

Sbírka příkladů do MATu

Michal Šrubař
xsruba03@stud.fit.vutbr.cz

7. února 2016

1 Proč

2 Logika

2.1 Důkazy výrokových formulí

2.1.1

Dokažte sestrojením důkazu, že pro libovolné formule B, C výrokové logiky platí

$$\vdash \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

Postupujte dle následujícího návodu:

1. $\neg B$ (předpoklad)
2. B (předpoklad)
3. $B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B)$ (axiom A1)
4. $\neg B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$ (axiom A1)
5. pravidlo odloučení aplikované na formule 2,3
6. pravidlo odloučení aplikované na formule 1,4
7. axiom A3
8. pravidlo odloučení aplikované na 6,7
9. pravidlo odloučení aplikované na 2,8
10. formule 9 je dokazatelná z formulí 1,2
11. věta o dedukci
12. věta o dedukci.

2.1.2

Dokažte zapsáním formálního důkazu (s použitím věty o dedukci), že platí:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

2.1.3

Dokažte formulí: $A \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B)$. Návod:

- 1) A je předpoklad
- 2) $\neg B \rightarrow \neg A$ je předpoklad
- 3) A3
- 4) MP
- 5) MP
- 6) Věta o dedukci
- 7) Věta o dedukci

2.1.4

Dokažte vztah $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ napsáním příslušného důkazu ve výrokové logice. Návod: Formuli nejprve převeďte do tvaru obsahujícího pouze logické spojky \neg a \rightarrow (kde se bude vyskytovat $\neg\varphi$).

- 1) dosazení vhodných formulí (obě budou ve tvaru negace) do A1
- 2) negaci předpokladu dosazovaného vztahu
- 3) pravidlo odloučení
- 4) dosazení vhodných formulí do A3
- 5) pravidlo odloučení
- 6) předpokladu dosazovaného vztahu
- 7) pravidlo odloučení
- 8) věta o dedukci

2.1.5

Dokažte $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$. Návod:

- 1) Zvolte vhodný předpoklad.
- 2) Použijte dokazatelnost formule $A \rightarrow \neg\neg A$ a pravidlo odloučení.
- 3) Libovolné formule X, Y ze vztahu $X \vdash Y$ vyplývá vztah $\neg B, X \vdash Y$ (dosad'te vhodně formule za X a Y).
- 4) Věta o dedukci.
- 5) Axiom (A3).
- 6) Pravidlo odloučení.
- 7) Věta o dedukci.

2.1.6

Dokažte $\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B$. Návod:

- 1) Zvolte předpoklad $\neg B$.
- 2) Použijte axiom A1 a Modus Ponens
- 3) Využijte dokazatelnosti věty $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow \neg B)$
- 4) Použijte Modus Ponens
- 5) Věta o dedukci
- 6) Axiom A3
- 7) Modus Ponens

2.1.7

Sestrojte důkaz k $\neg B \rightarrow \neg A, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$. Použijte axiomy A2, A3 a pravidlo MP.

2.2 Důkazy predikátových formulí

2.2.1

Proved'te důkaz formule

$$\varphi, (\forall x\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall x\psi$$

dle následujícího návodu:

1. Vezměte formuli φ jako předpoklad
2. užijte pravidlo zobecnění

3. vezměte formuli $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ jako předpoklad
4. užijte pravidlo odloučení (modus ponens)
5. užijte pravidlo zobecnění.

2.2.2

Dokažte větu $\exists x(\neg\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$ Postup:

1. Použijte tautologii $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.
2. Proveďte distribuci kvantifikátoru \forall .
3. Užijte třetí axiom výrokové logiky ve tvaru $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.
4. Aplikujte pravidlo odloučení.
5. Použijte tautologii $\neg(\forall x\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$.
6. Složte implikace ze (4) a (5).
7. Proveďte úpravu (nahraďte kvantifikátor $\forall x$ kvantifikátorem $\exists x$).

2.2.3

Napište důkaz věty $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$. Návod:

1. Vezměte formuli $\forall x\varphi$ jako předpoklad, pak užijte axiom substituce a následně pravidlo odloučení
2. Potom vezměte formuli $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ jako předpoklad a opět užijte axiom substituce a následně pravidlo odloučení
3. Na formule získané v krocích 1) a 2) aplikujte pravidlo odloučení a na výslednou formuli pravidlo zobecnění
4. Poslední získaná formule je tedy dokazatelná z formulí, které byly vzaty jako předpoklady.
Nyní užijte 2x větu o dedukci

2.2.4

Dokažte, že platí $\vdash (\varphi \wedge \exists x\psi) \Rightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$. Návod:

1. Vezměte formuli $\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi))$ jako předpoklad
2. axiom kvantifikátoru
3. pravidlo odloučení
4. získanou formuli převeďte do tvaru negace (formule)
5. poslední formule je dokázána z formule předpokládané v 1, proto aplikujte na obě formule větu o dedukci

6. užijte třetí výrokový axiom
7. opět aplikujte větu o dedukci.

2.2.5

Napište důkaz věty $\vdash \forall x \neg \varphi \Rightarrow \forall x (\varphi \Rightarrow \psi)$. Návod:

- a) Vezměte formuli $\forall x \neg \varphi$ jako předpoklad, pak užijte axiom substituce (ve formuli $\neg \varphi$ substitujte x za x) a pravidlo odloučení.
- b) Vezměte axiom A1 výrokové logiky ve tvaru $\neg \varphi \Rightarrow (\neg \varphi \Rightarrow \neg \varphi)$ a aplikujte na něj a na formuli získanou v kroku a) pravidlo odloučení.
- c) Vezměte axiom A3 výrokové logiky a aplikujte na něj a na formuli získanou v kroku b) pravidlo odloučení, na výslednou formuli pak aplikujte pravidlo zobecnění.
- d) Poslední získaná formule je teď dokazatelná z formule, která byla vzata jako předpoklad. Nyní užijte větu o dedukci.

2.2.6

Dokažte

$$\varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x) \vdash \forall x \varphi(x) \rightarrow (\neg \psi(x) \rightarrow \psi(y))$$

Návod:

- 1) Vezměte $\varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x)$ jako předpoklad.
- 2) Použijte axiom substituce.
- 3) Složení implikací.
- 4) Axiom substituce.
- 5) Složení implikací.
- 6) Výrokový axiom A1.
- 7) Složení implikací.

2.2.7

Dokažte sestrojením důkazu:

$$\vdash \forall x \varphi(x, x) \rightarrow (\forall x \forall y \varphi(x, y) \rightarrow \forall y \varphi(y, y))$$

Návod:

- (1) Vezměte $\forall x \varphi(x, x)$ jako předpoklad.
- (2) Použijte axiom substituce.
- (3) Pravidlo odloučení.

- (4) Pravidlo zobecnění.
- (5) Větu o dedukci.
- (6) Výrokový axiom A1.
- (7) Složení implikací.

2.2.8

Dokažte (napsáním důkazu), že platí

$$\varphi \rightarrow (\forall x\psi \rightarrow \chi), \psi \vdash \forall x\varphi \rightarrow \chi$$

. Návod:

- a) Zvolte tři vhodné formule jako předpoklady, označte je (1), (2) a (3) tak, aby formule (3) byla $\forall x\varphi$.
- b) Z formule (3) pomocí vhodného axiomu, který označíte (4), a vhodného pravidla odvod'te formuli φ a označte ji (5).
- c) Z formule (5), jedné z formulí (1),(2) a vhodného pravidla dostanete formuli (6).
- d) Na další z formulí (1),(2) aplikujte pravidlo zobecnění, čímž dostanete formuli (7).
- e) Z formulí (6) a (7) dostanete užitím vhodného pravidla poslední formuli, kterou označíte (8). Tato formule je tedy dokazatelná ze zvolených předpokladů. Nyní užijte větu o dedukci.

2.2.9

Dokažte, že platí $\vdash \forall x\forall y\varphi(x, y) \Rightarrow \forall x\varphi(x, x)$, dle následujícího návodu:

- (a) Formuli $\forall x\forall y\varphi(x, y)$ vezměte jako předpoklad
- (b) Axiom substituce.
- (c) Pravidlo odloučení.
- (d) Axiom substituce.
- (e) Pravidlo odloučení.
- (f) Pravidlo zobecnění.
- (g) Výsledek předchozích úvah ve vztahu dokazatelnosti formule z předpokladů.
- (h) Větu o dedukci.

Jakou obdržíte formuli po provedení kroku (f)?

2.2.10

Dokažte, že platí $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$. Zvolte si dva předpoklady. Na předpoklad aplikujte axiom substituce a potom metodu odloučení. Stejný postup aplikujte na druhý předpoklad. Poté aplikujte metodu odloučení na předchozí výsledky a poté použijte dvakrát větu o dedukci.

2.2.11

S využitím předem dokázané formule $\alpha = (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$ dokažte $\varphi, \psi \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$.

- a) předpoklad $\varphi \Rightarrow \neg\psi$
- b) α
- c) MP
- d) MP 1,2
- e) VD, přesuňte antecedent do předpokladu
- f) VD, odstraňte $\varphi \Rightarrow \neg\psi$ z předpokladu
- g) α
- h) MP 6,7
- i) VD

2.3 Realizace

2.3.1

Bud' φ nasledující formule: $\forall x\forall y(x < y \Rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$. Bez použití spojky \neg napište negaci formule φ . Určete, zda je pravdivá formule φ nebo její negace, jestliže univerzem je množina \mathbb{Z} (celých čísel).

2.3.2

Uvažujme jazyk L s jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním binárním funkčním symbolem f.

1. Najděte nějakou realizaci jazyka L na množině $\{1, 2, 3\}$.
2. Nechť φ je následující formule jazyka L: $\forall z\forall y\exists zp(f(x, z), y)$

Uvažujme realizaci \mathfrak{R} jazyka L s univerzem N, kde $p_{\mathfrak{R}}$ je relace uspořádání \leq a $f_{\mathfrak{R}}$ je násobení přirozených čísel. Rozhodněte, zda \mathfrak{R} je modelem teorie φ a svoje rozhodnutí odůvodněte.

2.3.3

Budě L jazyk predikátové logiky 1. řádu a rovností, jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním unárním funkčním symbolem f . Nechť T je teorie 1. řádu s jazykem L daná následujícími dvěma speciálními axiomy:

$$\begin{aligned} p(f(x), x) \\ f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(x, y) \end{aligned}$$

Uvažujme realizaci $M = (\mathbb{Q}, \leq, h)$ jazyka L, kde \leq je p_M a operace $h = f_M$ na množině \mathbb{Q} je definována předpisem $h(a) = \frac{a}{2}$ pro libovolné $a \in \mathbb{Q}$. Rozhodněte, zda:

- a) M je modelem teorie T
- b) $f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(f(x), y)$ je důsledkem teorie T.

2.3.4

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním binárním funkčním symbolem f a predikátovými symboly p a q arit 1 a 3. Nechť \mathfrak{R} je realizace jazyka L , kde univerzem je $P(\mathbb{N})$, tj. množina všech podmnožin množiny přirozených čísel, a symboly se realizují na množinách $A, B, C \subseteq N$ následovně:

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{R}}(A, B) &= A \cap B \\ A \in P_{\mathfrak{R}} &\Leftrightarrow A \neq \emptyset \\ (A, B, C) \in q_{\mathfrak{R}} &\Leftrightarrow A \cap B \cap C \end{aligned}$$

je konečná. Rozhodněte, zda jsou následující formule splněny v \mathfrak{R} :

- 1) $\forall x \forall y q(x, y, f(x, y))$
- 2) $p(f(x, y)) \Rightarrow (p(x) \wedge p(y))$
- 3) $p(x) \wedge p(y) \Rightarrow \forall z q(x, y, z)$
- 4) $p(x) \Rightarrow q(x, f(x, x), x)$

2.3.5

Uvažujme jazyk L se dvěma konstantami k, l , jedním unárním funkčním symbolem f a jedním binárním predikátovým symbolem p . Nechť \mathfrak{R} je realizace jazyka L, kde univerzem je množina všech bodů kulové plochy K se středem O s kulovou plochou K . Symbol f se realizuje v bodě x jako bod jemu protilehlý, tj. $f_{\mathfrak{R}}(x) \neq x$ je průsečík přímky procházející bodem x a středem O s kulovou plochou K . Realizace konstant jsou dva vzájemně protilehlé body: $k_{\mathfrak{R}} = S$ (severní pól) a $l_{\mathfrak{R}} = J$ (Jížní pól). Realizace symbolu p na bodech x, y je $p_{\mathfrak{R}}(x, y) \Leftrightarrow x, y$ leží na stejné (zeměpisné) rovnoběžce, tj. kružnicí vzniklé průnikem kulové plochy K a roviny kolmé na spojnici bodů S a J . Uvažujme následující formule:

- (1) $\chi : p(x, f(x))$

$$(2) \psi : p(l, x) \Leftrightarrow p(k, x)$$

$$(3) \theta : f(k) = l$$

Určete ty z teorií $A = \{\psi, \theta\}$, $B = \{\neg\chi, \psi\}$, $C = \{\neg\chi, \theta\}$, $D = \{\psi, \theta\}$, jejichž je \mathfrak{R} modelem.

2.3.6

Uvažujme jazyk L s jedním binárním predikátovým symbolem p . Nechť A je konečná množina a M je taková realizace jazyka L na množině $P(A)$ všech podmnožin množiny A, kde:

$$p_M(X, Y) \Leftrightarrow X \subseteq Y.$$

Uvažujme formule:

$$\varphi : \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow p(y, x))$$

$$\psi : \forall y (p(x, y) \Rightarrow p(y, x))$$

a teorii $T = \{\varphi, \psi\}$

- (1) Najděte ohodnocení e volných proměnných formule φ tak, aby byla při tomto ohodnocení pravdivá, tedy aby platilo $M \models \varphi[e]$.
- (2) Rozhodněte a odůvodněte, zda platí $M \models \varphi$.
- (3) Najděte jinou realizaci N na univerzu $P(A)$ takovou, aby platilo $N \models T$.

2.3.7

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním unárním predikátovým symbolem p a jedním binárním funkčním symbolem f . Nechť M je taková realizace jazyka L na množině $P(\mathbb{R}^2)$ všech podmnožin reálné roviny \mathbb{R}^2 , kde $p_M(X)$ znamená, že X je neprázdná množina bodů ležících uvnitř a na hranici nějakého obdélníku v \mathbb{R}^2 , jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, $f_M(X, Y) = X \cup Y$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda

$$(1) M \models (\exists x)(p(x) \Rightarrow f(x, x) = x)$$

$$(2) p(f(x, y)) \models (p(x) \vee p(y))$$

$$(3) M \models p(f(x, y)) \Rightarrow (p(x) \vee p(y))$$

2.3.8

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním unárním predikátovým symbolem p a jedním binárním funkčním symbolem f . Nechť M je taková realizace jazyka L na množině $P(\mathbb{R}^2)$ všech podmnožin reálné roviny \mathbb{R}^2 , kde $p_M(X)$ znamená, že X je neprázdná množina bodů ležících uvnitř a na hranici nějakého obdélníku v \mathbb{R}^2 , jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, $f_M(X, Y) = X \cap Y$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda

$$(1) M \models (\exists x)(f(x, x) = x \Rightarrow p(x))$$

$$(2) M \models (p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow p(f(x, y))$$

$$(3) (p(x) \wedge p(y)) \models p(f(x, y))$$

2.3.9

Uvažujme jazyk L s rovností a jedním binárním predikátovým symbolem p . Bud' R realizace jazyka L, jejimž univerzem je množina $S(\mathbb{Z})$ všechny podgrupy $(\mathbb{Z}, +)$ a v niž platí $p_R(G, H) \Leftrightarrow$ existuje injektivní homomorfismus grup $G \rightarrow H$.

1. Rozhodněte, zda R je modelem teorie uspořádaných množin.
2. Uvažujme formuli $\varphi \equiv \forall y p(y, x)$. Popište všechna ohodnocení e proměnných jazyka L taková, že $R \models \varphi[e]$.

2.3.10

Uvažujte jazyk L s rovností, jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním funkčním symbolem f . Bud' \mathfrak{R} realizace jazyka L, jejimž univerzem je množina \mathbb{R} všech reálných čísel a v niž platí: $p_{\mathfrak{R}}(a, b) \Leftrightarrow a \leq b$, $f_{\mathfrak{R}}(a, b) = a+b$. Uvažujte teorii $T = \{p(f(x, y), f(y, z)) \Rightarrow (p(x, z)), p(x, f(y, z)) \}$ a formuli $\varphi = p(x, f(x, y))$.

- 1) Rozhodněte, zda $\mathfrak{R} \models T$, tj. zda \mathfrak{R} je modelem teorie T.
- 2) Dokažte, že $T \models \varphi$, tj. že φ je důsledkem teorie T.

2.3.11

Bud' L jazyk s jedním binárním predikátovým symbolem p a funkčními symboly f (ternární) a g (unární). Uvažujme realizaci M jazyka L na univerzu N množiny přirozených čísel, kde $p_M(k, l) \Leftrightarrow 2+k \leq l$, $f_M(k, l, m) = k+l+m$ a $g_M(k) = 3k$. Rozhodněte, zda platí:

$$M \models \forall z((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow (p(g(x), f(x, y, z)) \wedge p(x, z)))$$

Najděte formuli jazyka L o proměnných x, y, z , která bude v realizaci M při ohodnocení proměnných $x \mapsto k$, $y \mapsto l$ a $z \mapsto m$ ekvivalentní podmínce $2(m+1) \leq k+l$.

2.3.12

Převeďte formuli $\forall x \exists y p(x, z) \rightarrow \exists y \exists z (q(x) \rightarrow \forall z p(y, z))$ do prenexního tvaru a najděte realizaci přísného jazyka, v niž bude tato formule splněna.

2.3.13

Převeďte na prenexní tvar a nalezněte realizaci, kdy bude následující formule splněna.

$$\forall x \forall z (q(x) \rightarrow \exists z \exists z p(z, x)) \rightarrow \forall y p(y, z)$$

2.3.14

Najděte formuli φ jazyka L s jedním binárním funkčním symbolem f , konstantou c a rovností, která bude v realizaci R s univerzem N (množina kladných celých čísel), kde $f_R(k, l) = kl$, $c_R = 1$ vyjadřovat vlastnost, že existuje prvočílo ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, dělitelné jen jedničkou a samou sebou)

2.3.15

Uvažujme jazyk K s rovností a jedním funkčním binárním symbolem f . Nechť \mathfrak{R} je realizace jazyka K s univerzem \mathbb{Z} , kde $f_{\mathfrak{R}}$ je násobení na \mathbb{Z} . Napište formulí predikátové logiky, která bude f realizaci \mathfrak{R} odpovídat vlastnosti, že každé va prvky z \mathbb{Z} mají největší společný dělitel.

2.3.16

Uvažujme jazyk L s rovností, unárním predikátovým symbolem v , unárním funkčním symbolem d a binárním funkčním symbolem g . Nechť M je realizace jazyka L s univerzem \mathbb{R}^2 , kde

$$d_M(a, b) = (b, a)$$

$$g_M((a, b), (c, d)) = \begin{cases} (a, b), b \neq c \\ (a, d), b = c \end{cases}$$

Uvažujme teorii: $T = \{(x = d(x)) \rightarrow v(x), v(x) \rightarrow v(d(x)), (v(x) \wedge v(y)) \rightarrow v(g(x, y))\}$ Najděte unární relaci v_M takovou, aby realizace M byla modelem teorie T a rozhodněte, zda $T \models v(d(x)) \rightarrow v(x)$.

2.3.17

Mějme jazyk L nad univerzem $\{a, b, c, d\}$, s binárním predikátovým symbolem p a unárním funkčním symbolem u a teorii $T = \{p(x, u(x)), u(u(x)) = x, p(x, y) \rightarrow (x = y \vee x = u(y))\}$.

- a) Nalezněte realizaci R tohoto jazyka takovou, že je modelem teorie T. Měli jsme to zadat tabulkou, tj. 4x4 pro predikát (zapisujte 0 a 1) a 4x1 pro unární operaci.
- b) Rozhodněte, zda $T \vdash p(x, y) \Rightarrow (x = y)$

2.3.18

Nechť L je jazyk s rovností, bin. predikatovy sym. p a binarnim funkcnim symbolem p. Uvazujte formule

$$\begin{aligned}\phi &\equiv f(x, x) = x \\ \chi &\equiv p(x, f(x, y)) \\ \psi &\equiv p(x, y) \Leftrightarrow f(x, y) = y \\ \omega &\equiv f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)\end{aligned}$$

a teori $T = \phi, \chi, \psi, \omega$.

- a) Uvazujte realizaci R jaz. do L s univerzum N a realizaci symbolu $p_R(a, b) \Leftrightarrow a \mid b$ (| znamena deli) a $f_R = nsn(a, b)$ rozhodnut zda $R \models T$
- b) Zjistite zda plati $T \setminus \{\chi\} \cup \{\omega\} \models \chi$ a zdůvodněte

2.4 Prenexní tvar

2.4.1

Převed'te formuli

$$\forall x\varphi(x, y) \rightarrow \exists x(\psi(x) \vee \chi(y, z))$$

do prenexního tvaru. K získané formuli (v prenexním tvaru) napište její negaci a upravte ji tak, aby se spojka negace vyskytovala jen před (některými) φ, ψ, χ .

2.4.2

Převed'te negaci formule $(\forall x p(x, y) \rightarrow \exists x \forall y q(x, y)) \wedge \exists y (\forall x p(y, y) \rightarrow \forall x p(x, y))$ do prenexního tvaru.

2.4.3

Převed'te negaci následující formule do prenexního tvaru:

$$\neg(\forall x(\Phi(x) \Rightarrow \forall y\psi(x, y)) \Rightarrow \forall x\exists y\psi(x, y))$$

2.4.4

Negaci formule

$$\exists x(\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)) \wedge (\forall x\chi)$$

převed'te do tvaru (ekvivalentní formule), ve kterém se nebude vyskytovat žádná ze spojek \wedge a \vee .

2.4.5

Převed'te následující formuli do prenexního tvaru. Potom napište její negaci a upravte ji tak, aby se v ní nevyskytovala spojka \Rightarrow :

$$\forall x A(x) \Rightarrow (\forall x B(y) \Rightarrow \neg\forall x C(y, x))$$

2.4.6

Převed'te negaci formulce $\forall x \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \exists x(\psi(x) \Rightarrow \forall z \varphi(x, z))$ do prenexního tvaru.

2.4.7

Převed'te formuli

$$\forall x \exists y \varphi(x, y) \rightarrow (\varphi(x, x) \rightarrow \exists y \forall x \varphi(y, y))$$

do prenexního tvaru. Poté napište jeho negaci ve tvaru, kde se symbol \neg bude vyskytovat pouze u atomických formulí.

2.4.8

Rozhodněte, zda jsou formule $(x \vee (y \wedge z)) \Rightarrow (y \wedge (x \vee z))$ a $((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \Rightarrow y$ ekvivalentní.

2.4.9

Rozhodněte, zda jsou formule $(y \wedge z) \Rightarrow (x \vee (x \wedge y))$ a $(z \wedge \neg x) \Rightarrow (\neg y \wedge (x \vee \neg y))$ ekvivalentní.

2.4.10

Převeďte formuli $(\forall x p(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y q(x, x)) \Rightarrow \forall x (\exists x p(y, x) \Rightarrow q(y, x))$ do prenexního tvaru. Poté ji znegujte a převeďte do tvaru, kde se spojka \neg nebude vyskytovat u neatomických formulí.

2.4.11

Zjistěte, zda ϕ a ψ jsou ekvivalentní formule predikátové logiky s jazykem obsahujícím binární predikátové symboly p, q , kde

$$\phi : \forall x p(x, y) \rightarrow \neg \forall z q(z, x)$$

$$\psi : \exists z (p(z, y) \rightarrow \neg q(z, x))$$

Návod: Vyjádřete formule ϕ, ψ bez použití spojky \rightarrow a po úpravách jednu z nich převeďte na prenexní tvar snížením počtu kvantifikátorů.

2.4.12

Zjistěte, zda ϕ a ψ jsou ekvivalentní formule predikátové logiky s jazykem obsahujícím binární predikátové symboly p, q , kde :

$$\phi : \neg(\forall y p(x, y) \rightarrow \exists z q(z, y))$$

$$\psi : \forall z (\neg(p(x, z) \rightarrow q(z, y)))$$

Návod: Vyjádřete formule ϕ, ψ bez použití spojky \rightarrow a po úpravách jednu z nich převeďte na prenexní tvar snížením počtu kvantifikátorů.

2.4.13

Prevest na prenexni tvar, zistit ci su ekvivalentne, objasnit.

$$\alpha \equiv \forall x (\exists y p(u, y) \rightarrow \exists y \exists z (\forall x q(y, z) \rightarrow \exists v p(v, z)))$$

$$\beta \equiv \forall x (p(x, y) \rightarrow \exists y \exists x (\forall x q(y, z) \rightarrow \exists z p(y, z)))$$

3 Algebra

3.1 Grupy, podgrupy, cyklické grupy

3.1.1

Na množině \mathbb{Z} všech celých čísel uvažujme binární operaci $*$ definovanou takto: $x * y = xy + x + y$. Tato operace tvoří na množině $\mathbb{Z} - \{-1\}$ komutativní grupu, ve které inverzní prvek K danému prvku Je:

- a) $\frac{1-x}{1+x}$
- b) $\frac{1}{-1+x}$
- c) $\frac{x}{-1+x}$
- d) $\frac{1}{1+x}$
- e) v jiném tvaru, než je uvedeno v (a)-(d).

3.1.2

Bud' $A = (\mathbb{Z}, f)$ algebra typu (1) (\mathbb{Z} značí množinu celých čísel), kde $f(z) = |z| - 8$ pro každé $z \in \mathbb{Z}$. Popište:

1. podalgebru $B = \langle -4 \rangle$ algebry A ,
2. přímý součin algeber $B \times (0, 1, 2, g)$, kde g je permutace $g = (1, 2)$ (v cyklickém zápisu).

3.1.3

Popište:

- a) podgrupu grupy \mathfrak{R} s operací + generovanou množinou $\{3, 11\}$,
- b) podtěleso tělesa \mathfrak{R} (s obvyklými operacemi sčítání a násobení) generované množinou $\{n\}$, kde n je celé nenulové číslo.

3.1.4

Položme $P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \exists a \in \mathbb{R} - \{0\} \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = ax\}$. Dokažte, že (P, \circ) , kde \circ značí skládání zobrazení, je grupoid. Zjistěte, zda (P, \circ) je dokonce grupa (svůj závěr odůvodněte).

3.1.5

Uvažujme univerzální algebru $A = (\mathbb{C}, +, conj, 1)$, kde $+$ je binární operace sčítání komplexních čísel, $conj$ je unární operace konjugace (komplexní sdruženost), tj. $conj(a+bi) = a-bi$, a 1 je nulární operace. Popište podalgebru $\langle \{i\} \rangle$ algebry A (tj. podalgebru generovanou jednoprvkovou množinou $\{i\}$).

3.1.6

Nechť $G = \{x + y\sqrt{7}; x, y \in \mathbb{Q}\}$. Zjistěte, zda $(G, +, \cdot)$ je těleso ($+$ a \cdot značí obvyklé operace sčítání a násobení).

3.1.7

Udejte příklad tříprvkového komutativního grupoidu, který není grupou, ale platí v něm zákony o krácení. Zdůvodněte, proč tento grupoid není grupa.

3.1.8

Na množině \mathbb{Q} všech racionálních čísel je dána binární relace \odot vztahem $x \odot y = x + y - xy$. Pak (\mathbb{Q}, \odot) tvoří:

- (a) grupu
- (b) komutativní monoid, který není grupou
- (c) monid, který není komutativní
- (d) pologrupu bez neutrálního prvku
- (e) netvoří komutativní pologrupu

3.1.9

Bud' S symetrická grupa na množině $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, tj. grupa všech permutací na množině $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ s operací skládání. Určete podgrupu grupy S generovanou permutací $\{f_1, f_2\}$, kde $f_1(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{x-1}{x}$.

3.1.10

Je dán grupoid s tří prvkovou množinou a s jednou operací \circ , která splňuje zákon o krácení. Sestavte tabulku pro tuto operaci. Zároveň grupoid není grupou, ukažte, že neplatí asociativní zákon.

3.1.11

Je dána grupa $(\mathbb{Z}, 1, 2, f)$, kde \mathbb{Z} je množina celých čísel a 1,2 jsou konstanty a f je unární operace definována předpisem $f(x) = 3x$. Určete podgrupu $\langle 6 \rangle$ generovanou prvkem 6.

3.1.12

Máme algebru $A = (\mathbb{R}^2, +, k, (0, 1))$, kde $+$ je sčítání po složkách, $k(a, b) = (-a, b)$ a $(0, 1)$ je nulární operace. Najděte podalgebru algebry A generovanou z $\langle \{(1, 0)\} \rangle$.

3.1.13

Uvažujte podgrupu symetrické grupy S_4 (tj. grupy permutací množiny $\{1, 2, 3, 4\}$) generované množinou permutací $\{(1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2)\}$. Určete řád podgrupy a zda je podgrupa komutativní, či dokonce izomorfní s pro nějaké $(\mathbb{Z}_n, +)$, kde $n \in \mathbb{N}$.

3.1.14

Uvažujme univerzální algebru $A = (A, p, q)$ typu $(1, 1)$ na množině funkcí $A = \{x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, 1-\frac{1}{x}, \frac{x}{x-1}\}$ s definičním oborem $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, kde $p(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$ a $q(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$ pro $f(x) \in A$. Dokažte, že množina A je uzavřená vzhledem k operaci p i q a najděte podalgebru A generovanou prvkem $1-x$.

3.1.15

Dokažte, že grupoid $(A, *)$, kde $A = \{a, b, c, d\}$ a operátor $*$ je dána níže uvedenou tabulkou, není pologrupou. Rozhodněte zda existuje nějaký tříprvkový podgrupoid grupoidu $(A, *)$ a nějaká vlastní kongruence (tj. taková, která není rovností ani univerzální relací) na $(A, *)$. (Ukažte na základě jaké úvahy vaše odpověď vznikla.)

*	a	b	c	d
a	a	b	a	a
b	a	c	d	c
c	b	c	d	c
d	a	d	b	b

3.1.16

Nechť \mathbb{I} je množina iracionálních čísel a uvažujeme monoid všech zobrazení $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ s operací \circ (skládání zobrazení) a jeho podmnožinou $M = \{f(x) = \frac{x}{1+ax} | a \in \mathbb{Z}\}$. Dokažte, že M je uzavřená vzhledem k \circ . Rozhodněte, které z následujících vlastností má grupoid (M, \circ) (svá rozhodnutí zdůvodněte):

- a) je pologrupa
- b) je komutativní pologrupa
- c) je monoid
- d) je komutativní monoid
- e) je grupa
- f) je komutativní grupa

3.1.17

Dokažte, že grupoid $(A, *)$, kde $A = \{a, b, c, d\}$ a operátor $*$ je dána níže uvedenou tabulkou, není pologrupou. Rozhodněte zda existuje nějaký tříprvkový podgrupoid grupoidu $(A, *)$ a nějaká vlastní kongruence (tj. taková, která není rovností ani univerzální relací) na $(A, *)$. (Ukažte na základě jaké úvahy vaše odpověď vznikla.)

*	a	b	c	d
a	b	a	c	c
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	d	b	b

3.1.18

Nechť \mathbb{R} (Nebo tam bylo \mathbb{C} ? s tím \mathbb{R} mi to moc nesedí) je množina reálných čísel a uvažujeme monoid všech zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s operací \circ (skládání zobrazení) a jeho podmnožinou $M = \{f(x) = \sqrt[3]{a+x^3} | a \in \mathbb{Z}\}$. Dokažte, že M je uzavřená vzhledem k \circ . Rozhodněte, které z následujících vlastností má grupoid (M, \circ) (svá rozhodnutí zdůvodněte):

- a) je pologrupa
- b) je komutativní pologrupa
- c) je monoid
- d) je komutativní monoid
- e) je grupa
- f) je komutativní grupa

3.2 Morfismy

3.2.1

Na množině \mathbb{C} komplexních čísel uvažujme operaci $+$ obvyklého sčítání. Bud' $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zobrazení dané předpisem $f(a+ib) = a - ib$. Pak:

- a) $(\mathbb{C}, +)$ není grupa
- b) f je zobrazení grupy $(\mathbb{C}, +)$ do sebe, které není homomorfismem
- c) f je homomorfismus grupy $(\mathbb{C}, +)$ do sebe, který není izomorfismem
- d) f je izomorfismus grupy $(\mathbb{C}, +)$ na sebe (tedy automorfismus)
- e) neplatí žádná z uvedených možností

3.2.2

Uvažujme aditivní grupu reálných čísel (\mathbb{R}, \oplus) , kde operace \oplus je daná předpisem

$$a \oplus b = a + b - 1$$

1. Rozhodněte, zda grupoid (\mathbb{R}, \oplus) je monoid.
2. Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = 2x + 1$ je homomorfismus grupidů $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, \oplus)$.

3.2.3

Nechť pro libovolné přirozené číslo $m > 0$ značí symbol Z_m okruh zbytkových tříd modulo m a pro libovolné $x \in Z$ nechť symbol $[x]_m$ značí tu třídu kongruence modulo m (tedy prvek množiny Z_m), která obsahuje prvek x . Jaký musí být vztak mezi přirozenými čísly $m, n > 0$, aby platilo $[x]_m \subseteq [x]_n$ pro všechna $z \in Z$? Je pak zobrazení $f : Z_m \rightarrow Z_n$ dané předpisem $f([x]_m) = [x]_n$ pro všechna $x \in Z$ homomorfismus?

3.2.4

Mějme grupu $M(n, \mathbb{R})$ všech čtvercových matic řádu n ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$) nad \mathbb{R} s operací sčítání a grupu \mathbb{R} všech reálných čísel s operací sčítání. Definujeme zobrazení $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(A) = \text{tr}(A)$ pro všechna $A \in M(n, \mathbb{R})$ (kde $\text{tr}(A)$ značí stopu matice A , tj. součet prvků na hlavní diagonále matice A). Dokažte, že j je homomorfismus, popište třídy jádra $M(n, \mathbb{R})/f$ a určete normální podgrupu grupy $M(n, \mathbb{R})$ odpovídající jádru $M(n, \mathbb{R})/f$. Zjistěte, zda grupy $M(n, \mathbb{R})/f$ a \mathbb{R} jsou izomorfní.

3.2.5

Uvažujme univerzální alagebru $A = (\mathbb{Z}, *, ')$ typu $(1, 1)$ na množině celých čísel \mathbb{Z} , kde odpovídající unární operace jsou dány vztahy: $a' = |a|$ a $a^* = (-1)^a a$. Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi(a) = 4a^2$ je homomorfismus $A \rightarrow A$ a pokud ano, popište jeho jádro.

3.2.6

Uvažujme univerzální algebru $A = (\mathbb{Z}^2, e, \delta, \oplus, \odot, \nabla)$, kde e je nulární operace, δ je unární operace, \oplus, \odot jsou binární operace a ∇ je ternární operace. Tyto operace jsou dány následovně: $e = (0, 1)$, $\delta(x, y) = (x, y + 2)$, $\oplus(x_1, y_1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2)$, $\nabla((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$. Zjistěte a zdůvodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x, y) = (3x, x + y)$ je homomorfismus algebry A do A .

3.2.7

Uvažujme univerzální algebru $A = (\mathbb{Z}^2, e, \delta, \oplus, \odot, \nabla)$, kde e je nulární operace, δ je unární operace, \oplus, \odot jsou binární operace a ∇ je ternární operace. Tyto operace jsou dány následovně: $e = (0, 1)$, $\delta(x, y) = (x + 1, y)$, $\oplus(x_1, y_1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2)$, $\nabla((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$. Zjistěte a zdůvodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x, y) = (x + y, 2y)$ je homomorfismus algebry A do A .

3.2.8

Mějme grupu $T(3, \mathbb{R})$ všech invertibilních (tj. regulárních) trojúhelníkových matic řádu 3 s operací násobení a grupou \mathbb{R}^* všech nenulových reálných čísel s operací násobení. Definujeme zobrazení $f : T(3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ předpisem $f(A) = |A|$ pro všechna $A \in T(3, \mathbb{R})$, (kde $|A|$ značí determinant matice A). Zjistěte, zda f je homomorfismus a nalezněte netriviální vlastní normální podgrupu grupy $T(3, \mathbb{R})$.

3.2.9

Mějme grupu $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$ regulárních čtvercových matic řádu 2 spolu s operací násobení. Nalezněte podgrupu B generovanou množinou

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a rozhodněte, zda $f : B \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$, kde

$$f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = bd$$

je homomorfismus grup.

3.3 Kongruence

3.3.1

Mějme grupu regulárních matic řádu 2 nad tělesem reálných čísel \mathbb{R} spolu s operací násobení matic, označíme ji $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$. Uvažujme binární relaci \sim na $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$ definovanou předpisem $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$ (kde \parallel značí determinant). Dokažte, že

1. \sim je kongurence na grupě $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$ a
2. faktorová grupa $(GL(2, \mathbb{R}) / \sim, \cdot)$ je izomorfní s grupou $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ všech nenulových reálných čísel s násobením.
3. Definujte normální podgrupu grupy $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$, která odpovídá kongruenci \sim .

3.3.2

Na multiplikativní grupě $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ všech nenulových komplexních čísel nechť jsou dva prvky v relaci \sim právě tehdy, když mají stejnou absolutní hodnotu. Dokažte, že relace \sim je kongruence na uvedené grupě, a graficky znázorněte třídy kongruence \sim a také normální podgrupu určenou kongruencí \sim .

3.3.3

Uvažujme algebru $A = (\mathbb{Z}, t)$ s jednou unární operací t definovanou pro libovolné $x \in \mathbb{Z}$ předpisem $t(x) = x + 1$.

- a) Popište všechny podalgebry algebry A .
- b) Uvažujme rozklad množiny \mathbb{Z} , jehož třídy jsou všechny dvouprvkové množiny tvaru $\{2k, 2k + 1\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Je příslušná ekvivalence kongruencí na algebře A ?

3.3.4

Nechť \mathbb{C}^* značí multiplikativní grupu všech nenulových komplexních čísel a G její podgrupu všech komplexních čísel s absolutní hodnotou 1. Nechť $f : \mathbb{C}^* \rightarrow G$ je zobrazení dane vztahem $f(z) = \frac{z}{|z|}$. Popište kongruenci na \mathbb{C}^* danou jádrem zobrazení f a určete jí odpovídající normální podgrupu grupy \mathbb{C}^* .

3.3.5

Uvažujeme algebru $A = (\Sigma^*, \mu, \delta_a, b)$ typu $(3, 1, 0)$, kde Σ^* je množina všech konečných řetězců (slov) vytvořených z prvků (písmen) konečné množiny (abecedy) Σ . Symbol μ označuje ternární operaci zřetězení tří slov v daném pořadí, nulární operace b je dána vybraným prvkem $b \in \Sigma$, $a \in \Sigma$ je pevně daný prvek $a \neq b$ a δ_a je unární operace, která nahrazuje všechny výskytty prvku b v daném řetězci řetězce ab . Definujme binární relaci \sim na Σ^* takto: $u \sim v \Leftrightarrow |u| = |v|$, kde $|u|$ je počet prvků řetězce u . Rozhodněte, zda \sim je kongruencí na algebře A , a pokud ano, popište třídy příslušného rozkladu. Pokud ne, pak najděte takovou podalgebru algebry A , pro kterou příslušné zúžení relace \sim kongruencí je.

3.3.6

Mějme algebru $A = (\mathbb{R}^2, a, b, c)$ typu $(2, 1, 0)$, kde operace $\{a, b, c\}$ jsou dány vztahy:

$$a((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 y_1 + x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$b(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$$

$$c = (0, 0)$$

Definujeme relaci ekvivalence $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$. Rozhodněte, zda \sim je či není kongruence na A (odůvodněte).

3.3.7

Najděte všechny rozklady množiny $\{x, y, z\}$ takové, že jim odpovídající ekvivalence jsou kongruence na algebře $A = (\{x, y, z\}, b)$, kde $f(x) = y, f(y) = f(z) = z$.

3.3.8

Uvažujme univerzální algebru $A = (\Sigma^*, \cdot, ^*, 2)$, kde $\Sigma \in \{a, b, c\}$ a Σ^* je množina slov nad abecedou Σ včetně prázdného slova ε , \cdot je binární operace $x \cdot y = xay$ a * je unární operace $x^* = xcc$. Na Σ^* definujeme binární relace \sim_1 a \sim_2 následovně:

$$x \sim_1 y \Leftrightarrow |x|_a = |y|_b$$

$$x \sim_2 y \Leftrightarrow |x|_c = |y|_c$$

kde $|x|_p$ je počet výskytů písmene $p \in \Sigma$ ve slově x . Rozhodněte o každé z relací, zda je kongruence na A . Pokud ano, popište prvky příslušné faktorové algebry.

3.4 Zbytkové třídy

3.4.1

Vypočtěte v tělese $(\mathbb{Z}_5, \cdot, +)$

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}$$

3.4.2

V tělese \mathbb{Z}_7 vypočtěte $\frac{4}{3}(2 - \frac{3}{4} - \frac{5}{3})$.

3.4.3

Vypočtěte v tělese \mathbb{Z}_7 zbytkových tříd modulo 7:

$$\frac{4(3+5)}{6} - \frac{2}{3}$$

3.4.4

Najděte největší společný dělitel polynomů $x^4 + x^3 + 3x + 3$ a $x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ nad okruhem $(\mathbb{Z}_5, \cdot, +)$. Během výpočtu používejte jen reprezentanty prvků \mathbb{Z}_5 z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

3.4.5

Najděte všechny generátory cyklické grupy $(\mathbb{Z}_5, +)$.

3.4.6

Najděte všechny generátory cyklické grupy $(\mathbb{Z}_7, +)$.

3.4.7

V okruhu \mathbb{Z}_5 polynomů nad tělesem \mathbb{Z}_5 zbytkových tříd modulo 5 naleznětě největší společný dělitel prvků $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ a $4x^3 + x^2 + 4$.

3.4.8

Vypočtěte v tělese $(\mathbb{Z}_7, \cdot, +)$

$$\frac{\frac{2}{5} \times \left(\frac{(5+(-2))}{3} \right) + 6^{(-2)}}{2}$$

3.4.9

Ve zbytkové třídě modulo 41 vyřešte rovnici:

$$18x - 1 = x + 1$$

3.4.10

V tělese \mathbb{Z}_5 , tj. zbytkových tříd modulo 5, vypočtěte

$$-\frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 \right)$$

(Uvědomte si, že každá číslice x v uvedeném vztahu znamená třídu $[x]_5$ kongruence modulo 5 na okruhu celých čísel.)

3.4.11

V tělese \mathbb{Z}_5 , tj. zbytkových tříd modulo 5, vypočtěte

$$-\frac{4}{3} \left(2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{3} \right)$$

(Uvědomte si, že každá číslice x v uvedeném vztahu znamená třídu $[x]_5$ kongruence modulo 5 na okruhu celých čísel.)

3.4.12

V tělese zbytkových tříd \mathbb{Z}_7 vypočítejte:

$$3 - 2(2 - 4)^{-1} + 5^3$$

4 Funkcionalni analýza

4.1 Metrické prostory

4.1.1

4.1.2

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}_3 s euklidovskou metrikou p definujeme vzdálenost libovolných dvou množin A a B vztahem $\delta(A, B) = \inf \{(p(a, b) | a \in A, b \in B)\}$. Rozhodněte, zda $(P(\mathbb{R}_3), \delta)$ tvoří metrický prostor (symbol $P(\mathbb{R}_3)$ značí množinu všech podmnožin množiny \mathbb{R}_3).

4.1.3

4.1.4

Na \mathbb{Z}^2 definujeme metriku δ následovně: $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Zakreslete kružnici určenou touto metrikou a poloměru 2 se středem v bodě $(0, 0)$, tj. množinu

$$S_\delta(2) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \delta((x, y), (0, 0)) = 2\}$$

. Určete počet prvků množiny $S_\delta(2)$ a tyto prvky vypište.

4.1.5

4.1.6

Definujeme zobrazení $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{|x_1 - x_2|}{2} + 3|y_1 - y_2|$$

Rozhodněte, zda zobrazení δ definuje metriku na množině \mathbb{R}^2 (využijte skutečnost, že vztahem $d(x, y) = |x - y|$ je definována metrika na \mathbb{R}). V kladném případě zakreslete v rovině \mathbb{R}^2 jednotkovou kružnici vzhledem k této metrice, tj. množinu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \delta((x, y), (0, 0)) = 1\}$.

4.1.7

4.1.8

Na množině \mathbb{Z}^2 je definovaná metrika δ vztahem $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$. Zjistěte, pro které body $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ platí současně $\delta((-1, 1), (x, y)) = 3$ a $\delta((3, 0), (x, y)) = 2$.

4.1.9

4.1.10

Na množině \mathbb{Z}^2 je definovaná metrika $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$. Zjistěte, pro které body $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ platí současně $\delta((1, -1), (x, y)) = 3$ a $\delta((2, 3), (x, y)) = 2$.

4.1.11

4.1.12

Nad abecedou $\Gamma = \{x, y, z\}$ uvažujeme jazyk $\Sigma = x^*y^+z^*$. Bud' $\mu(u, v) = n$, kde n je nejmenší počet změn řetězce u , které je potřeba provést, aby se tento řetězec transformoval na řetězec v . Přitom změnou řetězce rozumíme vypuštění či vložení symbolu nebo nahrazení symbolu jiným symbolem v tomto řetězci. Ověrte (dokažte), zda μ je či není metrika na Σ a v kladném případě určete všechny prvky množiny Σ , které leží v otevřené kouli o poloměru 2 se středem v prvku xyz .

4.1.13

4.1.14

Na množině $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}$ mějme metriku $p((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|)$. Znázorněte graficky v M jednotkovou kouli se středem v bodě $(0, 0, 0)$ vzhledem k metrice p , tj. množinu $S = \{(x, y, z) \in M : p((x, y, z), (0, 0, 0)) = 1\}$.

4.2 Normované prostory

4.2.1

4.2.2

V lineárním prostoru $C[-1, 1]$ všech (reálných) spojitých funkcí na intervalu $[-1, 1]$ uvažujme normu $\|f\| = \max\{|f(t)| ; t \in [-1, 1]\}$ a funkci $h \in C[-1, 1]$ danou vztahem $h(t) = 1 - |t|$ pro všechna $t \in [-1, 1]$. Určete všechny konstantní funkce $g \in C[-1, 1]$ s vlastností $p(g, h) = 1$, kde p je metrika indukovaná danou normou. (Návod: Úlohu řešte graficky.)

4.2.3

4.2.4

V reálné rovině \mathbb{R}^2 uvažujme normu danou vztahem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ a nechť p je metrika v \mathbb{R}^2 inkluďovaná touto normou. Načrtněte množinu všech bodů $[x_0, x_1]$ v \mathbb{R}^2 , pro než platí $p([x_0, x_1], [0, 0]) \leq 1$. Jaký je rovinový obsah této množiny?

4.2.5

4.2.6

Mějme na $C(-1, 1)$ (prostor spojitých funkcí na $(-1, 1)$) definovanou normou

$$\|f\| = \max\{|f(x)| ; x \in [-1, 1]\}$$

Bud' δ metrika daná touto normou. Určete vzdáenosť $\delta(f, g)$ funkcií $f(x)$ a $g(x)$, kde $f(x) = |2x - 1| - 1$ a $g(x) = -|x + \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}$

4.3 Unitárni prostory

4.3.1

4.3.2

Na reálném vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 definujme skalárni součin vztahem $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi podprostoru prostoru \mathbb{R}^3 generovaného vektory $(1, 2, -1)$, $(1, 2, -3)$, $(4, 8, -8)$, $(3, 6, -9)$.

4.3.3

4.3.4

Na reálném vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 definujeme skalárni součin vztahem

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi podprostoru prostoru \mathbb{R}^3 generovaného vektory $(2, -1, 3)$, $(-1, 2, -3)$, $(3, 0, 3)$ a $(8, 2, 6)$.

4.3.5

4.3.6

V Euklidovském prostoru \mathbb{R}^4 nalezněte ortonormální bázi podprostoru W generovaného vektory $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 1, -1, 1)$ a $u_4 = (-1, 1, 1, 1)$.

4.3.7

4.3.8

Uvažujte prostor V vektorového prostoru \mathbb{R}^4 generovaný vektory $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$ a $v_3 = (1, -1, 1, -1)$. Určete dimenzi prostoru V a jeho ortonormální bázi.

5 Grafy

5.1 Nazezení grafu

5.1.1

5.1.2

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{1, 2, \dots, 2n\}$, $n > 0$ přirozené číslo a H má 15 prvků. Pro každé číslo $i = 1, 2, \dots, n$ mají uzly i a $n+i$ tentýž stupeň i . Určete hodnotu čísla n a pak graf G přehledně nakreslete.

5.1.3

5.1.4

Nakreslete všechny navzájem neizomorfní stromy se 6 uzly.

5.1.5

5.1.6

Graf G má 11 uzelů, která mají všechny stejný stupeň n . Určete počet h hran grafu G , víte-li, že $n > 2$ a že G je nesouvislý. Pokuste se graf G přehledně nakreslit.

5.1.7

5.1.8

Uvažujme obyčejný graf G , který má 19 hraf a součet stupňů lichých uzelů je menší nebo roven součtu stupňů sudých uzelů. Kolik má graf G lichých uzelů, víte-li, že jich je více než 2 a všechny mají stejný stupeň větší než 1?

5.1.9

5.1.10

Kolik hran má sedmnáctistěn s 30 vrcholy? Nápověda: Uvažujte planární graf odpovídající danému mnohostěnu.

5.1.11

5.1.12

Kolik hran má patnáctistěn s 26 vrcholy? Nápověda: Uvažujte planární graf odpovídající danému mnohostěnu.

5.1.13

5.1.14

Každá ze 13 zemí má uzavřenou bilaterální smlouvu o hospodářské spolupráci s právě n ostatními zeměmi (z těchto 13ti). Jakých hodnot může nabývat n , jestliže víme, že $n > 2$ a n není dělitelné číslem 4 ani číslem 5.

5.1.15

5.1.16

Uzel obyčejného grafu se nazývá artikulace, pokud se po jeho odstranění a odstranění s ním incidentních hran zvýší počet komponent grafu. Kolik existuje navzájem neizomorfních lesů o 6 uzlech s právě 1 artikulací? Nakreslete je.

5.1.17

5.1.18

Jaký je nejmenší počet hran grafu se 7 uzly, jehož každý uzel má stupeň 2,4 nebo 6 a každý z těchto stupňů je zastoupen? Nakreslete takový graf.

5.1.19

5.1.20

V obci Skorošice se koná amatérský fotbalový turnaj, kterého se účastní 9 týmů. V dopolední části turnaje každý tým odehrál 2 zápasy. Kolik zápasů v odpolední části musí každý tým odehrát, aby si zahráli co nejvíce zápasů, avšak celkový počet odehraných zápasů musí být menší jak 32.

5.1.21

5.1.22

Nakreslete obyčejný graf o 6 uzlech s uzly stupně 1,2,3,4,5. Kolik existuje možností, jak tento graf zakreslit (až na izomorfismus).

5.1.23

5.1.24

Nakreslete obyčejný graf o 5 uzlech, který obsahuje uzly stupňů 1,2,3,4. Kolik takových grafů existuje (až na izomorfismus)?

5.1.25

5.1.26

Jaký je nejmenší počet uzelů n grafu, takového aby platilo $H = 3 * n + 4$ (kde H je počet hran). Nakreslete takový graf.

5.1.27

5.1.28

Jaký je nejmenší počet uzelů n grafu, takového aby platilo $H = 2 * n + 3$ (kde H je počet hran). Nakreslete takový graf.

5.1.29

5.1.30

Je dán obyčejný graf $G = (U, H)$, kde $U = \{1, 2, \dots, n\}$, $n > 0$ přirozené číslo, a H má 12 prvků. Pro každé číslo $i = 1, 2, \dots, n$ má uzel i tentýž stupeň $n - 2$. Určete hodnotu čísla n a pak graf G přehledně nakreslete.

5.1.31

5.1.32

Bud' G planární graf s uzly $\{1, 2, 3\}^2$, (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou spojeny hranou když $|x_1 - x_2| = 1 \wedge |y_1 - y_2| = 1$. Určete počet automorfismů grafu. (Návod nakreslite graf tak, že uzly odpovídají bodům v \mathbb{R}^2)

5.1.33

5.1.34

G planární graf s mnozinou uzlu $0, 1, 2^2$ kde uzly $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ jsou spojene hranou když $|(x_1 - x_2)| = 1 \wedge |(y_1 - y_2)| = 1$. Určete počet všech automorfizmu G . Navod nejprve nakresly uzly, na hrany v \mathbb{R}^2

5.2 Nazetení minimální kostry

5.2.1

5.2.2

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 15 prvků s oceněním $v : H \rightarrow N$ takovým, že $v\{a, b\} = 2, v\{a, c\} = 1, v\{a, d\} = 1, v\{b, c\} = 1, v\{b, d\} = 2, v\{c, d\} = 3, v\{b, e\} = 4, v\{d, e\} = 3, v\{d, g\} = 2, v\{e, f\} = 4, v\{e, g\} = 3, v\{e, h\} = 2, v\{f, g\} = 3, v\{f, h\} = 1, v\{g, h\} = 1$. Nakreslete tento graf tak, že každá z následujících čtveric (a, b, c, d) , (b, d, e, g) a (e, f, g, h) tvoří vrcholy čtverice a hrany jsou znázorněny úsečkami spojujícími příslušné vrcholy. Určete cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakreslete do obrázku.

5.2.3

5.2.4

V grafu $G = \{U, H\}$, kde $H =$

5.2.5

5.2.6

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 13 prvků s oceněním $v : H \rightarrow N$ takovým, že $v\{a, b\} = 2, v\{a, d\} = 5, v\{a, f\} = 1, v\{b, c\} = 0, v\{c, d\} = 5, v\{c, e\} = 1, v\{d, e\} = 10, v\{d, f\} = 0, v\{e, g\} = 3, v\{e, h\} = 3, v\{f, g\} = 1, v\{f, h\} = 2, v\{g, h\} = 6$. Určete cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakreslete.

Řešení

2 Logika

2.1 Důkazy výrokových formulí

2.1.1

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \frac{\vdash \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C)}{\begin{array}{l} 1 \quad \neg B \vdash \neg B \\ 2 \quad B \vdash B \\ 3 \quad \vdash B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B) \\ 4 \quad \vdash \neg B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B) \\ 5 \quad B \vdash \neg C \Rightarrow B \\ 6 \quad \neg B \vdash \neg C \Rightarrow \neg B \\ 7 \quad \vdash (\neg C \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \\ 8 \quad \neg B \vdash B \Rightarrow C \\ 9 \quad \neg B, B \vdash C \\ 10 \quad - // - \\ 11, - 12, \quad \vdash \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C) \end{array}} \end{array}$$

2.1.2

Řešení

1. axiom 1: $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
2. VD: $B \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$
3. axiom 2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
4. MP: $B \rightarrow C \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$
5. VD: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C)$

2.1.3

- 1) A
- 2) $\neg B \rightarrow \neg A$
- 3) A3: $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- 4) MP 2,3 výsledek $(A \rightarrow B)$
a to z předpokladu $(\neg B \rightarrow \neg A)$, takže
 $(\neg B \rightarrow \neg A) \vdash (A \rightarrow B)$
- 5) MP 1 a 4 výsledek je B
a to zpředchozího předpokladu a předpokladu A
 $A, (\neg B \rightarrow \neg A) \vdash B$
- 6) věta o dedukci jen posouvá
 $A \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B$
- 7) a ještě jednou
 $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B$

2.1.4

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.1.5

- 1) $A \vdash A$ (vhodný předpoklad)
- 2) $A \rightarrow \neg \neg A$ (předpoklad)
- 3) $\neg \neg A$ (modus ponens)
- 4) $\neg B, A \vdash \neg \neg A$ (vhodně dosazeno)
- 5) $A \vdash \neg B \rightarrow \neg \neg A$ (věta o dedukci)
- 6) $(\neg B \rightarrow \neg \neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ (Axiom A3)
- 7) $A \vdash \neg A \rightarrow B$ (modus ponens)
- 8) $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ (věta o dedukci)

2.1.6

Řešení

1. $\neg B \vdash \neg B$
2. $\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$
3. $\neg B \vdash (A \rightarrow \neg B)$
4. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$
5. $\neg B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$
6. $\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$
7. $\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B$
8. $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B$

2.1.7

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.2 Důkazy predikátových formulí

2.2.1

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.2.2

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.2.3

Řešení

1. $\vdash \forall x \varphi \Rightarrow \varphi$
 $\vdash \varphi$
2. $\vdash \forall x (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi$
 $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$
3. $\vdash \psi$
 $\vdash \forall x \psi$
4. $\vdash \forall x \varphi \vdash \forall x \psi$
 $\vdash \forall x \varphi \Rightarrow \forall x \psi$
 $\vdash \forall x (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x \varphi \Rightarrow \forall x \psi)$

2.2.4

Řešení:

1. $\vdash \neg(\exists x(\varphi \wedge \psi))$
 $\vdash \forall x \neg(\varphi \wedge \psi)$
 $\vdash \forall x (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
 $\vdash \forall x (\varphi \Rightarrow \neg\psi)$
2. $\vdash \forall x (\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \forall x \neg\psi)$
3. $\vdash \varphi \Rightarrow \forall x \neg\psi$
 $\vdash \neg\varphi \vee \forall x \neg\psi$
 $\vdash \neg\varphi \vee \neg \exists x \psi$
4. $\vdash \neg(\varphi \wedge \exists x \psi)$
5. $\vdash \neg(\exists x(\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \exists x \psi)$
6. $\vdash (\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \exists x \psi)) \Rightarrow ((\varphi \wedge \exists x \psi) \Rightarrow (\exists x$
7. $\vdash (\varphi \wedge \exists x \psi) \Rightarrow (\exists x(\varphi \wedge \psi))$

2.2.5

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.2.6

- 1) $\varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x) \vdash \forall x \varphi(x) \Rightarrow (\neg \varphi(x) \Rightarrow \varphi(y))$
 $\varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x) \vdash \varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$
1) $\vdash \forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(y)$
2) $\varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x) \vdash \varphi(x) \Rightarrow \varphi(y)$
3) $\vdash \forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x)$
4) $\varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x) \vdash \forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(y)$
5) $\vdash \varphi(y) \Rightarrow (\neg \varphi(x) \Rightarrow \varphi(y))$
6) $\varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x) \vdash \forall x \varphi(x) \Rightarrow (\neg \varphi(x) \Rightarrow \varphi(y))$

2.2.7

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.2.8

- ② $\vdash \varphi \Rightarrow (\forall x \psi \Rightarrow x), \psi \vdash \forall x \psi \Rightarrow x$
1. ~~$\forall x \psi \vdash \forall x \psi$~~ $\varphi \Rightarrow (\forall x \psi \Rightarrow x) \vdash \varphi \Rightarrow (\forall x \psi \Rightarrow x)$
 2. $x \vdash x$
 3. $\forall x \psi \vdash \forall x \psi$
 - 4.
 5. $\vdash \psi \vdash \forall x \psi \Rightarrow \psi$ Axiom substitution
 6. $\vdash \varphi \Rightarrow (\forall x \psi \Rightarrow x) \vdash \forall x \psi \Rightarrow x$ M.P.

d) $\exists x \psi \vdash \forall x \psi$

- ② 1. $\varphi \Rightarrow (\forall x \psi \Rightarrow x), \psi, \forall x \psi \vdash x$ M.P.
- $\varphi \Rightarrow (\forall x \psi \Rightarrow x), \psi \vdash \forall x \psi \Rightarrow x$

2.2.9

- (a) $\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y)$
- (b) $\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \forall y \varphi(x, y)$
- (c) $\vdash \forall y \varphi(x, y)$
- (d) $\vdash \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \varphi(x, x)$
- (e) $\vdash \varphi(x, x)$
- (f) $\vdash \underline{\forall x \varphi(x, x)}$
- (g) $\forall x \forall y \varphi(x, y) \vdash \forall x \varphi(x, x)$
- (h) $\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \forall x \varphi(x, x)$

2.2.10

Řešení

1. předpoklad: $\forall x\varphi \vdash \forall x\varphi$
2. axiom subst.: $\vdash \forall x\varphi \rightarrow \varphi$
3. MP: $\forall x\varphi \vdash \varphi$
4. předpoklad: $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$
5. axiom subst.: $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
6. MP: $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi \rightarrow \psi$
7. MP 3,6: $\forall x(\varphi \rightarrow \psi), \forall x\varphi \vdash \psi$
8. VD: $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall x\varphi \rightarrow \psi$
9. VD: $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$

2.2.11

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.3 Realizace

2.3.1

Řešení: $\exists x \exists y (x < y \wedge \forall z (z \leq x \vee z \geq y))$. Formule φ je nepravdivá, ale negace je pravdivá.

2.3.2

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.3.3

Máme zadány 2 speciální axiomy

A1. $P(f(x), x)$

A2. $f(f(x)) = f(f(y)) \rightarrow P(x, y)$

Teorie definuje pak předpisy:

$h(a) = a/2$

$\leq = P_m$

Zvolíme:

$x = a$

$y = b$

1. $P(f(a), a) = a/2 \leq a$

Což zjevně platí

2. $f(f(a)) = f(f(b)) \rightarrow P(a, b)$

$f(a/2) = f(b/2) \rightarrow P(a, b)$

$a/4 = b/4 \rightarrow a \leq b$

což platí

M je tedy modelem teorie

2.3.4

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.3.5

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.3.6

$$1, \quad x = \emptyset$$

2, neplatí

$$3, \quad P_N(x, y) \Leftrightarrow x \cap y \neq \emptyset$$

2.3.7

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.3.8

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.3.9

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.3.10

Řešení

1. Realizace \mathcal{R} je modelem teorie T , pokud každá formule ψ z T je pravdivá v realizaci \mathcal{R} ($\mathcal{R} \models \psi$).

vyšetření formule: $p(\textcolor{red}{x}, f(\textcolor{blue}{y}, \textcolor{red}{x}))$

$$\textcolor{red}{x} \leq y + \textcolor{red}{x}$$

$0 \leq y$ tato formule neplatí pro y , která jsou menší jak nula, tudíž formule je nepravdivá v realizaci \mathcal{R} , tím pádem realizace \mathcal{R} není modelem teorie T .

2. Formule φ je důsledkem teorie T , pokud je formule φ pravdivá v každé realizaci \mathcal{R} , která je modelem teorie T .

...

2.3.11

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.3.12

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.3.13

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.3.14

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.3.15

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.3.16

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

2.3.17

Řešení

[editovat]

1.4.1 Zadání

1.4.2 Řešení

a.

x	u(x)
a	a
b	b
c	c
d	d

p	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

- b. Tvrdíme, že daná formule není důsledkem teorie T, protože $p(x, y) \rightarrow (x = y \vee x = u(y))$. Najdeme protipříklad, tedy takový model teorie T pro který neplatí $T \models p(x, y) \Rightarrow (x = y)$.

x	u(x)
a	b
b	a
c	d
d	c

p	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	0	0
c	0	0	0	1
d	0	0	1	0

Pro $x = b, y = a : \overbrace{p(x, y)}^1 \rightarrow \underbrace{(x = y)}_0$



[def](#) (str. 17 - Definice 4.4, 32 - Definice 7.3 a 7.4)

2.3.18

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.4 Prenexní tvar

2.4.1

$$\begin{aligned}
 & (\forall x \varphi(x, y) \Rightarrow \exists t (\psi(t) \vee \chi(y, z))) \\
 & \exists x (\varphi(x, y) \Rightarrow \exists t (\psi(t) \vee \chi(y, z))) \\
 & \exists x \exists t (\varphi(x, y) \Rightarrow (\psi(t) \vee \chi(y, z))) \\
 & \neg (\exists x \exists t (\varphi(x, y) \Rightarrow (\psi(t) \vee \chi(y, z)))) \\
 & \forall x \forall t \neg (\varphi(x, y) \Rightarrow (\psi(t) \vee \chi(y, z))) \\
 & \forall x \forall t \neg (\neg \varphi(x, y) \vee (\psi(t) \vee \chi(y, z))) \\
 & \forall x \forall t (\varphi(x, y) \wedge \neg (\psi(t) \vee \chi(y, z))) \\
 & \forall x \forall t (\varphi(x, y) \wedge \neg \psi(t) \wedge \neg \chi(y, z))
 \end{aligned}$$

2.4.2

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.4.3

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.4.4

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.4.5

② ~~$\forall x A(x)$~~

PULSEŇKA

$$\begin{aligned}
 & \forall x A(x) \Rightarrow ((\forall x B(y)) \Rightarrow \neg \forall x C(g, x)) \\
 & \forall x A(x) \Rightarrow (\neg B(y) \Rightarrow \exists x' \neg C(g, x')) \\
 & \exists x \neg A(x) \vee (\neg B(y) \Rightarrow \exists x' \neg C(g, x')) \\
 & \exists x \neg A(x) \vee \neg B(y) \vee \exists x' \neg C(g, x') \quad \text{PREMETNÍ TVAR} \\
 & \underline{\exists x \exists x' (\neg A(x) \vee \neg B(y) \vee \neg C(g, x'))} \quad \checkmark \\
 & \neg (\exists x \exists x' (\neg A(x) \vee \neg B(y) \vee \neg C(g, x'))) \\
 & \underline{\forall x \forall x' (A(x) \wedge B(y) \wedge C(g, x'))} \quad \checkmark \text{NEGACE}
 \end{aligned}$$

2.4.6

$$\textcircled{2} \quad \begin{aligned} & \forall x \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \exists x (\varphi(x) \Rightarrow \forall z \varphi(x, z)) \\ & \neg (\forall x \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \exists x' (\varphi(x') \Rightarrow \forall z \varphi(x', z))) \\ & \cancel{\forall x \forall y \varphi(x, y) \wedge \forall x' (\varphi(x') \wedge \exists z \neg \varphi(x', z))} \leftarrow \text{negaci} \\ & \forall x \forall y \forall x' \exists z (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x') \wedge \neg \varphi(x', z)) \leftarrow \text{PRENEXNÍ TVAR} \end{aligned}$$

2.4.7

Prenexní tvar: $\exists x_1 \forall y_1 \exists y_2 (\neg \varphi(x_1, y_1) \vee \neg \varphi(x, x) \vee \varphi(y_2, y_2))$

Po negaci: $\forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 (\varphi(x_1, y_1) \wedge \varphi(x, x) \wedge \neg \varphi(y_2, y_2))$

x je volná premenná, tie sa nesmú preznačovať (strhával bod ak ste preznačili).

Pozn: Pro převod do prenexního tvaru není potřeba odstraňovat implikace. Pokud však je potřeba negovat výraz obsahující implikaci, tak může být nutné negovat implikaci podle známého pravidla $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

2.4.8

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.4.9

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.4.10

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

2.4.11

Upravíme ϕ :

1. $\phi : \neg \forall x p(x, y) \vee \neg \forall z q(z, x)$ (prevod implikácie na disjunkciu)
2. $\phi : \exists x \neg p(x, y) \vee \exists z \neg q(z, x)$ (presun negácií dovnútra)
3. $\phi : \exists z (\neg p(z, y) \vee \neg q(z, x))$ (zníženie počtu kvantifikátorov, viazané x sme premenovali na z)

Upravíme ψ : $\psi : \exists z (\neg p(z, y) \vee \neg q(z, x))$ (prevod implikácie na disjunkciu) Formuly sú zrejme ekvivalentné.

2.4.12

Řešení

Upravíme ϕ :

$$\phi : \forall y p(x, y) \wedge \forall z \neg q(z, y) \text{ (presun negácie dovnútra)}$$

$$\phi : \forall z p(x, z) \wedge \forall z \neg q(z, y) \text{ (premenovanie y na z)}$$

$$\phi : \forall z (p(x, z) \wedge \neg q(z, y)) \text{ (zniženie počtu kvantifikátoru - viz algoritmus prevodu na prenexný tvar v skriptách)}$$

Upravíme ψ :

$$\psi : \forall z (p(x, z) \wedge \neg q(z, y)) \text{ (presun negácie dovnútra)}$$

Po týchto úpravách je jasné, že ϕ a ψ sú ekvivalentné.

2.4.13

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3 Algebra

3.1 Grupy, podgrupy, cyklické grupy

3.1.1

$\textcircled{4}$ inversipouer = $a * i = l$ neutrálne prvek:

$$x * i = 0 \quad a * l = a$$

$$x * i + x + i = 0 \quad x * l = x$$

$$\cancel{x} \cancel{i} \cancel{-} \cancel{x} \cancel{i} = \cancel{0} \quad \cancel{xl} + \cancel{x} + \cancel{l} = \cancel{x}$$

$$i \cdot (x+1) + x = 0 \quad \cancel{xl} = -\cancel{x}$$

$$i \cdot (x+1) = -x \quad \cancel{xl} = -\cancel{x}$$

$$i = \frac{-x}{x+1} = \quad x + x + l = x$$

$$= \frac{x}{1-x} \Rightarrow \textcircled{1} \quad l \cdot (x+1) = 0$$

$$l = \frac{0}{x+1} = 0$$

3.1.2

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.1.3

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.1.4

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.1.5

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.1.6

PULSEMKA

⑤ $\text{Aleso} \Leftrightarrow \text{kom. grupa mno} + \text{a grupa mno}$.

\oplus neutralní $a \Rightarrow$ auro
 asociativní \Rightarrow auro
 komutativní \Rightarrow auro

neutralní prav.: $a + l = a$
 $x + q\sqrt{7} + l = x + q\sqrt{7}$
 $l = 0 \dots \text{mno}$

mno: $a + i = l$
 $x + q\sqrt{7} + i = 0$
 $i = -x - q\sqrt{7} \dots \text{mno}$

\Downarrow
 mno \oplus je abstraktní grupa

⑥ neutralní \Rightarrow auro
 asociativní \Rightarrow auro
 neutralní prav.: $a \cdot l = a$
 $(x + q\sqrt{7}) \cdot l = x + q\sqrt{7}$
 $l = 1 \dots \text{auro}$

neutralní prav.: $a \cdot \bar{a} = l$
 $(x + q\sqrt{7}) \cdot \bar{a} = 1$
 $\bar{a} = \frac{1}{x + q\sqrt{7}} \dots \text{mno}$

\Downarrow
 mno \oplus je grupa, \cdot je abstraktní
 mno \oplus neutralní grupa, \cdot je abstraktní

⑦

3.1.7

① $M = \{a, b, c\}$ $\varphi: M \times M \rightarrow M$ $\mathcal{G}(M, \varphi)$

φ	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

neutralní, ani invzivní
 prav \Rightarrow neutralní grupa

3.1.8

Jelikož nebylo řečeno, že (\mathbb{Q}, \odot) je algebra, mělo by se i dokázat, zda je operace \odot na množině \mathbb{Q} uzavřena. Bude-li uzavřena, můžeme říci, že (\mathbb{Q}, \odot) je algebra. Pak budeme postupně zkoumat další vlastnosti a považovat tento grupoid za pologrupu/monoid/grupu. Komutativita dokážeme hned na počátku, jelikož velmi zdánodušuje důkazy ostatních vlastností.

Uzavřenost operace \odot na množině \mathbb{Q} :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} : x \odot y \in \mathbb{Q}$$

$$x \odot y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x + y - xy \in \mathbb{Q}$$

Což zřejmě platí, jelikož operace $+$, $-$ a \cdot jsou na \mathbb{Q} uzavřeny. (\mathbb{Q}, \odot) je tedy grupoid.

Komutativita \odot :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} : x \odot y = y \odot x$$

$$x \odot y = y \odot x \Leftrightarrow x + y - xy = y + x - yx$$

Což opět zřejmě platí, jelikož operace $+$ a \cdot jsou na \mathbb{Q} uzavřeny (operace $-$ komutativní, ale také její operandy se nemění).

Asociativita \odot :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q} : (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$$

$$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z) \Leftrightarrow (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz)$$

$$L = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z = x + y - xy + z - xz - yz + xyz$$

$$P = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz$$

$$L = P$$

Tedy operace \odot je asociativní ((\mathbb{Q}, \odot) je pologrupa).

Existence neutrálního prvku e:

Jelikož je operace \odot komutativní, hledáme přímo neutrální prvek a ne pravý a levý neutrální prvek.

$$\forall x \in \mathbb{Q} : \exists e : x \odot e = e \odot x = x$$

$$x \odot e = x \Leftrightarrow x + e - xe = x \Rightarrow e = 0$$

Našli jsme neutrální prvek operace \odot a (\mathbb{Q}, \odot) je tedy monoid.

3.1.9

Řešení

Generování množiny permutací $\langle \{f_1, f_2\} \rangle$ z permutací f_1, f_2 nad operací \circ se systematicky provede postupným vyplňováním Caleyho tabulky. Pokud se při vyplňování tabulky vypočte nová permutace f_n , je tabulka rozšířena o tuto permutaci a dopočteny příslušné buňky.

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_2	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_4	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_5	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1
f_6	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2

postupný výpočet tabulky:

$$f_1 \circ f_1 = f_1(f_1(x)) = x \dots \text{je nová permutace, takže } f_3 = x.$$

$$f_2 \circ f_1 = f_2(f_1(x)) = \frac{1}{x} \dots \text{je nová permutace, takže } f_4 = \frac{1}{x}.$$

⋮

pozn. jelikož operace \circ není komutativní $f \circ g \neq g \circ f$, je nutné poctivě vypočítat vždy obě varianty $f_2 \circ f_1$ i $f_1 \circ f_2$.

Po výpočtení tabulky jsme dostali 6 permutací, které tvoří podgrupu generovanou permutacemi f_1, f_2 :

$$f_1(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f_2(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$f_3(x) = x \text{ (je neutrálním prvkem)}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_5(x) = 1 - x$$

$$f_6(x) = \frac{-1}{x-1}$$

Výsledek $\langle \{f_1, f_2\} \rangle = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.

3.1.10

Řešení

\circ	A	B	C
A	A	C	B
B	B	A	C
C	C	B	A

asociativní zákon: $\forall x, y, z \in M : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$$

$$(C) \circ C = A \circ (C)$$

$$A = B$$

$A \neq B \Rightarrow$ neplatí asoc. zákon pro operaci \circ .

3.1.11

Řešení

$$\langle 6 \rangle = \langle \{1, 2, 6\} \rangle = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, \dots\} = \{3^n, 2 \cdot 3^n \mid \text{kde } n \in \mathbb{N}_0\}$$

pozn. \mathbb{N}_0 značí množinu přirozených čísel včetně nuly

3.1.12

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.1.13

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.1.14

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.1.15

Řešení

[\[editovat\]](#)

Napr. pre prvky a, b, c : $(a * b) * c = b * c = d$ $a * (b * c) = a * d = a$ Teda $*$ nie je asociatívna, $(A, *)$ nie je pologrupa.

Existuje jediný trojprvkový podgrupoid s nosnou množinou $\{b, c, d\}$. Toto je vidieť z tabuľky, z týchto troch prvkov dostanete znova len niektorý z nich, teda množina je uzavretá voči $*$, pre žiadnu inú trojicu to neplatí:

$$\begin{aligned}\{a, b, c\} : b * c &= d, \text{množina nie je uzavretá voči } * \\ \{a, b, d\} : b * b &= c, \text{množina nie je uzavretá voči } * \\ \{a, c, d\} : c * a &= b, \text{množina nie je uzavretá voči } *\end{aligned}$$

Na množine neexistuje netriviálna kongruencia - žiadna z prípustných ekvivalencii (je ich 13) nemá vlastnosti kongruencie. Toto je možné demonštrovať napr. nasledovne: Označujme \sim hľadanú kongruenciу. Zvolíme dvojicu rôznych prvkov, ktorá bude v tejto relácii (v netriviálnej kongruencii takáto dvojica musí existovať), a budeme ekvivalenciu \sim rozširovať tak, aby sme splnili požiadavky na kongruenciu. Ak sa dostaneme k univerzálnej relácii ($A \times A$), zvolená dvojica nemôže byť v netriviálnej kongruencii.

Ak $a \sim b$, potom aj $a^*b \sim b^*a$, teda $a \sim b \sim c$. Potom tiež $a^*c \sim b^*c$, teda $a \sim b \sim c \sim d$. Čiže v netriviálnej kongruencii nemôže platiť $a \sim b$. Analogicky pre ďalšie možné dvojice:

Ak $a \sim c$, potom aj $a^*a \sim c^*a$, teda $a \sim b \sim c$, teda $a \sim b \sim c \sim d$ (viz prvý riadok - $a \sim b$ nemôže platiť v netriviálnej kongruencii).

Ak $a \sim d$, potom aj $a^*d \sim d^*a$, teda $a \sim b \sim d$, teda $a \sim b \sim c \sim d$ (viz prvý riadok - $a \sim b$ nemôže platiť v netriviálnej kongruencii).

Ak $b \sim c$, potom aj $b^*a \sim c^*a$, teda $a \sim b \sim c$, teda $a \sim b \sim c \sim d$ (viz prvý riadok - $a \sim b$ nemôže platiť v netriviálnej kongruencii).

Ak $b \sim d$, potom aj $a^*b \sim a^*d$, teda $a \sim b \sim d$, teda $a \sim b \sim c \sim d$ (viz prvý riadok - $a \sim b$ nemôže platiť v netriviálnej kongruencii).

Ak $c \sim d$, potom aj $c^*a \sim d^*a$, teda $a \sim b$, teda $a \sim b \sim c \sim d$ (viz prvý riadok - $a \sim b$ nemôže platiť v netriviálnej kongruencii).

Teda žiadna dvojica prvkov nemôže byť v netriviálnej kongruencii, teda netriviálna kongruencia neexistuje.

3.1.16

Řešení

Vyberme ľubovoľné dva prvky: $f(x) = \frac{x}{1+ax}$, $g(x) = \frac{x}{1+bx}$.

Potom

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{1+ag(x)} = \frac{\frac{x}{1+bx}}{1+a\frac{x}{1+bx}} = \frac{\frac{x}{1+bx}}{\frac{1+bx+ax}{1+bx}} = \frac{x}{1+bx+ax} = \frac{x}{1+(a+b)x}$$

$f(x)$ nemôže byť definované pre $\frac{1}{a}$, $g(x)$ pre $\frac{1}{b}$, $f(g(x))$ pre $\frac{1}{a+b}$, čo sú však všetko racionálne čísla, takže $f(x)$, $g(x)$ aj $f(g(x))$ sú definované pre všetky iracionálne čísla.

Teda $f \circ g \in M$.

Operácia zloženia zobrazení je vždy asociatívna (pre tento konkrétny prípad ľahko dokázateľné - zvolíme tri funkcie, a bez ohľadu na základné funkcie, ktoré sú však racionálne čísla).

Vyjde $\frac{x}{1+(a+b+c)x}$. Teda (M, \circ) je pologrupa.

V tomto konkrétnom prípade je operácia aj komutatívna - $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \frac{x}{1+(a+b)x}$, teda (M, \circ) je pologrupa.

Prvok $e(x) = \frac{x}{1+0x} = x$ je neutrálny prvak, teda (M, \circ) je (komutatívny) monoid.

Pre ľubovoľný prvak $\frac{x}{1+ax}$ je zrejmé $\frac{x}{1+(-a)x}$ inverzný prvak, teda (M, \circ) je (komutatívna) grupa.

(M, \circ) má teda všetky z uvedených vlastností.

3.1.17

Vyriešil si tento príklad? Pak jej naskenuj/vyfoť a nahraj na github

3.1.18

Vyriešil si tento príklad? Pak jej naskenuj/vyfoť a nahraj na github

3.2 Morfismy

3.2.1

(3)

a) $a+i \rightarrow a+bi$
 $a+bi \rightarrow a+ci$

neutr. pr. $a+i = a$
 $a+bi + i = a+bi$
 $i = 0 > 0+0i$ avo

intervi: $a+i = l$
 $a+bi + i = 0$
 $i = -a-bi$
je grada

b) homomorfismus: $f(a+b) = f(a) + f(b)$
 $f(a+bi + c+di) = f(a+bi) + f(c+di)$
 $f(ae + bd) = -1 - 1 -$
 $(a+c) - (b+d)i = a-bi + c-di$
 $(a+c) - (b+d)i = (a+c) - (b+d)i$ je homomorfismus

c) izomorfismus: ~~jejichim homomorfismus je~~
~~inverce + inverce & plus~~

3.2.2

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.2.3

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.2.4

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.2.5

(2) $f(a^4) = f(a)^4$ $f(a^*) = f(a)^*$
 $f(|a|) = f(|a|^2)^{1/2}$ $f((-1)^2 a) = (4a^2)^{1/2}$
 $4 \cdot |a|^2 = |4a^2|$ $\cancel{4} \cdot (-1)^{2a} \cdot a^2 = \cancel{4} (-1)^{4a^2} \cdot \cancel{4} a^2$
 $4 \cdot |a|^2 = 4 \cdot |a^2|$ platí
platí je homomorfismus

jedno: $x \sim y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ platí

3.2.6

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.2.7

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.2.8

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.2.9

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.3 Kongruence

3.3.1

PŘÍSENAKA 2008

5) 1. Kongruence

reflexivní: $A \sim A \Leftrightarrow |A|=|A|$ plati'

symetrická: $A \sim B \Rightarrow B \sim A \Leftrightarrow |A|=|B| \Rightarrow |B|=|A|$ plati'

transitivní: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C: |A|=|B| \wedge |B|=|C| \Rightarrow |A|=|C|$ plati'

je ekvivalence

$\Rightarrow A \sim B \wedge C \sim D \Rightarrow A \sim C \wedge B \sim D$

$|A|=|B| \wedge |C|=|D| \Rightarrow \cancel{A \sim B} \wedge \cancel{C \sim D}$

$|A \cdot C|=|B \cdot D|$

$|A| \cdot |C|=|B| \cdot |D|$

$|B| \cdot |D|=|B| \cdot |A|$ plati'

2) $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)/\sim = \{ [A]_N, A \in GL(2, \mathbb{R}) \}$

$[A]_N = \{ B \mid |B|=|A| \}$

isomorfie = homomorfické výpočty \Rightarrow snáze + rychle

$f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$

$|A \cdot B|=|A| \cdot |B|$

$\forall a \in R: \exists A \mid |A|=a$ plati'

$\forall A \in GL(2, \mathbb{R}) \exists a: |A|=a$ plati'

\Rightarrow je isomorfie

3) normální podgrupa:

$N = \{ A \mid |A|=1 \}$

3.3.2

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.3.3

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.3.4

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

3.3.5

ořených z prvků (písmen) $(\Sigma, \mu, \delta_a, b)$ typu (3,1,0), kde Σ^* je množina všech konečných řetězců (slov) v daném pořadí, můžeme množiny (abecedy) Σ . Symbol μ označuje ternární operaci zřetězení b a δ_a je unární operace, která nahrazuje všechny výskytu prvku a v daném řetězci řetězcem aa . Umožme binární relaci \sim na Σ^* takto: $u \sim v \Leftrightarrow |u| = |v|$, kde $|u|$ je počet prvků řetězce u . Rozhodněte, zda je kongruencí na algebře A , a pokud ano, popište třídy příslušného rozkladu. Pokud ne, pak najděte, využijte zřejmou ekvivalence (uvedu oříšek, dokončovat).

$b : b \sim b \Rightarrow |b| = |b|$ platí

$\text{R} : \text{Kongruence je ekvivalence}$

$\forall \alpha \in \Sigma^* : \alpha \sim \beta \Rightarrow \delta_a(\alpha) \sim \delta_a(\beta)$ zřejmě neplatí (podle δ_a počet výskytu "b" v binárním řetězci "a" je v řetězci β různý, pak $\delta_a(\alpha) \sim \delta_a(\beta)$ neplatí.)

$\text{bude po aplikaci operace } \delta_a \text{ délka řetězce } \alpha \text{ různá}$

bovolná (tedy vhodná) podalgebra \mathcal{A}^* algebry A by mohla vypadat třeba $\mathcal{A}^* = \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b^n \mid \lambda_n \geq 0, n \geq 1\}$, kde "b" je číslo jako v TMA a "b" je v řetězci a .

Na reálném vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 definujeme skalární součin vztahem $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

Podle Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi podprostoru prostoru \mathbb{R}^3 rovaného vektory $(1, 2, -1)$, $(1, 2, -3)$, $(4, 8, -8)$ a $(3, 6, -9)$.

O

3.3.6

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.3.7

Řešení

- Relace odpovídající kongruencím na algebře A , kde kongruence: $a, b \in M, (a, b) \in R \Rightarrow (f(a), f(b)) \in R$.
 $R_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, z), (z, y)\}$
 $R_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$
 $R_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, x), (x, z), (z, x), (y, z), (z, y)\} = M \times M$
- Nalezení rozkladů množiny M indukované relacemi R , M/R .
 $M/R_1 = \{\{x\}, \{y, z\}\}$
 $M/R_2 = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$
 $M/R_3 = \{\{x, y, z\}\}$

Výsledkem jsou tedy tři rozklady množiny M .

3.3.8

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.4 Zbytkové třídy

3.4.1

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.4.2

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.4.3

Z7:

$$\frac{4 \cdot (3+5)}{6} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{4}{6} - \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{1}{6} - 2 \\ = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = 3 - 3 = \underline{\underline{0}}$$

3.4.4

NSD polynomů $x^4 + x^3 + 3x + 3$ a $x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ v \mathbb{Z}_5
(Tzn. Během výpočtu používajte pouze prvky \mathbb{Z}_5 a množinu $\{0, 1, 2, 4, 5\}$)

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 3x + 3 : x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = x + 4 \\ - (x^3 + 2x^2 + 4x + 3) \\ \hline 4x^3 + x^2 + 3 \\ - (4x^3 + 3x^2 + x + 2) \\ \hline x^2 + 4x + 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{4}{5} \quad (3 \cdot x) \vee 5 = 1 \quad x = 2 \\ \frac{1}{5} \quad (3 \cdot x) \vee 5 = 4 \quad x = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + 4x + 3 : \underline{3x^2 + 4x + 1} = \underline{2x + 3} \\ - (3x^3 + 3x^2 + 2x) \\ \hline 4x^2 + 2x + 3 \\ - (4x^2 + 2x + 3) \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{NSD} = \underline{\underline{3x^2 + 4x + 1}} \end{array}$$

3.4.5

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.4.6

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.4.7

NSD = Poslední nenulový zbytek = $2x + 1$.

$$4x^3 + x^2 + 4 : x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 4$$

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

$$\dots$$

$$0 + 3x^2 + 4x + 0$$

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 1 : 3x^2 + 4x = 2x + 3$$

$$4x^3 + 2x^2 + 0 + 0$$

$$\dots$$

$$0 + 4x^2 + 4x + 1$$

$$0 + x^2 + 3x + 0$$

$$\dots$$

$$0 + 0 + 2x + 1$$

$$3x^2 + 4x : 2x + 1 = 4x$$

$$2x^2 + x$$

$$\dots$$

$$0 + 0$$

3.4.8

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.4.9

Řešení

- $18x - 1 = x + 1$
- $17x = 2$
- $[17x]_{41} = [2]_{41}$
- Kdy se bude $(17 \cdot x) \% 41 = 2$?
 - $41 = 17 \cdot 2 + 7$
 - $17 = 7 \cdot 2 + 3$
 - $7 = 3 \cdot 2 + 1$
 - $1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - ((17 - 7 \cdot 2) \cdot 2)$
 - $1 = 7 - 2 \cdot 17 + 4 \cdot 7 = -2 \cdot 17 + 5 \cdot 7$
 - $1 = -2 \cdot 17 + 5 \cdot (41 - 17 \cdot 2) = -2 \cdot 17 + 5 \cdot 41 - 17 \cdot 10$
 - $1 = -12 \cdot 17 + 41 \cdot 5$
 - $-12 + 41 = 29$
 - $2 = -24 \cdot 17 + 41 \cdot 10$
 - $-24 + 41 = 17$
- $x = 17$

3.4.10

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.4.11

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

3.4.12

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

4 Funkcionalní analýza

4.1 Metrické prostory

4.1.1

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

4.1.2

6. Na \mathbb{Z}^2 definujeme metriku δ následovně: $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Akreslete kružnici určenou touto metrikou o poloměru 2 se středem v bodě $(0,0)$.

$$S_\delta(2) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; \delta((x, y), (0, 0)) \leq 2\}$$

Rčete počet prvků množiny $S_\delta(2)$ a tyto prvky vypište.

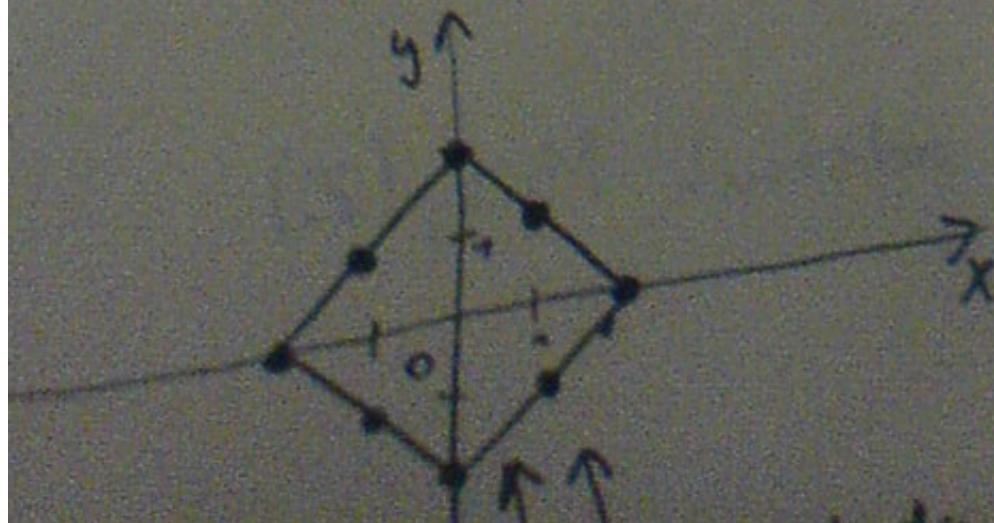
$$\delta((x, y) (0, 0)) = 2$$

$$|x - 0| + |y - 0| = 2$$

$$|x| + |y| = 2$$

$$|S_\delta(2)|$$

$$S_\delta(2)$$



4.1.3

Definujme zobrazenie $\delta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ predpisané

$$\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{|x_1 - x_2|}{2} + 3|y_1 - y_2|$$

1) ak $\delta = 0$ tak $x_1 = x_2$ $y_1 = y_2$

$$\frac{|x_1 - x_2|}{2} + 3|y_1 - y_2| = 0 \Rightarrow \text{platí}$$

2) $\frac{|x_1 - x_2|}{2} + 3|y_1 - y_2| = \frac{|y_1 - y_2|}{2} + 3|x_1 - x_2|$

3) $\frac{|x_1 - x_2|}{2} + 3|y_1 - y_2| + \frac{|x_1 - x_3|}{2} + 3|y_1 - y_3| > \frac{|x_2 - x_3|}{2} + 3|y_2 - y_3|$

$$\delta((x_1, y_1), (0, 0)) = 1$$

$$\frac{|x_1|}{2} + 3|y_1| = 1$$

$$|x_1 + 6y_1| = 2$$

$$|y_1| = \frac{2 - |x_1|}{6}$$

4.1.4

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

4.1.5

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

4.1.6

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

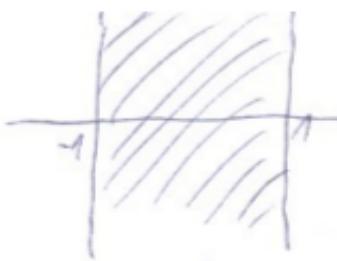
4.1.7

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

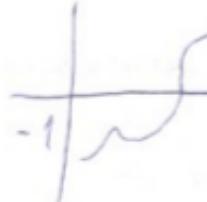
4.2 Normované prostory

4.2.1

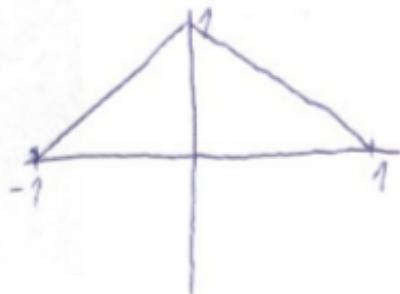
A⑧ lineárný prostor $C[-1, 1]$



správna f -ce na intervalu $[-1, 1]$

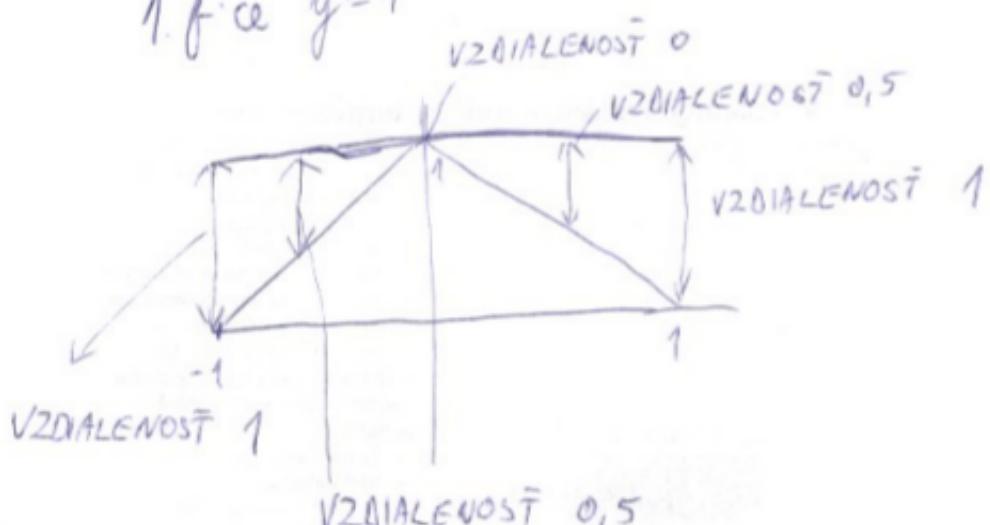


f -ce $|f(x)|$

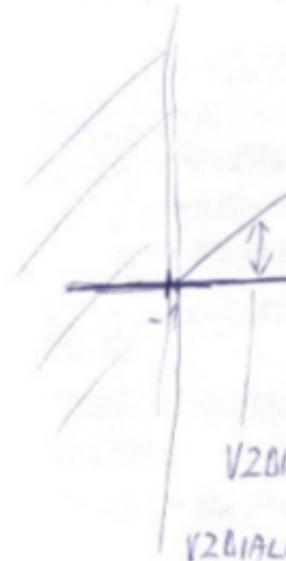


Mádame $\varrho(g, h) = \max(|g(x) - h(x)|)$

1. f -ce $y = 1$



2. f -ce y

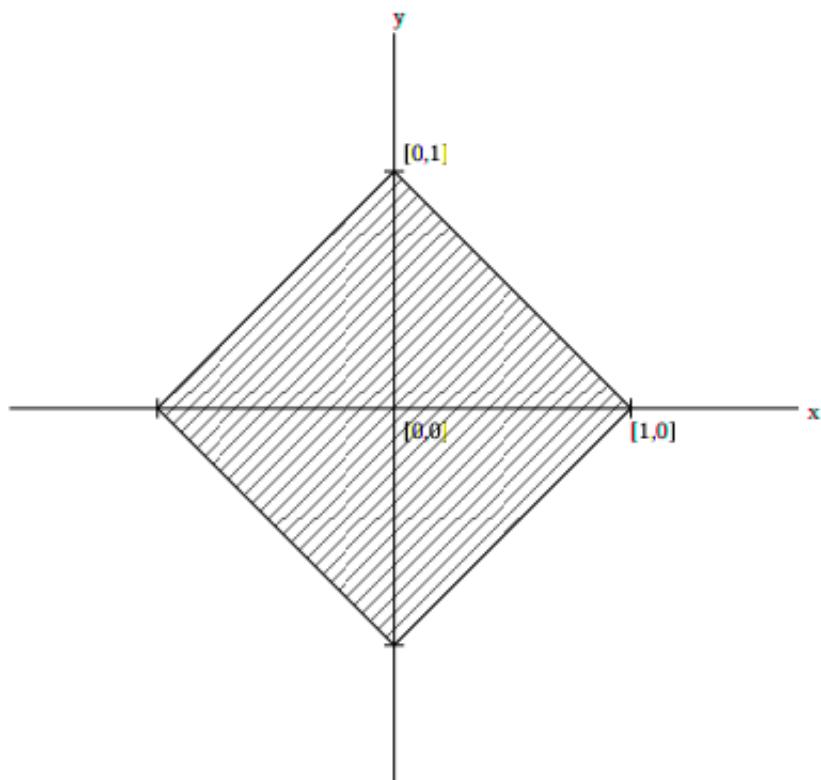


4.2.2

Řešení:

Tady je nejlehčí si obrazec nakreslit a pak zjistit obsah. Abychom mohli nakreslit obrázek, třeba si představit, co daná metrika znamená. $\rho([x_0, x_1], [0, 0])$ znamená vzdálenost bodu od bodu $[0, 0]$ (počátek souřadnic). Ale pozor, nejedná se o klasickou vzdálenost, ale o vzdálenost indukovanou normou $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ (klasická norma v ploše je $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Tím, že se jedná o součet absolutních hodnot, stačí přemýšlet pouze o prvním kvadrantu, ostatní budou symetrické. Takže, kdy bude platit $\rho([x_0, x_1], [0, 0]) \leq 1$? Vztah lze přepsat na $|x| + |y| \leq 1$ (protože měříme od počátku, stačí uvažovat čistě jen normu). Když se zamyslíme, co znamená $|x| + |y|$, tak si lze představit, že při $x = 0$ je $y = 1$ a naopak. Dále je $|x| + |y|$ lineární, takže tyto body spojíme...



Z nákresu je vidět, že obsah čtverce je 2.

4.2.3

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

4.3 Unitární prostory

4.3.1

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

4.3.2

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

4.3.3

Řešení

1. Nejpřímočařejším postupem je napsat si vektory jako řádky matice a provést Gaussovou eliminaci. Nenulové řádky pak tvoří bázi (el. transformace nemění lineární obal).

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \text{ gauss. elim.} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ gauss. elim.} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$B_1 = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ není ortogonální, není ortonormání.

$B_2 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ je ortogonální, není ortonormální.

2. Provedení ortonormalizace, vstupem je báze (tvořena linearně nezávislými vektory), která bude převedena na ortonormální bázi.

Ortonormalizace např. pro B_2 :

$$f_1 = (1, 0, 0, 0), f_2 = (0, 1, 1, 0), f_3 = (0, 0, 0, 1)$$

$$\varphi_1 = \frac{f_1}{|f_1|} = \frac{(1,0,0,0)}{\sqrt{1^2+0^2+0^2+0^2}} = \frac{(1,0,0,0)}{\sqrt{1^2}} = (1, 0, 0, 0)$$

$$h_{21} = (f_2, \varphi_1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$h_2 = f_2 - h_{21} \cdot \varphi_1 = (0, 1, 1, 0) - 0 \cdot (1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1, 0) - (0, 0, 0, 0) = (0, 1, 1, 0)$$

$$\varphi_2 = \frac{h_2}{|h_2|} = \frac{(0,1,1,0)}{\sqrt{0^2+1^2+1^2+0^2}} = \frac{(0,1,1,0)}{\sqrt{2}} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$h_{31} = (f_3, \varphi_1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$h_{32} = (f_3, \varphi_2) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 = 0$$

$$h_3 = f_3 - h_{31} \cdot \varphi_1 - h_{32} \cdot \varphi_2 = (0, 0, 0, 1) - 0 \cdot (1, 0, 0, 0) - 0 \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (0, 0, 0, 1)$$

$$\varphi_3 = \frac{h_3}{|h_3|} = \frac{(0,0,0,1)}{\sqrt{(0^2+0^2+0^2+1^2)}} = \frac{(0,0,0,1)}{\sqrt{(1^2)}} = (0, 0, 0, 1)$$

Výsledná ortonormální báze je $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, prostor W je 3-dimenzionální.

4.3.4

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

5 Grafy

5.1 Nazelezeni grafu

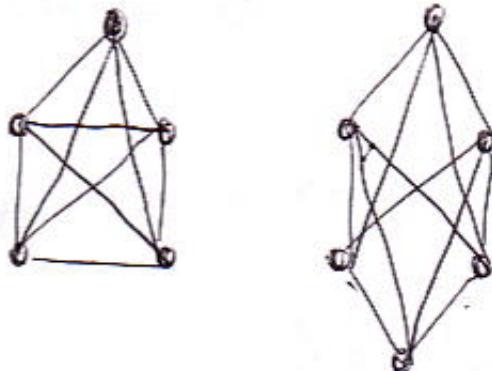
5.1.1

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

5.1.2

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

5.1.3

$$\begin{aligned} M \cdot m &= 2 \cdot x \\ 4 \cdot 4 &= 2 \cdot x \\ x &= 22 \end{aligned}$$


5.1.4

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

5.1.5

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

5.1.6

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

5.1.7

Řešení:

Jestliže víme, že $n > 2$ a n není dělitelné číslem 4 ani číslem 5 a také $n \leq 13$ (máme 13 pak tedy $n \in \{3, 6, 7, 9, 11, 13\}$).

Sestrojme tedy graf $G = (U, H)$, kde uzly jsou státy a hrany jsou smlouvy. Pak platí $\forall u \in U : \deg(u) = n$.

Vyjděme ze známé podmínky pro obecné grafy $\sum_{u \in U} \deg(u) = 2m$, kde $m = |H|$.

Z výše uvedeného vyplývá, že $\sum_{u \in U} \deg(u)$ je sudé číslo. Také samozřejmě $\sum_{u \in U} \deg(u)$ (všechny uzly mají stejný stupeň n).

Položme $13n = 2m$, tedy $13n$ je sudé.

Rovnice je splněna pouze pro $n = 6$ (nezapomeňte, že $n \in \{3, 6, 7, 9, 11, 13\}$).

5.1.8

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

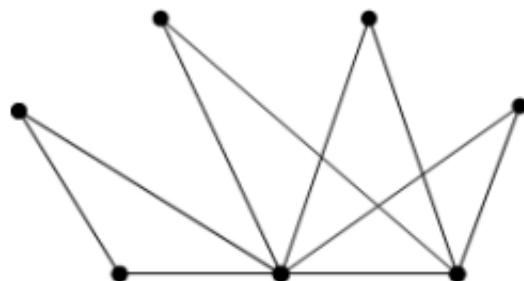
5.1.9

Řešení

$$2|H| = 2 + 4 + 6 + 4n$$

$$\text{pro } n = 2 \Rightarrow |H| = 10$$

Nejmenší počet hran grafu je 10.



5.1.10

Řešení

$$2|H| = 9n$$

$$\text{pro } n = 6 \text{ rovnice platí } 32 > \frac{9 \cdot 6}{2}$$

Stupeň uzlu vyšel 6, tedy odpoledne každý tým odehraje 4 zápasy.

5.1.11

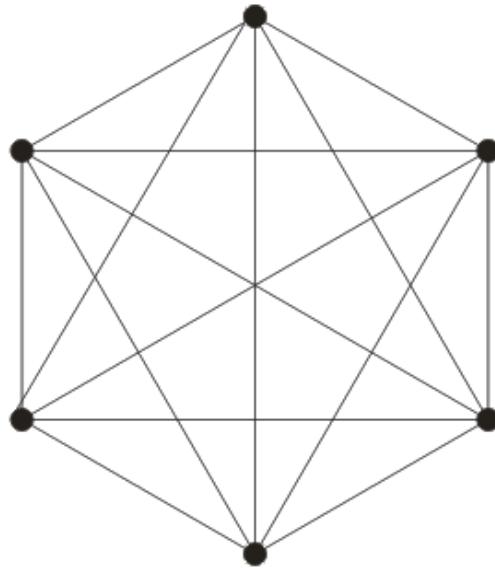
Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

5.1.12

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

5.1.13

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

5.1.14**5.1.15**

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

5.1.16

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

5.1.17

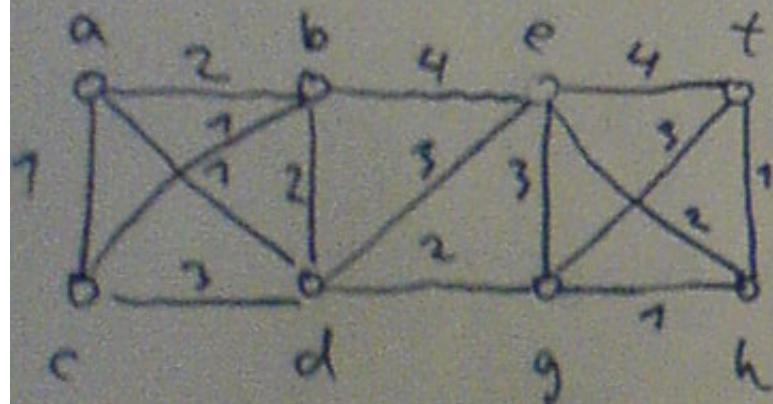
Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot' a nahraj na github

5.2 Nazeteni minimální kostry

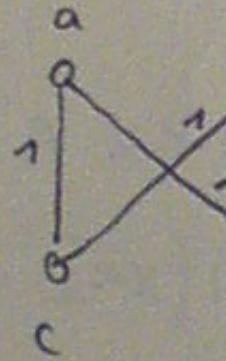
5.2.1

5. Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 15 prvků. $v\{a, c\} = 1$, $v\{a, d\} = 1$, $v\{b, c\} = 1$, $v\{b, d\} = 2$, $v\{c, d\} = 3$, $v\{b, e\} = 4$, $v\{e, g\} = 3$, $v\{e, h\} = 2$, $v\{f, g\} = 3$, $v\{f, h\} = 1$, $v\{g, h\} = 1$. Nakresle graf. $\{a, b, c, d\}, \{b, d, e, g\}$ a $\{e, f, g, h\}$ tvoří vrcholy čtverce a hrany jsou znázorněny. Cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakresle.

graf:



minimální



cena min
= 9

5.2.2

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github

5.2.3

Vyřešil si tento příklad? Pak jej naskenuj/vyfot a nahraj na github