TİTREŞİM ve DALGALAR / FİZ220

Doç. Dr. Mesut Karakoç

Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü

2019 - 2020 Bahar Dönemi

1 Ders Bilgileri

1.1 Haftalık Ders Programı

Gün, Saat, Derslik:

- Çarşamba, 15:30-17:20, D5
- Perşembe, 10:30-12:20, D5
- Cuma, 10:30-12:20, D5

1.2 Ders Başarı Puanı Dağılımları

1. Ödev, %25
2. Ara Sınav, %30
3. Yarıyıl Sonu Sınavı, %45

Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine aşağıdaki bağlantıdan ulaşılabilir.
http://oidb.akdeniz.edu.tr/yonetmelik-ve-yonergeler/

1.3 Kaynak Kitaplar

1. **Dalgalar**, Frank S. Crawford jr., Berkeley Fizik Dersleri 3. Cilt, Bilim Yayınevi.
2. **Titreşimler ve Dalgalar**, George C. King, Nobel Akademik Yayıncılık.
3. **Titreşimler ve Dalgalar**, A.P. French, Aktif Yayın Evi.
4. **Titreşimler ve Dalgalar**, Gökhan Budak, Yüksel Özdemir, , Nobel Akademik Yayıncılık.

1.4 İnternet Kaynakları

1. 8.03 - MIT Physics III: Vibrations and Waves, Walter Lewin'in İngilizce video dersleri.
2. Dr. Mustafa POLAT'ın Titreşim ve Dalgar Ders Notu.
3. Dr. Hüseyin Çelik'in Titreşim ve Dalgar Ders Notu.

1.5 Benzetimler (Simülasyonlar/Animasyonlar)

1. PHET animasyonları
2. Fizik Animasyonları: Walter Fendt
3. Daniel A. Russell - wave demoları

2 Ders İçeriğinin Ana Bölümleri

1. BASİT SİSTEMLERİN SERBEST SALINIMLARI
2. ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN SERBEST SALIMLARI
3. ZORLA TİTREŞİMLER
4. İLERLEYEN DALGALAR
5. YANSIMA
6. MODÜLASYONLAR,ATMALAR VE DALGA PAKETLERİ
7. İKİ VE ÜÇ BOYUTLU DALGALAR
8. KUTUPLANMA
9. GİRİŞİM VE KIRINIM

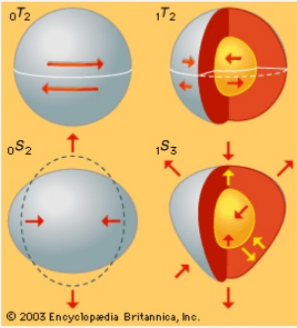
Not: Bu içerik gerekli görüldükçe güncellenebilir.

1 Basit Sistemlerin Serbest Salınımları

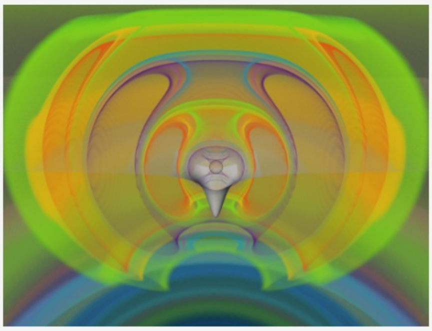
1.1 Giriş

- Evren ve içindeki her şey sürekli hareket halindedir.
- Hareketli cisimler iki ana sınıfa ayrılabilirler.
  - Başladıkları konumlara dönenler:
    - salınan bir sarkaç
    - titreşen bir keman teli
    - bardakta ileri geri çalkalanan su
    - atom çekirdeği etrafında dolanan elektronlar
    - aynalar arasında gidip gelen lazer ışını
  - İlk başladıkları konumdan farklı bir konuma gidenler:
    - buzlu yüzeyde kayan bir cisim
    - bir ipte ilerleyen atma (puls)
    - denizde kıyıya doğru ilerleyen dalgalar
    - elektron tabancasından çıkıp uçan elektron
    - bir yıldızdan gözümüze gelen ışık
- Bazen aynı olay her iki anasınıfta da düşünülebilir.
  - Deniz dalgaları ilerler fakat su dalgası üzerindeki bir cisim ilerlemez, bulunduğu konumda yukarı aşağı iner çıkar.
  - İpteki atmalar ilerler ama ipin atomları bir denge noktası etrafında salınırlar.
- Bu bölümde dışarıdan bir kere uyarıldıktan sonra bir denge konumu etrafında serbestçe salınan sistemleri inceleyeceğiz.
- Bu tür salınımlara **serbest salınımlar** veya **doğal salınımlar** denir.
- Birinci bölümde bir veya iki cisim içeren sistemleri inceleyeceğiz.
- İkinci bölümde ise çok serbestlik dereceli sistemleri inceleyeceğiz.
- Çok serbestlik dereceli bu sistemlerin **kip** (mod, öztitreşim) olarak adlandırılan bir serbestlik dereceli salınıcıya benzer yalın hareketlerinin olduğunu göreceğiz.
- Bu tür sistemlerin genel davranışlarının bu yalın hareketlerlerin birleşimleriyle ifade edilebileceğiniz göreceğiz.
- İncelenecek sistemler çeşitli fiziksel nicelikler olabilir ve dalga fonksiyonları aşağıdaki gibi gösterilirler.
  - Mekanik bir sistemse genellikle, $\Psi(x, y, zt)$
  - Elektromanyetik bir sistemse, elektrik alan $E(x, y, z, t)$ ve manyetik alan $B(x, y, zt)$

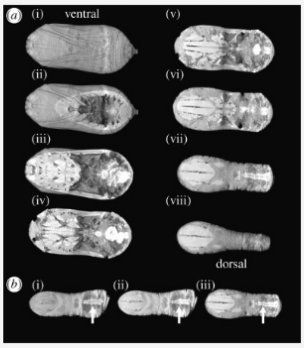
1.1.1 Gerçek yaşamdan bazı titreşim örnekleri



Dünyanın titreşimleri [1,2]



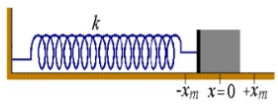
Neutron yıldızı titreşimleri [3]

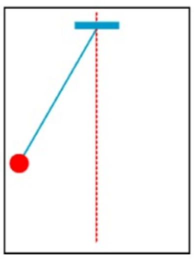


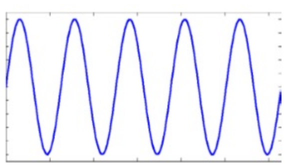
Bir kelebeğin kalp atışları [4]

Ultrason altındaki bebeğin kalp atışları [5]

1.1.2 Bazı terimler [6, 7]





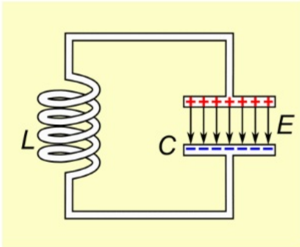


- Belirli aralıklarla tekrarlanan harekete **periyodik hareket** denir.
- Bir eksen boyunca, sabit bir nokta etrafında periyodik hareket yapan cismin hareketine **titreşim hareketi** denir.
- **Dalga** ise titreşimlerin bir noktadan bir başka noktaya aktarılmasıdır.
- Parçacığı denge konumuna geri getirmeye çalışan kuvvet, uzanımla orantılı ise bu titreşim hareketine **basit harmonik hareket (BHH)** denir.
- Genellikle BHH'ler $\mathbf{\Psi(t) = A}\sin(\omega\mathbf{t} + \phi) + \mathbf{B}\cos(\omega\mathbf{t} + \phi)$ şeklindeki **harmonik salınım** fonksiyonlarıyla ifade edilirler.
- Böyle hareket eden bir parçacığın hiç bir kuvvetin etkisinde kalmadığı konuma **denge konumu** ve herhangi bir andaki konumunun denge konumuna olan uzaklığına **uzanım** denir.
- En büyük (maksimum) uzanıma **genlik** denir (Ψ'ın A ve B katsayıları).
- ω rad/sn birimli *açısal frekans*tır.
- $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ Hertz (Hz $\equiv$ sn^{-1}) birimli, *birim saniyedeki devir sayısı* veya *frekans*tır.
- $\mathbf{T} = \frac{1}{\nu}$ bir peryotun tamamlanma süresi, kısaca periyot..
- ϕ faz sabiti olarak adlandırılır ve birimsizdir.

1.2 Bir serbestlik dereceli sistemlerin serbest salınımları

Yukarıdaki şekilde verilen **kütle-yay** ve **ip-cisim** sistemleri bir serbestlik dereceli salınıcılardır. Çünkü denge konumundan olan uzaklıklarını sadece bir koordinatla ifade etmek mümkündür. Bu tür sistemlerin hareketi Denklem 1'deki "harmonik salınım" fonksiyonu ile tanımlanabilir. Şekildeki ***LC* devresi** de bir serbestlik dereceli salınıcıdır.

$$\Psi(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{1}$$



Geri çağırma ve eylemsizlik:
Denklem 1 ile tanımlanan davranış bu tür sistemlerin iki özelliğinin yarışması sonucu ortaya çıkar.

- geri çağırma kuvveti
- eylemsizlik

Geri çağırma kuvveti sistemi hep denge konumuna getirmek ister fakat denge konumuna geldiğinde sistem en yüksek hızına ulaşır. Bu noktada **eylemsizlik** (Newton'un birinci yasası) etkin hale gelir ve sistem hareketine devam etmek ister. Böylece sürekli bir **salınım hareketi** gerçekleşir.

Sönümlü salınımlar:
Denklem 1 ile hareketi tanımlanan sistemler çoğu durumda gerçekçi olmayabilir. Çünkü çoğu fizikzel durumda salınımı **sönümleyecek** (sonlandıracak) kuvvetler vardır ve bunlar **sürtünme** veya **direnç** kuvvetleri olarak adlandırılırlar. Böyle sistemler için ise salınım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

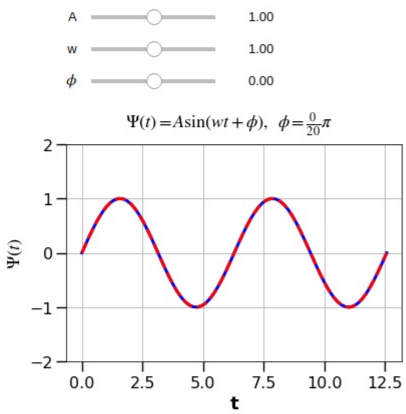
$$\Psi(t) = Ae^{-t/2\tau}\cos(\omega t + \phi) \tag{2}$$

τ sönme veya durulma zamanı olarak adlandırılır.

1.2.1 Harmonik salınım fonksiyonu

Harmonik salınım fonksiyonuna ait parametrelerin değişimilerinin fonksiyonda ne tür değişikliklere sebep olduğunu aşağıdaki Python programını çalıştırarak inceleyebilirsiniz.

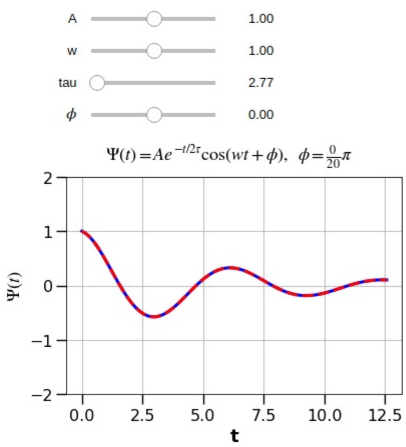
Programı çalıştırmak için hücrenin kenarındaki **In[ ]** yazan kısma tıklayın. Sonra **Shit + Enter** tuşlarını beraber kullanarak çalıştırabilirsiniz.



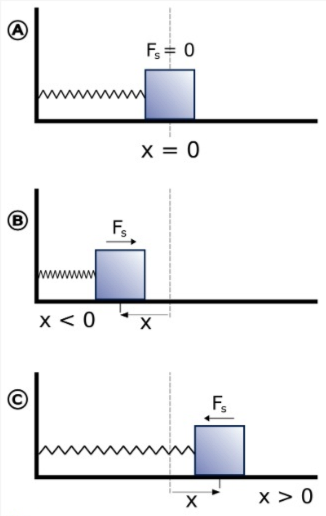
1.2.2 Sönümlü salınım fonksiyonu

Sönümlü salınım fonksiyonuna ait parametrelerin değişimilerinin fonksiyonda ne tür değişikliklere sebep olduğunu aşağıdaki Python programını çalıştırarak inceleyebilirsiniz.

Programı çalıştırmak için hücrenin kenarındaki **In[ ]** yazan kısma tıklayın. Sonra **Shit + Enter** tuşlarını beraber kullanarak çalıştırabilirsiniz.



1.2.3 Kütle yay sistemi



Kütl-yay sistemi [8].

Kütle-yay sistemi bir serbestlik dereceli sistemlere verilebilecek en kolay fakat en önemli örneklerden birisidir. Kütle-yay sistemi basit harmonik hareket (BHH) davranışı gösterir. Sistem x=0'daki denge konumundan bir kere uzaklaştırıldığında (eğer dışarıdan etkiyle durdurulmazsa) sonsuza kadar denge noktasına gider ve gelir. Bu hareket BHH olarak adlandırılır. Şekildeki gibi bir mekanik sistemde BHH'nin gerçekleşmesi için bir kaç ön kabul yapmak gerekir.

- Yay kütlesizdir veya yayın kütlesi cismin kütlesi yanında çok küçüktür.
- Cisim ve hareket ettiği yüzey arasında sürtünme yoktur.
- Yay Hooke yasasına uygun davranır: yay üzerinde oluşan kuvvet sıkıştırılma veya genleştirilme miktarıyla doğru orantılıdır.

Bu kabuller altında yay tarafından kütleye uygulanan kuvvet herhangi bir anda,

$$\vec{F}_{yay} = -k\vec{x} \tag{3}$$

ile verilir, burada **k** yay (kuvvet) sabitidir ve birimi Newton/metre (N/m)'dir. Cismin üzerindeki hareketi sağlayan tek kuvvet yay kuvveti olduğundan, Newtonun ikinci yasası uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \Sigma\vec{F} &= m\vec{a} \\ \Sigma\vec{F} &= \vec{F}_{yay} \\ m\vec{a} &= -k\vec{x} \end{aligned} \tag{4}$$

elde edilir. $\vec{a}$ ivme vektörünün, konum vektörü $\vec{x}$ zamana göre ikinci türevi olduğu hatırlanırsa ve denklem yeniden düzenlenirse,

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \frac{k}{m}\vec{x} = 0 \tag{5}$$

ikinci dereceden lineer bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem aşağıdaki formda da yazılabilir. Bu tür denklemler BHH diferansiyel denklemleri olarak adlandırılır.

$$\ddot{\vec{x}} + \omega^2\vec{x} = 0 \tag{6}$$

Burada $\ddot{\vec{x}} \equiv \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$ ve $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$ 'dir. ω^2 birim kütle ve birim uzunluk başına geri çağırıcı kuvvettir. Basit bir incelemeyle,

$$\frac{F_{yay}}{mx} = k/m = \omega^2 \tag{7}$$

olduğu görülür. Bir çok ders kitabında Denk. 6'nin aşağıdaki formda yazıldığı görülür. $\ddot{\vec{x}}$ ve $\vec{x}$ aynı **doğrultuya** sahip olduklarından bu notasyonun kullanılmasında bir sakınca yoktur, fakat bu notasyonda bile her ikisininde halen birer zıt yönlü vektör olduklarının unutulmaması gerekir.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{8}$$

Bu son halini alan BHH diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \tag{9}$$

$a = A\cos(\phi)$ ve $b = -A\sin(\phi)$ seçilirse çözüm,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{10}$$

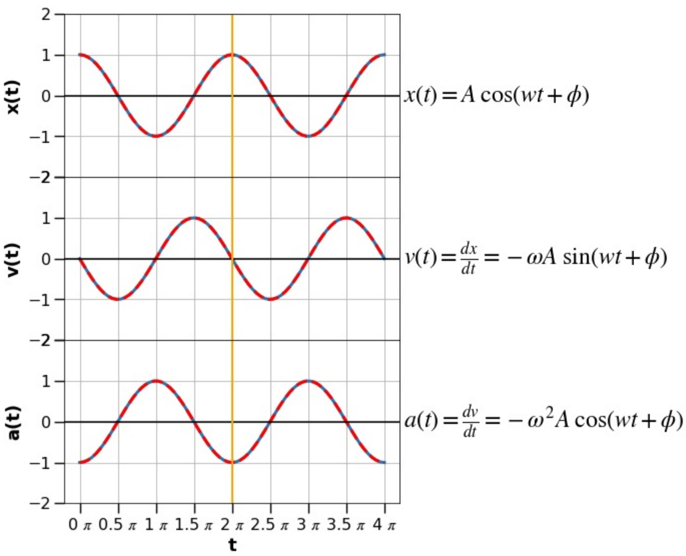
halini alır. $a = A\sin(\phi)$ ve $b = A\cos(\phi)$ seçilirse çözüm,

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{11}$$

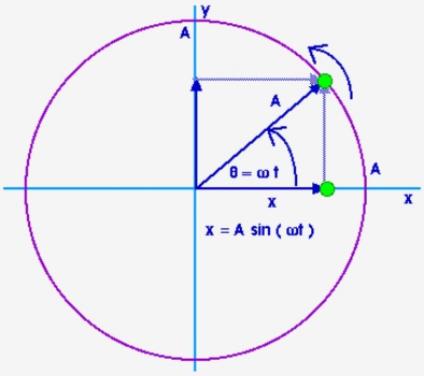
halini alır. Bu üç çözüm de BHH denkleminin geçerli çözümleridir. Burada A kütle-yay sisteminde kütlenin denge konumuna göre yer değiştirmesinin en büyük olduğu konumları belirler ($x = \pm A$). ϕ ise ***faz farkı*** olarak adlandırılır. **A** ve ω değerleri özdeş iki kütle-yay sistemi aynı anda aynı konumda bulunmaya bilirler, **faz farkı** bu farklılığı hesaba katar. Hem **A** hem de ϕ, **seçilen ve bilinen bir başlangıç değeri için BHH diferansiyel denkleminin genel çözümünün kullanılmasıyla belirlenirler.** ω **sistemin açısal frekansıdır ve hem** **A** hem de ϕ'den farklı olarak sistemin başlangıç şartlarından bağımsızdır. Sistemin kendi yapısal özelliklerine bağlıdır ve kütle yay sistemi için ($\omega = \sqrt{k/m}$) yay sabiti **k** **ve cismin kütlesi** **m** ile belirlenir.

Bu tür bir sistemin yer değiştirmesinin, hızının ve ivmesinin zamanla değişimi aşağıdaki örnek grafikten incelenebilir.

A 1.00
ω 1.00
ϕ 0.00
t 6.28



1.2.4 Düzgün dairesel harket ve BHH benzerliği



Düzgün dairesel hareket yörüngesi [9].

$$x = A\cos(\theta) \text{ ve } y = A\sin(\theta) \tag{12}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \text{ ve } y = A\sin(\omega t + \phi) \tag{13}$$

Denk. 12 ve Denk. 13 karşılaştırılırsa aralarındaki benzerlik kolayca anlaşılabilir. Aşağıdaki şekilde verilen örnekte Denk. 12'deki x, y değişimlerinin θ'ya göre çizimleri gösterilmektedir. Bu çizim BHH yapan bir sistemin davranışıyla benzerdir. Bu benzetim çıkarılabilecek bir bilgi BHH'deki ωt ifadesinin düzgün dairesel hareketteki karşılığının θ açısı olmasıdır.

$$\omega t = \theta \tag{14}$$

Bu denklem yeniden düzenlenirse,

$$\omega = \frac{\theta}{t} \tag{15}$$

halini alır. Bu son denklemden ω'nın BHH'de neden **açısal frekans** olarak adlandırıldığı daha iyi anlaşılabilir. Tabii açısal frekansın değeri bir tam devir için geçen süre T (periyot) ve taranan açı 2π (radyan) değerlerinin Denk. 15'te kullanılmasıyla bulunur (veya tanımlanır). Birimi **rad/s** 'dir.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{16}$$

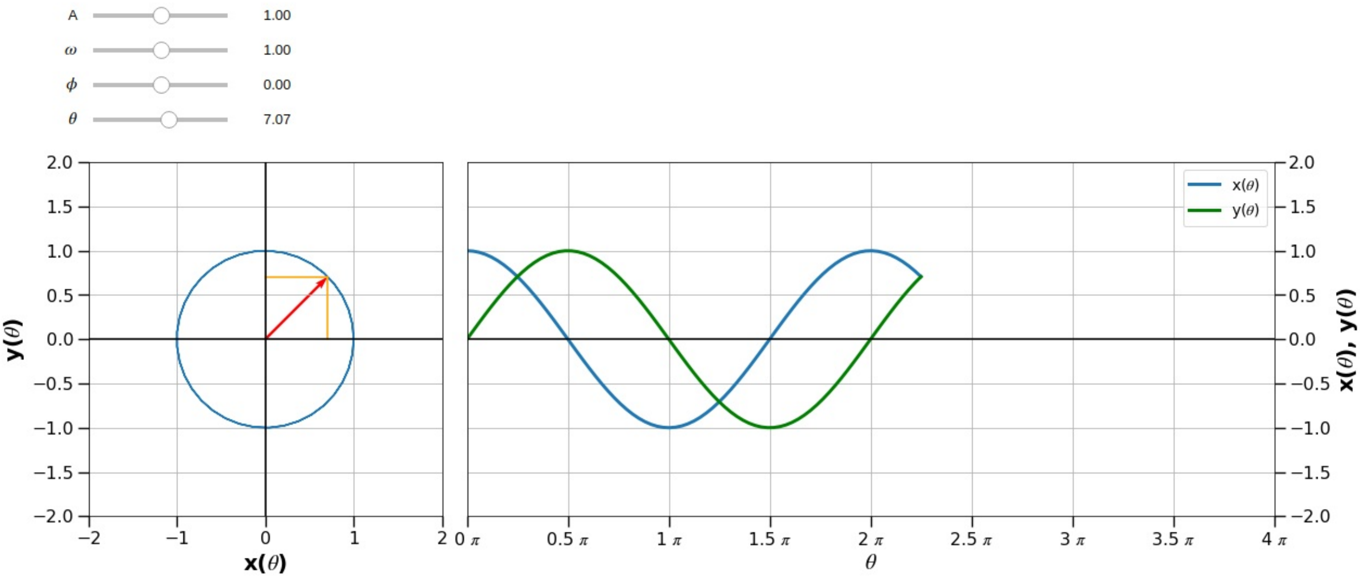
BHH ile ilgili bir diğer fiziksel nicelik ise, birim zamandaki tam devir sayısı **frekanstır** (ν veya f ile gösterilir) ve periyotla ilişkisi aşağıdaki gibidir. Birimi **1/s ≡ Hertz ≡ Hz** 'dir.

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{17}$$

Bu ilişkiyle de **frekans** ve **açısal frekans** arasıda aşağıdaki bağlantının olduğu görülebilir.

$$\omega = 2\pi\nu \tag{18}$$

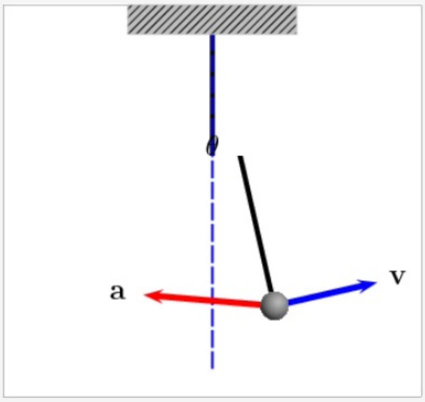
Örnek:
Bir tam devir için geçen süre (periyot), $T = 1\ s$ ise açısal frekans $\omega = 2\pi\ \frac{rad}{s}$ ve frekans $\nu = 1\ s^{-1} = 1$ Hz 'tir.



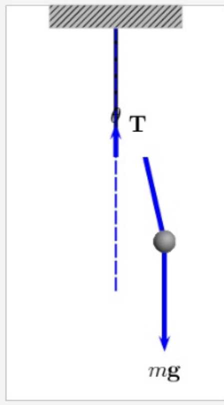
1.2.4.1 BHH ile Düzgün dairesel hareket arasındaki benzerlikle ilgili bir video

Simple Harmonic Motion: Crash Course Physics #16

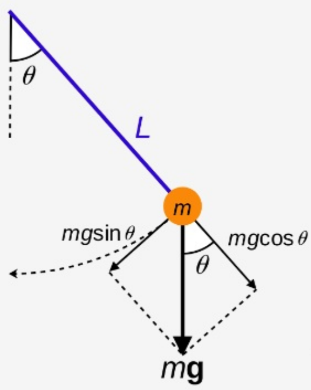
1.2.5 Basit Sarkaç



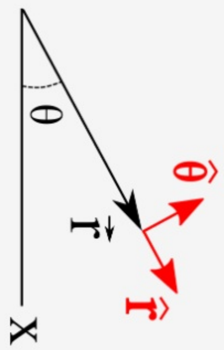
Basit sarkaç, hız ve ivme davranışı [10]



Basit sarkaç, kütleli cisim üzerindeki kuvvetler [11]



Basit sarkaç ve yer çekimi [12]



Kutupsal koordinat sistemi birim vektörleri [13]

1.2.5.1 Basit Sarkaç için etkileşimli bir örnek

Basit sarkac kavramını daha iyi anlamak için aşağıdaki animasyonu inceleyebilirsiniz.

Basit sarkaç sistemi kütlesiz (kütlesi ihmal edilebilir) **L** uzunluklu bir ip ve **m** kütleli noktasal bir cisimden oluşur. Bu sistemin denge noktası θ açısının sıfır olduğu yerdir. Bu nedenle başlangıçta denge noktasından θ açısı kadar uzaklaştırılan ve sonra serbest bırakılan sistem yerçekimi kuvvetinin $mg\,\sin(\theta)$ ile ifade edilen bileşeninden dolayı tekrar denge noktasına dönmek isteyecektir. Yer çekimi kuvvetinin bu bileşeni kutupsal koordinat sisteminde,

$$\vec{F}_{g\theta} = -mg\,\sin(\theta)\hat{\theta} \tag{19}$$

halini alacaktır. Sistem başlangıçta durgun halden serbest bırakıldığında $\hat{\theta}$ doğrultusunda üzerindeki tek kuvvet $\vec{F}_{g\theta}$ olacaktır. Böylece Newton'un ikinci yasası göz önünde bulundurulursa,

$$\vec{F}_{g\theta} = m\vec{a}_\theta \tag{20}$$

olur. Denk. 19 ve 20 beraber incelenirse,

$$\vec{a}_\theta + g\,\sin(\theta)\hat{\theta} = 0 \tag{21}$$

ifadesine ulaşılır. Bu denklemde $\vec{a}_\theta$ ve $\hat{\theta}$ aynı doğrultuda olduklarından,

$$a_\theta + g\,\sin(\theta) = 0 \tag{22}$$

yazılabilir. Burada a_θ ve $\sin(\theta)$ tek boyutlu ve zıt yönlü iki vektör gibi düşünülebilir. a_θ salınan cismin izlediği yolun zamana göre ikinci türevinin alınmasıyla bulunabilir. Herhangi bir andaki θ açısı için alınan yol şekildeki sistem için $L\theta$ kadar olacaktır. Bu ifadenin ikinci türevi a_θ ivmesini verir.

$$a_\theta = \frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = L\frac{d^2(\theta)}{dt^2} = L\ddot{\theta} \tag{23}$$

Böylece, birazcık düzenlemeyle, Denk. 22,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0 \tag{24}$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\,\sin(\theta) = 0$$

halini alır. Görüleceği üzere bu denklem kütle-yay sisteminde çalıştığımı BHH denklemine tam olarak benzememektedir. Benzeyebilmesi için küçük açı yaklaşıklığı yapılmalıdır.

Eğer basit sarkacın çok küçük açılarla salındığı kabul edilirse ve $\sin(\theta)$ ifadesi,

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \tag{25}$$

yukarıdaki gibi Taylor serisine açılırsa,

$$\sin(\theta) \approx \theta \tag{26}$$

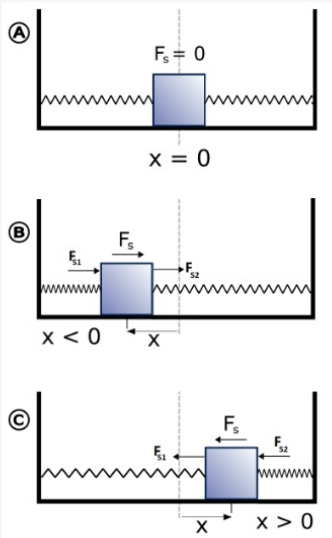
Denk.26'deki yaklaşık eşitlik ortaya çıkar. Böylece Denk. 24,

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \tag{27}$$

halini alır. Böylece küçük açı değerleri için basit sarkacında bir BHH sistemi olduğu anlaşılabilir. Bu sistemin açısal frekansı ise $\omega = \sqrt{g/L}$ 'dir. BHH salınım fonksiyonu ise kütle yay sistemine benzer şekilde aşağıdaki gibi olur.

$$\theta(t) = A\,\cos(\omega t + \phi) \tag{28}$$

1.2.6 Kütle ve iki yay sistemi: boyuna salınım



Kütl-yay sistemi [8].

Bu sistemin kütle-yay sisteminden en temel farkı bir tane fazla yay içermesidir.

- Her iki yay özdeştir.
- Her iki yay kütlesizdir

Bu varsayımlar altında yandaki şekildeki **B** veya **C** durumu için kütlenin üzerindeki kuvvet,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{yay} &= \vec{F}_{S1} + \vec{F}_{S2}\\ \vec{F}_{yay} &= (-k\vec{x}) + (-k\vec{x})\\ \vec{F}_{yay} &= -2k\vec{x}\end{aligned} \tag{29}$$

olacaktır. Kütle yay sistemindeki Newtonun ikinci yasası uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\Sigma\vec{F} &= m\vec{a}\\ \Sigma\vec{F} &= \vec{F}_{yay}\\ m\vec{a} &= -2k\vec{x}\end{aligned} \tag{30}$$

elde edilir. Böylece önceki verilen örneklere benzer şekilde,

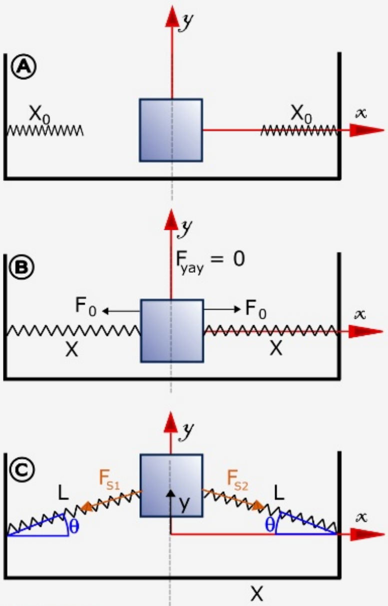
$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{2k}{m}x &= 0\\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0\end{aligned} \tag{31}$$

olacaktır. Üstteki iki denklemden bu sistemin açısal frekansının $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ olduğu görülebilir. Bu sistem için de çözüm,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{32}$$

olur.

1.2.7 Kütle ve iki yay sistemi: enine salınım



Kütle - iki yay sistemi [8].

Kütle ve iki yay sisteminin enine salınımlarını incelemek için yandaki şekli anlamakta fayda var. Ⓐ durumunda yaylar kütleye bağlanmamış ve serbest haldedirler. Yayların serbest uzunluklar x_0'dır. Ⓑ durumunda yaylar eşit miktarda gerilmiş $(x - x_0 > 0)$ ve kütleye bağlanmıştır. Bu durumda kütle her iki taraftan birbirine zıt yöndeki F_0 büyüklüğündeki kuvvetlerle çekilmektedir. Böylece kütlenin üzerindeki toplam kuvvet sıfırdır. F_0'ın değeri,

$$F_0 = k(x - x_0)$$

dir. Ⓒ durumunda ise kütle $x = 0$ çizgisinden ayrılmayacak şekilde y'kadar denge konumundan uzaklaştırılmıştır. Bu durumda herhangi bir anda yayların uzunluğu L'dir.

- Kütle ve iki yay sistemi sürtünmesiz bir şekilde y doğrultusundan ayrılmayacak şekilde ayarlanmıştır.
- Yaylar özdeştir.
- Yaylar kütlesizdir.
- Yaylar tarafından uygulanan kuvvetlerin iki dik bileşeni vardır.
- x bileşenleri eşit büyüklükte zıt yönlü olduklarından toplamları sıfırdır.
- y bileşenleri aynı yöndedirler ve y doğrultusundaki salınım hareketini sağlarlar.

Bu bilgilere göre her iki yayın kütleye uyguladığı kuvvetler;

$$\begin{aligned}F_{S1} = F_{S2} &= k(L - x_0)\\ F_{S1,y} = F_{S2,y} &= k(L - x_0)\sin\theta\\ \vec{F}_{S1,y} = \vec{F}_{S2,y} &= -k(L - x_0)\sin\theta\,\hat{j}\end{aligned} \tag{33}$$

olur. Şekilden anlaşılacağı üzere $\sin\theta = y/L$'dir. Yukarıdaki denklemler ve bu bilgiyle kütlenin üzerindeki y doğrultusundaki toplam kuvvet aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{yay,y} &= \vec{F}_{S1,y} + \vec{F}_{S2,y}\\ \vec{F}_{yay,y} &= (-k(L - x_0)\frac{y}{L}\hat{j}) + (-k(L - x_0)\frac{y}{L}\hat{j})\\ \vec{F}_{yay,y} &= -2k(L - x_0)\frac{y}{L}\hat{j}\end{aligned} \tag{34}$$

olacaktır. Newtonun ikinci yasası uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\Sigma\vec{F} &= m\vec{a}_y\\ \Sigma\vec{F} &= \vec{F}_{yay,y}\\ m\vec{a} &= -2k(L - x_0)\frac{y}{L}\hat{j}\end{aligned} \tag{35}$$

elde edilir. Biraz matematiksel düzenleme yapılarak,

$$\ddot{y} + \frac{2k}{m}(1 - \frac{x_0}{L})y = 0 \tag{36}$$

differansiyel denklemine ulaşılır. Denklemden anlaşılmaktadır ki, kütle iki yay sistemi bu haliyle bir BHH değildir. İki farklı yaklaşıklık durumunda bu sistemin enine salınımları BHH gibi davranır.

1.2.7.1 Gevşek yay yaklaşıklığı

Bu yaklaşıklığın anlamı yaylar çok gerilse bile Hooke yasasına uyma özelliklerini kaybetmemektidirler. Bu durumda $L >> x > x_0$'dır. Böylece, Denk. 36'teki,

$$(1 - \frac{x_0}{L}) \approx 1 \tag{37}$$

kısım yaklaşık bir olacaktır. Bu durumda Denk. 36 aşağıdaki hali alır.

$$\ddot{y} + \frac{2k}{m} y \approx 0 \tag{38}$$

Bu yaklaşıklık için sistem bir BHH gibi davranır ve boyuna salınımlarda olduğu gibi açısal frekansı $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$'dir.

1.2.7.2 Küçük açı yaklaşıklığı

Bu sistemde,

$$y = L \sin\theta \tag{39}$$

olduğu hatırlanırsa, basit sarkaçta olduğu gibi, küçük açı yaklaşıklığın bir sonucu olarak $\sin\theta \approx \theta$ olacaktır. Bu durumda, $L \approx x$ olacağı anlaşılabilir. Böylece,

$$y \approx x\,\theta \tag{40}$$

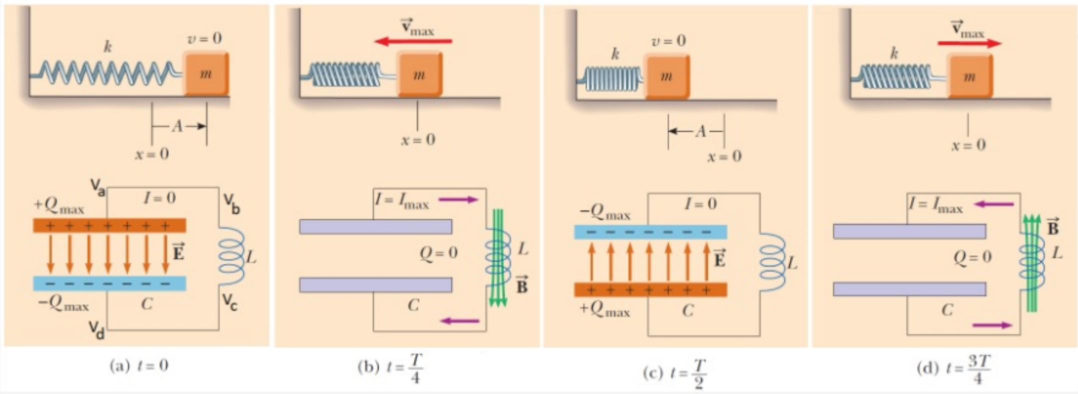
olur. x Ⓑ durumunda yayların uzunluklarıdır ve sabittir. Bu yaklaşıklık Denk. 36'e uygulanırsa,

$$\ddot{y} + \frac{2k(x - x_0)}{mx} y \approx 0 \tag{41}$$

$$\ddot{y} + \frac{2F_0}{mx} y \approx 0$$

elde edilir. Burada sistemin açısal frekansı $\omega = \sqrt{\frac{2F_0}{mx}}$'dir ve değeri sabittir. Böylece bu yaklaşıklık için de sistem BHH gibi davranır. **Bu yaklaşıklıkta ortaya çıkan açısal frekans, boyuna salınımın ve gevşek yay yaklaşımının açısal frekansından farklıdır.**

1.2.8 LC devresi

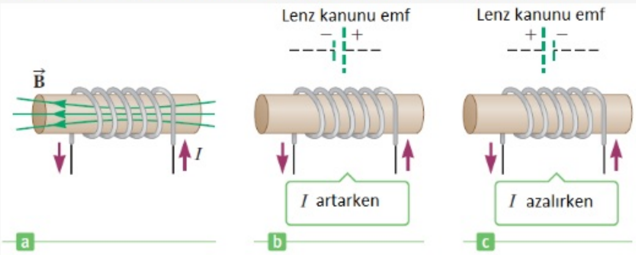


LC devresinin kütle-yay sistemine benzerliği [15]

Bir bobinden (indüktör) ve kondansatörden (sığa) oluşan bir ***LC*** devresi incelendiğinde, devre üzerinde akan yükün davranışının, kütle-yay sisteminin davranışına benzer şekilde bir BHH yaptığı görülür. Yukarıdaki şekildeki benzetime göre aşağıdaki benzerlikleri kurulabilir.

$$\begin{array}{c} LC \longleftrightarrow Kütle - Yay \\ \hline L \longleftrightarrow m \\ Q \longleftrightarrow x \\ C \longleftrightarrow \dfrac{1}{k} \\ \ddot{Q} \longleftrightarrow a \end{array} \tag{42}$$

Yukarıdaki şekilde t=0 anındaki durumda kondansatör Q kadar yükle yüklüdür, t=0'dan çok kısa bir süre sonra V_a'dan V_b'ye doğru akım akmaya başlar. Bu akım t=0 anında en büyük değerine sahiptir, kondansatör boşaldıkça akımın değeri küçülür.



Bir bobinde Lenz kanununa göre oluşan EMK (emf) [16].

Bu durumda bobinin V_b tarafındaki ucu bir bataryanın pozitif ucu, V_c tarafındaki ucu bir bataryanın negatif ucu gibi davranır. Lenz kanunuyla ilgili şekil incelendiğinde bobinin bu davranışı daha rahat anlaşılabilir. Şeklin (a) durumunda akım geçerken manyetik alan oluştuğu, (b)'de ise geçen akım artarsa oluşan EMK (emf: elektro motor kuvveti (force)) ve (c)'de ise akım azalırsa oluşan EMK gösterilmektedir. Bu iki şekildeki birleştirilirse Kirchoff kanunları kullanılarak devre elemanları için potansiyel çevrimi aşağıdaki gibi yazılır.

$$V_C + V_L = 0 \tag{43}$$

Burada V_C kondansatörün potansiyelidir, kapasite (C) ve yük (Q) cinsinden,

$$V_C = \frac{Q}{C} \tag{44}$$

ile tanımlanır. V_L bobinin uçları arasındaki potansiyel fark ise akımla zıt karakterli olarak, öz indüksiyon (L) ve akım (I) cinsinden,

$$V_L = -L\frac{dI}{dt} \tag{45}$$

olacaktır. I akımı zamanla azaldığından akım ve akan yükün zamanla değişimi arasında,

$$I = -\frac{dQ}{dt} \tag{46}$$

bağıntısı vardır. Denk. 43, 44, 45 ve 46 birleştirilirse,

$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \tag{47}$$

ifadesine ulaşılır. Son denklem düzenlendiğinde,

$$\ddot{Q} + \omega^2 Q = 0 \tag{48}$$

BHH denklemine ulaşılır. Burada $\omega^2 = \frac{1}{LC}$'dir. Bu denklemin çözümü,

$$Q = Q_0 cos(\omega t + \phi) \tag{49}$$

olur, burada Q_0 $t = 0$ anında kondansatörde bulunan yük miktarıdır. Buna göre devreden geçen akımda,

$$I = -\frac{dQ}{dt} = I_0 sin(\omega t + \phi) \tag{50}$$

olacaktır.