sinüs ve cosinus terimlerinin bir arada bulunduğu integraler hem $n = m$ durumunda hem de $n \neq m$ durumunda sıfır olurlar. Sadece sinüs veya sadece cosinus terimleri içeren integraler ise $n = m$ durumunda sıfırdan farklı, $n \neq m$ durumunda sıfır olurlar. Aşağıdaki örnekte n ve m 'nin eşit ve farklı oldukları durumlar için örnekler gösterilmiştir. Yukarıdaki iki denklemdeki $A_0 + B_0$ ifadelerinin yanlarındaki integraler $m \neq 0$ olduğu sürece sıfırdır.

En üstteki kırmızı buton ile yukarıdaki integraleri hesaplayan ve aşağıdaki çıktıları üreten Python kodu açılabilir.

$n = m$ durumu: $n=1, m=1$

$$\int_{-\lambda_1/2}^{\lambda_1/2} \sin(k_1 mz) \sin(k_1 nz) dz = 0.5\lambda_1$$

$$\int_{-\lambda_1/2}^{\lambda_1/2} \sin(k_1 mz) \cos(k_1 nz) dz = 0.0\lambda_1$$

$$\int_{-\lambda_1/2}^{\lambda_1/2} \sin(k_1 nz) \cos(k_1 mz) dz = 0.0\lambda_1$$

$$\int_{-\lambda_1/2}^{\lambda_1/2} \cos(k_1 mz) \cos(k_1 nz) dz = 0.5\lambda_1$$

$n \neq m$ durumu: $n=1, m=2$

$$\int_{-\lambda_1/2}^{\lambda_1/2} \sin(k_1 mz) \sin(k_1 nz) dz = 0.0\lambda_1$$

$$\int_{-\lambda_1/2}^{\lambda_1/2} \sin(k_1 mz) \cos(k_1 nz) dz = 0.0\lambda_1$$

$$\int_{-\lambda_1/2}^{\lambda_1/2} \sin(k_1 nz) \cos(k_1 mz) dz = 0.0\lambda_1$$

$$\int_{-\lambda_1/2}^{\lambda_1/2} \cos(k_1 mz) \cos(k_1 nz) dz = 0.0\lambda_1$$

Böylece $n = m$ durumunda $A_n = A_m$ katsayılarının yanındaki dışında geriye kalan bütün integraller sıfır verir. Bu sayede A_m katsayıları,

$$A_m = \frac{2}{\lambda_1} \int_z^{z+\lambda_1} \sin(mk_1 z) F(z) dz \quad (10)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde B_m katsayıları da,

$$B_m = \frac{2}{\lambda_1} \int_z^{z+\lambda_1} \cos(mk_1 z) F(z) dz \quad (11)$$

olarak elde edilirler. $m = 0$ durumunda A_0 için,

$$A_0 \int_z^{z+\lambda_1} \sin(mk_1 z) dz = \int_z^{z+\lambda_1} \sin(0) F(z) dz = 0 \quad (12)$$

olur, bu yüzden $A_0 = 0$ dir. B_0 için ise,

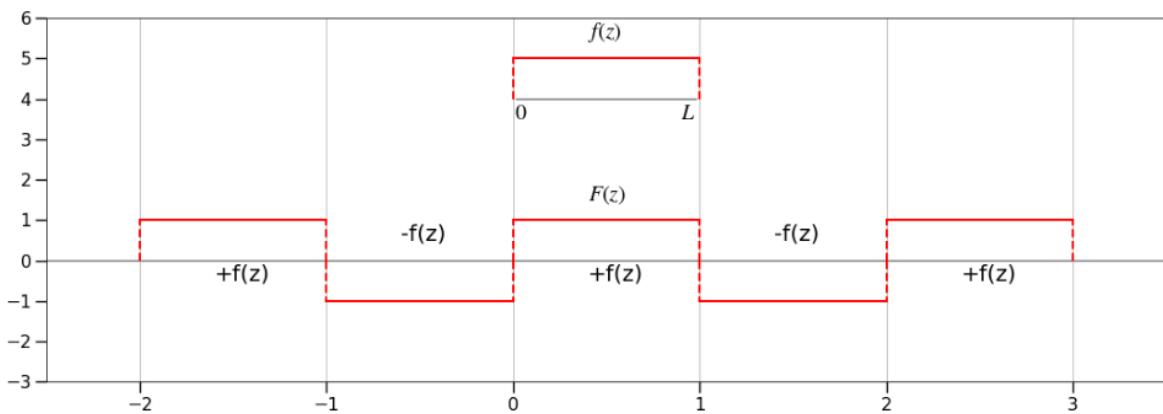
$$B_0 \int_z^{z+\lambda_1} \cos(mk_1 z) dz = B_0 \int_z^{z+\lambda_1} \cos(0) dz = B_0 \lambda_1 = \int_z^{z+\lambda_1} \cos(mk_1 z) F(z) dz \quad (13)$$

olur. Böylece B_0 ,

$$B_0 = \frac{1}{\lambda_1} \int_z^{z+\lambda_1} F(z) dz \quad (14)$$

olarak bulunur. Artık bütün katsayıları bulabilmek için geliştirdiğimiz ifadeler sayesinde daha önce sıraladığımız varsayımlara uyan herhangi bir $F(z)$ fonksiyonunu Fourier serisine açabiliriz.

1.1.1 Kare dalganın Fourier açılımı



Yukarıdaki gibi bir kare dalganın Fourier açılımını yapmak mümkündür. Çözümlemek istedğimiz $f(z)$ ve $F(z)$ fonksiyonları $z = 0$ ve $z = L$ 'de süreksizlerdir. Bu yüzden $F(z)$ 'nın yavaş değişen bir fonksiyon olduğu varsayımları burada geçerli değildir. Böyle bir $F(z)$ 'nın açılımından elde edilen serinin $F(z)$ 'yi tam olarak temsili bekleyemeyiz. Seriden elde edilecek olan kare dalganın üç kısımları $f(z)$ 'nın ki kadar keskin olmayacağındır. Serinin terim sayısı arttıkça yine de kare dalgaya daha da yaklaşılmış olur. Yukarıdaki gibi bir $F(z)$ fonksiyonu için Fourier serisinin ilk bir kaç katsayılarının değerleri aşağıda verilmiştir.

Kare dalga için Fourier açılımı katsayıları...
Kat sayılar analitik integralle bulunmuştur.

$$\begin{aligned} A_1 &= 4/\pi, & B_1 &= 0 \\ A_2 &= 0, & B_2 &= 0 \\ A_3 &= 4/(3\pi), & B_3 &= 0 \\ A_4 &= 0, & B_4 &= 0 \\ A_5 &= 4/(5\pi), & B_5 &= 0 \end{aligned}$$

Elde edilen bu katsayılarla $F(z)$ 'nın Fourier serisi açılımı,

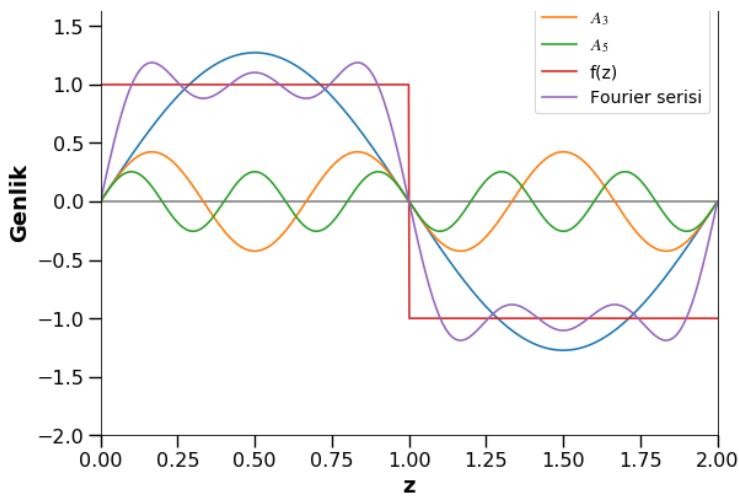
$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_m \sin\left(m \frac{2\pi}{\lambda_1} z\right) \right] \quad (15)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin(k_1 z) + \frac{1}{3} \sin(3k_1 z) + \frac{1}{5} \sin(5k_1 z) + \dots \right) \quad (16)$$

$$= 1.2732 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) + 0.4244 \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right) + 0.2547 \sin\left(\frac{5\pi z}{L}\right) + \dots \quad (17)$$

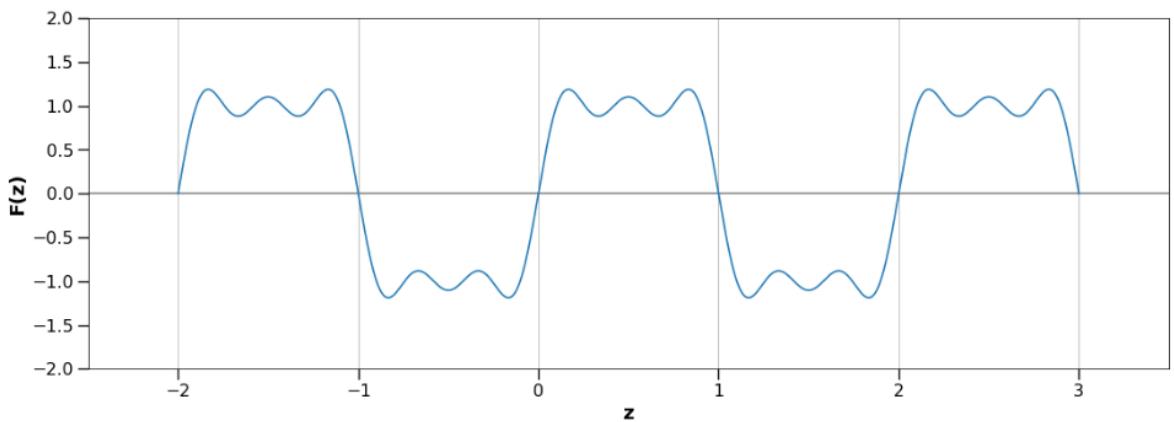
şeklinde olur. Kare dalganın Fourier serisi açılımı için yukarıdaki kat sayılar analitik integralle (SymPy), aşağıdaki katsayılar ise sayısal integralle (SciPy) elde edilmiştir. Aşağıdaki şekilde elde edilen $F(z)$ 'nin her bir terimi ve kendisi ve $f(z)$ fonksiyonu ayrı ayrı çizdirilmiştir. Bir sonraki şekilde ise $F(z)$ fonksiyonu z 'nin daha geniş bir aralığı için tekrar çizdirilmiştir.





Kare dalga için Fourier açılımı katsayıları...
Kat sayıları sayısal integralle bulunmuştur.

$A_0 = +0.0000, B_0 = -0.0000$
 $A_1 = +1.2732, B_1 = +0.0000$
 $A_2 = -0.0000, B_2 = +0.0000$
 $A_3 = +0.4244, B_3 = +0.0000$
 $A_4 = -0.0000, B_4 = +0.0000$
 $A_5 = +0.2547, B_5 = +0.0000$



1.1.2 Zaman periyotlu bir $F(t)$ fonksiyonu için Fourier açılımı

İpten duran dalgaların kiplerini elde ederken elde ettiğimiz aşağıdaki benzerlikler tablosu, $F(z)$ ve $F(t)$ arasında da mümkündür.

Zaman	Uzay
$\omega \leftrightarrow k$	
$T \leftrightarrow \lambda$	
$v \leftrightarrow \sigma$	

Bu benzerliklerden yola çıkılarak $F(t)$ 'nin Fourier açılımını elde etmek için gerekli katsayılar aşağıdaki integrallerle elde edilebilir.

$$A_m = \frac{2}{T_1} \int_t^{t+T_1} \sin(m\omega_1 t) F(t) dt \quad (18)$$

$$B_m = \frac{2}{T_1} \int_t^{t+T_1} \cos(m\omega_1 t) F(t) dt \quad (19)$$

$$B_0 = \frac{1}{T_1} \int_t^{t+T_1} F(t) dt \quad (20)$$

1.1.3 Tam fonksiyonlar kümesi

Fourier açılımindaki $F(z)$ gibi bir fonksiyon başka fonksiyonların uygun katsayılarla üst üste gelmesiyle yazılabilirse, bu "başka" fonksiyonlar bir "tam fonksiyonlar kümesi" oluştururlar.

1.1.3.1 Düzgün kütte yoğunluklu ip

Tam fonksiyonlar kümesi tanımına göre,

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mk_1 z) \quad (21)$$

açılımdaki $\sin(mk_1 z)$ fonksiyonları bir tam fonksiyonlar kümesi oluştururlar.

1.1.3.2 Değişken kütle yoğunluklu ip

Kütle yoğunluğu düzgün (her yerde aynı) olmayan bir ipin, $\rho(z)$ şeklinde z 'nin fonksiyonu olan bir yoğunluğu olursa, böyle bir sistem artık klasisik dalga denklemine uymaz. Eğer böyle bir ip için $T_0(z)$ ve $\rho_0(z)$ biliniyorsa,

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[T_0(z) \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right] \quad (22)$$

gibi bir denklem elde edilir. Bir kipte salınım gerçekleştiğinde bu ip için de, düzgün ipteği gibi, telin her bir parçası aynı frekansa ve fazda sahiptir. Böylece bir kip için,

$$\psi(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \phi) \quad (23)$$

gibi bir çözüm önerilebilir. Bu çözüm yeni dalga denkleminde yerine konursa,

$$\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{d}{dz} \left[T_0(z) \frac{dA(z)}{dz} \right] = -\omega^2 A(z) \quad (24)$$

şeklinde, kip şekillenimlerini belirleyecek denklem elde edilmiş olur. Bu elde edilen denklemde göre $T_0(z)$ ve $\rho_0(z)$ sabit olmadıkları sürece sinüs veya kosinüs davranışlı $A(z)$ genlikleri elde edilemez. Buradan anlaşılıyor ki, iki ucu bağlı bir ipin kip salınımlarından sinüs veya kosinüs davranış gösteren kipler ortaya çıkırsa sistem homojen kütle yoğunluğuna sahiptir. Eğer bu iki nicelik sabit değilse sistem homojen kütle yoğunluklu olmadığı gibi $A(z)$ 'lerin davranışları da sinüs veya kosinüs davranış göstermemektedir.

Böyle bir sistemin genel çözümü kipleri cinsinden,

$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z) \cos(\omega_m t) \quad (25)$$

olarak yazılabilir. Başlangıç, $t=0$, anında,

$$\psi(z, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z) = f(z) \quad (26)$$

olur. Buradan anlaşılıyor ki, $A_m(z)$ fonksiyonları bir tam fonksiyonlar kümesidir.

Bir ipin kütle yoğunluğu için seçenekler sonsuzdur. Bu nedenle tek bir çeşit $A_m(z)$ fonksiyonu yoktur. Sonsuz tane sistem için, tam fonksiyon kümesi oluşturan, sonsuz tane $A_m(z)$ fonksiyonları bulmak mümkün değildir. Sistemlerin kiplerini tanımlayan bu $A_m(z)$ fonksiyonları açıkladıkları sisteme özel olduklarından, **öz fonksiyonlar** olarak da adlandırırlar. Öz fonksiyonlar sinüs davranışına sahip olduklarından dağının bağıntısından, $\omega(k)$, bahsetmek anlamlıdır. Fakat bu tür davranışa sahip olmadıklarında k 'yi tanımlamak mümkün olmadığından dağının bağıntısı var olamaz. $A_m(z)$, **öz fonksiyonlar** kuantum fizигinde daha sık karşınıza çıkacaktır.

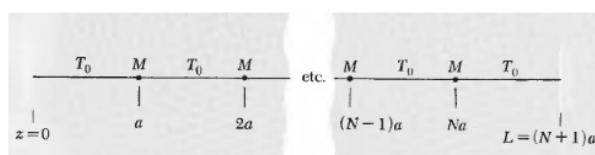
1.2 N serbestlik dereceli süreksız sistemlerin kipleri

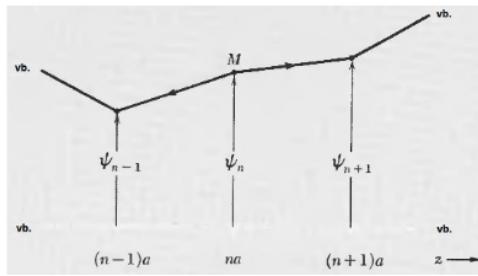
Daha önce de tartıştığımız gibi gerçek sistemlerin serbestlik dereceleri çok büyük (örneğin Avogadro sayısı kadar $\sim 10^{23}$) olsa da sonsuz değildir. Sürelilik ve sonsuz serbestlik derecelilik kabulü yapılarak sonlu serbestlik dereceli sistemin bazı davranışlarını ortaya çıkarmamız mümkün olmamaktadır. Bu kabullerle gerçek ve sonlu bir mekanik sistemin yüksek dereceli kiplerini hesaba katmak mümkün olmamaktadır. Çünkü yüksek dereceli bu kiplerde bu bölümün başındaki kiplenip şekillerinde görüldüğü üzere zigzaglı bir yapı oluşmaktadır ve bu nedenle süreklilik kaybolmaktadır.

Sürekli ve süreksiz sistem arasındaki bir diğer farkta dağının bağıntılarının davranışındaki farklılıkta ortaya çıkmaktadır. Bunu bir örnek üzerinden tartışacağız. Düzgün kütle yoğunluklu ve iki ucu sabitlenmiş ip sistemi için dağının fonksiyonu $\omega = \text{sabit} \times k$ şeklindeydi. Bu tür sistemler **dağınimsız** olarak adlandırılırlar. $\omega(k)$ davranışı var olup, doğru orantılı davranış göstermeye sistemler ise **dağınaklı** sistemler olarak adlandırılırlar. Örneğin, aşağıda inceleyeceğimiz boncuklu ip sistemi dağınaklı bir sistemdir.

1.2.1 Bir ip'e dizilmiş boncukların enine salınımıları

Bir ip'e dizilmiş boncuklar için yaptığımız incelemenin doğada başka karşıtları da bulunabilir. Aşağıda ip'e dizili boncuk hali almış iki biyolojik sistem görülmektedir. Birincisinde insan tükürüği iki parmak arasında asılı durmaktadır. İkincisinde ise bir DNA parçası görülmektedir.





Yukarıdaki şekilde [Dalgalar, Berkeley] görüldüğü gibi a aralıklarla dizilmiş N tane boncuklu bir ip sistemini inceleyelim. Bu sisteme boncukların ip üzerinde bulundukları konumları sabittir ve sadece enine (yukarı-aşağı) salınım izinlidir. Boncukların dizildiği ip kütlesiz, boncukların her biri M kütelidir. İp her iki ucundan sabitlenmiştir ve ip Hooke yasasına uygun esneme kabiliyetine sahiptir. Üstteki şekilde gösterilen T_0 denge durumunda ipin boncuklar arasında kalan kısımları üzerindeki gerilim kuvvetleridir.

Bu kabullere ve her bir boncugun enine yer değiştirmesi de ψ_n 'lerle tanımlandığına göre, her bir boncuk üzerindeki toplam kuvveti yazıp, Newton'un ikinci yasasını bu boncuklar için yazabiliriz. Gevşek yay veya küçük açısalını yaklaşımlarından biri göz önüne alırsa, bir boncugun hareket denklemi,

$$M \frac{d^2\psi_n(t)}{dt^2} = T_0 \frac{\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)}{a} - T_0 \frac{\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t)}{a} \quad (27)$$

olur. Böyle bir sistemin normal kipinde de, daha önce incelediğimiz sistemler gibi, sistemin her bir elemanı aynı frekans ve fazda sahip olacaktır. Bu durumda, her bir boncuk için,

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \phi) \\ \psi_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \phi) \\ &\dots \\ \psi_{n-1}(t) &= A_{n-1} \cos(\omega t + \phi) \\ \psi_n(t) &= A_n \cos(\omega t + \phi) \\ \psi_{n+1}(t) &= A_{n+1} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (28)$$

çözümleri önerilebilir. Bu çözümler yukarıdaki hareket denkleminde yerine konursa A_n genlikleri arasında,

$$A_{n+1} + A_{n-1} = A_n \left(2 - \frac{Ma}{T_0} \omega^2 \right) \quad (29)$$

bağıntısı elde edilir. Elde edilen bu denklem için, sürekli ipin çözümü olan,

$$A(z) = A \sin(kz) \quad (30)$$

ifadesinden yola çıkarak ve $z = na$ alarak,

$$A_n = A \sin(kna) \quad (31)$$

çözümünü önerelim. Bu çözüm Denk. 29'te yerine konursa ve gerekli trigonometrik ve cebirsel sadeleştirmeler yapıllırsa,

$$A_{n-1} = A \sin(ak(n-1))$$

$$A_n = A \sin(akn)$$

$$A_{n+1} = A \sin(ak(n+1))$$

$$\omega^2 = \frac{2T_0(-\cos(ak)+1)}{Ma}$$

çözümüne ulaşılır. Önerdiğimiz çözüm A_n denklem sistemini sağladığına göre, her bir boncugun kip salınımı için,

$$\psi_n(t) = A \sin(kna) \cos(\omega t + \phi) \quad (32)$$

yazabilirmiz.

A_n denklem sisteminin çözümünden elde ettiğimiz ω^2 bağıntısı sürekli ve sonlu bu sistemin, $\omega(k)$, dağınım bağıntısını vermektedir. Trigonometrik bir düzenleme yapılarak bu denklem,

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{Ma} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (33)$$

haline getirelim.

Sistemin kipleri ψ_n 'ler için elde ettiğimiz çözüme $A_n = A \sin(kna)$ kabulüyle sadece $z = 0$ sınır şartını uygulamış olduk. Çünkü genel çözümdeki,

$$A_n = A \sin(kna) + B \sin(kna) \quad (34)$$

B katsayısının sıfır olması durumunu doğrudan hesaba katmış olduk. Geriye $z = L = (N+1)a$ sınır şartını uygulamak kaldı. Bu şartı uygularsak,

$$A_{(N+1)} = A \sin(k(N+1)a) = A \sin(kL) = 0 \quad (35)$$

olur. Bu durumda sürekli çözümdeki sonucun aynısına ulaşılmış olur. Böylece,

$$k_1 L = \pi, k_2 L = 2\pi, k_3 L = 3\pi, \dots, k_n L = n\pi, \dots, k_N = N\pi \quad (36)$$

çözümleri elde edilir. Burada $n = 1, 2, 3, \dots$ şeklinde tam sayılardır. Buradan elde edilen çözümler, $N \rightarrow \infty$ çözümleriyle aynıdır ama bir farkla N burada sonsuz değildir. N 'den büyük değerler için $N+1, N+2$ vb. gibi çözümler çıksa da N serbestlik dereceli bir sistem için bu çözümler anlamsızdır.

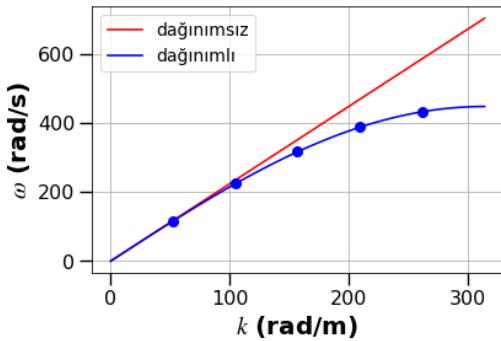
Sonlu N serbestlik dereceli sistemin $\omega(k)$ dağınım bağıntısını bulurken en genel (Denk. refeq:sureksiz8) çözümle yola çıksadık, aşağıdaki dağınım bağıntısına (Denk. 33) ulaşıldı. Sürekli ipin ve sürekli boncuklu sistemin dağınım bağıntılarının grafikleri aşağıdaki şekilde karşılaştırılmalı olarak çizdirilmeli. Şeklin hemen altındaysa v_1 taban durum frekansından sonra gelen diğer kiplere ait frekanslar v_1 'in katları olarak hesaplanmıştır. Daha önce tartıştığımız üzere sürekli ve sonlu serbestlik dereceli bu sistem **harmonik** bir diziye sahip değildir. Dağınım bağıntısının grafiğinin hemen altında ise 5 boncuklu sürekli sistemin kipleri çizilmiştir.

$$A_{n-1} = A \sin(ak(n-1)) + B \cos(ak(n-1))$$

$$A_n = A \sin(akn) + B \cos(akn)$$

$$A_{n+1} = A \sin(ak(n+1)) + B \cos(ak(n+1))$$

$$\omega^2 = \frac{2T_0(-\cos(ak)+1)}{Ma}$$



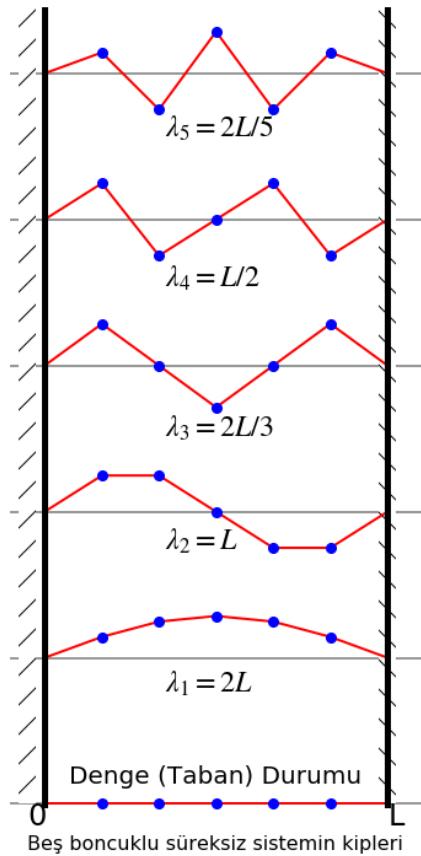
$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, \lambda_1 = 2L$$

$$\nu_2 = 1.9319\nu_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1$$

$$\nu_3 = 2.7321\nu_1, \lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_1$$

$$\nu_4 = 3.3461\nu_1, \lambda_4 = \frac{1}{4}\lambda_1$$

$$\nu_5 = 3.7321\nu_1, \lambda_5 = \frac{1}{5}\lambda_1$$



1.2.2 Sürekliklilik veya uzun dalgaboyu yaklaşımı

Eğer $z \in [0, L]$ aralığındaki boncuk sayısı sonsuz kabul edilirse veya $a \ll \lambda$ ise süreksiz boncuklu ipde, sürekli ip davranışına geçilir. Çünkü boncuk sayısı arttıkça veya $a \ll \lambda$ olduğunda boncuklar arası a mesafesi sıfır gidecektir. Bu durumda,

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{Ma} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (37)$$

bağıntısı, $\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \approx \frac{ka}{2}$ olacağinden,

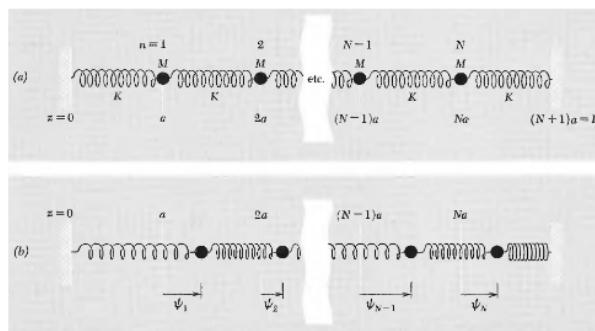
$$\omega^2 \approx \frac{4T_0}{Ma} \left(\frac{ka}{2}\right)^2 \quad (38)$$

halini alır. Sürekli ip geçiş durumunda $M/a \equiv \rho_0$ tanımı yapılabilir. Gerekli sadeleştirmeler de yapıldığında,

$$\omega^2 \approx \frac{T_0}{\rho_0} k^2 \quad (39)$$

sonucuna ulaşılacağı açıktır. Elde edilen bu sonuç sürekli ipin dağıtım bağıntısıyla aynıdır.

▼ 1.2.3 Yaylor ve kütleler sisteminin boyuna salınımları



Bu sistemini inceleyerek daha ileride işleyeceğimiz ses dalgaları kavramına da hazırlık yapmış oluyoruz. Çünkü ses dalgaları boyuna titreşimlerin bir sonucudur. Bu sistemin iki kütleli halini daha önce çalışmıştık. Sistemin o hali tekrar hatırlanırsa şekildeki herhangi bir kütle için,

$$M \frac{d^2\psi_n(t)}{dt^2} = K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}) \quad (40)$$

ifadesinin Newtonun ikinci yasasından elde edilebileceği anlaşılabılır. Elde edilen bu denklem açıkça enine salınımdaki denklemle benzeşmektedir. Tek fark T_0/a yerine K gelmiştir. Bu benzetimden faydalananarak, bu sistem için dağınim bağıntısının,

$$\omega(k) = 2\sqrt{K/M} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = 2\sqrt{K/M} \sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) \quad (41)$$

şeklinde olacağını göstermek kolaydır. Enine salınımlar için geçerli sınır şartları burada da varlığını korumaktadır. Bu yüzden $z = L$ sınır şartından faydalanılarak açısal dalga sayısı için,

$$k_1 L = \pi, k_2 L = 2\pi, k_3 L = 3\pi, \dots, k_n L = n\pi, \dots, k_N = N\pi \quad (42)$$

davranışı bulunur. Böylece bu sistem için de her bir kip,

$$\psi_n(t) = A \sin(kna) \cos(\omega t + \phi) \quad (43)$$

şeklinde olacaktır.

▼ 1.2.4 Birim uzunluk başına ters yay sabiti (K^{-1})

Boncuklu ip sisteminin enine salınımlarını çalışırken, süreklilik limitinde boncuklar arası mesafe a 'nın sıfıra gittiğini kabul etmişik. Aynı sistemi bir başka şekilde de modellemek mümkündür. Boncuklardaki kütlelerin Hooke yasasına uyan ipler üzerine dağılımını düşünelim. Bu durumda artık noktasal boncuk kütleleri yerine, ip üzerine dağıtılmış sürekli bir kütleyi sistemi söz konusudur. Artık a boncuklar arası uzaklık değil, kütleli ip parçalarının uzunluğuudur. Eğer bu ip parçalarından N tane varsa, ipin toplam külesi $\sum M = NM$ ve toplam uzunluğu $\sum L = Na$ olur. İpin her bir parçası için, Hooke yasasına uyan yaylor gibi davranışlarından, K gibi bir yay sabiti tanımlamak mümkündür. L uzunluğundaki bütün ipin yay sabiti ise $K_L = \frac{K}{N}$ olacaktır. Bu formülü biraz daha incelersek,

$$K_L = \frac{1}{N} K = \frac{a}{Na} K = \frac{a}{L} K \quad (44)$$

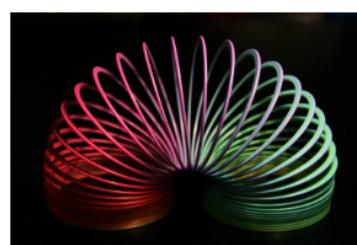
elde ederiz. Bunu yeniden düzenlersek,

$$K_L L = Ka \quad (45)$$

$$\frac{K_L^{-1}}{L} = \frac{K^{-1}}{a} \quad (46)$$

İfadelerini elde ederiz. Elde edilen ikinci ifadedeki $\frac{K^{-1}}{a}$ kismı birim uzunluk başına ters yay sabiti olarak adlandırılır. Yeni tanımlanan bu sabit ip toplam uzunluğu L 'den bağımsızdır. Sürekli ipin kütleye yoğunluğunu, $\rho_0 = \Delta m / \Delta z$ şeklinde tanımlayarak, nasıl uzunluktan bağımsız düşünürebiliyorsak, yeni tanımlanan bu fiziksel nicelikte benzeri bir kullanısa sahiptir. Yani ipin (veya yayın) uzunluğundan bağımsız olarak ipin (veya yayın) ne kadar iyi bir yay olup olmadığıının bir ölçüsü olarak kullanılabilir.

▼ 1.2.5 Gevşek yay (Slinky)



Şekildeki gibi bir gevşek yayı düşünecek olursak, her bir halkası yaklaşık 7 cm civarında çapa sahiptir. Yayın serbest (gergin olmayan) halinin uzunluğu 6 cm civarındadır ve yay yaklaşık 100 sarıma sahiptir. Böyle bir yay $L=1$ m olacak kadar uzatıldığı halde Hooke yasasına uymaya devam edebiliyorsa, bu tür bir yay **Gevşek yay** olarak adlandırılır. Örnek şekildeki de görüleceği üzere böyle bir yay da kütleye çeşitli bölgelerde öbeklenmemiştir, düzgün bir şekilde dağılmıştır. Bu durumda böyle bir yay için $\frac{K^{-1}}{a}$ sabiti tanımlanabilir ve bu yay süreklilik şartlarını sağlar. Böylece bu yayın enine ve boyuna salınımlarının dağınim bağıntıları sırasıyla boncuklu ipin enine ve boyuna salınımlarının dağınim bağıntılarının süreklilik sınırlarındaki halleri olacaktır. Boyuna salinan boncuklu ipin süreksiz dağınim bağıntısı ve süreklilik sınırlarındaki hali aşağıdaki gibidir.

$$\omega(k) = 2\sqrt{K/M} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \approx 2\sqrt{K/M} \frac{ka}{2} = \sqrt{\frac{Ka}{M/a}} k \quad (47)$$

Enine salınımlar için

$$\dots \quad \boxed{T_0} \quad \boxed{Ka} \quad \dots$$

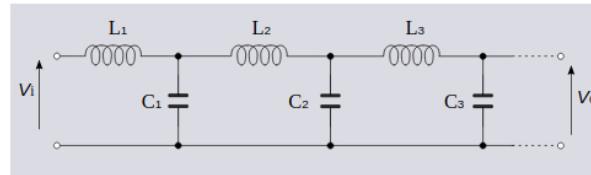
$$\omega(k) \approx \sqrt{\frac{k}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{M/a}{k}}$$

(48)

olacaktır. Buradan anlaşılabileceği üzere gevşek yayın enine ve boyuna salınımlarının dağınım bağıntıları aynıdır. Dolayısıyla böyle bir yay x, y, z doğrultularından herhangi birinde iki ucu sabitlenirse, sabitlendiği eksene göre olan enine veya boyuna salınım kipleri aynıdır ve salınım frekansları da aynıdır.

1.2.6 LC örgüsü

Yazılacak...



1.2.7 Çiftlenimli Sarkaçlar

Yazılacak...

1.2.8 Plazma salınımıları

Yazılacak...

1.3 Kaynaklar

Düzenlenecek... Düzenlenecek... Düzenlenecek...

1. <https://www.britannica.com/science/natural-vibration>
2. [Deep Interior of the Earth, J.A. Jacobs](#)

[String Standing Waves, HyperPhysics](#)

[Traveling Wave Solution for String, HyperPhysics](#)

https://en.wikipedia.org/wiki/String_vibration

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Periodampwave.svg>

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:StringParameters.svg>

[beads on a string] <https://phys.org/news/2010-06-solution-beading-saliva-mystery-purposes.html>

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bf/Slinky_rainbow.jpg

LC ladder <https://en.wikipedia.org/wiki/Roll-off>

<http://webpages.ursinus.edu/riley/courses/p212/lectures/node6.html>

<http://farside.ph.utexas.edu/teaching/315/Waves/node23.html>