

Seminarski rad

# Pronalazak najkraćeg puta algoritmom A\*

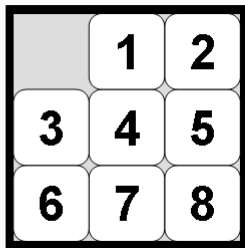
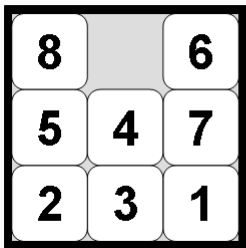
---

Marko Lazarić

Voditelj: Doc. dr. sc. Marko Čupić

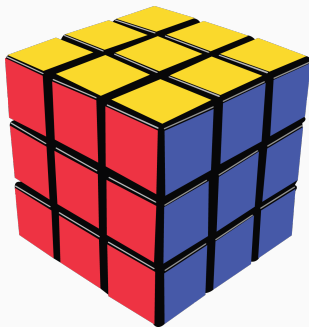
Zagreb, 3. lipnja 2019.

Fakultet elektrotehnike i računarstva



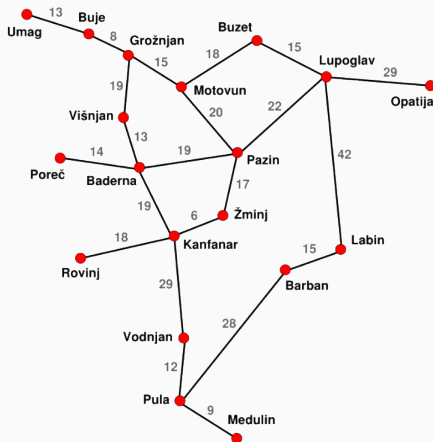
Slika 1: Slika preuzeta s <http://www.aiai.ed.ac.uk/~gwickler/eightpuzzle-uninf.html>

# Motivacija - Rubikova kocka



Slika 2: Slika preuzeta s [http://pngimg.com/imgs/objects/rubik\\_cube/](http://pngimg.com/imgs/objects/rubik_cube/)

## Motivacija - Putovanje po Istri



Slika 3: Slika preuzeta s

[https://www.fer.unizg.hr/\\_download/repository/UI-3-HeuristickoPretrazivanje.pdf](https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/UI-3-HeuristickoPretrazivanje.pdf)

# Cjelobrojna rešetka

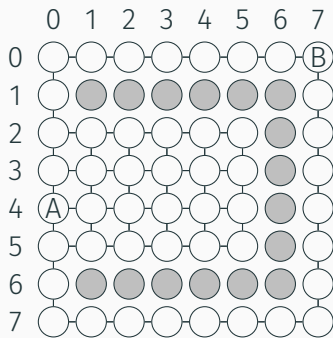
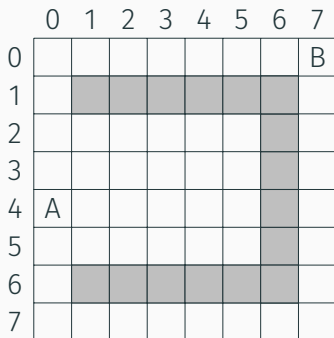
	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3								
4	A							
5								
6								
7								

# Prostor stanja - stanja

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3								
4	A							
5								
6								
7								

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	○	○	○	○	○	○	○	ⓑ
1	○	●	●	●	●	●	●	○
2	○	○	○	○	○	○	●	○
3	○	○	○	○	○	○	●	○
4	ⓐ	○	○	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	○	○	●	○
6	○	●	●	●	●	●	●	○
7	○	○	○	○	○	○	○	○

# Prostor stanja - prijelazi



## Općenit algoritam pretraživanja

```
fronta = prioritetni red
ubaci u frontu početno stanje i cijenu 0

dok fronta nije prazna
    uzmi prvo stanje i cijenu iz fronte
    obradi to stanje i cijenu
kraj
```



# Općenit algoritam pretraživanja

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3								
4	A							
5								
6								
7								

# Općenit algoritam pretraživanja

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3								
4	0							
5								
6								
7								

# Općenit algoritam pretraživanja

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	1							
4	0	1						
5	1							
6								
7								

# Općenit algoritam pretraživanja

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	1							
4	0	1						
5	1							
6								
7								

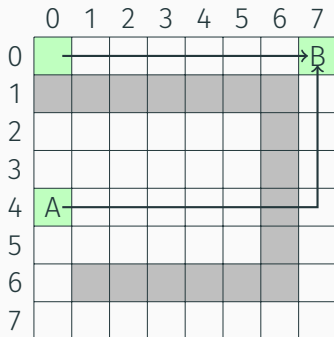
# Općenit algoritam pretraživanja

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3	1							
4	0	1						
5	1							
6								
7								

- Evaluacijska funkcija  $f(n)$  svakom stanju  $n$  pridodaje numeričku vrijednost koja predstavlja prioritet pri pretraživanju
- Manja vrijednost funkcije predstavlja veći prioritet, odnosno manju "cijenu"

- *Cijena puta* ( $g(n)$ ) predstavlja **izračunatu** cijenu puta od početnog stanja do stanja  $n$
- *Heuristička funkcija* ( $h(n)$ ) predstavlja **aproksimaciju** najmanje cijene puta od stanja  $n$  do cilja

# Heuristička funkcija - primjer



- Jednostavna heuristika za cjelobrojnu rešetku je Manhattan udaljenost između stanja

$$h(\text{STANJE}(x, y)) = |x - x_B| + |y - y_B|$$

$$h(\text{STANJE}(0, 0)) = 7$$

$$h(\text{STANJE}(4, 0)) = 11$$



# Algoritmi pretraživanja prostora stanja

- Naivni (neinformirani) algoritmi
  - Pretraživanje u širinu
  - Pretraživanje u dubinu
  - Pretraživanje s jednolikom cijenom
- Informirani algoritmi
  - Pretraživanje "prvi najbolji"
  - Algoritam  $A^*$

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4	A							B
5								
6								
7								

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4	0							B
5								
6								
7								

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3	1							
4	0	1						B
5	1							
6								
7								

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3	1	2						
4	0	1	2					B
5	1	2						
6								
7								

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2	2							
3	1	2						
4	0	1	2					B
5	1	2						
6								
7								

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2	2							
3	1	2						
4	0	1	2					B
5	1	2						
6	2							
7								

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1	3							
2	2	3						
3	1	2	3					
4	0	1	2	3				B
5	1	2	3					
6	2	3						
7	3							



# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	4							
1	3	4						
2	2	3	4					
3	1	2	3	4				
4	0	1	2	3	4			B
5	1	2	3	4				
6	2	3	4					
7	3	4						

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	4	5						
1	3	4	5					
2	2	3	4	5				
3	1	2	3	4	5			
4	0	1	2	3	4	5		B
5	1	2	3	4	5			
6	2	3	4	5				
7	3	4	5					

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	4	5	6					
1	3	4	5	6				
2	2	3	4	5	6			
3	1	2	3	4	5	6		
4	0	1	2	3	4	5	6	B
5	1	2	3	4	5	6		
6	2	3	4	5	6			
7	3	4	5	6				

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	4	5	6	7				
1	3	4	5	6	7			
2	2	3	4	5	6	7		
3	1	2	3	4	5	6	7	
4	0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	2	3	4	5	6	7	
6	2	3	4	5	6	7		
7	3	4	5	6	7			

# Pretraživanje s jednolikom cijenom

$$f(n) = g(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	4	5	6	7				
1	3	4	5	6	7			
2	2	3	4	5	6	7		
3	1	2	3	4	5	6	7	
4	0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	2	3	4	5	6	7	
6	2	3	4	5	6	7		
7	3	4	5	6	7			

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3								
4	A							
5								
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3								
4	11							
5								
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	10							
4	11	10						
5	12							
6								
7								



# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	10	9						
4	11	10	9					
5	12	11						
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	10	9	8					
4	11	10	9	8				
5	12	11	10					
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	10	9	8	7				
4	11	10	9	8	7			
5	12	11	10	9				
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	10	9	8	7	6			
4	11	10	9	8	7	6		
5	12	11	10	9	8			
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	10	9	8	7	6	5		
4	11	10	9	8	7	6		
5	12	11	10	9	8	7		
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2						4		
3	10	9	8	7	6	5		
4	11	10	9	8	7	6		
5	12	11	10	9	8	7		
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2					5	4		
3	10	9	8	7	6	5		
4	11	10	9	8	7	6		
5	12	11	10	9	8	7		
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1					4			
2				6	5	4		
3	10	9	8	7	6	5		
4	11	10	9	8	7	6		
5	12	11	10	9	8	7		
6								
7								



# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0					3			B
1				5	4			
2				6	5	4		
3	10	9	8	7	6	5		
4	11	10	9	8	7	6		
5	12	11	10	9	8	7		
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0				4	3	2		B
1				5	4			
2				6	5	4		
3	10	9	8	7	6	5		
4	11	10	9	8	7	6		
5	12	11	10	9	8	7		
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0				4	3	2	1	B
1				5	4			
2				6	5	4		
3	10	9	8	7	6	5		
4	11	10	9	8	7	6		
5	12	11	10	9	8	7		
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0				4	3	2	1	0
1				5	4			
2				6	5	4		
3	10	9	8	7	6	5		
4	11	10	9	8	7	6		
5	12	11	10	9	8	7		
6								
7								

# Pretraživanje "prvi najbolji"

$$f(n) = h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0				4	3	2	1	0
1				5	4			
2				6	5	4		
3	10	9	8	7	6	5		
4	11	10	9	8	7	6		
5	12	11	10	9	8	7		
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3								
4	A							
5								
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3								
4	11							
5								
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	11							
4	11	11						
5	12							
6								
7								



# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	11	11						
4	11	11	11					
5	12	12						
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	11	11	11					
4	11	11	11	11				
5	12	12	12					
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	11	11	11	11				
4	11	11	11	11	11			
5	12	12	12	12				
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	11	11	11	11	11			
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12			
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2								
3	11	11	11	11	11	11		
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12	12		
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2						11		
3	11	11	11	11	11	11		
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12	12		
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2					13	11		
3	11	11	11	11	11	11		
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12	12		
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1								
2					11	11		
3	11	11	11	11	11	11		
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12	12		
6								
7								



# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								B
1					11			
2				13	11	11		
3	11	11	11	11	11	11		
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12	12		
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0					11			B
1				13	11			
2				13	11	11		
3	11	11	11	11	11	11		
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12	12		
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0				13	11	11		B
1				13	11			
2				13	11	11		
3	11	11	11	11	11	11		
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12	12		
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0				13	11	11	11	B
1				13	11			
2				13	11	11		
3	11	11	11	11	11	11		
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12	12		
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0				13	11	11	11	11
1				13	11			
2				13	11	11		
3	11	11	11	11	11	11		
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12	12		
6								
7								

# Algoritam A\*

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0				13	11	11	11	11
1				13	11			
2				13	11	11		
3	11	11	11	11	11	11		
4	11	11	11	11	11	11		
5	12	12	12	12	12	12		
6								
7								

# Demonstracija programa

---

Hvala na pažnji!

---

Pitanja?