



## İçindekiler

- [1\\_Basit Sistemlerin Serbest Salınımıları](#)
  - [1.1 Çizgisellik ve Üst Üste gelme İlkesi](#)
    - [1.1.1 Çizgisel homojen denklemler](#)
  - [1.2 İki serbestlik dereceli sistemlerin serbest salınımıları](#)
    - [1.2.1 Bir kipin özellikleri:](#)
    - [1.2.2 İki boyutlu harmonik salınımcı](#)
    - [1.2.3 Genelleştirilmiş \(normal\) koordinatlar](#)
    - [1.2.4 Kiplerin sistematik çözümü](#)
    - [1.2.5 Çiftlenimli iki kütenin boyuna salınımıları](#)
    - [1.2.6 Çiftlenimli iki kütenin enine salınımıları](#)
    - [1.2.7 Çiftlenimli iki LC devresi](#)
  - [1.3 Vuru](#)
    - [1.3.1 Ses dalgalarında vuru olayı](#)
    - [1.3.2 İngilizce dinleyebilenler için vuru \(beats\) hakkında bir video](#)
    - [1.3.3 Kare-yasasına göre çalışan dedektörler](#)
    - [1.3.4 Çiftlenimli sarkacı](#)
  - [1.4 Küçük açı yaklaşılıklığı tablosu](#)
  - [1.5 Kaynaklar](#)

# TİTREŞİM ve DALGAR / FİZ220

Doç. Dr. Mesut Karakoç

Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü  
2018 - 2019 Bahar Dönemi

 Kod hücrelerini, KAPAT / AÇ!

 Önceki Sayfa

 Ana Sayfa

 Sonraki Sayfa

## ▼ 1 Basit Sistemlerin Serbest Salınımıları

### ▼ 1.1 Çizgisellik ve Üst Üste gelme İlkesi

Buraya kadar çözülen üç çeşit sistemin ortaya çıkan diferansiyel denklemlerinin,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= 0 \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta &= 0 \\ \frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

hepsi **çizgisel diferansiyel denklemlerdir**. Çünkü herhangi birinde  $x$ ,  $\theta$  veya  $Q$  için kendilerinin veya türevlerinin birinci derece dışında kuvvetleri yoktur.

Örneğin, kütle-yay sisteminde  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ ,  $\sqrt{\frac{dx}{dt}}$  veya benzeri başka çizgisel olmayan terimler bulunmamaktadır. Aynı durum diğer iki sistem için de geçerlidir.

Özel olarak bu üç denklem aynı zamanda homojen diferansiyel denklemlerdir. Çünkü zamana bağlı olan  $x$ ,  $\theta$  veya  $Q$  dışında denklemler zaman bağlı başka fonksiyon içermemektedirler.

Doğadaki bir çok sistem çizgisel olmayan (nonlinear) davranış gösterebilir bunların diferansiyel denklemleri ise **çizgisel olmayan diferansiyel denklemler olarak adlandırılır**. Basit sarkacın herhangi bir açı için olan dif. denklemi bu türdendir. Fakat küçük açı yaklaşılıklığı durumunda çizgisel dif. denklem dönüsür.

#### ▼ 1.1.1 Çizgisel homojen denklemler

Çizgisel homojen denklemlerin ilginç bir özelliği üst üste gelme ilkesidir. Bu özelliğe göre böyle bir denklemde iki farklı çözümünün toplamı da aynı denklemde bir başka çözümüdür.

Örneğin, bir serbestlik dereceli bir sistemi tanımlayan hareket denklemi aşağıdaki gibi olsun;

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -C\psi + \alpha\psi^2 + \beta\psi^3 + \gamma\psi^4 + \dots \quad (1)$$

örnek:  $\psi = \psi_0 \cos(\omega t)$  bu denkmin çözümüne üst üste gelme (superpozisyon) ilkesinin sağlanabilirliği için  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  do bu denkmin çözümü olmalıdır. Bu

Eğer  $\psi_1$  ve  $\psi_2$  bu ucluklerin çözümleriyse, bu ucluk genelde (superpozisyon) ilkesi ile sağlar. Bu ilkeyi  $\psi_1 + \psi_2$  ve bu ucluklerin çözümünü elde etmek. Bu durumu doğrulamak için,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi_1}{dt^2} &= -C\psi_1 + \alpha\psi_1^2 + \beta\psi_1^3 + \gamma\psi_1^4 + \dots \\ \frac{d^2\psi_2}{dt^2} &= -C\psi_2 + \alpha\psi_2^2 + \beta\psi_2^3 + \gamma\psi_2^4 + \dots \\ \frac{d^2(\psi_1 + \psi_2)}{dt^2} &= -C(\psi_1 + \psi_2) + \alpha(\psi_1 + \psi_2)^2 + \beta(\psi_1 + \psi_2)^3 + \gamma(\psi_1 + \psi_2)^4 + \dots\end{aligned}\quad (2)$$

Üç denklemin beraber incelenmesi gereklidir,

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \frac{d^2\psi_2}{dt^2} = \frac{d^2(\psi_1 + \psi_2)}{dt^2} \quad (3)$$

eşitliğinin sağlanması beklenir. Eşitlik ancak ve ancak,

$$\begin{aligned}-C\psi_1 - C\psi_2 &= -C(\psi_1 + \psi_2) \\ \alpha\psi_1^2 + \alpha\psi_2^2 &= \alpha(\psi_1 + \psi_2)^2 \\ \beta\psi_1^3 + \beta\psi_2^3 &= \beta(\psi_1 + \psi_2)^3 \\ \gamma\psi_1^4 + \gamma\psi_2^4 &= \gamma(\psi_1 + \psi_2)^4 \\ &\dots\end{aligned}\quad (4)$$

eşitliklerinin sağlanmasıyla mümkündür. Bu eşitlıkların sağlanabilmesi içinde

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots = 0$$

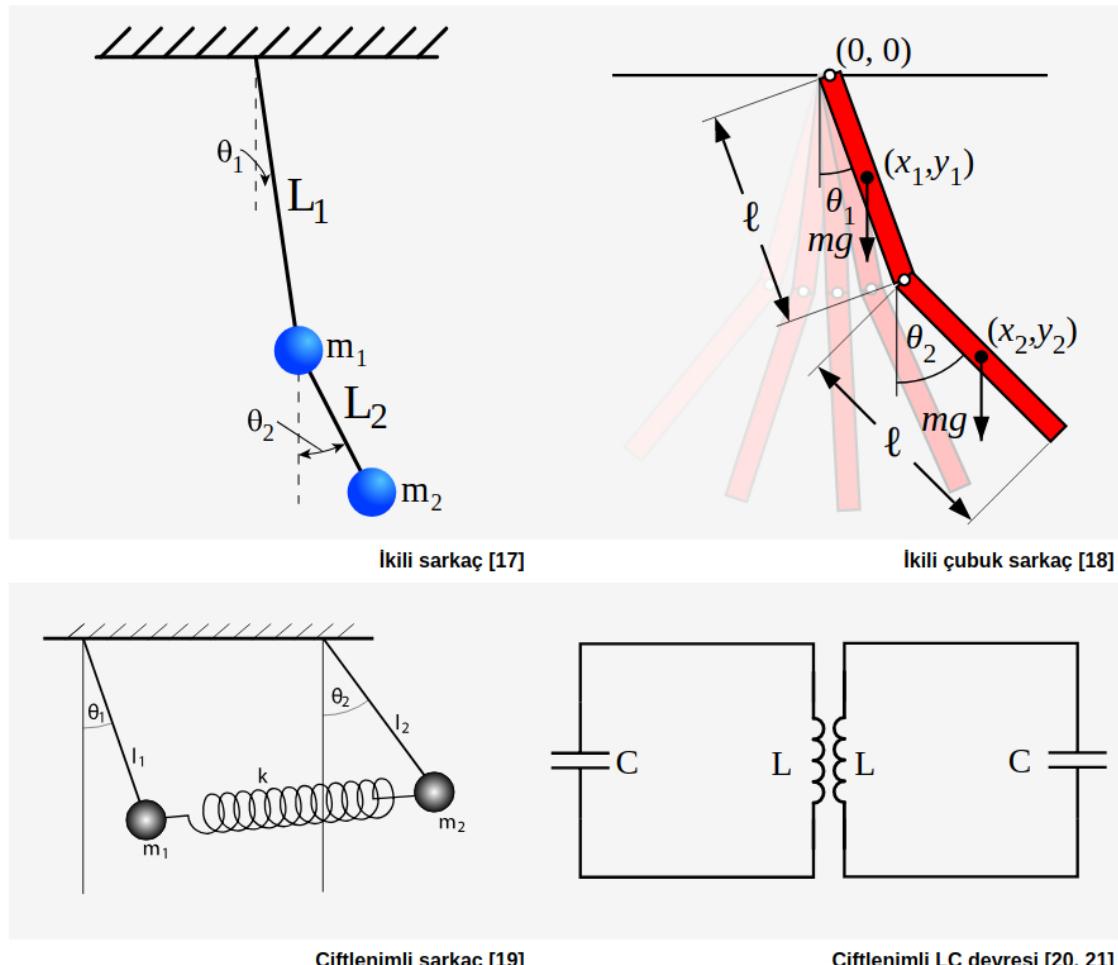
olmalıdır. Üst üste gelme ilkesi sağlanıysa aşağıdaki çıkarımlar yapılabilir.

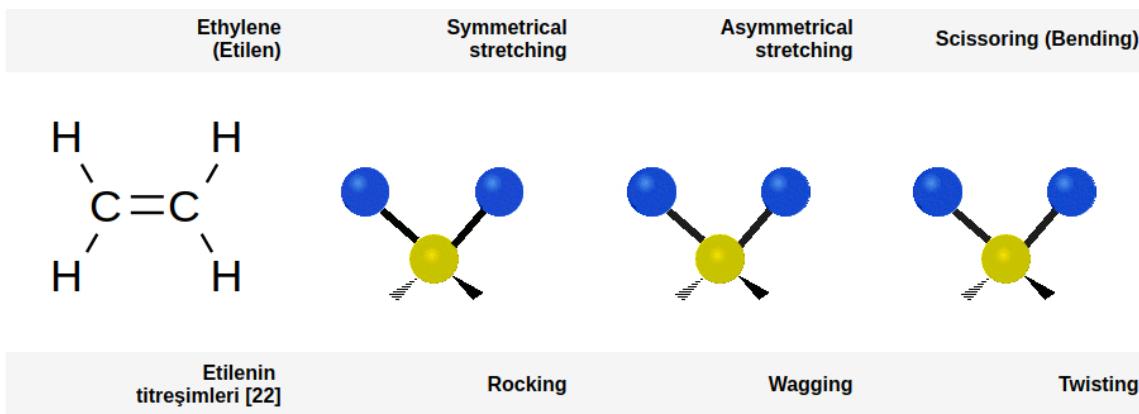
- İki farklı çözümün toplamının aynı denklemin yeni bir çözümü olabilmesi için denklemin çizgisel bir denklem olması gerekmektedir.
- Üst üste gelme ilkesinin** sadece çizgisel dif. denklemler için mümkün olduğunu.
- Üst üste gelme ilkesine uygun bir sistemin başlangıç koşulları da bu ilkeye uyarlar.
- Bu ilkeye aşağıda bir örneği verilen **homojen olmayan çizgisel denklemler** de uyarlar.

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi(t) + F(t) \quad (5)$$

- Birden çok serbestlik derecesi olan çizgisel diferansiyel denklemler de bu ilkeye uyarlar.

## 1.2 İki serbestlik dereceli sistemlerin serbest salınımıları





Doğada iki serbestlik dereceli bir çok sistem mevcuttur. Etilen molekülünün CH<sub>2</sub> kısmının titreşimleri incelenirken sadece **Scissoring** ve **Rocking** modları düşünülürse bu iki mod yukarıda verilen ve daha sonra inceleyeceğimiz **çiftlenimli sarkac** sistemini andırmaktadır.

Serbestlik derecesi bir sistemin hareketini tanımlarken kullanılan ve birbirinden bağımsız mümkün olan en az miktardaki koordinat sayısıdır. Bu koordinatlar **genelleştirilmiş koordinatlar** olarak adlandırılır [23]. Yukarıdaki şekilde verilen sarkac örneklerinde  $\theta_1$  ve  $\theta_2$ , LC devresiörneğinde ise devrelerdeki yük miktarları  $Q_1$  ve  $Q_2$  genelleştirilmiş koordinatlardır. Bu yüzden bu sistemler iki serbestlik dereceli sistemlerdir.

İki serbestlik dereceli sistemlerin davranışları çok karmaşık olabilir ve BHH davranışını göstermezler. Fakat hareket denklemleri çizgisel ise böyle bir sistemin genel hareketi iki BHH davranışının üst üste gelmesi olarak tanımlanabilir. Sistemlerin bu tür temel BHH davranışları **kipiler** veya **normal kipiler** olarak adlandırılır. Bu kipler sisteme uygun başlangıç koşulları sağlanarak elde edilebilirler. Sistemin genel denklemi **çiftlenimli** olsa bile, kip denklemleri birbirinden bağımsızdır.

BHH davranışını göstermeyen iki serbestlik dereceli çiftlenimli sarkacın çözümü ve animasyonu için aşağıdaki bağlantıyı takip ediniz.

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>

### 1.2.1 Bir kipin özellikleri:

1. Her bir kip bir BHH'tır.
2. Bir kipte sistemin bütün bileşenleri aynı freksansla salınır.
3. Aynı kipte salınan bütün bileşenler aynı anda denge konumlarından geçerler (faz farkı yoktur).

**Örnek:** Titresimi aynı sisteme ait iki cismin bir kipteki salınımıları  $\psi_a(t)$  ve  $\psi_b(t)$  ile temsil ediliyorlarsa ve aşağıdaki gibi tanımlanırlarsa,

$$\psi_{a1}(t) = A_1 \cos(\omega_{a1}t + \phi_{a1})$$

$$\psi_{b1}(t) = B_1 \cos(\omega_{b1}t + \phi_{b1})$$

mutlaka  $\omega_{a1} = \omega_{b1} = \omega_1$  ve  $\phi_{a1} = \phi_{b1} = \phi_1$  olacaktır. Dolayısıyla sadece genlikler,

$$\frac{\psi_{a1}(t)}{\psi_{b1}(t)} = \frac{A_1}{B_1}$$

birbirinden şeklinde farklı olacaktır. Aynı sistemin ikinci bir kipi içinse,

$$\psi_{a2}(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\psi_{b2}(t) = B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\frac{\psi_{a2}(t)}{\psi_{b2}(t)} = \frac{A_2}{B_2}$$

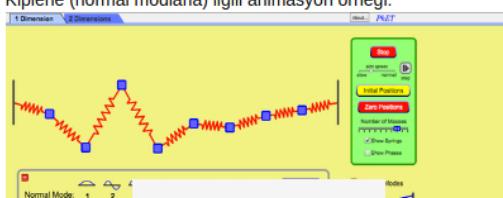
olar. Böylece üst üste gelme ilkesi gereğince a ve b cisimleri için genel çözüm,

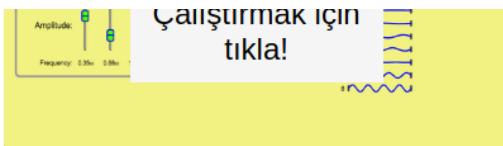
$$\psi_a(t) = \psi_{a1} + \psi_{a2}$$

$$\psi_b(t) = \psi_{b1} + \psi_{b2}$$

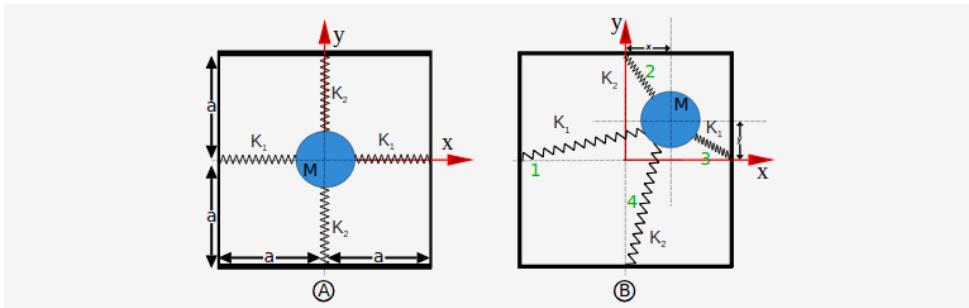
olar.

Kiplerle (normal modlarla) ilgili animasyon örneği:





### 1.2.2 İki boyutlu harmonik salınıcı



İki boyutlu harmonik salınıcı

Yukarıdaki şekilde  $x$ - $y$  düzleminde salınabilen bir  $M$  kütlesi 1,2,3,4 olarak numaralandırılmış yaylara bağlanmıştır. Bu yayların yatay olanları  $K_1$  ve düşey olanları  $K_2$  kuvvet sabitine sahiptir. Yayların hepsi kütlesiz kabul edilmektedir. A durumunda bütün yaylar  $\ddot{x}$  ile gösterilen doğal uzunluktadırlar.

Şekildeki dört yayın  $M$  kütlesine,  $xy$ -koordinat sisteminde, uyguladıkları kuvvetler,

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -K_1(l_1 - a)(\cos(\theta_1)\hat{i} + \sin(\theta_1)\hat{j}) \\ \vec{F}_2 &= -K_2(a - l_2)(\sin(\theta_2)\hat{i} - \cos(\theta_2)\hat{j}) \\ \vec{F}_3 &= -K_1(a - l_3)(-\cos(\theta_3)\hat{i} + \sin(\theta_3)\hat{j}) \\ \vec{F}_4 &= -K_2(l_4 - a)(\sin(\theta_4)\hat{i} + \cos(\theta_4)\hat{j})\end{aligned}\quad (1)$$

olur. Burada  $\theta_1$  ve  $\theta_3$ , 1. ve 3. yayların  $x$  eksenleriyle yaptıkları açılarıdır. Benzer şekilde  $\theta_2$  ve  $\theta_4$ , 2. ve 4. yayların  $y$  eksenleriyle yaptıkları açılarıdır.  $l_1, l_2, l_3$  ve  $l_4$  ise yayların uzamış veya kısalmış hallerinin uzunluklarıdır. Dört yayın da çok küçük açılarla salındıkları durumda, açılar küçüldükçe sinüs ve cosinüslü terimler,

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0}(\sin(\theta)) &= 0 \\ \lim_{\theta \rightarrow 0}(\cos(\theta)) &= 1\end{aligned}\quad (2)$$

limitlerine giderler. Buna göre küçük açı yakınlığında dört kuvvet yaklaşık olarak,

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &\approx -K_1(l_1 - a)\hat{i} \\ \vec{F}_2 &\approx -K_2(a - l_2)\hat{j} \\ \vec{F}_3 &\approx -K_1(a - l_3)\hat{i} \\ \vec{F}_4 &\approx -K_2(l_4 - a)\hat{j}\end{aligned}\quad (3)$$

halini alırlar. Burada  $l_1 - a \approx a - l_3$  olur, her ikisini yataydaki değişimi temsilten  $x$  sembolüyle gösterebiliriz. Benzer olarak  $a - l_2 \approx l_4 - a$  olur, her ikisini düşeydeki değişimi  $y$  ile gösterebiliriz. Dört kuvvetin yaklaşık hallerine dikkat edilirse her bir kuvvet ya  $x$  ya da  $y$  doğrultusundadır,  $x$  ve  $y$  doğrultularının bir karışımı mevcut değildir. Bu nedenle Newton'un ikinci yasası bu kuvvetler için aşağıdaki gibi yazılabılır.

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_3 &\approx m\vec{a}_x \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_4 &\approx m\vec{a}_y\end{aligned}\quad (4)$$

Bu denklemler yeniden,

$$\begin{aligned}-2K_1x\hat{i} &\approx m\vec{a}_x \\ -2K_2y\hat{j} &\approx m\vec{a}_y\end{aligned}\quad (5)$$

olarak yazılabılır. Böylece birbirinden bağımsız (çiftlenimsiz),

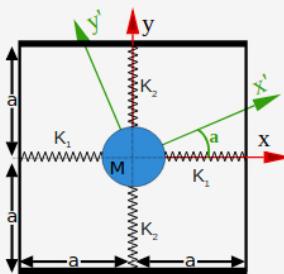
$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_1^2x &\approx 0 \\ \ddot{y} + \omega_2^2y &\approx 0\end{aligned}\quad (6)$$

BHH denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerin çözümü,

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), & \omega_1^2 &= \frac{2K_1}{m} \\ y(t) &= B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), & \omega_2^2 &= \frac{2K_2}{m}\end{aligned}\quad (7)$$

olur. Böylece  $x(t)$  hareketin bir kipine ve  $y(t)$  ise bir diğer kipine karşılık gelir. Her iki kip birbirinden bağımsızdır, fakat genel çözüm bu iki kipin bir araya getirilmesiyle oluşur.

### 1.2.3 Genelleştirilmiş (normal) koordinatlar



#### 2B harmonik salınıcı 'şansız' koordinatlar

Bu sistem kısmen çözümü ve anlaşılması kolay bir sistemdir ve çözüm sırasında önerilen  $(x, y)$  koordinat sistemi çözümü daha da kolaylaştırmıştır. Çünkü seçilen  $(x, y)$  koordinat sistemi ve yapılan küçük salınımalar yaklaşılığı sayesinde çiftlenimsiz ve çizgisel diferansiyel hareket denklemleri elde edilebilmiştir.

Elde edilen bu hareket denklemleri aynı zamanda sistemin birbirinden bağımsız kiplerini (normal modları veya normal kiplerini) elde imkanı vermiştir. Bu nedenle  $(x, y)$  koordinat sistemi bu fiziksel sistemin **normal (genelleştirilmiş)** koordinatlarındır.

Her sistem bu kadar basit olmamayıp ve her zaman bu kadar şanslı olmak mümkün olmamayıp. Yukarıdaki şekilde olduğu gibi  $(x', y')$  gibi bir koordinat sistemi de seçilebilirdi. Böyle bir koordinat sisteminde  $x'$  ve  $y'$  doğrultusundaki hareket denklemlerini çiftlenimsiz yazmak mümkün olmayacağından, çiftlenimsiz hale getirebilmek için  $(x', y')$  koordinat sisteminde yazılan denklemlere  $\alpha$  açısı kadar dönme dönüşümü uygulanmalıdır ve  $(x, y)$  koordinat sistemine ulaşılmalıdır.

### 1.2.4 Kiplerin sistematik çözümü

Yukarıdaki gibi sadece basit bir dönme dönüşümünün yeterli olamayabilecegi bir durumda da sistemin çözümü gerçekleştirilebilir. Örneğin bir sistemin diferansiyel hareket denklemleri normal koordinatları içermeden aşağıdaki gibi elde edilmiş olsun.

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -a_{11}x - a_{12}y \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -a_{21}x - a_{22}y\end{aligned}\quad (1)$$

Çözümün için sistemin kiplerden birinde salındığını varsayıyalım. Yani,  $x$  ve  $y$  doğrultularındaki hareketlerin frekanslarının ve fazlarının aynı olduğunu düşünelim. Bu durumda sistem  $x$  ve  $y$  doğrultlarında BHH yapacaktır. Hareketin denklemleri,

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\omega^2 y\end{aligned}\quad (2)$$

halini alır ve denklemlerin çözümleri,

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega t + \phi) \\ y &= B \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}\quad (3)$$

olur. Çözüm için seçilen kip hareketin genel denklemlerini sağlayacağından, Denk. 1 ve 2 birbirine eşit olmalıdır. Bu denklemlerin eşitliklerinden ,

$$\begin{aligned}(a_{11} - \omega^2)x + a_{12}y &= 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \omega^2)y &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler matris şeklinde de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - \omega^2) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

Bu denklemin sağlanabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \omega^2) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \omega^2) \end{vmatrix} = (a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0 \quad (6)$$

$\omega^2$  değişkenine göre ortaya çıkan ikinci dereceden polinom çözülürse,

$$\begin{aligned}\omega_1^2, \omega_2^2 &= \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22} \pm \Delta) \\ \Delta^2 &= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}\end{aligned}\quad (7)$$

sistemin iki normal kipine ait  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  açısal frekansları bulunmuş olur. Bulunan  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  değerleri Denk. 4 verilen iki denklemden herhangi birinde yerine konur ve Denk. 3'teki BHH çözümleriyle beraber değerlendirilirse,

$$\begin{aligned}\left( \frac{y}{x} \right)_{kip1} &= \left( \frac{B}{A} \right)_{kip1} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}^2}{a_{12}} \\ \left( \frac{y}{x} \right)_{kip2} &= \left( \frac{B}{A} \right)_{kip2} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}^2}{a_{12}}\end{aligned}\quad (8)$$

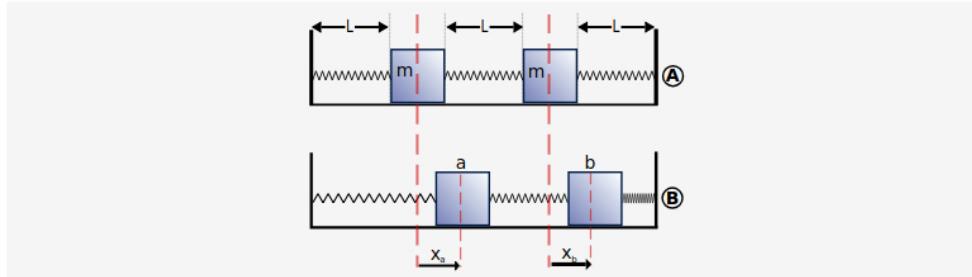
her iki kipe ait çözümlerin katsayıları arasında yukarıdaki ilişki elde edilir. Sonuçta en genel çözüm,

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (9)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (10)$$

olur. Sistemin ( $t=0$  anındaki) başlangıç koşulları biliniyorsa  $A_1, A_2, \phi_1, \phi_2$  kolayca belirlenir.  $B_1, B_2$  ise Denk. 8'le  $A_1$  ve  $A_2$ 'ye bağlıdır.

### 1.2.5 Çiftlenimli iki kütlenin boyuna salınımıları



Çiftlenimli iki kütle-yay sistemi

Şekildeki sistemdeki bütün yaylar özdeşdir, serbest hallerinin boyları  $L$ , yay sabitleri  $k$  kadardır. Küteleri  $m$  olan her iki cisimde bağlı oldukları yayların sıkışması ve genleşmesi ile bulundukları yüzey üzerinde sürütnmesiz olarak hareket etmekteyler. Bütün sistem tek boyutlu hareket yapmasına rağmen, genel durumda, her iki cisimin hareketlerinin tanımlanabilmesi için konum vektörleri  $X_a$  ve  $X_b$ 'nin her ikisine de ihtiyaç vardır. Bu nedenle bu sistem **iki serbestlik** derecelidir.

İki serbestlik derecesi olduğundan iki normal kipi vardır. Normal kiplerin özelliği, sistem kiplerden birindeyse, sistemi oluşturan her bir parçanın aynı açısal farkısları salınmasıdır. Bu sistemin mümkün olan iki kipi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

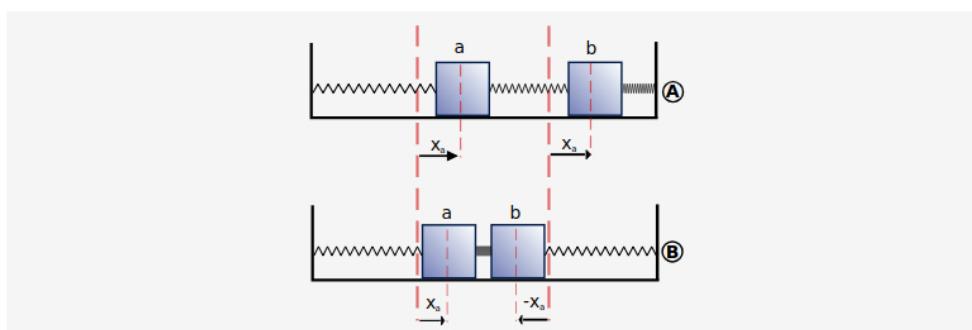
A durumundaki birinci kipte her iki yay eşit miktarda aynı yönde çekilmişlerdir. Bu nedenle bu kipte sistem ortadaki yay yokmuş, çiftlenimsizmiş, gibi salınacaktır. Böylece **a** veya **b** cisimlerini ve bağlı oldukları yaylarını ayrı ayrı tek başlarına BHH yapan bir kütle-yay sistemi gibi düşümk mukündür. Bu durumda birinci kip için,

$$X_a = X_b, \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1)$$

olur. İkinci kip her iki kütle ortadaki yayı eşit miktarda sıkıştıracak şekilde yer değiştirdiklerinde gerçekleşir. Böylece **a** ve **b**ye uygulanan kuvvetlerin büyüklükleri eşittir. Böylece her iki cisim için geri çagırcı kuvvette eşit olur. Dış yayların cisimlere uyguladıkları kuvvetler  $-kX_a$ , ortadaki yayın küteler uyguladığı kuvvetler  $-2kX_a$ 'dır. Böylece ikinci kip için,

$$X_a = -X_b, \omega^2 = \frac{3k}{m} \quad (2)$$

olur.



Çiftlenimli iki kütle-yay sisteminin kipleri

Bu problemin denklemlerini sıradan koordinatları kullanarak elde edebiliriz, fakat bunlar çiftlenimli denklemler olacaktır. Çiftlenimli bu denklemler sıradan koordinatların çizgisel (lineer) kombinasyonu kullanılarak çiftlenimsiz hale getirelebilir. Elde edilen çiftlenimsiz denklemler artık genelleştirilmiş koordinat sistemine geçmiş olurlar.

Sıradan  $X_a$  ve  $X_b$  konum vektörleriyle sistemdeki her iki cisimin hareket denklemini yazmak için öncelikle cisimlere uygulanan kuvvetleri yazalım. Soldaki yay **a** cisimine  $\vec{F}_1 = -k\vec{X}_a$  kuvvetini uygular. Aynı cisme ortadaki yay, üstteki şekildeki durum için  $|\vec{X}_a| > |\vec{X}_b|$  olduğu kabul edilirse,  $\vec{F}_2 = -k(\vec{X}_a - \vec{X}_b)$  kuvvetini uygular. **b** cisimine ise ortadaki yay tarafından uygulanan kuvvet  $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$  olacaktır. Sağdaki yay ise **b** cisimine  $\vec{F}_3 = -k\vec{X}_b$  kuvvetini uygular. Newtonun ikinci yasasını her iki cisim içinde yazacak olursak,

$$\begin{aligned} m\ddot{X}_a &= -k\vec{X}_a - k(\vec{X}_a - \vec{X}_b) \\ m\ddot{X}_b &= -k\vec{X}_b + k(\vec{X}_a - \vec{X}_b) \end{aligned} \quad (1)$$

denklemleri ortaya çıkar. İvmelerin konum vektörlerinin ikinci türevleri oldukları hatırlanır ve denklemler yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{d^2X_a}{dt^2} &= -\frac{k}{m}X_a - \frac{k}{m}(X_a - X_b) \\ \frac{d^2X_b}{dt^2} &= -\frac{k}{m}X_b + \frac{k}{m}(X_a - X_b) \end{aligned} \quad (2)$$

$$dt^2 \quad m \quad m$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler toplanır ve çıkarılırlarsa,

$$\begin{aligned} \frac{d^2(X_a + X_b)}{dt^2} &= -\frac{k}{m}(X_a + X_b) \\ \frac{d^2(X_a - X_b)}{dt^2} &= -\frac{3k}{m}(X_a - X_b) \end{aligned} \quad (3)$$

çiftlenimsiz denklemlere ulaşılır. Bu denklemlerde  $X_a + X_b \equiv X_1$  ve  $X_a - X_b \equiv X_2$  tanımlamaları yapılrsa yukarıdaki denklemler,

$$\begin{aligned} \frac{d^2X_1}{dt^2} &= -\frac{k}{m}X_1 \\ \frac{d^2X_2}{dt^2} &= -\frac{3k}{m}X_2 \end{aligned} \quad (4)$$

halini alır.  $X_1$  ve  $X_2$  genelleştirilmiş koordinatlardır ve bu koordinatlarda sistemin birinci kipi  $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ , ikinci kipi ise  $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$  birim geri çağırıcı kuvvetine sahiptir. Genelleştirilmiş koordinatlar için denklemler BHH denklemleridir ve çözümleri,

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ X_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (5)$$

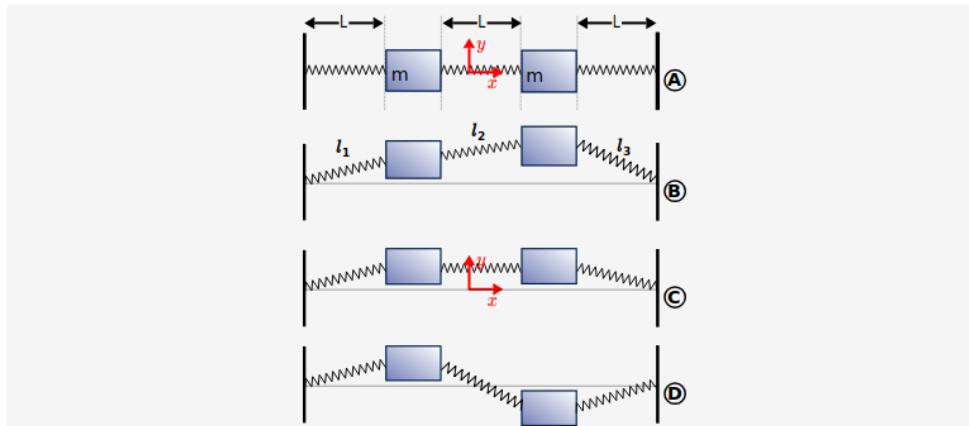
olar. Genelleştirilmiş koordinatları anlamak her zaman kolay olmayıpabilir. Sıradan koordinatlarda sistemin hareketi aşağıdaki ifadelerle belirlenir.

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)) \\ X_b &= \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)) \end{aligned} \quad (6)$$

Bu sistemin kipleri aşağıdaki bağlantıda bulunan animasyon ile daha iyi anlaşılabilir.



### 1.2.6 Çiftlenimli iki kütlenin enine salınımıları



Çiftlenimli iki kütle-yay sisteminin genel enine salınımıları ve kipleri (1)

Enine salım örneğinde de, boyuna salınımıda gibi,

- yaylar özdeş ( $k$ ) ve kütlesiz kabul edilmektedir,
- küteler ( $m$ ) özdeştir,
- iki kütlede  $xy$  düzleminde ve sadece  $y$  doğrultusunda hareket edebilirler,
- yayların serbest uzunlukları  $L_0$ 'dır,
- Şekil 1'deki A durumunda  $L - L_0 > 0$ 'dır ve yaylar gergindir,
- yayların kütelere A durumunda uyguladıkları kuvvetler  $F_0 = k(L - L_0)$ 'dır
- yayların herhangi bir andaki uzunlukları  $l_1$ ,  $l_2$  ve  $l_3$  tür.

Bu sistemin hareket denklemi B durumunda ki genel hareket şekillenimini kullanarak da kurulabilir ve çözülebilir. Fakat burada sistemin C (kip 1) ve D (kip 2)'deki kiplerini kullanarak sistemi inceleyeceğiz. Kiplerde sistemeındaki bütün cisimler aynı açısal frekans ve birim geri çağırıcı kuvveteye tabiidirler buna göre kuvvetleri yapış hareket denklemelerini elde edeceğiz.

C (kip 1) durumunda, ortadaki yay uzayıp kısalmayıacağından, her iki kütleyi tek bir noktasal cisim gibi düşünürsek sağ ve sol yay sırasıyla bu cisme,

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -k(l_1 - L_0)(\cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}) \\ \vec{F}_3 &= -k(l_3 - L_0)(-\cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}) \end{aligned} \quad (1)$$

kuvvetlerini uygularlar. Burada  $\theta$  soldaki ve sağdaki yayların  $x$  ekseniyle yaptıkları açıdır.

D (kip 2) durumunda soldaki ve ortadaki yay sırasıyla soldaki cisme,

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= -k(l_1 - L_0)(\cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}) \\ \vec{F}_2 &= -k(l_2 - L_0)(-\cos(\alpha)\hat{i} + \sin(\alpha)\hat{j})\end{aligned}\quad (2)$$

kuvvetlerini uygularlar. Burada  $\theta$  soldaki ve sağdaki,  $\alpha$  ise ortadaki yayın ise  $x$  ekseniyle yaptığı açıdır.

Üstteki denklemlerdeki sinüs ve cosinüsler için,

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{L}{l_1} = \frac{L}{l_3} & \sin(\theta) &= \frac{y}{l_1} = \frac{y}{l_3} \\ \cos(\alpha) &= \frac{L}{l_2} & \sin(\alpha) &= \frac{2y}{l_2}\end{aligned}\quad (3)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler Denk. 1 ve 2'de yerlerine konur ve  $x$  ve  $y$  doğrultularında ayrı ayrı Newton'un ikinci yasası uygulanırsa, birinci kip için,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1x} + \vec{F}_{3x} &= -k(l_1 - L_0)\frac{L}{l_1}\hat{i} + k(l_3 - L_0)\frac{L}{l_3}\hat{i} = 2m\ddot{a}_x \\ \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{3y} &= -k(l_1 - L_0)\frac{y_1}{l_1}\hat{j} - k(l_3 - L_0)\frac{y_1}{l_3}\hat{j} = 2m\ddot{a}_y\end{aligned}\quad (4)$$

denklemleri elde edilir, benzer şekilde ikinci kip içinse,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} &= -k(l_1 - L_0)\frac{L}{l_1}\hat{i} + k(l_2 - L_0)\frac{L}{l_2}\hat{i} = m\ddot{a}_x \\ \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} &= -k(l_1 - L_0)\frac{y_2}{l_1}\hat{j} - k(l_2 - L_0)\frac{2y_2}{l_2}\hat{j} = m\ddot{a}_y\end{aligned}\quad (5)$$

denklemleri elde edilir. Bu sistemi incelemeye başlarken sistemin sadece  $y$  doğrultusunda salınmasının izinli olduğunu söylemişik. Her iki kip için oluşan denklemlere göre sistem  $x$  doğrultusunda dengede görünmemektedir. Denge durumu **küçük açılı salınım** veya **gevşek yay salınımı** yaklaşıklılıkları ile sağlanabilir.

#### Küçük açılı salınım:

Bu durumda sinüs ve cosinüs ifadeleri,

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{L}{l_1} = \frac{L}{l_3} \approx 1 & \sin(\theta) &= \frac{y}{l_1} = \frac{y}{l_3} \approx \theta \\ \cos(\alpha) &= \frac{L}{l_2} \approx 1 & \sin(\alpha) &= \frac{2y}{l_2} \approx \alpha\end{aligned}\quad (6)$$

yaklaşık değerlerini alırlar. Bu durumda, her iki kip için kuvvet denklemlerinin  $x$  bileşenlerinin toplamları sıfır olacaktır.  $y$  bileşenleri ise,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1y} + \vec{F}_{3y} &= -\frac{k(L - L_0)}{L}y_1\hat{j} - \frac{k(L - L_0)}{L}y_1\hat{j} \approx 2m\ddot{a}_y \\ \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} &= -\frac{k(L - L_0)}{L}y_2\hat{j} - \frac{2k(L - L_0)}{L}y_2\hat{j} \approx m\ddot{a}_y\end{aligned}\quad (7)$$

olur. Böylece,  $F_0 = k(L - L_0)$  olduğu da hatırlanarak,

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + \frac{F_0}{mL}y_1 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \frac{3F_0}{mL}y_2 &= 0\end{aligned}\quad (8)$$

BHH denklemleri elde edilir. Buradan kiplerin  $\omega_1^2 = \frac{F_0}{mL}$  ve  $\omega_2^2 = \frac{3F_0}{mL}$  birim geri çağrırcı kuvvette sahip oldukları anlaşılabılır. Denklemlerin çözümleri bu kiplerin sahip oldukları açısal frekansları içeren genel BHH çözümleri olacaktır.

#### Gevşek yay salınımı:

Bu yaklaşıklıkta  $l_1 >> L$ ,  $l_2 >> L$  ve  $l_3 >> L$  kabulu yapılır. Önceden bildiğimiz gibi aynı zamanda  $L > L_0$ 'dır. Bu bilgilere göre gerekli inceleme yapıldığında  $x$  doğrultusundaki toplam kuvvetlerin sıfır olduğu görülür.  $y$  doğrultusundaki her iki kipin denklemleri yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1y} + \vec{F}_{3y} &= -k(1 - \frac{L_0}{l_1})y_1\hat{j} - k(1 - \frac{L_0}{l_3})y_1\hat{j} = 2m\ddot{a}_y \\ \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} &= -k(1 - \frac{L_0}{l_1})y_2\hat{j} - 2k(1 - \frac{L_0}{l_2})y_2\hat{j} = m\ddot{a}_y\end{aligned}\quad (9)$$

halini alırlar. Denklemlere gevşek yay yaklaşımı uygulanırsa parantez içindeki  $\frac{L_0}{l_1}$ ,  $\frac{L_0}{l_2}$  ve  $\frac{L_0}{l_3}$  ifadeleri 1'in yanında ihmal edilebilirler. Böylece,

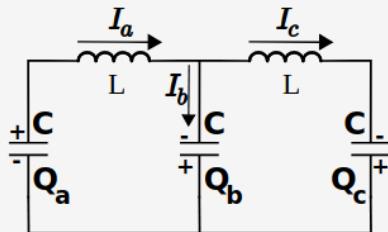
$$\begin{aligned}\vec{F}_{1y} + \vec{F}_{3y} &= -ky_1\hat{j} - ky_1\hat{j} = 2m\ddot{a}_y \\ \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} &= -ky_2\hat{j} - 2ky_2\hat{j} = m\ddot{a}_y\end{aligned}\quad (10)$$

denklemleri ortaya çıkar. BHH diferansiyel denklemi formunda yazılırlarsa,

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + \frac{k}{m}y_1 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \frac{3k}{m}y_2 &= 0\end{aligned}\quad (11)$$

halini alırlar. Denklemlerden kiplerin  $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$  ve  $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$  birim geri çağrırcı kuvvette sahip oldukları anlaşılabılır. Denklemlerin çözümleri bu kiplerin sahip oldukları açısal frekansları içeren genel BHH çözümleri olacaktır.

### 1.2.7 Çiftlenimli iki LC devresi



Çiftlenimli iki  $LC$  devresi

(1)

$LC$  devresindeki kondansatörler ve bobinler özdeştir. Bu devrenin salınım denklemleri Kirchoff kanunlarını kullanarak elde edebiliriz. Sistemin çiftlenimli iki kütle sistemine benzerliğini göz önüne bulundurulur ve  $Q_a$  yükü kondansatörün şekildeki kutuplanması bir yayın uzamış hali gibi düşünürse,  $Q_b$  ve  $Q_c$  yükü olanlar sıkışmış yaylara benzetebilir ve budurumda şekildeki kutuplanmalara sahip olurlar.

Bu şekillenime sahip devrenin sol ( $I_a$  akımı yönünde) ve sağ ( $I_c$  akımı yönünde) kapalı çevrimlerine Kirchoff'un,

$$\sum_{\substack{\text{Kapalı} \\ \text{çevrim}}} \Delta V = 0 \quad (1)$$

kanunu uygulanırsa sol ve sağ çevrim için sırasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{Q_a}{C} - L \frac{dI_a}{dt} + \frac{Q_b}{C} &= 0 \\ -\frac{Q_b}{C} - L \frac{dI_c}{dt} + \frac{Q_c}{C} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

denklemleri ortaya çıkar. Aynid devreye Kirchoff'un bir düğüm noktasına gelen akımların toplamı düğüm noktasından çıkan akımların toplamına eşittir kanunu uyugulanırsa,

$$I_a = I_b + I_c \quad (3)$$

eşitliği elde edilir. Bu akımlar  $Q_a$ ,  $Q_b$  ve  $Q_c$  yüklerinin zamanla değişiminden oluşmaktadır. Denklemle ifade etmek gerekirse,

$$\begin{aligned} I_a &= -\frac{dQ_a}{dt} \\ I_b &= -\frac{dQ_b}{dt} \\ I_c &= -\frac{dQ_c}{dt} \\ \frac{dQ_a}{dt} &= \frac{dQ_b}{dt} + \frac{dQ_c}{dt} \end{aligned} \quad (4)$$

olar. Yüklerin zamanla değişimi eksi işaretlidir, çünkü akımlar zamanla azalmaktadır. Bu durumda,

$$Q_a = Q_b + Q_c \quad (5)$$

eşitliğinin de sağlanacağı açıkları. Denk. 2, 4 ve 5 birleştirilirse,

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_a + \frac{1}{LC}Q_a + \frac{1}{LC}(Q_a - Q_c) &= 0 \\ \ddot{Q}_c + \frac{1}{LC}Q_c - \frac{1}{LC}(Q_a - Q_c) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

çiftlenimli denklemler elde edilir. Çizgisel diferansiyel denklemlerin çizgisel kombinasyonları kullanılarak çiftlenimsiz denklemelere ulaşılabilir.  $Q_1 \equiv Q_a + Q_c$  ve  $Q_2 \equiv Q_a - Q_c$  (genelleştirilmiş koordinat) tanımları yapılrsa, çiftlenimsiz denklemeler aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 &= 0, \quad \omega_1^2 = \frac{1}{LC} \\ \ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 &= 0, \quad \omega_2^2 = \frac{3}{LC} \end{aligned} \quad (7)$$

Böylece bu sisteminde diğer iki serbestlik dereceli sistemler gibi iki kipin BHH davranışına sahip olduğunu göstermiş olduk. Sistemin genel (çözümü) davranışının diğerlerinin ki gibi bu iki kipin lineer kombinasyonları olacaktır.

### 1.3 Vuru

iki serbestlik dereceli bir sistem, çiftlenimli veya çiftlenimsiz olarak,  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  açısal frekanslarına sahip iki kipe sahip olabilir. Her iki kipi içeren genel hareket denklemi iki kipin kendi hareket denklemelerinin üst üste gelmesiyle tanımlanabilir. Böyle sistemlere bir çok önek verilebilir; **çiftlenimli sarkac** sistemi veya **çiftlenimsiz (bağımsız) iki ses kaynağı (hoparlör, ses çatalı, vb.)** gibi... Her ikisi içinde değişen fizikalikler farklı olasa bile matematikleri aynıdır.

Örnek olarak verilen iki sistemin değişen fizikaliklerini  $\psi$  temsil ederse, her ikisi de iki serbestlik dereceli olduklarından iki kip için BHH davranışları ve iki kipin üst üste gelmesi,

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A \cos \omega_1 t, \\ \psi_2 &= A \cos \omega_2 t, \\ \psi &= \psi_1 + \psi_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \end{aligned} \quad (1)$$

ifadeleri ile belirlenir. Burada kolaylık olması açısından, her iki kip için de genlikler (A) ve fazlar eşit kabul edilmiştir. Sistemin hareketini tanımlayan  $\psi$ , trigonometrik fonksiyonların özellikleri kullanılarak

$$\psi = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (2)$$

olarak yeniden yazılabilir. Burada,

$$\omega_{kip} \equiv \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad \omega_{ort} \equiv \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (3)$$

tanımları yapılrsa, genel hareketi tanımlayan  $\psi$ ,

$$\psi = 2A \cos(\omega_{kip}t) \cos(\omega_{ort}t) \quad (4)$$

halini alır.  $\omega_{kip}$  ve  $\omega_{ort}$  sırasıyla, kiplenim ve ortalama açısal frekansları olarak adlandırırlar.  $\psi$ 'in yeni hali,

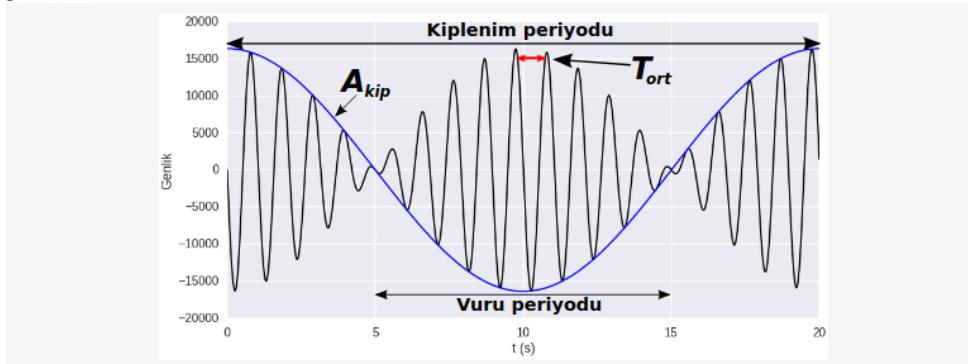
$$A_{kip}(t) = 2A \cos(\omega_{kip}t) \quad (5)$$

olmak üzere bir kere daha düzenlenirse,

$$\psi = A_{kip}(t) \cos(\omega_{ort}t) \quad (6)$$

olarak yazılabilir. Bu haliyle BHH davranışını gösteriyor gibi görünse de, BHH'den farklı olarak kiplenim genliği olarak adlandırılan  $A_{kip}$  zamanla değişmektedir.

Genel çözümün yeni hali daha çok  $\omega_1 \approx \omega_2$  veya  $\omega_{kip} \ll \omega_{ort}$  iken daha kullanışlıdır. Bu durumda sistemler aşağıdaki şekildeki duruma benzer davranış gösterirler.



$\omega_1 \approx \omega_2$  olduğunda Denk. 6'nın örnek bir durumu. (7)

Şekilden  $T_{kip} > T_{vuru} > T_{ort}$  veya  $\omega_{kip} < \omega_{vuru} < \omega_{ort}$  olduğu açıklar. Şekildeki gibi davranış gösteren bir sistem için " $T_{ort}$  peryodunda hızlı bir salınım yapar ve  $T_{kip}$  peryodu içinde yavaşça genliği değişir" yorumu yapılabilir. Bu tür sistemleri " $T_{ort}$  süresinden pek uzaklaşılması sürece yaklaşık (hemen hemen) BHH benzeri davranış yapan" sistemler olarak da tanımlamak mümkündür. Eğer  $\omega_{kip} = 0$  olursa  $\omega_{ort} = \omega_1 = \omega_2$  olur ve sistem tam harmonik hareket yapar.

### 1.3.1 Ses dalgalarında vuru olayı

Aşağıdaki örnekte dijital olarak oluşturulmuş ses dosyaları bulunmaktadır. Birinci ve ikinci ses dosyası çalındığında genlikleri ve fazları (es zamanlı açılırlarsa) aynı olan  $\psi_1(t)$  ve  $\psi_2(t)$  gibi iki ses dalgası oluşur. Frekansları birbirinden çok az farklısa aşağıdaki şekilde verildiği gibi (mavi renkli düz çizgiler) bir vuru olayı olur.

İnsan beyni (kulaklar aracılığıyla) bu  $\psi_1$  ve  $\psi_2$  ses dalgalarının üst üste gelmiş halini, ses dalgalarının frekanslarına bağlı olarak,

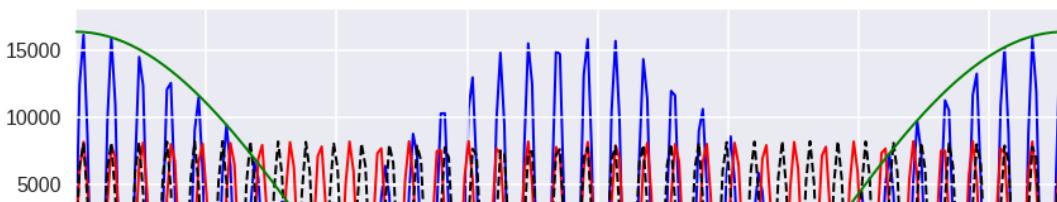
- iki farklı nota veya,
- ayırt edilemez ama genliği değişen

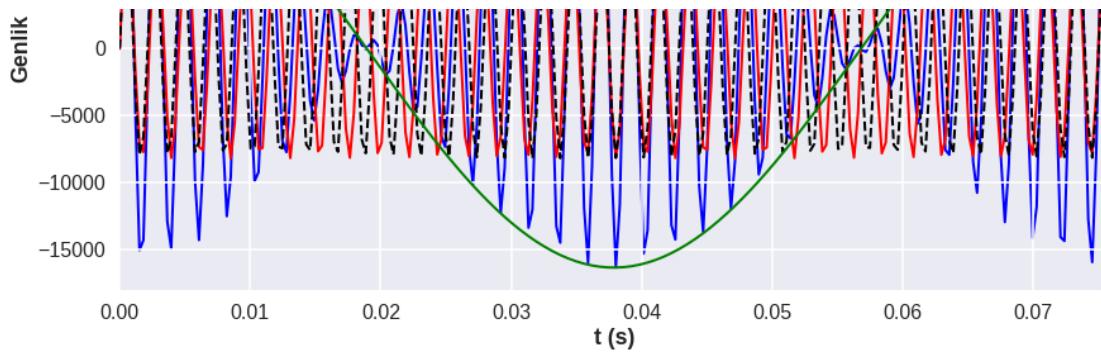
bir ses olarak duyar. Eğer  $\psi_1$  ve  $\psi_2$ 'nin frekansı arasında  $v_1 \geq 1,06 v_2$  ilişkisi varsa iki farklı nota duyulabilir.  $v_1$  ve  $v_2$  arasındaki fark 10~Hz ve altıysa ayırt (usta ve iyi bir müzik kulancına sahip bir müzisyen değilseniz) genliği değişen tek bir nota duyulur.

Aşağıdaki örnekte  $v_1 \geq 1,06 v_2$  ilişkisi olan bir örnek hazırlanmıştır. 10~Hz ve altı için Python kaynak kodu açılarak  $v_1 = f1 = 440.0$ ~Hz ve  $v_2 = f2 = 440.1$ ~Hz olacak şekilde değiştirildiğinde yukarıda bahsi geçen ikinci durum da gözlenebilir.

Aşağıdaki ses dosyalarından ilk ikisi sırasıyla  $\psi_1$  ve  $\psi_2$ 'yi üçüncüüsü ise  $\psi_1 + \psi_2$ 'yi içermektedir.

```
/home/bf/Desktop/CahitArf/Desktop/fiz220_titresim_ve_dalgalar_dersi/Titresim_ve_Dalgalar_new/dersnotları
ÖNCEKİ SES DOSYALARI
-rw-rw-r-- 1 1002 1002 1,6M Şubat 13 15:55 ./sesler/13_2Hz_d20190213t155437.wav
-rw-rw-r-- 1 1002 1002 1,6M Şubat 13 15:55 ./sesler/440_0Hz_d20190213t155437.wav
-rw-rw-r-- 1 1002 1002 1,6M Şubat 13 15:55 ./sesler/466_4Hz_d20190213t155437.wav
ÖNCEKİ SES DOSYALARI SİLİNDİ!
ls: cannot access './sesler/*wav': No such file or directory
```





▶ 0:00 / 0:18 .sesler/440\_0Hz\_d20190213t155514.wav

▶ 0:00 / 0:18 .sesler/466\_4Hz\_d20190213t155514.wav

▶ 0:00 / 0:18 .sesler/13\_2Hz\_d20190213t155514.wav

```
t_1(s)      t_2(s)      t_kip(s)      t_vuru(s)      t_ort(s)      t_kayit(s)
0.0022727   0.0021441   0.0757576   0.0378788   0.0022065   18.0000000
```

```
f1(Hz)      f2(Hz)      f_kip(Hz)      f_vuru(Hz)      f_ort(Hz)
440.0000000  466.4000000  13.2000000  26.4000000  453.2000000
```

### ▼ 1.3.2 İngilizce dinleyebilenler için vuru (beats) hakkında bir video

Out[3]:

### ▼ 1.3.3 Kare-yasasına göre çalışan dedektörler

Yukarıdaki ses dalgalarında vuru örneğine ait genlik değişim şekli incelendiğinde  $A_{kip}$  genliğinin artı (+) ve eksi (-) değerler aldığı rahatça görülebilir. Fakat bu şekillerin temsili üst üste binmiş ses (dalgaşı)  $\psi_1 + \psi_2$  dinlendiğinde  $A_{kip}$ 'in artı ve eksi değerleri için kulağımız farklı sinyaller üretmeyecektir ve dolayısıyla beynimiz  $+A_{kip}$  ve  $-A_{kip}$  için duyulan seslerin aynı olduğu sonucuna varacaktır.

Bu nedenle kulaklarımıza kare-yasasına uyan dedektörler olarak tanımlanırlar. Matematiksel olarak şu şekilde ifade edebiliriz.

$$A_{kip}(t) = 2A \cos(\omega_{kip}t) \quad (1)$$

Kip genliğinin karesi,

$$[A_{kip}(t)]^2 = 4A^2 \cos^2(\omega_{kip}t) \text{ ve} \quad (2)$$

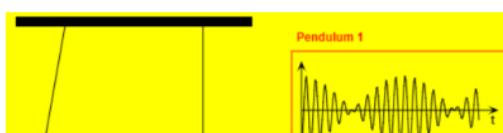
$$= 4A^2 \frac{1 + \cos(2\omega_{kip}t)}{2} \text{ veya} \quad (3)$$

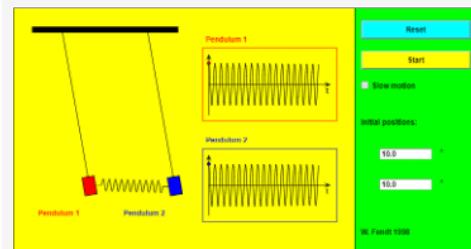
$$= 2A^2 (1 + \cos(\omega_{vuru}t)) \text{ veya} \quad (4)$$

olur. Burada  $\omega_{vuru} = 2\omega_{kip} = |\omega_1 - \omega_2|$ 'dır Böylece kulağımız  $\omega_{vuru}$  frekanslı ve  $[A_{kip}(t)]^2 = 2A^2$  genlikli bir ses (sinyal) duyar.

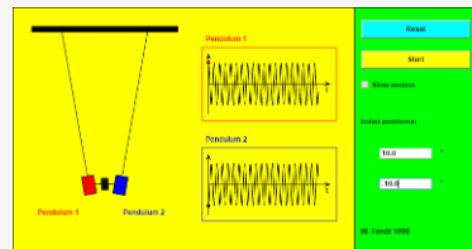
### ▼ 1.3.4 Çiftlenimli sarkaç

Aşağıdaki yarı-gerçeklikli deneyler yukarıdaki bağlantıdaki web uygulaması ile yapılmıştır.

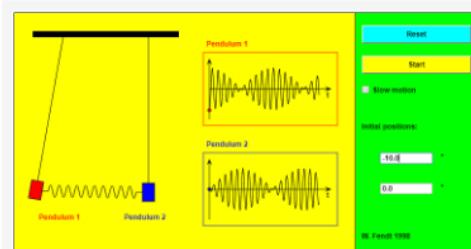




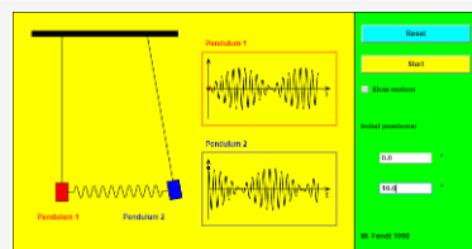
Çiftlenimli sarkacın 1. kipi.



Çiftlenimli sarkacın 2. kipi.



a (kırmızı) kütlesi ile vurunun başlaması.



b (mavi) kütlesi ile vurunun başlaması.

Sadece kağıt (ekran) düzleniminde salınımı izinli olan, yukarıdaki şekillerde çeşitli durumları gösterilen, bir çiftlenimli sarkacın iki serbestlik derecesi ve dolayısıyla iki kipi (normal modu) vardır.

Bunlardan biri aynı genelde harekete başladıları ( $\psi_a = \psi_b$ ) 1.kiptir ve sanki çiftlenimi sağlayan (kütlesiz ve Hooke yasasına uyduğu kabul edilen) yay yokmuş gibi hareket ederler. Bu durumda basit sarkaçla aynı davranışını göstereceklerdir. Bu nedenle geri 1. kipin birim geri çağrıncı kuvveti,

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad (1)$$

olur. İkinci kip ise  $\psi_a = -\psi_b$  seçilerek başlatılabilir. Bu kip ise kütle-yay (1 kütle - 1 yay) ve basit sarkacın bir karışımı gibi düşünülebilir. Bu düşünceye göre iki kütleden herhangi birine basit sarkacın ve kütle-yay sistemin birim çağrıncı kuvvetlerinin toplamı uygulanacaktır. Sırasıyla basit sarkaç ve kütle-yay sistemin birim geri çağrıncı kuvvetleri  $\omega_b^2 = \frac{g}{l}$  ve  $\omega_{ky}^2 = \frac{2K}{M}$  ile verilirler. Böylece bu sistemin 2. kipi için birim geri çağrıncı kuvvet,

$$\omega_2^2 = \omega_b^2 + \omega_{ky}^2 \quad (2)$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M} \quad (3)$$

olur.  $\omega_{ky}^2 = \frac{2K}{M}$  ifadesindeki 2 katsayısi ortadaki yayın  $\psi_a + \psi_b$  kadar, yani iki kat, sıkışmış olmasından kaynaklanmaktadır.

Böylece her iki kip için,

$$\psi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad (4)$$

$$\psi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (5)$$

çözümleri var olur. Sıradan koordinatlar cinsinden  $a$  ve  $b$  kütelerinin davranışlarını veren genel çözümler bu iki kipin üst üste gelmesiyle,

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2 \quad (5)$$

$$\psi_b = \psi_1 - \psi_2 \quad (6)$$

olarak yazılabilirler.

Örnekteki çiftlenimli sarkaçta vuru olayını gerçekleşmesi için  $\omega_1 \approx \omega_2$ ,  $A_1 = A_2$  ve  $\phi_1 = \phi_2$  olmalıdır. Özel olarak kolaylık olması açısından faz değerlerinin her ikisi de sıfır seçilebilir. Böylece gerekli matematik düzenlemelerden sonra kip genelikleri,

$$A_{kip}(t) = 2A \cos(\omega_{kip} t) \quad (7)$$

$$B_{kip}(t) = 2A \sin(\omega_{kip} t) \quad (8)$$

olur.  $a$  ve  $b$ 'nin davranışını veren ifadeler ise,

$$\psi_a = A_{kip}(t) \cos(\omega_{ort} t) \quad (9)$$

$$\psi_b = B_{kip}(t) \sin(\omega_{ort} t) \quad (10)$$

olurlar. Elde edilen bu denklemler ve türevleri (kütelerin hızları) için  $t = 0$  (başlangıç) davranışları,

$$\psi_a(0) = 2A, \psi_b(0) = 0, \dot{\psi}_a(0) = 0, \dot{\psi}_b(0) = 0, \quad (11)$$

olacaktır. Bu yukarıda verilen şekillerdeki  $a$  kütlesi ile vuruun başlangıçları oluyor.

$a$  kütlesi kullanılarak başlatılan vuru olayı (ilgili şekli inceleyin) değerlendirildiğinde, görülmektedir ki,  $a$  kütlesi de  $b$  kütlesi de başlangıçta durgundur. Fakat  $a$  kütlesinin potansiyel enerjisi en büyük değerinde,  $b$  kütlesinin potansiyel enerjisi sıfırdır. Vuru olayı bu potansiyel enerjinin tamamının önce  $b$ 'ye aktarılması sonra tamamen tekrar  $a$ 'ya aktarılmasıyla gerçekleşir. Böylece vuru tamamlandığında  $b$  tekrar durgun hale geçecektir.

Yukarıdaki simülasyonda gerekli ölçüler ve hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki sonuçlara ulaşılır. Elde edilen değerler çizim için kullanıldığından aşağıdaki şekilde ulaşılır. Bu şekilde simülasyonun kendisinde verilen çizimlerle, burada yeniden yapılan çizimlerin hemen hemen aynı olduğu görülebilir.

Simülasyon deneyinden ölçülen periyotlar

$10T_1 = 20.230$  s,  $10T_2 = 18.580$  s

$T_{vuru} = 20.390$  s

Deneysel açısal frekanslar

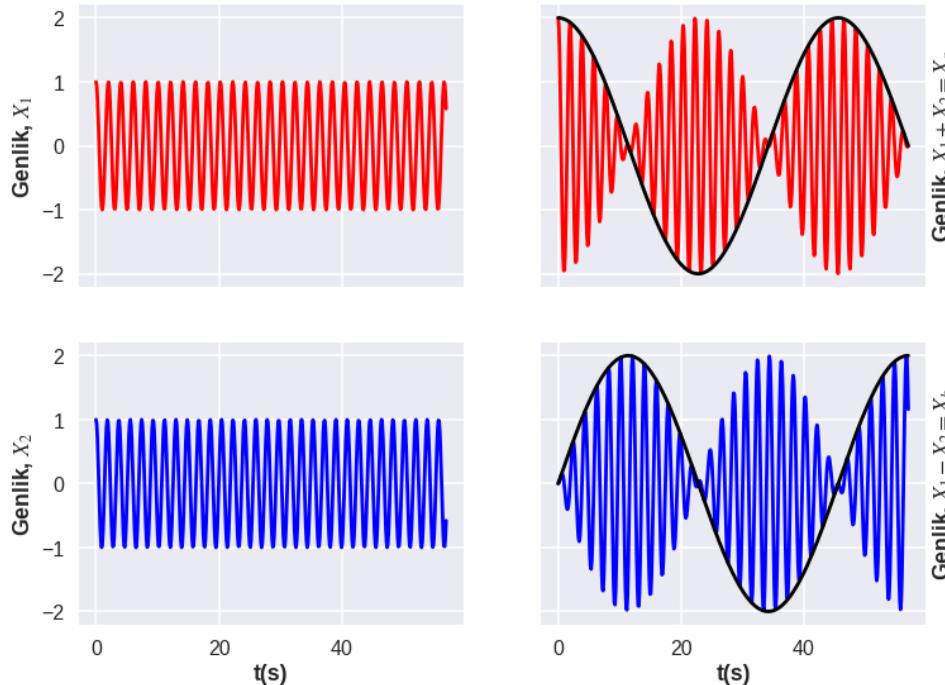
$w_1, w_2 = 3.106$  rad/s,  $3.382$  rad/s, kip frekansları

$w_{kip} = (w_2-w_1)/2 = 0.138$  rad/s

$w_{ort} = (w_2+w_1)/2 = 3.244$  rad/s

$w_{vuru} = (w_2-w_1) = 0.276$  rad/s, kip frekansları farkından

$w_{vuru} = 0.308$  rad/s, doğrudan deneyden



#### 1.4 Küçük açı yaklaşılıklığı tablosu

Aşağıdaki tablolar iyi incelenirse 15 derece altındaki açı değerleri için %1'lük hata payıyla hesaplar yapmak mümkündür. Bu bilgi gerçek bir deney yaparken faydalı olabilir.

pi = 3.14159265359	theta(Deg)	-theta(Deg)	cos(theta)	%hata	L0_x (cm)	L0_y (cm)	L0-L0_y (cm)
	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	155.00000	0.00000
	5.00000	4.99366	0.99619	0.12688	13.50914	154.41018	0.58982
	10.00000	9.94931	0.98481	0.56092	26.91547	152.64520	2.35480
	15.00000	14.82924	0.96593	1.13841	40.11695	149.71850	5.28150
	20.00000	19.59631	0.93969	2.01845	53.01312	145.65236	9.34764
	25.00000	24.21424	0.90631	3.14303	65.50583	140.47771	14.52229
	30.00000	28.64789	0.86603	4.50703	77.50000	134.23394	20.76606
	35.00000	32.86351	0.81915	6.10426	88.90435	126.96857	28.03143
	40.00000	36.82902	0.76604	7.92746	99.63208	118.73689	36.26311
	45.00000	40.51423	0.70711	9.96837	109.60155	109.60155	45.39845
pi = 3.14	theta(Deg)	-theta(Deg)	cos(theta)	%hata	L0_x (cm)	L0_y (cm)	L0-L0_y (cm)
	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	155.00000	0.00000
	5.00000	4.99113	0.99620	0.17738	13.50231	154.41078	0.58922
	10.00000	9.94432	0.98482	0.55685	26.90196	152.64758	2.35242
	15.00000	14.82189	0.96596	1.18738	40.09708	149.72383	5.27617
	20.00000	19.58678	0.93975	2.06609	52.98735	145.66174	9.33826
	25.00000	24.20276	0.90640	3.18898	65.47476	140.49219	14.50781
	30.00000	28.63472	0.86616	4.55094	77.46437	134.25450	20.74550
	35.00000	32.84897	0.81933	6.14579	88.86502	126.99609	28.00391
	40.00000	36.81348	0.76627	7.96630	99.59005	118.77214	36.22786
	45.00000	40.49810	0.70739	10.00422	109.55790	109.64518	45.35482

#### 1.5 Kaynaklar

- <https://www.britannica.com/science/natural-vibration>
- [Deep Interior of the Earth, J.A. Jacobs](#)
- [Luciano Rezzolla, Prof. Dr. Chair of Theoretical Astrophysics, Institute of Theoretical Physics, Frankfurt, Germany](#)

4. [Dynamic mechanical oscillations during metamorphosis of the monarch butterfly](#), A.E. Pelling, P.R. Wilkinson, R. Stringer, J.K. Gimzewski, *J. R. Soc. Interface*(2009)6, 29–37.
5. [Ultrasound Baby Heartbeat](#) (<https://makeagif.com>)  
[Ultrasound Baby Heartbeat](#), Videosu.
6. **Dalgalar**, Frank S. Crawford jr., Berkeley Fizik Dersleri 3. Cilt, Bilim Yayınevi.
7. [Dr. Mustafa POLAT'ın Titreşim ve Dalgar Ders Notu](#).
8. Harmonic oscillator, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Harmonic\\_oscillator.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Harmonic_oscillator.svg).
9. Doug Davis, Physics Professor Emeritus, Eastern Illinois University, <https://www.ux1.eiu.edu/~cfadd/1350/13Oscill/Images/UCM1.gif>.
10. Oscillating pendulum, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oscillating\\_pendulum.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oscillating_pendulum.gif).
11. Pendulum forces, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PenduloTmg.gif>.
12. Simple Pendulum, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simple\\_pendulum\\_generalized\\_coordinates.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simple_pendulum_generalized_coordinates.svg).
13. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polar\\_coordinates\\_with\\_unit\\_vectors.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polar_coordinates_with_unit_vectors.svg)
14. PhET Interactive Simulations . **Provided by:** University of Colorado Boulder . **Located at:** <http://phet.colorado.edu>. **License:** CC BY: Attribution
15. PHYSICS for Scientists and Engineers with Modern Physics 7th ed. sayfa 908, R.A. Serway, J. W. Jewett, Jr, THOMSON BROOKS/COLE.
16. College Physics, 9th ed. sayfa 705, R.A. Serway, C. Vuille, BROOKS/COLE.
17. Double Pendulum, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-Pendulum.svg>.
18. Double compound pendulum, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-compound-pendulum-dimensioned.svg>.
19. Coupled pendulum, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coupled.svg>.
20. Coupled LC circuits, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LC\\_parallel\\_simple.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LC_parallel_simple.svg).
21. Circuit symbols, <https://github.com/fsmMLK/inkscapeCircuitSymbols>.
22. [Molecular Vibration](#), wikipedia.
23. [Generalized\\_coordinates](#), wikipedia.