# Введение в искусственный интеллект. Машинное обучение

Тема: Эмпирический риск и стохастический градиентный спуск

Бабин Д.Н., Иванов И.Е., Петюшко А.А.

кафедра Математической Теории Интеллектуальных Систем







• Эмпирический риск и его минимизация





- Эмпирический риск и его минимизация
- 2 Разделяющая поверхность





- Эмпирический риск и его минимизация
- Разделяющая поверхность
- 3 GD и SGD





- Эмпирический риск и его минимизация
- Разделяющая поверхность
- 3 GD и SGD





- X множество описаний объектов, Y множество допустимых ответов
- ullet Неизвестная целевая зависимость: отображение  $y^*:X o Y$
- ullet Конечная обучающая выборка:  $X^m = \{(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)\}$ , т.ч.  $y_i = y^*(x_i)$



- X множество описаний объектов, Y множество допустимых ответов
- ullet Неизвестная целевая зависимость: отображение  $y^*:X o Y$
- ullet Конечная обучающая выборка:  $X^m = \{(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)\}$ , т.ч.  $y_i = y^*(x_i)$
- Задача обучения по прецедентам состоит в том, чтобы построить алгоритм  $a: X \to Y$ , который приближал бы целевую зависимость  $y^*$  как на обучающей выборке  $X^m$ , так и на всём множестве X



- X множество описаний объектов, Y множество допустимых ответов
- ullet Неизвестная целевая зависимость: отображение  $y^*:X o Y$
- ullet Конечная обучающая выборка:  $X^m = \{(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)\}$ , т.ч.  $y_i = y^*(x_i)$
- Задача обучения по прецедентам состоит в том, чтобы построить алгоритм  $a: X \to Y$ , который приближал бы целевую зависимость  $y^*$  как на обучающей выборке  $X^m$ , так и на всём множестве X
- Эмпирический риск это средняя величина ошибки a на  $X^m$



- X множество описаний объектов, Y множество допустимых ответов
- ullet Неизвестная целевая зависимость: отображение  $y^*:X o Y$
- ullet Конечная обучающая выборка:  $X^m = \{(x_1,y_1),\dots,(x_m,y_m)\}$ , т.ч.  $y_i = y^*(x_i)$
- Задача обучения по прецедентам состоит в том, чтобы построить алгоритм  $a:X\to Y$ , который приближал бы целевую зависимость  $y^*$  как на обучающей выборке  $X^m$ , так и на всём множестве X
- Эмпирический риск это средняя величина ошибки a на  $X^m$
- Метод минимизации эмпирического риска это общий подход к решению широкого класса задач обучения по прецедентам (задачи классификации и регрессии)



## Эмпирический риск - определения

## Функция потерь L(y, y')

Характеризует величину отклонения ответа y=a(x) от правильного ответа  $y'=y^*(x)$  на объекте  $x\in X$ 





## Эмпирический риск - определения

#### Функция потерь L(y, y')

Характеризует величину отклонения ответа y=a(x) от правильного ответа  $y'=y^*(x)$  на объекте  $x\in X$ 

## Множество алгоритмов $A = \{a : X \rightarrow Y\}$

В этом множестве будет вестись поиск отображения, приближающего неизвестную целевую зависимость





## Эмпирический риск - определения

#### Функция потерь L(y, y')

Характеризует величину отклонения ответа y=a(x) от правильного ответа  $y'=y^*(x)$  на объекте  $x\in X$ 

#### Множество алгоритмов $A = \{a : X \rightarrow Y\}$

В этом множестве будет вестись поиск отображения, приближающего неизвестную целевую зависимость

#### Эмпирический риск

Функционал качества, характеризующий среднюю ошибку алгоритма a на выборке  $X^m$ :  $R(a, X^m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m L(a(x_i), y^*(x_i))$ 





## Минимизация эмпирического риска

#### Минимизация эмпирического риска (М.Э.Р.)

В заданном множестве алгоритмов A найти алгоритм, минимизирующий эмпирический риск:

$$a = \underset{a \in A}{\operatorname{arg\,min}} R(a, X^m)$$

## Минимизация эмпирического риска

#### Минимизация эмпирического риска (М.Э.Р.)

В заданном множестве алгоритмов A найти алгоритм, минимизирующий эмпирический риск:

$$a = \underset{a \in A}{\operatorname{arg \, min}} R(a, X^m)$$

#### Достоинство М.Э.Р.

Конструктивный и универсальный подход, позволяющий сводить задачу обучения к задачам численной оптимизации



## Минимизация эмпирического риска

#### Минимизация эмпирического риска (М.Э.Р.)

В заданном множестве алгоритмов A найти алгоритм, минимизирующий эмпирический риск:

$$a = \underset{a \in A}{\operatorname{arg \, min}} R(a, X^m)$$

#### Достоинство М.Э.Р.

Конструктивный и универсальный подход, позволяющий сводить задачу обучения к задачам численной оптимизации

#### Недостаток М.Э.Р.

Явление переобучения на обучающей выборке  $X^m$ , которое возникает практически всегда при использовании метода М.Э.Р., поскольку критерием качества является ошибка на этой же выборке (решение: для оценки менять выборку) .

## Примеры функций потерь

#### Задача классификации

- Пороговая функция  $L(y,y')=[y \neq y']$
- Функция разрывна  $\Rightarrow$  минимизация эмпирического риска это задача комбинаторной оптимизации  $\Rightarrow$  во многих практически важных случаях сводится к поиску максимальной совместной подсистемы в системе неравенств (число неравенств совпадает с число объектов обучения m) и является NP-полной



## Примеры функций потерь

#### Задача классификации

- Пороговая функция  $L(y, y') = [y \neq y']$
- Функция разрывна  $\Rightarrow$  минимизация эмпирического риска это задача комбинаторной оптимизации  $\Rightarrow$  во многих практически важных случаях сводится к поиску максимальной совместной подсистемы в системе неравенств (число неравенств совпадает с число объектов обучения m) и является NP-полной

#### Задача регрессии

Квадратичная функция потерь  $L(y, y') = (y - y')^2$ 





## Время для вопросов





• Функцию потерь для задачи классификации  $L(y,y')=[y\neq y']$  нельзя продифференцировать (и, значит, эффективно минимизировать)





- Функцию потерь для задачи классификации  $L(y, y') = [y \neq y']$  нельзя продифференцировать (и, значит, эффективно минимизировать)
- Для подключения известного дифференциального аппарата вводятся два понятия разделяющая поверхность и аппроксимация Э.Р.

- Функцию потерь для задачи классификации  $L(y,y')=[y\neq y']$  нельзя продифференцировать (и, значит, эффективно минимизировать)
- Для подключения известного дифференциального аппарата вводятся два понятия разделяющая поверхность и аппроксимация Э.Р.
- Рассмотрим задачу бинарной классификации:  $X \to Y$ ,  $Y = \{+1, -1\}$  на обучающей выборке  $X^m = (x_i, y_i)_{i=1}^m$





- Функцию потерь для задачи классификации  $L(y, y') = [y \neq y']$  нельзя продифференцировать (и, значит, эффективно минимизировать)
- Для подключения известного дифференциального аппарата вводятся два понятия разделяющая поверхность и аппроксимация Э.Р.
- Рассмотрим задачу бинарной классификации:  $X \to Y$ ,  $Y = \{+1, -1\}$  на обучающей выборке  $X^m = (x_i, y_i)_{i=1}^m$
- Будем алгоритм искать в виде  $a(x,w)=\mathrm{sign}\,g(x,w)$ , где g(x,w) дискриминантная функция, а w вектор параметров

- Функцию потерь для задачи классификации  $L(y,y')=[y\neq y']$  нельзя продифференцировать (и, значит, эффективно минимизировать)
- Для подключения известного дифференциального аппарата вводятся два понятия разделяющая поверхность и аппроксимация Э.Р.
- Рассмотрим задачу бинарной классификации:  $X \to Y$ ,  $Y = \{+1, -1\}$  на обучающей выборке  $X^m = (x_i, y_i)_{i=1}^m$
- Будем алгоритм искать в виде  $a(x,w) = \operatorname{sign} g(x,w)$ , где g(x,w) дискриминантная функция, а w вектор параметров
- g(x,w)=0 разделяющая поверхность (граница между классами); тогда ошибка классификации  $a(x_i,w)\neq y_i\Leftrightarrow y_ig(x_i,w)<0$ .



• Наиболее простой вид разделяющей поверхности — прямая (гиперплоскость)

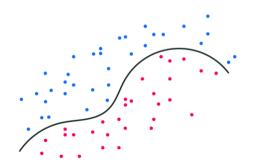


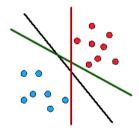
- Наиболее простой вид разделяющей поверхности прямая (гиперплоскость)
- Однако разделяющая поверхность может быть нелинейной

- Наиболее простой вид разделяющей поверхности прямая (гиперплоскость)
- Однако разделяющая поверхность может быть нелинейной
- Разделяющая поверхность может быть не одна



- Наиболее простой вид разделяющей поверхности прямая (гиперплоскость)
- Однако разделяющая поверхность может быть нелинейной
- Разделяющая поверхность может быть не одна







• Через понятие разделяющей поверхности можем переопределить ошибку классификации:  $a(x_i, w) \neq y_i \Leftrightarrow y_i g(x_i, w) < 0$ 





- Через понятие разделяющей поверхности можем переопределить ошибку классификации:  $a(x_i, w) \neq y_i \Leftrightarrow y_i g(x_i, w) < 0$
- ullet Но нужно еще ввести аппроксимацию самого eta.Р.  $- ilde{R}$  со свойствами:
  - $\bullet$   $\tilde{R}$  дифференцируема



- Через понятие разделяющей поверхности можем переопределить ошибку классификации:  $a(x_i, w) \neq y_i \Leftrightarrow y_i g(x_i, w) < 0$
- ullet Но нужно еще ввести аппроксимацию самого eta.Р.  $- ilde{R}$  со свойствами:
  - $\bullet$   $\tilde{R}$  дифференцируема
  - ②  $\tilde{R}$  верхняя граница для Э.Р. R (чтобы минимизация  $\tilde{R}$  подразумевала и минимизацию R)
- М.Э.Р.:  $R(a, X^m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [y_i g(x_i, w) < 0] \le \tilde{R}(a, X^m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m L(y_i g(x_i, w))$ , где новая функция потерь  $L(y_i g(x_i, w))$  невозрастающая и неотрицательная аппроксимация функции  $[y_i g(x_i, w) < 0]$ , т.ч.:  $L(y_i g(x_i, w)) \ge [a(x_i, w) \ne y_i]$

- Через понятие разделяющей поверхности можем переопределить ошибку классификации:  $a(x_i, w) \neq y_i \Leftrightarrow y_i g(x_i, w) < 0$
- ullet Но нужно еще ввести аппроксимацию самого eta.Р.  $- ilde{R}$  со свойствами:
  - $\bullet$   $\tilde{R}$  дифференцируема
  - ②  $\tilde{R}$  верхняя граница для Э.Р. R (чтобы минимизация  $\tilde{R}$  подразумевала и минимизацию R)
- М.Э.Р.:  $R(a, X^m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [y_i g(x_i, w) < 0] \le \tilde{R}(a, X^m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m L(y_i g(x_i, w))$ , где новая функция потерь  $L(y_i g(x_i, w))$  невозрастающая и неотрицательная аппроксимация функции  $[y_i g(x_i, w) < 0]$ , т.ч.:  $L(y_i g(x_i, w)) \ge [a(x_i, w) \ne y_i]$

**Упражнение**. Зачем нужны свойства невозрастаемости и неотрицательности L? Замечание. В дальнейшем будем предполагать, что мы работаем сразу с аппроксимаций Э.Р.  $\tilde{R}$ , поэтому знак  $\tilde{\ }$  будем опускать.



## Вероятностный смысл минимизации аппроксимированного Э.Р.

Рассмотрим принцип максимизации правдоподобия, или MLE (Maximum Likelihood Estimation).

- Параметрическая модель плотности распределения p(x,y|w)
- Максимизация логарифма правдоподобия

$$L(w, X^m) = \ln \prod_{i=1}^m p(x_i, y_i | w) = \sum_{i=1}^m \ln p(x_i, y_i | w) \to \max_w$$



## Вероятностный смысл минимизации аппроксимированного Э.Р.

Рассмотрим принцип максимизации правдоподобия, или MLE (Maximum Likelihood Estimation).

- Параметрическая модель плотности распределения p(x,y|w)
- Максимизация логарифма правдоподобия

$$L(w, X^m) = \ln \prod_{i=1}^m p(x_i, y_i | w) = \sum_{i=1}^m \ln p(x_i, y_i | w) \to \max_w$$

• Минимизация аппроксимированного Э.Р.

$$R(w,X^m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m L(y_i g(x_i, w)) \to \min_w$$





## Вероятностный смысл минимизации аппроксимированного Э.Р.

Рассмотрим принцип максимизации правдоподобия, или MLE (Maximum Likelihood Estimation).

- Параметрическая модель плотности распределения p(x,y|w)
- Максимизация логарифма правдоподобия

$$L(w, X^m) = \ln \prod_{i=1}^m p(x_i, y_i | w) = \sum_{i=1}^m \ln p(x_i, y_i | w) \to \max_w$$

• Минимизация аппроксимированного Э.Р.

$$R(w,X^m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m L(y_i g(x_i, w)) \to \min_w$$

**Вывод**. Эти два принципа эквивалентны при  $L(y_i g(x_i, w)) = -\ln p(x_i, y_i | w)$ (коэффициент  $\frac{1}{m}$  не влияет на вывод).





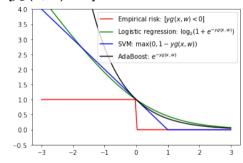
#### Об аппроксимации

• Рассмотрим аппроксимацию функции ошибки на обучающем примере:  $L(y_ig(x_i, w)) \ge [y_ig(x_i, w) < 0]$ 

$$L(y_ig(x_i, w)) \ge [y_ig(x_i, w) < 0]$$
  
В дальнейшем будем рассматривать

- В дальнейшем будем рассматривать в основном достаточно гладкие (непрерывные и дифференцируемые) функции  $L(y_ig(x_i, w))$
- Некоторые аппроксимации способны улучшать обобщающую способность классификатора
- Непрерывные аппроксимации позволяют применять известные численные методы оптимизации для настройки весов w (например, градиентные методы и методы выпуклого программирования)

## Примеры аппроксимации функции [yg(x, w) < 0]:





## Время для вопросов





## Классический градиентный спуск

Задача: минимизировать аппроксимированный Э.Р. (выбор алгоритма осуществляется по w):

$$R(w) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L(y_i g(x_i, w)) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L_i(w) \to \min_{w}$$

### Классический градиентный спуск

Задача: минимизировать аппроксимированный Э.Р. (выбор алгоритма осуществляется по w):

$$R(w) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L(y_i g(x_i, w)) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L_i(w) \to \min_{w}$$

### Численная оптимизация методом градиентного спуска

- $w^{(0)} :=$  начальное приближение
- ullet  $w^{(t+1)} := w^{(t)} \eta \cdot 
  abla R(w^{(t)})$  итерация алгоритма
- η градиентный шаг



## Классический градиентный спуск

Задача: минимизировать аппроксимированный Э.Р. (выбор алгоритма осуществляется по w):

$$R(w) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L(y_i g(x_i, w)) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L_i(w) \to \min_{w}$$

### Численная оптимизация методом градиентного спуска

- $w^{(0)} :=$  начальное приближение
- ullet  $w^{(t+1)} := w^{(t)} \eta \cdot 
  abla R(w^{(t)})$  итерация алгоритма
- ullet  $\eta$  градиентный шаг

**Проблема**: сложно считать в условиях большого количества объектов в обучающей выборке.



## Стохастический градиентный спуск

#### Алгоритм стохастического градиентного спуска

- Инициализация весов *w*
- ullet Инициализация eta.Р.  $R := rac{1}{m} \sum_{i=1}^m L_i(w)$

#### Итерации

- ullet Выбор объекта  $x_i \in X^m$  (например, случайным образом)
- Вычисление ошибки на данном объекте:  $\varepsilon_i = L_i(w)$
- ullet Шаг градиентного спуска:  $w:=w-\eta\cdot 
  abla L_i(w)$
- Вычисление сглаженного Э.Р.:  $R := (1 \lambda)R + \lambda \varepsilon_i$

**Замечание**: параметр сглаживания  $\lambda \in [0,1]$  (можно использовать, например, 0.1).





# Вариативность SGD

#### Инициализация

- $w_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$  (где n число весов)
- $w_j = rand(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$
- Предобучение на другой обучающей выборке

# Вариативность SGD

#### Инициализация

- ullet  $w_j=0$   $\forall j=1,\ldots,n$  (где n число весов)
- $w_j = rand(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$
- Предобучение на другой обучающей выборке

### Порядок выбора объектов $x_i$

- Случайная перетасовка: попеременно брать объекты разных классов
- Чаще брать объекты с большой ошибкой (маленькое значение  $y_i g(x_i, w)$ )
- Чаще брать объекты с большой неуверенностью (маленькое значение  $|y_i g(x_i, w)|)$



## Вариативность SGD

### Инициализация

- ullet  $w_j=0$   $\forall j=1,\ldots,n$  (где n число весов)
- $w_j = rand(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$
- Предобучение на другой обучающей выборке

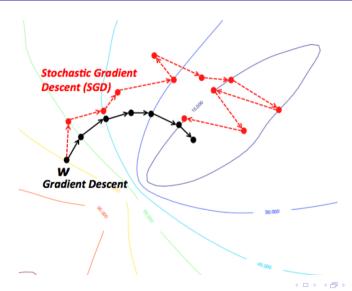
### Порядок выбора объектов $x_i$

- Случайная перетасовка: попеременно брать объекты разных классов
- Чаще брать объекты с большой ошибкой (маленькое значение  $y_i g(x_i, w)$ )
- Чаще брать объекты с большой неуверенностью (маленькое значение  $|y_i g(x_i, w)|)$

#### Критерий остановки

- Исчерпали лимит по числу шагов
- Значение Э.Р. либо весов перестало меняться

### Визуализации градиентных методов





## Пакетный (mini-batch) SGD

#### Пакетный SGD

**Идея**: на каждом шаге использовать более надежную оценку градиента не на одном примере, а на нескольких

#### Итерации

- ullet Выбор подмножества объектов мощности 1 < k < m:  $J = \{i_1, \dots, i_k\}$
- ullet Вычисление ошибки на этих объектах:  $L_{i_1}(w^{(t)}), \dots, L_{i_k}(w^{(t)})$
- ullet Шаг градиентного спуска:  $w^{(t+1)} := w^{(t)} \eta \cdot rac{1}{k} \sum_{j=1}^k 
  abla_w L_{i_j}(w^{(t)})$





## Выбор шага SGD

### Способы управления градиентным шагом в SGD

- Уменьшать (например, делить на 2...10) каждые N итераций;
- Уменьшать (например, делить на 2...10) каждые N итераций, когда значение 9.P. перестало существенно меняться за последние K шагов;
- Использование стратегии "разогрева" 1
- Использование косинусного $^2$  / линейного $^3$  закона (вместо дискретных делений) изменения
- Использование цикличности<sup>4</sup>

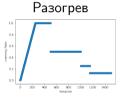
<sup>4</sup>Smith, Leslie N. "Cyclical learning rates for training neural networks." 2017

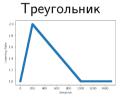
<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Goyal, Priya, et al. "Accurate, large minibatch sgd: Training imagenet in 1 hour." 2017

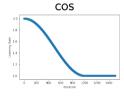
<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Loshchilov, Ilya, and Frank Hutter. "Sgdr: Stochastic gradient descent with warm restarts." 2016

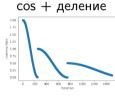
<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Howard, Jeremy, and Sebastian Ruder. "Universal language model fine-tuning for text classification." 2018

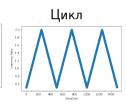
## Иллюстрация выбора шага SGD















## О переобучении

### Причины переобучения

- Маленькая обучающая выборка;
- Большое число признаков;
- Неинформативные (шумовые/зависимые) признаки.





## О переобучении

### Причины переобучения

- Маленькая обучающая выборка;
- Большое число признаков;
- Неинформативные (шумовые/зависимые) признаки.

### Проявление переобучения

- Резкое увеличение нормы w (настройка на конкретные признаки);
- Большая разница в ошибке на тестовой и обучающей выборках.



## О переобучении

### Причины переобучения

- Маленькая обучающая выборка;
- Большое число признаков;
- Неинформативные (шумовые/зависимые) признаки.

### Проявление переобучения

- Резкое увеличение нормы w (настройка на конкретные признаки);
- Большая разница в ошибке на тестовой и обучающей выборках.

### Борьба с переобучением

- Уменьшение норм весов (регуляризация);
- Процедура кросс-валидации;
- Ранняя остановка обучения.

### MAP

Рассмотрим принцип максимума апостериорной вероятности, или **MAP** (Maximum A Posteriori Probability).

#### Дано:

- Параметрическая модель плотности распределения p(x,y|w)
- Априорная информация о плотности распределения параметров модели p(w) Например, параметрическое семейство априорных распределений p(w;h), где h неизвестная и неслучайная величина (гиперпараметр).

### MAP

Рассмотрим принцип максимума апостериорной вероятности, или MAP (Maximum A Posteriori Probability).

### Дано:

- Параметрическая модель плотности распределения p(x,y|w)
- Априорная информация о плотности распределения параметров модели p(w)Например, параметрическое семейство априорных распределений p(w; h), где h - mнеизвестная и неслучайная величина (гиперпараметр).

#### Тогда:

- Вероятность по формуле Байеса  $p(w|X^m) = \frac{p(X^m|w)p(w;h)}{p(X^m)} \propto p(X^m|w)p(w;h)$
- Максимизируем логарифм

$$-L(w, X^m) = \ln p(w|X^m) = \sum_{i=1}^m \ln p(x_i, y_i|w) + \ln p(w; h) \to \max_{w, h}$$





### Вероятностный смысл простой регуляризации

$$-L(w,X^m) = \sum_{i=1}^m \ln p(x_i,y_i|w) + \ln p(w;h) \to \max_{w,h}$$

Т.о., если вероятностное семейство распределения весов — нормальное, т.е.

$$p(w;h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{||w-\mu||^2}{2\sigma^2}}$$
 с зафиксированными  $\mu = 0$  и  $\sigma$ , то

$$\sum_{i=1}^{m} \ln p(x_i, y_i|w) + \ln p(w) \rightarrow \max_{w} \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{m} \ln p(x_i, y_i|w) + \frac{\tau}{2} ||w||^2 \rightarrow \min_{w}$$





Рассмотрим введение квадратичного штрафа за увеличение нормы весов в функционал Э.Р.:

$$R_{\tau}(w,X^m) = R(w,X^m) + \frac{\tau}{2}||w||^2 \rightarrow \min_{w}$$

Тогда градиент Э.Р.:  $\nabla R_{ au}(w,X^m) = \nabla R(w,X^m) + au w$ ,

Рассмотрим введение квадратичного штрафа за увеличение нормы весов в функционал Э.Р.:

$$R_{\tau}(w, X^m) = R(w, X^m) + \frac{\tau}{2}||w||^2 \rightarrow \min_{w}$$

Тогда градиент Э.Р.:  $\nabla R_{\tau}(w, X^m) = \nabla R(w, X^m) + \tau w$ , А градиентный шаг:  $w^{(t+1)} = (1 - \tau \eta) w^{(t)} - \eta \nabla R(w^{(t)}, X^m)$ .

Рассмотрим введение квадратичного штрафа за увеличение нормы весов в функционал Э.Р.:

$$R_{\tau}(w, X^m) = R(w, X^m) + \frac{\tau}{2}||w||^2 \rightarrow \min_{w}$$

Тогда градиент Э.Р.:  $\nabla R_{\tau}(w, X^m) = \nabla R(w, X^m) + \tau w$ , A градиентный шаг:  $w^{(t+1)} = (1 - \tau \eta) w^{(t)} - \eta \nabla R(w^{(t)}, X^m)$ .

### Подбор параметра регуляризации au

- ullet Больше значение au больше штрафа за переобучение (но сходимость медленнее!)
- Методом скользящего контроля (cross-validation);



Рассмотрим введение квадратичного штрафа за увеличение нормы весов в функционал Э.Р.:

$$R_{\tau}(w,X^m) = R(w,X^m) + \frac{\tau}{2}||w||^2 \rightarrow \min_{w}$$

Тогда градиент Э.Р.:  $\nabla R_{\tau}(w, X^m) = \nabla R(w, X^m) + \tau w$ , A градиентный шаг:  $w^{(t+1)} = (1 - \tau \eta)w^{(t)} - \eta \nabla R(w^{(t)}, X^m)$ .

### Подбор параметра регуляризации au

- ullet Больше значение au больше штрафа за переобучение (но сходимость медленнее!)
- Методом скользящего контроля (cross-validation);

**Замечание**. В англоязычной литературе зачастую данная техника называется "Weight Decay" (из-за того, что веса линейно уменьшаются каждый шаг), а сам коэффициент WD обычно задается явно (и равен в обозначениях выше  $\tau\eta$ ).



## Плюсы и минусы SGD

#### Плюсы

- Легко реализуется на практике;
- Легко обобщается на любые алгоритмы и функции потерь;
- Возможно онлайн до-обучение (для нового  $x_i$ );
- Необязательно использовать все объекты  $x_i$ .



## Плюсы и минусы SGD

#### Плюсы

- Легко реализуется на практике;
- Легко обобщается на любые алгоритмы и функции потерь;
- Возможно онлайн до-обучение (для нового  $x_i$ );
- Необязательно использовать все объекты  $x_i$ .

### Минусы

- На практике возможны расходимость / медленная сходимость;
- Локальные минимумы!!!
- Подбор шага градиента, условия остановки неочевидны.





• Эмпирическим риском измеряем качество классификатора





- Эмпирическим риском измеряем качество классификатора
- На практике используется аппроксимационный эмпирический риск





- Эмпирическим риском измеряем качество классификатора
- 2 На практике используется аппроксимационный эмпирический риск
- Градиентный спуск алгоритм оптимизации первого порядка



- Эмпирическим риском измеряем качество классификатора
- На практике используется аппроксимационный эмпирический риск
- Градиентный спуск алгоритм оптимизации первого порядка
- SGD практическая версия GD





- Эмпирическим риском измеряем качество классификатора
- На практике используется аппроксимационный эмпирический риск
- Градиентный спуск алгоритм оптимизации первого порядка
- SGD практическая версия GD
- ullet  $L_2$ -Регуляризация возникает из-за принципа MAP и изменяет коэффициенты для SGD





### Время для вопросов



