jupyter 02a_titresim_ve_dalgalar Last Checkpoint: an hour ago (unsaved changes)
Logout
File Edit View Insert Cell Kernel Navigate Widgets Help Snippets Trusted Python 2
Run Code

İçindekiler

TİTREŞİM ve DALGAR / FİZ220

Doç. Dr. Mesut Karakoç

Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü

2018 - 2019 Bahar Dönemi

Kod hücrelerini, KAPAT / AÇ! Önceki Sayfa Ana Sayfa Sonraki Sayfa

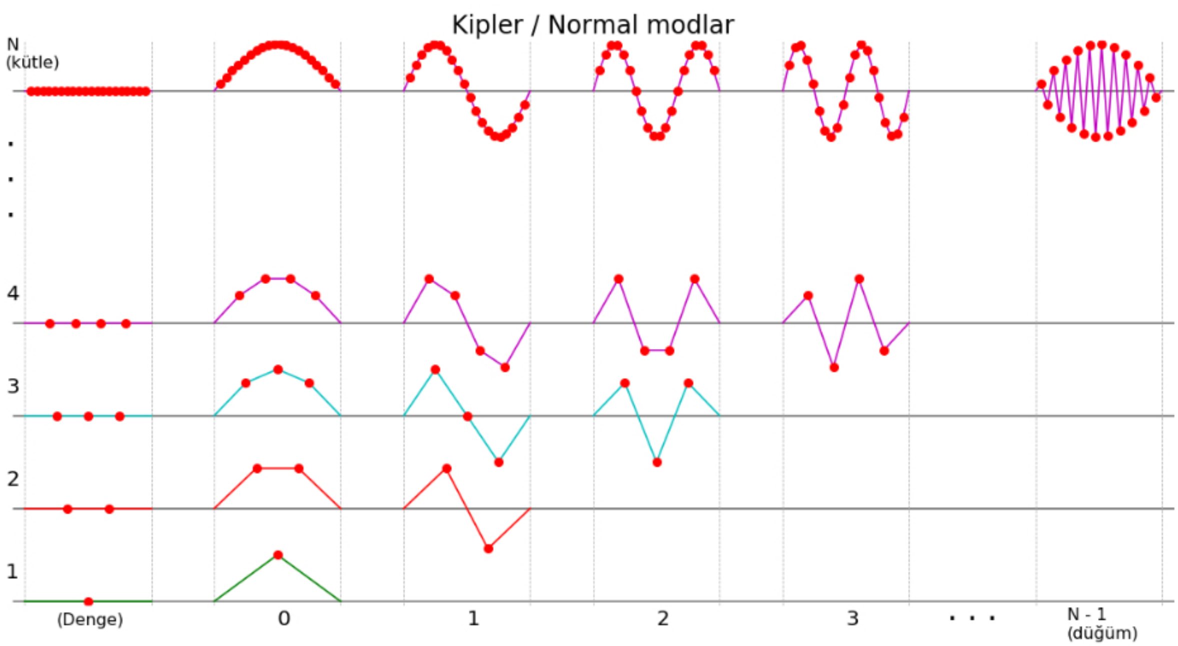
1 Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Salınımları

1.1 Giriş

Yazılacak....

1.2 Sürekli sistemde kipler (Duran dalgalar)

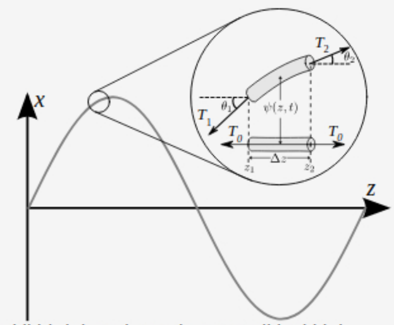
Yazılacak...



Yukarıdaki şekilde verilen kipler aşağıdaki simülasyon programıyla oluşturulabilir ve davranışları incelenebilir.

Konuyu anlamaya yardımcı olabilecek başka bir kaynak.
http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/wave_equation_speed.htm

1.2.1 İpte enine titreşimler ve dalga denklemi



Sürekli bir ipin enine salınımının ikinci kipi.

Eğer şekildeki Δm kütleli ip parçasını noktasal cisim gibi ve her iki taraftan $\vec{T}_1$ ve $\vec{T}_2$ kuvvetleriyle çekildiklerini düşünürsek. İpin bu kısmının enine titreşimlerini tanımlayacak olan **klâsik dalga denklemini** kolayca elde edbiliriz. $\vec{T}_1$ ve $\vec{T}_2$ kuvvetlerini xz koordinat sistemindeki dik bileşenleri cinsinden,

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{1z} \\ \vec{T}_2 &= \vec{T}_{2x} + \vec{T}_{2z} \end{aligned} \tag{1}$$

olarak yazabiliriz. Her iki kuvvetin z bileşenleri $\vec{T}_{1z}$ ve $\vec{T}_{2z}$ birbirine eşit büyüklükte fakat zıt yönlü olacaklardır. Çünkü ip sisteminin sadece $\hat{x}$ doğrultusunda salınım hareketi yapması izinlidir. Bu nedenle, bu bileşenlerin büyüklüğü şekilde gösterilen T_0'a eşit olacaktır. z bişenleri için, ipin Hooke yasasına da uyduğunu hatırlayarak,

$$\begin{aligned} \vec{T}_{1z} &= -k\Delta z_1 \hat{z} = -T_0 \hat{z} \\ \vec{T}_{2z} &= k\Delta z_2 \hat{z} = T_0 \hat{z} \end{aligned} \tag{2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Benzer şekilde x bileşenleri için ise,

$$\begin{aligned} \vec{T}_{1x} &= -k\Delta \psi_1(z_1, t)\hat{x} \\ \vec{T}_{2x} &= k\Delta \psi_2(z_2, t)\hat{x} \end{aligned} \tag{3}$$

denklemleri yazılabilir. Şekildeki bilgiler cinsinden x ve z doğrultusundaki toplam kuvvetler,

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F}_x &= \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} \\ \Sigma \vec{F}_z &= \vec{T}_{1z} + \vec{T}_{2z} \end{aligned} \tag{4}$$

olarak yazılabilir. Vektör notasyonu terkedilirse bu denklemler,

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= -T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 \\ \Sigma F_z &= -T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{5}$$

halini alırlar. Denk. 2, 3 ve 5 karşılaştırılırsa,

$$\begin{aligned} T_{1x} &= T_1 \sin\theta_1 = k\Delta\psi_1, \quad T_{1z} = T_1 \cos\theta_1 = k\Delta z_1 = T_0 \\ T_{2x} &= T_2 \sin\theta_2 = k\Delta\psi_2, \quad T_{2z} = T_2 \cos\theta_2 = k\Delta z_2 = T_0 \end{aligned} \tag{6}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden de,

$$\begin{aligned} \tan\theta_1 &= \frac{\Delta\psi_1}{\Delta z_1} \\ \tan\theta_2 &= \frac{\Delta\psi_2}{\Delta z_2} \end{aligned} \tag{7}$$

elde edililir. x doğrultusundaki toplam kuvvetler aşağıdaki gibi yeniden yazılabilirler.

$$\Sigma F_x = -T_1 \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_1} \sin\theta_1 + T_2 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_2} \sin\theta_2 \tag{8}$$

Bu denkleme Denk. 7'deki bilgiler konursa x doğrultusundaki toplam kuvvetler,

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= T_0(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) \\ \Sigma F_x &= T_0 \left(\frac{\Delta\psi_2}{\Delta z_2} - \frac{\Delta\psi_1}{\Delta z_1} \right) \end{aligned} \tag{9}$$

olarak yazılabilir. $\Delta z_1 \to 0$ ve $\Delta z_2 \to 0$ limitlerinde bu denklem,

$$\Sigma F_x = T_0 \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial z_2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial z_1} \right) \tag{10}$$

olur. Bu denklemi biraz daha düzenleyebilmek için,

$$f(z_2) \equiv \frac{\partial \psi_2}{\partial z_2} \tag{11}$$

gibi bir fonksiyon tanımlayalım. Bu fonksiyonu z_1 civarında Taylor serisine açarsak,

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2 - z_1)\frac{df(z_1)}{dz_1} + \frac{(z_2 - z_1)^2}{2}\frac{d^2 f(z_1)}{dz_1^2} + \cdots \tag{12}$$

olur. $\Delta z = z_2 - z_1$'in çok küçük olduğu gözönüne alınırsa 2. derece ve üstü terimleri ihmal edebiliriz. Bu durumda,

$$f(z_2) - f(z_1) \approx \Delta z \frac{df(z_1)}{dz_1} \tag{13}$$

ve böylece,

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z_2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} \approx \Delta z \frac{d}{dz_1}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z_1}\right) = \Delta z \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z_1^2} \tag{14}$$

olur.

Denk. 14, Denk. 10'da yerine konur ve z_1'in indisi terk edilirse x doğrultusundaki toplam kuvvet,

$$\Sigma F_x = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{15}$$

olur. Newton'un ikinci yasası, $\Delta m = \rho_0 \Delta z$ ve $a_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ bilgileri yukarıdaki denklemle birleştirilirse,

$$T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \rho_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{16}$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirme ve düzenleme yapıldıktan sonra,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{17}$$

Klâsik Dalga Denklemi elde edilmiş olur.

1.2.2 Klâsik dalga denkleminin duran dalga çözümleri

Sürekli bir ip sisteminin duran dalgalar çözümü için ipin bütün Δm parçalarının,

- aynı kipte
- aynı açısal frekansla, ω
- aynı fazla, ϕ

harmonik olarak salındığını varsayalım. İpin her parçası aynı kipte salınıbilir fakat her bir parçanın denge konumunda uzaklığı birbirinden farklı olabilir. Bunu tanımlayacak olan fiziksel nicelik duran dalganın genliğidir. Sistem sürekli bir sistem olduğundan bu genlik ipin her noktasında $A(z)$'nin bir fonksiyonu olarak belirlenir. Böylece duran dalga,

$$\psi(z,t) = A(z)\cos(\omega t + \phi) \tag{1}$$

olarak yazılabilir. Elde edilen bu dalga formunun klâsik dalga denkleminin bir çözümü olduğunu iddia ettiğimize göre denklemi sağlamalıdır. Bu çözüm dalga denkleminde yerine konursa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\omega^2 A(z)\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 \psi \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \cos(\omega t + \phi)\frac{d^2 A(z)}{dz^2} \end{aligned} \tag{2}$$

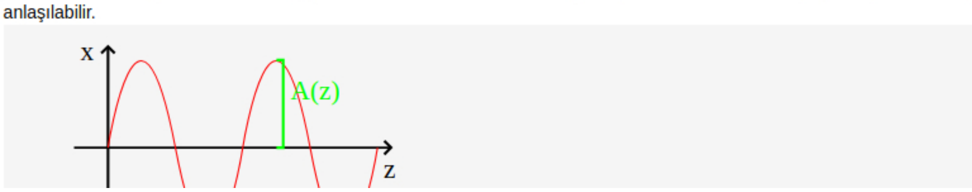
elde edilir ve sonucunda,

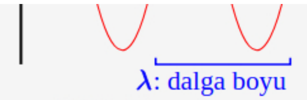
$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\omega^2 \frac{\rho_0}{T_0} A(z) \tag{3}$$

denklemi ortaya çıkar. Bu denklem duran dalganın kiplerinin farklı şekillerini belirleyecek olan denklemdir. Denklem BHH denklemine benzemektedir, fakat burada değişken zaman değil, z uzay koordinatıdır. Bu denklemin çözümü,

$$A(z) = A\sin(kz) + B\cos(kz) \tag{4}$$

ile tanımlanabilir. Bu denklemdeki k BHH'deki ω'ya benzerdir. ω açısal frekansı birim zamanda bir BHH'nin ne kadar sık tekrarlanacağını belirlerken, k uzaysal değişimde (burada z koordinatı) ne kadar sıklıkta bir dalganın yerleşeceğini belirler ve **açısal dalga sayısı** olarak adlandırılır. $\omega = 2\pi/T$ benzer şekilde $k \equiv 2\pi/\lambda$ şeklinde bir tanım yapmak mümkündür. Burada λ **dalga boyu** olarak adlandırılır. Aşağıdaki şekilden dalga boyu kavramı daha iyi anlaşılabilir.





Dalga boyu şekildeki gibi tanımlanır.

Denk. 3 için önerilen Denk. 4'teki çözüm yerine konulursa,

$$k^2 = \omega^2 \frac{\rho_0}{T_0} \quad \text{veya} \quad \omega = k\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \tag{5}$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitlikler zaman (T) periyotu veya (λ: dalga boyu) uzay periyodu cinsinden,

$$T = \lambda\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} \quad \text{veya} \quad \lambda = T\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \tag{6}$$

olarak yazılabilirler. Bu denklemlerden anlaşılıyor ki, T ve λ birbirine bağlıdır ve gerçek bir sistem için ikisinden biri ölçülürse, diğeri de hesaplanarak bulunabilir. Bu eşitlikler kullanılarak **Dalga hızı** olarak adlandırılan yeni bir nicelik tanımlanabilir, formül olarak tanımı,

$$v \equiv \lambda\nu = \lambda/T = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \tag{7}$$

şeklindedir. Duran dalgalar için dalga hızı bir şey ifade etmez çünkü bu dalgalar herhangi bir yöne ilerlememektedirler. İlerleyen dalgalar kavramı incelendiğinde faz hızı olarak adlandırılacaktır ve kullanılacaktır. Son olarak klasik dalga denkleminin duran dalgalar için genel çözümünün,

$$\psi(z,t) = \left(A\sin(\frac{2\pi}{\lambda}z) + B\cos(\frac{2\pi}{\lambda}z)\right)\cos(\omega t + \phi) \tag{8}$$

olacağı açıktır.

1.2.3 Başlangıç ve sınır koşulları

Duran dalganın genel çözümünü birbirine L kadar mesafe uzaktaki iki nokta arasına bağlanmış bir ip için özelleştirebiliriz. Bunu gerçekleştirebilmek için ϕ sabiti başlangıç koşullarından, A ve B sabitleri ise sınır koşullarından belirlenir. İpin bir ucu $z = 0$'da diğer ucu $z = L$'de dir ve bu uçların bağlı bulundukları noktalarda duran dalga genliği daima sıfırdır. Bu sınır şarltarı sırasıyla uygulanırsa $z = 0$ için,

$$\psi(z=0,t) = \left(0 + B\cos(\frac{2\pi}{\lambda}z)\right)\cos(\omega t + \phi) = 0 \tag{1}$$

bu eşitlikten anlaşılıyor ki, daima $B = 0$ olmalıdır. Diğer terimler sıfır olursa, duran dalga elde edilemez. Böylece,

$$\psi(z,t) = A\sin(\frac{2\pi}{\lambda}z)\cos(\omega t + \phi) \tag{2}$$

bulunur. $z = L$ için sınır şartı uygulanırsa,

$$\psi(L,t) = A\sin(\frac{2\pi}{\lambda}L)\cos(\omega t + \phi) = 0 \tag{3}$$

olmalıdır. Bu eşitliğin duran dalgaların elde edilebilecek şekilde sağlanabilmesi için,

$$\sin(\frac{2\pi}{\lambda}L) = 0 \tag{4}$$

olmalıdır. Eğer $A = 0$ olsaydı duran dalga çözümleri ortaya çıkmazdı. Bu ifade de ancak,

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, \ldots, n\pi \tag{5}$$

şeklinde π'nin tam katları olursa eşitliğin sağlanması mümkündür. $\frac{2\pi}{\lambda}L = 0$ seçeneği dikkate alınmamıştır, çünkü bu aşağıdaki şekilde (duran dalganın kipleri) şekilde verilen denge durumuna karşılık gelir. Bu durum için $\nu_0 = 0$'dır ve bu bir kip olarak adlandırılamaz. Çünkü bir salınım söz konusu değildir.

Denk. 5'ten dalga boyunun mümkün değerleri,

$$\lambda = \frac{1}{1}(2L), \frac{1}{2}(2L), \frac{1}{3}(2L), \frac{1}{4}(2L), \ldots, \frac{1}{n}(2L) \tag{6}$$

olacaktır. En büyük dalga boyu değeri (yani en düşük frekans veya enerji durumu) $\lambda_1 = 2L$ ise diğerleri için,

$$\lambda_1 = (2L), \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1, \lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_1, \lambda_4 = \frac{1}{4}\lambda_1, \ldots, \lambda_n = \frac{1}{n}\lambda_1 \tag{7}$$

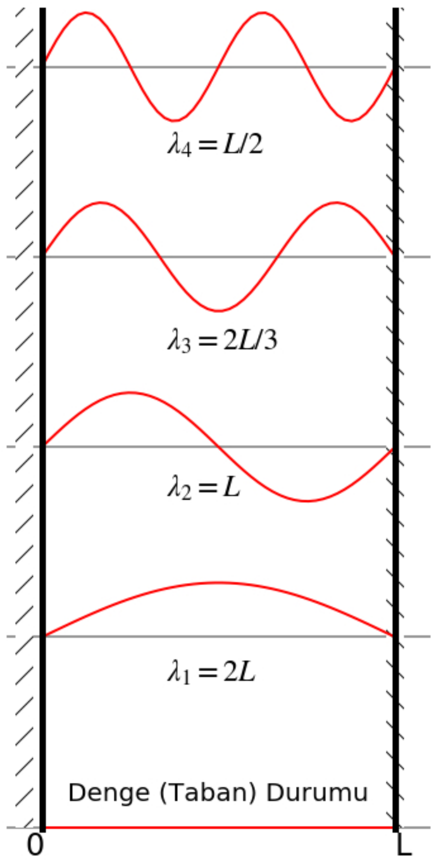
olur. Farklı dalga boyları için oluşan kiplenimler aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Benzeri ifadeler, $v \equiv \lambda\nu$ tanımından yola çıkarak, frekanslar için,

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda}, \nu_2 = 2\nu_1, \nu_3 = 3\nu_1, \nu_4 = 4\nu_1, \ldots, \nu_n = n\nu_1 \tag{8}$$

şeklinde olacaktır. Frekansların böyle bir dizi takip etmesi durumunda, ν_1 temel frekansından büyük frekanslar ν_1'nin ***harmonikleri*** olarak adlandırılır. İp sisteminde bu dizinin gerçekleşmesi ancak ***kusursuz bükülebilirlik*** yaklaşımında mümkündür.

sisteminde bu dizinin gerçekleşmesi ancak ***kusursuz bükülebilirlik*** yaklaşımında mümkündür.

Gerçek fiziksel sistemlerin çoğunda böyle bir dizi yakalamak pek mümkün değildir. Örneğin kütle yoğunluğu değişken bir ip için $\nu_2 = 2,78\nu_1$ ve $\nu_3 = 4,76\nu_1$ gibi olabilir ki bu bir harmonik dizi değildir. Gerçek piyano ve keman telleri ise yaklaşık bir harmonik dizi izlerler. Çünkü onlar da ideal kusursuz bükülebilirlik özelliğine sahip değillerdir.



İki ucu sabit bir ipin duran dalga kipleri

1.2.4 Dalga sayısı

Dalga boyunun ($\frac{1}{\lambda}$) tersi σ dalga sayısı olarak adlandırılır. Boyutu uzunluk boyutunun tersidir. Birim uzunlu başına düşen dalga boyu sayısını verir. Örneğin $\lambda = 1$ m ise $\sigma = 1$ m^{-1}'dir. k ve ω arasındaki benzerlik ν frekans ve σ dalga sayısı arasında da vardır, birisi birim zamandaki titreşim sayısını diğeri birim uzunluktaki titreşim miktarını tanımlar. Dalga boyu ve dalga sayısı arasındaki ilişki,

$$\sigma \equiv \frac{1}{\lambda} \quad (1 \text{ / uzunluk}) \tag{1}$$

ile tanımlanır. σ'nın 2π katı k açısal dalga sayısıdır ve,

$$k = 2\pi\sigma = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{rad / uzunluk}) \tag{2}$$

olarak da tanımlanabilir. Duran dalga bu niceliklerin hepsi kullanılarak farklı şekillerde yazılabilir.

$$\psi(z,t) = A\sin(2\pi\frac{t}{T})\sin(2\pi\frac{z}{\lambda}) \tag{3}$$
$$\psi(z,t) = A\sin(2\pi\nu t)\sin(2\pi\sigma z) \tag{4}$$
$$\psi(z,t) = A\sin(\omega t)\sin(kz) \tag{5}$$

Benzeri şekilde harmonik normal kipler dizisi farklı şekillerde yazılabilir.

$$k_1 L = \pi\ (\text{rad}), k_2 L = 2\pi\ (\text{rad}), k_3 L = 3\pi\ (\text{rad}), \ldots \tag{6}$$
$$\sigma_1 L = \frac{1}{2}\ (\text{titreşim}), \sigma_2 L = 1\ (\text{titreşim}), \sigma_1 L = \frac{3}{2}\ (\text{titreşim}), \ldots \tag{7}$$

Bir duran dalgayı tanımlamak için kullanılan 6 fiziksel nicelik arasındaki benzerlik tablosu aşağıda verilmiştir.

Zaman		Uzay
ω	$\leftrightarrow$	k
T	$\leftrightarrow$	λ
ν	$\leftrightarrow$	σ

1.2.5 Dağınım (dispersiyon) bağıntısı

$$\omega = k\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \quad (1)$$

Düzgün (homojen) kütleli, bükülebilir bir ipin normal kiplerinin (açısal) frekansı ile (açısal) dalga sayısı arasındaki bağıntı daha önce tanımladığımız yukarıdaki ifade ile belirlenir. ω'yı k'nın fonksiyonu olarak tanımlayan bu tür ifadeler **dağınım bağıntısı** olarak adlandırılır. Bazen ω ve k isimlerinin başındaki açısal kelimesi kaldırılarak kullanılabilir, bu durumda birimlerine bakılarak açısal olanlar mı, yoksa açısal olmayanlar mı kastediliyor anlaşılabilir.

1.2.5.1 Gerçek piyano telinde dağınım yasası

Çoğu zaman gerçek bir sistemin dağınım bağıntısı Denk. 1 ile tanımlanamayabilir. ω/k her zaman sabit olmayabilir. Örneğin gerçek bir piyano teli için,

$$(\lambda\nu)^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T_0}{\rho_0} + \alpha k^2 \quad (2)$$

şeklindedir ve α çok küçük bir sabittir ve kusursuz bükülebilir tel için sıfırdır. Gerçek piyano tellerinin kiplerinin uzaysal davranışı kusursuz bükülebilir iple aynıdır çünkü aynı sınır şartlarına uymaktadırlar. Böylece dalga boyları arası **harmonik** dizi gerçekleşirken, frekanslar arası **harmonik** dizi bozulur. Çünkü Denk. 2 ile tanımlanan "$\lambda\nu \neq$ sabit" dir. Bu nedenle gerçek piyanoların yüksek kiplenim frekansları harmonik kiplerden hesaplanandan biraz daha büyüktür.

1.2.5.2 Dağınımlı ve dağınımsız dalgalar

$\omega/k = \lambda\nu =$ sabit bağıntısına uyan dalgalar "dağınımsız dalgalar" olarak adlandırılırlar. Bu oran değişkense oluşan dalgalar "dağınımlı dalgalar" olarak adlandırılırlar. Dağınımsız bir dalga için ω'nın k'ye göre davranışı aşağıdaki şekildeki gibi $\omega = k = 0$'dan geçen $\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$ eğimli bir doğru (şekilde kırmızı renkli olan) olacaktır. Dağınımlı durum için ise, rastgele seçilmiş α değerleriyle çizilmiş, şekilde kesikli çizgilerle gösterilen eğriler gibi bir davranış ortaya çıkabilir.