İçindekiler

TİTREŞİM ve DALGAR / FİZ220

Doç. Dr. Mesut Karakoç

Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü
2018 - 2019 Bahar Dönemi

Kod hücrelerini, KAPAT / AÇ! Önceki Sayfa Ana Sayfa Sonraki Sayfa

1 Zoruna Salınımlar ve Rezonans

1.1 Giriş

Yazılacak....

1.2 Bir boyutlu sönümlü harmonik salınıcının zoruna salınımı

Nokta gibi kabul edebileceğim m kütleli bir nesnenin tek boyutta x olarak adlandırılan eksen doğrultusunda salınımını inceleyelim. Eğer bu bir kütle-yay sistemiyse, $x(t)$ kadar denge konumundan uzaklaşan cisim üzerine ($x(t)$ kadar genleşen veya sıkışan) yay tarafından $F_{yay} = -kx(t)$ gibi bir kuvvet uygulanır. Kuvveteki yay sabiit, $k = m\omega_0^2$, olarak da tanımlanabilir. Burada ω_0 serbest salınan (dış kuvvet altında kalmadan) kütle yay sisteminin doğal açısal frekansıdır. Eğer bu sistemi daha gerçekçi hale getirmek istersek, $F_s = -m\Gamma\dot{x}(t)$ şeklinde kütleye etki eden bir sürtünme kuvveti de tanımlanabilir. Burada Γ birim kütle başına sürtünme veya sönüm sabitidir. Bu kuvvetlere ek olarak sistem dışarıdan $F(t)$ gibi bir dış kuvvetle de zorlanıyor (sürülüyor) olabilir. Bu durumda Newton'un ikinci yasası gereği böyle bir sistemdeki kütlenin hareket denklemi,

$$m\ddot{x}(t) = F_{yay} + F_s + F(t) \tag{1}$$
$$m\ddot{x}(t) = -m\omega_0^2 x(t) - m\Gamma\dot{x}(t) + F(t) \tag{2}$$

olur. Sürücü kuvvet olmadığı, $F(t) = 0$, durumda sistem sönümlü bir serbest salınım gerçekleştirir.

1.2.1 Serbest sönümlü salınım durumu $F(t) = 0$

Bu durumda Denk. 1,

$$\ddot{x}(t) + \Gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{3}$$

halini alır. Ortya çıkan denklem ikinci dereceden çizgisel (lineer) homojen bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü,

$$x_1(t) = C\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_1 t + \theta) \tag{4}$$

olarak önerilebilir. Önerilen çözümün denklemi sağlayabilmesi için,

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad \text{ve} \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 \tag{5}$$

olmalıdır. Trigonometrik fonksiyonlar arası dönüşüm bağıntıları hatırlanırsa,

$$C\cos(\omega_1 t + \theta) = -C\sin(\theta)\sin(\omega_1 t) + C\cos(\theta)\cos(\omega_1 t)$$
$$A_1 = -C\sin(\theta)$$
$$B_1 = C\cos(\theta)$$
$$C\cos(\omega_1 t + \theta) = A_1\sin(\omega_1 t) + B_1\cos(\omega_1 t)$$

ve bu dönüşümler önerilen çözümde kullanılırsa hareket denkleminin çözümü,

$$x_1(t) = e^{-(\frac{1}{2})\frac{t}{\tau}}(A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t)) \tag{6}$$

halini alır. Bu yeni haline $x(0)$ ve $\dot{x}(0)$ başlangıç şartları uygulanırsa,

$$x_1(0) = B_1$$
$$\frac{d}{dt} x_1(t)\Big|_{t=0} = A_1\omega_1 - \frac{B_1\Gamma}{2}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan A_1 ve B_1 sabitleri,

$$B_1 = x_1(0)$$
$$\omega_1 A_1 = \dot{x}_1(0) + \frac{\Gamma}{2}x_1(0)$$

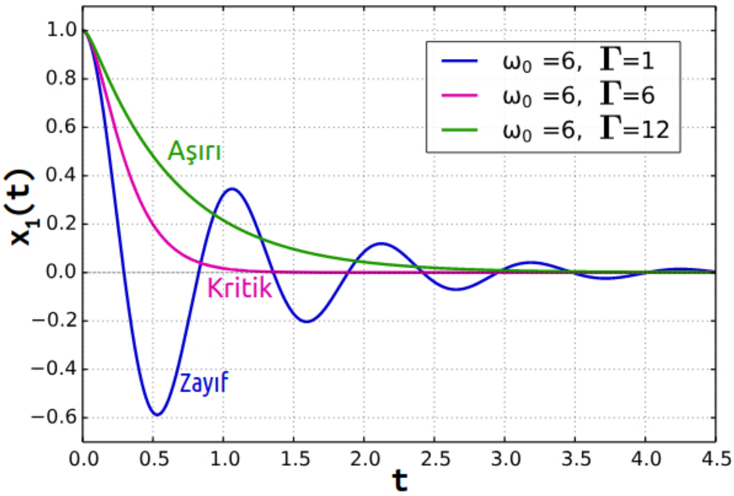
olurlar. Böylece hareket denkleminin çözümü,

$$x_1(t) = e^{-\frac{\Gamma t}{2}}\left(x_1(0)\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{\omega_1}\left[\dot{x}_1(0) + \frac{\Gamma}{2}x_1(0)\right]\sin(\omega_1 t)\right) \tag{7}$$

halini alır. $\omega_1^2 = \omega_0^2 - (\frac{\Gamma}{2})^2$ olduğu hatırlanırsa bu sistemin salınımları

- $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$ ise zayıf sönümlü,
- $\frac{\Gamma}{2} \approx \omega_0$ ise kritik sönümlü,
- $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$ ise aşırı sönümlü

gibi sınıflandırılır. Üç durum için $x_1(t)$'nin zamana göre değişimi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Kritik sönüm durumunda $\frac{\Gamma}{2} \approx \omega_0$ olduğundan $\omega_1 \approx 0$ olur. Böylece sistemin hareket çözümün denklemi,

$$x_1(t) \approx x_1(0)\, e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \tag{8}$$

ifadesine indirgenir. Bu durumda sistemin davranışı yukarıdaki şekilde gösterilmiştir. Aşırı sönüm durumunda ise ω_1^2 eksi değerler alır. Bu durumda ω_1 bir karmaşık (kompleks) sayıya dönüşür ve

$$\omega_1 = \pm i\,|\omega_1| \tag{9}$$
$$|\omega_1| = \sqrt{(\frac{\Gamma}{2})^2 - \omega_0^2} \tag{10}$$

olarak yazılabilir. Burada i bir sanal sayıdır ve $i^2 = -1$'dir. Aşırı sönümlü durum için hareket denkleminin çözümü,

$$x_1(t) = e^{-\frac{\Gamma t}{2}}\left(x_1(0)\cosh(|\omega_1|t) + \frac{1}{\omega_1}\left[\dot{x}_1(0) + \frac{\Gamma}{2}x_1(0)\right]\sinh(|\omega_1|t)\right) \tag{11}$$

haline gelir.

Böyle bir sistemin herhangi bir andaki toplam enerjisinin (kinetik + potansiyel) zamana göre değişimi,

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2(t) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_1^2(t) \tag{12}$$

şeklinde yazılabilir. Toplam enerji için yazılan bu ifadeyi çok zayıf sönüm ($\frac{\Gamma}{2} << \omega_0$) durumu için inceleyelim. Bu durumda x_1'in $e^{-\frac{\Gamma t}{2}}$ kısmı bir periyot üzerinden çok fazla değişmeyecektir ve bu kısım zamanla değişimiyormuş gibi kabul edilebilir. Böylece sadece kosinüs ve sinüslü kısmın bir periyot üzerinden ortalaması alınırsa,

$$E_0 = \frac{1}{2}m\left(\omega_1^2 + \omega_0^2\right)\left(\frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}B_1^2\right) \tag{13}$$

ortalama E_0 yukarıdaki gibi olur. Böylece çok zayıf sönümlü bir sistem için enerjinin, $E(t)$, zamanla değişimi,

$$E(t) = E_0 e^{-\Gamma t} = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{14}$$

olur.

1.2.2 Harmonik sürücü kuvvet etkisinde kararlı durum salınımı

Bir sistemi süren $F(t)$ gibi bir kuvvet çok çeşitli şekilde olabilir. $F(t)$ kuvveti zamanın bir fonksiyonu olarak bilinse bile hareket denkleminin çözümünü zorlaştıracak bir yapıya sahip olabilir. Titreşim hareketleri doğası gereği bir birini tekrarlama eğiliminde olduğuna göre $F(t)$ kuvveti de böyle bir doğaya sahip olabilir. Bu durumda $F(t)$ kuvvetinin de bir tekrarlam frekansı olacaktır. Dolayısıyla böyle bir kuvveti temsil eden $F(t)$ fonskiyonu çeşitli ω frekansları üzerinden aşağıdaki gibi bir Fourier serisine açılabilir.

$$F(t) = \sum f(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega)) \tag{15}$$

İncelediğimiz bir serbestlik dereceli sistem için daha önce yazdığımı hareket denklemi yeniden düzenlenirse,

$$m\ddot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) + m\Gamma\dot{x}(t) = F(t) \tag{16}$$

halini alır. Burada $F(t)$ yerine Fourier serisi açılını koyabiliriz. Böylece,

$$m\ddot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) + m\Gamma\dot{x}(t) = \sum f(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega)) \tag{17}$$

denklemine ulaşılır. Böyle bir denklemi çözmektense,

$$m\ddot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) + m\Gamma\dot{x}(t) = F_0\cos(\omega t) \tag{18}$$

şeklinde bir denklemi çözmek daha kolaydır. Burada $F_0\cos(\omega t)$ yukarıdaki Fourier serisinin elemanlarından birisidir. $\phi(\omega)$ faz farkı başlangıç durumu için sıfır kabul edilmiştir. Bu yeni denklemi çözerek aslında serinin her bir elemanı için çözümü elde etmiş oluyoruz. Daha sonra, çizgisel diferansiyel denklemlerin bir özelliği olan, üst üste gelme ilkesi gereğince bu çözümlerin üst üste gelmesiyel $F(t)$ için çözüm bulunmuş olur.

Ortaya çıkan denklemin zayıf sönümlü durumdaki kararlı hal çözümlerini arıyoruz. Kararlı hal sürücü kuvvetin uygulanma süresinin sistemin sönüm süresinden uzun olduğu durumda ortaya çıkar. Böyle bir durumda sistem artık sürücü kuvvetin frekansıyla salınmaya başlar.

1.2.3 Soğrucu ve esnek genlik

Hareket denkleminin Kararlı hali için,

$$x_k(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{19}$$

gibi bir çözüm önerilebilir veya Python diline ait SymPy kütüphanesi kullanılarak en genel çözüm aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$x(t) = C_1 e^{\frac{t\left(-\Gamma-\sqrt{\Gamma^2-4\omega_0^2}\right)}{2}} + C_2 e^{\frac{t\left(-\Gamma+\sqrt{\Gamma^2-4\omega_0^2}\right)}{2}} + \frac{F_0\Gamma\omega\sin(\omega t)}{m\left(\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right)} - \frac{F_0\omega^2\cos(\omega t)}{m\left(\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right)} + \frac{F_0\omega_0^2\cos(\omega t)}{m\left(\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right)}$$

Genel çözümdeki C_1 ve C_2 kat sayılı sönümden sorumlu kısımlar kararlı duruma geçmek için gerekli süre beklendiği takdirde sıfıra yaklaşacaktır. Bu durumda kararlı durum çözümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathrm{x_k}(t) = \frac{F_0\Gamma\omega\sin(\omega t)}{m\left(\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right)} + \left(-\frac{F_0\omega^2}{m\left(\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right)} + \frac{F_0\omega_0^2}{m\left(\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right)}\right)\cos(\omega t)$$

Hareket denkleminin çözümü için önerilen ilk ifade ve SymPy yardımıyla elde edilen ifade karşılaştırıldığında A ve B katsayılarının,

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{\Gamma\omega}{\left(\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\right)} \equiv A_{soğ} \tag{20}$$

$$B = \frac{F_0}{m}\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\right)} \equiv A_{es} \tag{21}$$

olacağı görülebilir. Burada tanımlanan yeni katsayılara, $A_{soğ}$ ve A_{es}, sırasıyla soğurucu ve esnek genlik adları verilir. A ve B katsayılarına verilen yeni isimler, "Giriş Gücü" tanımlanınca anlam kazanır. Giriş gücü sistemi süren kuvvetin sisteme aktardığı güç olarak düşünülebilir. Anlık giriş gücü,

$$P(t) = F(t)v(t) \tag{22}$$

şeklinde tanımlanır. Çalıştığımız bir boyutlu sistemin için,

$$P(t) = F(t)\,\dot{x}_k(t) = F_0\cos(\omega t)\big(\omega A\cos(\omega t) - \omega B\sin(\omega t)\big) \tag{23}$$

olur. Sistemin giriş gücünün bir periyot üzerinden ortalaması,

$$\overline{P} = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} P(t)dt \tag{24}$$

$$\overline{P} = F_0\omega A\int_{t_0}^{t_0+T}\cos^2(\omega t)dt - F_0\omega B\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(\omega t)\sin(\omega t)dt \tag{25}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2}F_0\omega A \tag{26}$$

olur. Elde edilen bu ortalama güç ifadesi bir periyot boyunca sistem tarafından soğurulan giriş gücü olarak adlandırılır. Bu nedenle $A \equiv A_{soğ}$ tanımı yapılır ve $\overline{P}$,

$$\overline{P} = \frac{1}{2}F_0\omega A_{soğ} \tag{27}$$

şeklinde yeniden yazılır. P(t) anlık güçteki B katsayılı kısım anlık güce katkıda bulunurken bir periyot üzerinden ortalaması ise sıfırdır. Yine de bu kısım önemsizdir denemez. Çünkü ω sürücü frekansı ω_0 frekansından uzaklaştığında sistemin salınımında etkin olan kısım B katsayılı kısımdır. Bu nedenle $B \equiv A_{es}$ tanımı yapılır.

Aynı sistemde anlık olarak sürtünme ile yitirilen güç,

$$P_{sür}(t) \;=\; F_s v(t) \;=\; m\Gamma\left[\dot{x}_k(t)\right]^2 \tag{28}$$

şeklindedir. Bunun bir periyot üzerinden ortalaması ise,

$$\overline{P}_{sür}(t) \;=\; \frac{1}{2}m\Gamma\omega^2\left[A_{soğ}^2 + A_{es}^2\right] \tag{29}$$

olur. Gerekli aritmetik işlemler yapılırsa giriş gücünün ve sürtünmede kaybedilen gücün bir periyot ortalamalarının bir birlerine eşit oldukları gösterilebilir.

Kararlı durumda çalıştığımız bir serbestlik dereceli salınıcı da biriken toplam (kinetik + potansiyel) enerji sabit değildir. Bunun nedeni anlık giriş gücünün ve sürtünmeyle yitirilen anlık gücün her an birbirlerine eşit olmamalarıdır. Anlık biriken enerji,

$$E(t) = K(t) + U(t) \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}_k)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x_k)^2 \tag{31}$$

ile verilir. Anlık biriken enerjinin bir periyot üzerinden ortalaması ise,

$$\overline{E} = \frac{1}{4}m\omega^2(A_{soğ}^2 + A_{es}^2) + \frac{1}{4}m\omega_0^2(A_{soğ}^2 + A_{es}^2) \tag{32}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\omega^2 + \omega_0^2\right)\left(\frac{1}{2}A_{soğ}^2 + \frac{1}{2}A_{es}^2\right) \tag{33}$$

olur.Burada ω^2'li terim kinetik enerjinin ortalaması, ω_0 ise potansiyel enerjinin ortalamasıdır. Denklemden görüldüğü üzere iki ortalama birbirine eşit değildir. Ancak $\omega = \omega_0$ olursa eşit olurlar. Bu durumda ki ortalama enerji denklemi ile **zayıf sönüm** durumunda elde edilen ortalama enerji denklemi aynıdır. Yine bu durumda elde edilen ortalama enerji terimi sürtünme kuvvetinden dolayı kaybedilen güçle,

$$\overline{E} = \tau\overline{P}_{sür} \tag{34}$$

şeklinde ilişkilidir. Bu denklem iki şekilde yorumlanabilir. Birincisi eğer sürücü kuvvet kesilirse, sistem τ sönüm süresi sabitine bağlı olarak enerjisini kaybedecektir. İkinci durumda ise, zayıf sönümlü halde ω_0'a yakın bir sürücü frekansla sistem sürülürse, sistemde sürtünmeden dolayı kaybedilen enerji τ süresinde sürücü kuvvet tarafından sisteme tekrar kazandırılır. $\omega \neq \omega_0$ durumuna ait bağıntıyı elde etmek daha zordur, şimdilik bu durumu incelemeyeceğiz.

1.2.4 Rezonans

Bir salınıcı sistemin doğal frekanslarında sürücü bir dış kuvvet tarafından daha büyük genlikle salınmasının sağlanması olayına **rezonans** denir. Ortaya çıkan büyük genliğin (göreceli olarak en büyük genliğin) gerçekleştiği bu frekanslar, rezonans frekansları olarak da adlandırılırlar. Rezonans frekansında sürülen bir sistem, titreşen sistem enerjiyi biriktirebildiği için, çok küçük periyodik kuvvetlerle çok büyük genliklere ulaşabilir.

İncelediğimiz bir serbestlik dereceli sistem τ sönüm süresinin en az bir kaç katı sürede dış sürücü kuvvetle $\omega \approx \omega_0$ olacak şekilde sürüldüğünde rezonansa gelebilir. Giriş gücünün ortalaması daha önceki bilgilerimizden yararlanılarak,

$$P = P_0\frac{\Gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tag{35}$$

olarak yazılabilir. Burada P_0 rezonans durumundaki en büyük (maksimum) güçtür. Gücün yarıya indiği "yarı güç noktları" $P(\omega) = P_0/2$ eşitliğinden,

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma\omega \tag{36}$$

olarak bulunur. Bu ifadenin dört farklı çözümü vardır. Bu dört farklı çözümden fiziksel durumu temsil eden aşağıdaki ikisidir.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \pm \frac{1}{2}\Gamma \tag{37}$$

Bu iki çözümün farkı,

$$\Delta\omega = \Gamma \equiv \Delta\omega_{rg} \tag{38}$$

olur ve bu fark **rezonans genişliği** veya yarı en büyük güçteki tam frekans genişliği (full-frequency width at half-maximum power: **fwhm**) olarak adlandırılır. Serbest salınımların τ sönüm katsayısının $\frac{1}{\Gamma}$ olduğu hatırlanırsa,

$$\Delta\omega_{rg}\tau = 1 \tag{39}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade ile sürülen salınımların rezonans genişlğiyle serbest salınımların sönüm süresi arasında ters orantı olduğu anlaşılmaktadır. Bu eşitlik birden çok serbestlik derecesi olan sistemler için de geçerlidir. Rezonansın sönümün olmadığı durumda ω_0 açısal frekansında gerçekleştiğine dikkat edilmelidir. Sönümlü durumda ise yeterince beklendiğinde kararlı duruma geçilir, bu durumda sistemin doğal frekansı, Γ sönüm sabitinin de etkisiyle, ω_1 olur. Böylece sürücü frekansı ω yeni doğal frekans ω_1'e yaklaştığında rezonansa yaklaşılır.

Rezonans genişliği ve sönüm sabitinin oluşturduğu denklem çok serbestlik dereceli bir sistemdeki hemen her doğal frekans için geçerlidir, yeter ki doğal frekanslar birbirlerine çok yakın olmasınlar. Bu eşitliğin sağladığı bir fayda ise bir sistemin rezonans genişliği ölçülerek, sönüm süresinin bulunabilecek olmasıdır.

1.2.5 Esnek genliğin frekansla değişimi

Kararlı durumdaki $A_{es}\cos(\omega t)$ teriminin ortalama giriş gücü $\overline{P}$'ye katkısı olmadığını biliyoruz. Rezonans durumundaysa bu terimin A_{es} katsayısı sıfır olur.

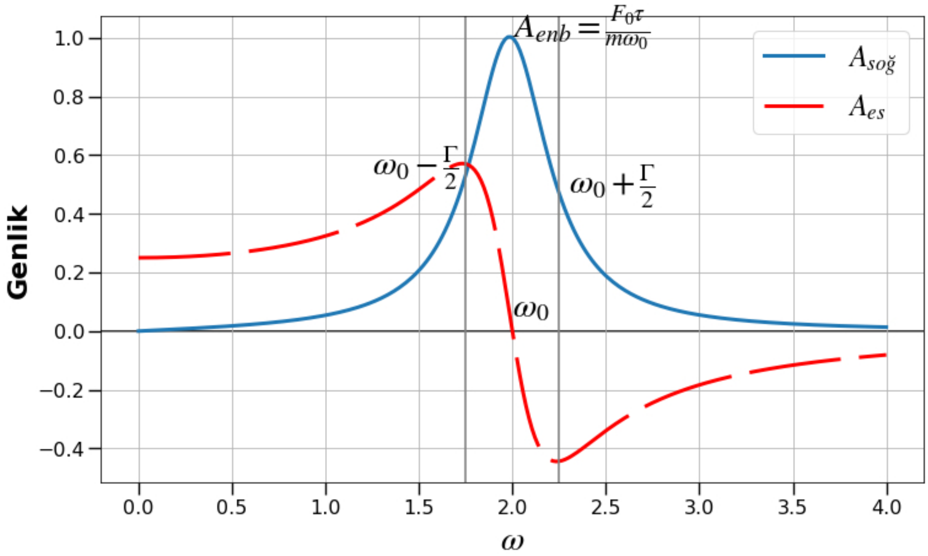
Yine de bu terim önemsizdir denemez. ω sürücü frekansı ω_0 doğal frekansından uzaklaştıkça, yani rezonanstan uzaklaştıkça, bu terim baskın hale gelir. $A_{so\breve{g}}$ ve A_{es} katsayıları birbirlerine oranlanırsa,

$$\frac{A_{es}}{A_{so\breve{g}}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Gamma\omega} \tag{40}$$

olacağını göstermek kolaydır. Bu oranla rezonanstan uzaklaştıkça x_k çözümünün hangi teriminin baskın hale geleceği rahatça görülebilir. Öncelikle $\omega_0 > \Gamma$'dır, çünkü zayıf sönümlü durumda rezonanstan bahsedilebilir. ω küçüldükçe $\omega_0^2 > \Gamma\omega$ olur. ω büyüdüğündeyse $\omega^2 > \Gamma\omega$ olur. Böylece ω'nın ω_0'dan uzaklaşmasıyla $|\omega_0^2 - \omega^2| > \Gamma\omega$ olacağı açıktır. ω büyüdükçe A_{es} katsayılı terim $A_{so\breve{g}}$ katsayılı terimden daha baskın hale gelir ve soğurma katsayılı terim ihmal edilebilir. Böylece kararlı çözüm,

$$x_k(t) \approx A_{es}\cos\omega t \approx \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t \tag{41}$$

olur. Esnek kısım baskınken Γ sönüm sabitinin çözümde artık etkisinin olmadığı görülebilir. Soğurucu ve esnek genliklerin rezonans frekansı civarındaki ve rezonanstan uzaktaki davranışları aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



1.2.6 Rezonans eğrileri

Dış sürücü bir kuvvetle sürülen sönümlü harmonik osilatörün davranışını anlayabilmek için bazı fiziksel nicelikleri tanımladık. Örneğin; $A_{so\breve{g}}$, $|A|^2 \equiv A_{es}^2 + A_{so\breve{g}}^2$, giriş gücü (P) ve biriken enerji (E) vb. gibi. Bu nicelikleri tanımlayan formüller incelendiğinde benzer yapıya sahip odukları, hatta paydalarının birebir aynı olduğu görülebilir. Belirli şartlar altında benzer **rezonans eğrileri** üreteceklerini gösterebiliriz. Bu fiziksel ifadelerin formülleri,

$$A_{so\breve{g}}(\omega) = A_{so\breve{g}}(\omega_0)\frac{\Gamma^2\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tag{42}$$

$$|A(\omega)|^2 = |A(\omega_0)|^2\frac{\Gamma^2\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tag{43}$$

$$P(\omega) = P(\omega_0)\frac{\Gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tag{44}$$

$$E(\omega) = E(\omega_0)\frac{\Gamma^2(\omega^2 + \omega_0^2)/2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tag{45}$$

olarak verilirler. Bu eşitlikler incelendiğinde dördününde paydalarının eşit olduğu görülmektedir. Paydayı, $D(\omega)$ olarak isimlendirip,

$$D(\omega) \equiv (\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2 + \Gamma^2\omega^2 \tag{46}$$

şeklinde yeniden yazmak mümkündür. $D(\omega)$ ifadesinde $(\omega_0 - \omega)$'lı rezonans eğrisinin kısım rezonans civarındaki hızlı değişiminde daha etkindir. $D(\omega)$, $\omega - \omega_0)$ terimi hariç, zayıf sönüm ve rezonans durumunda $\omega = \omega_0$ alınarak,

$$D(\omega) \approx 4\omega_0^2\left[(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma/2)^2\right] \tag{47}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Rezonans ifadelerinin pay kısımları için de yanı işlem uygulanırsa dört ifadenin frekansa bağlı kısımları,

$$R(\omega) \equiv \frac{(\Gamma/2)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma/2)^2} \tag{48}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $R(\omega)$ ile gösterilen rezonan davranışının genel eğrisi elde edilmiş olur. Bu eğri hakkında bazı bilgiler:

- $R(\omega_0) = 1$
- $R(\omega)$'nın rezonans genişliği $\Delta\omega_{rg} = \Gamma$'dır.
- $R(\omega)$ bir çift fonksiyondur, bunun anlamı rezonans frekansı civarında simetriktir.
- Optik fiziğinde "Lorentz şekli" olarak adlandırılır.
- Çekirdek fiziğinde "Breit-Wigner" rezonans eğrisi denir.

1.2.7 Geçici durumda zoruna salınım

İncelediğimiz sistemin hareket denklemi lineerdir. Bu nedenle sürücü kuvvetin var olmadığı $x_1(t)$ çözümü ile var olduğu $x_k(t)$ çözümünün toplamları da hareket denkleminin bir çözümüdür. Bu çözüm,

$$x(t) = x_1(t) + x_k(t) \tag{49}$$
$$= A_{soğ} \sin \omega t + A_{es} \cos \omega t + \mathrm{e}^{-\Gamma t/2} \left[A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t \right] \tag{50}$$

olarak yazılabilir. $x(t)$ çözümü sistemin genel çözümü olarak adlandırılabilir. Çünkü sistemin bir serbestlik dereceli hareketinin bütün olası durumlarını kapsar.

1.2.8 Durgun durum başlangıç şartı

Zayıf sönümlü durum için incelediğimiz salınıcının başlangıçta (t=0) pratik olarak denge konumunda durgun olduğunu kabul edelim. Yani $x(0) = 0$ ve $\dot{x}(0) = 0$ olmalıdır. Bu durumda genel çözüm için aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

$$x(0) = A_{es} + B_1$$
$$\dot{x}(0) = A_1 \omega_1 + A_{sog} \omega - \frac{B_1 \Gamma}{2}$$

Sistem zayıf sönümlü olduğundan, $\dot{x}(0)$'daki Γ'lı kısmı ihmal edebiliriz. Bu durumda,

$$\dot{x}(0) \approx A_1 \omega_1 + A_{sog} \omega$$

olur. Böylece iki sınır şartından ve rezonans civarında $\omega \approx \omega_1$ olacağından $B_1 = -A_{es}$ ve $A_1 = -A_{soğ}$ olarak elde edilir. Böylece genel çözüm.

$$x(t) = A_{es} \left(\cos(\omega t) - e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \cos(\omega_1 t) \right) + A_{sog} \left(\sin(\omega t) - e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \sin(\omega_1 t) \right)$$

halini alır. Çözümün bu halinden bazı ilginç sonuçlar doğar.

1.2.8.1 Sürücü ve doğal salınım frekansının eşit olması durumu

Eğer sürücü frekansı ω doğal salınım frekansı ω_1'e eşit olursa durgun durum başlangıç şartı için aşağıdaki eşitlikler ortaya çıkar.

$$x(t) = \left(1 - e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \right) \left(A_{es} \cos(\omega_1 t) + A_{sog} \sin(\omega_1 t) \right)$$
$$x(t) = \left(1 - e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \right) x_k(t)$$

Bu eşitliklere göre sistem "baştan itibaren" kararlı durumdadır.

1.2.8.2 Sönümsüz durum ve bitmeyen vurular

$\Gamma = 0$ durumunda sönüm terimi $A_{soğ} = 0$ olur. Böylece geriye sadece A_{es} kalır ve o da,

$$A_{es} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{51}$$

halini alır. Böylece $x = x_1 + x_k$ genel çözümü,

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{52}$$

olur. Bu ifadenin, $A = B \equiv \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$ tanımlarıyla ve biraz da düzenlemeyle,

$$x(t) = A \cos \omega t + B \cos \omega_0 t \tag{53}$$

şeklinde yazılabilceği görülür. Rezonans civarında ω frekansı ω_0 frekansına yakın olacağından bu harketi bir **vuru** olayı gibi de düşünebiliriz. Gerekli matematiksel düzenlemeler yapıldığında bu ifadenin,

$$x(t) = A_{kip}(t) \sin \omega_{ort} t \tag{54}$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Burada $\omega_{kip} = (\omega_0 - \omega)/2$, $\omega_{ort} = (\omega_0 + \omega)/2$ ve,

$$A_{kip}(t) = \frac{F_0}{2m} \frac{\sin \omega_{kip} t}{\omega_{ort} \omega_{kip}} \tag{55}$$

olur. Sistemin biriken enerjisi ise,

$$E(t) = E_0 \sin^2 \omega_{kip} t \tag{56}$$
$$= \frac{E_0}{2} (1 - \cos \omega_{vuru} t) \tag{57}$$

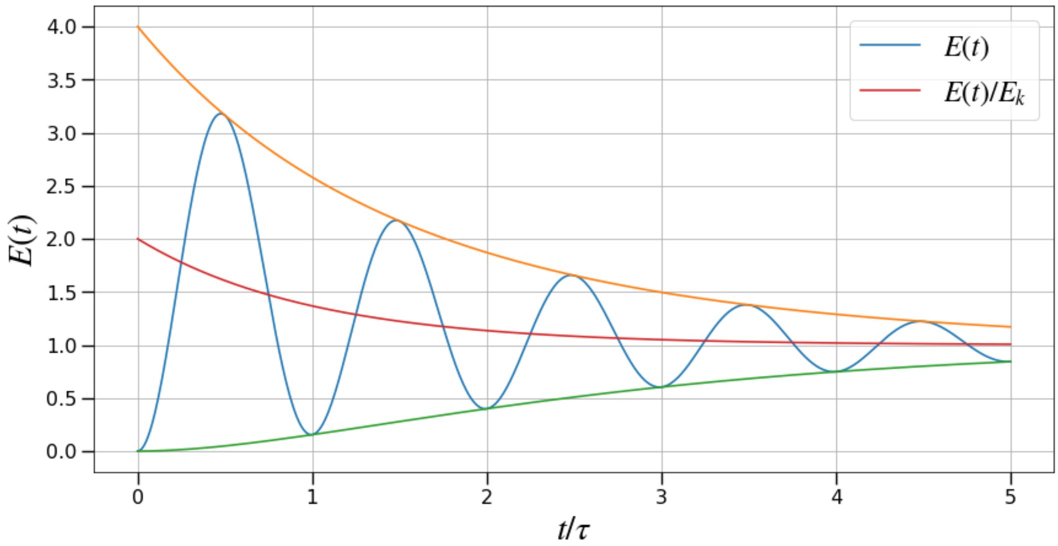
olur. Bu ifadelerden anlaşılacağı üzere $A_{kip}(t)$ genliği ω_{kip} frekansıyla sürekli salınır, $E(t)$ ise $\omega_{vuru} = 2\omega_{kip}$ frekansıyla E_0 ortalama enerjisi etrafında sıfırdan en büyük değerine kadar salınır.

$\omega = \omega_0$ yani $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \rightarrow 0$özel durumunda ise kip genliği,

$$A_{kip}(t) = \frac{F_0}{2m} \frac{1}{\omega_{ort}} t \tag{58}$$

halini alır. Bu durum sonsuz vuru periyotlu durum olarak adlandırılır çünkü A_{kip} hiç bir zaman sıfır olmaz ve yeterince beklendiğinde bu genlik sonsuza gider.

1.2.8.3 Geçici vurular



Zayıf sönümlü ve ω'nın ω_1'e yakın olduğu durumda biriken enerjinin davranışı yaklaşık olarak,

$$E(t) = E_k \left[1 + \mathrm{e}^{-\Gamma t} - 2\mathrm{e}^{-\Gamma t/2} \cos\left((\omega - \omega_1)t\right)\right] \tag{59}$$

ile belirlenir. Burada E_k sistemin kararlı durumdaki enerjisidir. Yukarıdaki şekilden anlaşılacağı üzere, sistemi t=0 anında E(0)=0 enerji değerinden başlatırsak. Sistem birden kararlı duruma geçmeyecektir, çünkü kendi doğal frekansı ω_1'le salınmak ister. Fakat yeterince süre beklenildiği takdirde E_k enerji değerine ulaşılır ve sistem ω sürücü frekansıyla salınmaya başlar.

1.3 İki serbestlik dereceli sistemlerde rezonanslar

Type *Markdown* and LaTeX: α^2

Type *Markdown* and LaTeX: α^2

2 Aşağıdaki ifade silinebilir.... veya değiştirilebilir...

$x(t) = C_1 e^{\frac{t\left(-\Gamma-\sqrt{\Gamma^2-4\omega_0^2}\right)}{2}} + C_2 e^{\frac{t\left(-\Gamma+\sqrt{\Gamma^2-4\omega_0^2}\right)}{2}}$

$\frac{\Gamma^2 P_0 \omega^2}{\Gamma^2\omega^2 + \left(-\omega^2+\omega_0^2\right)^2} - \frac{P_0}{2}$

$$-\frac{\Gamma}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma^2+4\omega_0^2}}{2} \tag{1}$$

$$-\frac{\Gamma}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma^2+4\omega_0^2}}{2} \tag{2}$$

$$\frac{\Gamma}{2} - \frac{\sqrt{\Gamma^2+4\omega_0^2}}{2} \tag{3}$$

$$\frac{\Gamma}{2} + \frac{\sqrt{\Gamma^2+4\omega_0^2}}{2} \tag{4}$$

2.1 Kaynaklar

Düzenlenecek... Düzenlenecek... Düzenlenecek...

1. https://www.britannica.com/science/natural-vibration
2. Deep Interior of the Earth, J.A. Jacobs

Damped osilatör, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mplwp_damped_oscillations.svg

Type *Markdown* and LaTeX: α^2