Sbírka příkladů do MATu

Michal Šrubař
xsruba03@stud.fit.vutbr.cz

11. června 2016

1 Proč

Tato sbírka obsahuje příklady a řešení některých příkladů, které se typově vyskytují na zkouškách z předmětu MAT[1] na fakultě informačních technologií v Brně. Vytvořil jsem ji, protože právě příklady, na kterých bych si probíranou látku mohl vyzkoušet, mi během semestru tak žalostně chyběly.

Originál a zdrojové soubory je možné najít na adrese https://github.com/mmsrubar/MAT-sbirka-prikladu. Jestliže chceš přispět řešením, přepsat nějaké řešení z obrázku do latexu, určitě to všichni uvítají.

2 Logika

2.1 Důkazy výrokových formulí

2.1.1

Dokažte sestrojením důkazu, že pro libovolné formule B, C výrokové logiky platí

$$\vdash \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

Postupujte dle následujícího návodu:

1. $\neg B$ (předpoklad)
2. B (předpoklad)
3. $B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B)$ (axiom A1)
4. $\neg B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$ (axiom A1)
5. pravidlo odloučení aplikované na formule 2,3
6. pravidlo odloučení aplikované na formule 1,4
7. axiom A3
8. pravidlo odloučení aplikované na 6,7

[1]Matematické struktury v informatice

9. pravidlo odloučení aplikované na 2,8
10. formule 9 je dokazatelná z formulí 1,2
11. věta o dedukci
12. věta o dedukci.

2.1.2

Dokažte zapsáním formálního důkazu (s použitím věty o dedukci), že platí:

$$A \to B, B \to C \vdash A \to C$$

2.1.3

Dokažte formuli: $A \to ((\neg B \to \neg A) \to B)$. Návod:

1) A je předpoklad
2) $\neg B \to \neg A$ je předpoklad
3) A3
4) MP
5) MP
6) Věta o dedukci
7) Věta o dedukci

2.1.4

Dokažte vztah $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ napsáním příslušného důkazu ve výrokové logice. Návod: Formuli nejprve převeďte do tvaru obsahujícího pouze logické spojky $\neg$ a $\to$ (kde se bude vyskytovat $\neg\varphi$).

1) dosazení vhodných formulí (obě budou ve tvaru negace) do A1
2) negaci předpokladu dosazovaného vztahu
3) pravdilo odloučení
4) dosazení vhodných formulí do A3
5) pravidlo odloučení
6) předpokladu dosazovaného vztahu
7) pravidlo odloučení
8) věta o dedukci

2.1.5

Dokažte $\vdash A \to (\neg A \to B)$. Návod:

1) Zvolte vhodný předpoklad.

2) Použijte dokazatelnost formule $A \to \neg\neg A$ a pravidlo odloučení.

3) Libovolné formule X, Y ze vztahu $X \vdash Y$ vyplývá vztah $\neg B, X \vdash Y$ (dosaďte vhodně formule za X a Y).

4) Věta o dedukci.

5) Axiom (A3).

6) Pravidlo odloučení.

7) Věta o dedukci.

2.1.6

Dokažte $\vdash \neg(A \to \neg B) \to B$. Návod:

1) Zvolte předpoklad $\neg B$.

2) Použijte axiom A1 a Modus Ponens

3) Využijte dokazatelnosti věty $\vdash (A \to \neg B) \to \neg\neg(A \to \neg B)$

4) Použijte Modus Ponens

5) Věta o dedukci

6) Axiom A3

7) Modus Ponens

2.1.7

Sestrojte dukaz k $\neg B \to \neg A, A \to (B \to C) \vdash A \to C$. Pouzijte axiomy A2, A3 a pravidlo MP.

2.2 Důkazy predikátových formulí

2.2.1

Proveďte důkaz formule

$$\varphi, (\forall x \varphi \to \psi) \vdash \forall x \psi$$

dle následujícího návodu:

1. Vezměte formuli φ jako předpoklad

2. užijte pravidlo zobecnění

3. vezměte formuli $\forall x\varphi \to \psi$ jako předpoklad
4. užijte pravidlo odloučení (modus ponens)
5. užijte pravidlo zobecnění.

2.2.2

Dokažte větu $\exists x(\neg\varphi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$ Postup:

1. Použijte tautologii $\varphi \to \neg\neg\varphi$.
2. Proveďte distribuci kvantifikátoru $\forall$.
3. Užijte třetí axiom výrokové logiky ve tvaru $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.
4. Aplikujte pravidlo odloučení.
5. Použijte tautologii $\neg(\forall x\varphi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$.
6. Složte implikace ze (4) a (5).
7. Proveďte úpravu (nahraďte kvantifikátor $\forall x$ kvantifikátorem $\exists x$).

2.2.3

Napište důkaz věty $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$. Návod:

1. Vezměte formuli $\forall x\varphi$ jako předpoklad, pak užijte axiom substituce a následně pravidlo odloučení
2. Potom vezměte formuli $\forall x(\varphi \to \psi)$ jako předpoklad a opět užijte axiom substituce a následně pravidlo odloučení
3. Na formule získané v krocích 1) a 2) aplikujte pravidlo odloučení a na výslednou formuli pravidlo zobecnění
4. Poslední získaná formule je tedy dokazatelná z formulí, které byly vzaty jako předpoklady. Nyní užijte 2x větu o dedukci

2.2.4

Dokažte, že platí $\vdash (\varphi \wedge \exists x\psi) \Rightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$. Návod:

1. Vezměte formuli $\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi))$ jako předpoklad
2. axiom kvantifikátoru
3. pravidlo odloučení
4. získanou formuli převeďte do tvaru negace (formule)
5. poslední formule je dokázána z formule předpokládané v 1, proto aplikujte na obě formule větu o dedukci

6. užijte třetí výrokový axiom
7. opět aplikujte větu o dedukci.

2.2.5

Napište důkaz věty $\vdash \forall x \neg\varphi \Rightarrow \forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$. Návod:

a) Vezměte formuli $\forall x \neg\varphi$ jako předpoklad, pak užijte axiom substituce (ve formuli $\neg\varphi$ substituujte x za x) a pravidlo odloučení.

b) Vezměte axiom A1 výrokové logiky ve tvaru $\neg\varphi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi)$ a aplikujte na něj a na formuli získanou v kroku a) pravidlo odloučení.

c) Vezměte axiom A3 výrokové logiky a aplikujte na něj a na formuli získanou v kroku b) pravidlo odloučení, na výslednou formuli pak aplikujte pravidlo zobecnění.

d) Poslední získaná formule je teď dokazatelná z formule, která byla vzata jako předpoklad. Nyní užijte větu o dedukci.

2.2.6

Dokažte

$$\varphi(x) \to \forall x \psi(x) \vdash \forall x \varphi(x) \to (\neg\psi(x) \to \psi(y))$$

Návod:

1) Vezměte $\varphi(x) \to \forall x \psi(x)$ jako předpoklad.

2) Použijte axiom substituce.

3) Složení implikací.

4) Axiom substituce.

5) Složení implikací.

6) Výrokový axiom A1.

7) Složení implikací.

2.2.7

Dokažte sestrojením důkazu:

$$\vdash \forall x \varphi(x,x) \to (\forall x \forall y \varphi(x,y) \to \forall y \varphi(y,y))$$

Návod:

(1) Vezměte $\forall x \varphi(x,x)$ jako předpoklad.

(2) Použijte axiom substituce.

(3) Pravidlo odloučení.

(4) Pravidlo zobecnění.

(5) Větu o dedukci.

(6) Výrokový axiom A1.

(7) Složení implikací.

2.2.8

Dokažte (napsáním důkazu), že platí

$$\varphi \to (\forall x\psi \to \chi), \psi \vdash \forall x\varphi \to \chi$$

. Návod:

a) Zvolte tři vhodné formule jako předpoklady, označte je (1), (2) a (3) tak, aby formule (3) byla $\forall x\varphi$.

b) Z formule (3) pomocí vhodného axiomu, který označíte (4), a vhodného pravidla odvoďte formuli φ a označte ji (5).

c) Z formule (5), jedné z formulí (1),(2) a vhodného pravidla dostanete formuli (6).

d) Na další z formulí (1),(2) aplikujte pravidlo zobecnění, čímž dostanete formuli (7).

e) Z formulí (6) a (7) dostanete užitím vhodného pravidla poslední formuli, kterou označíte (8). Tato formule je tedy dokazatelná ze zvolených předpokladů. Nyní užijte větu o dedukci.

2.2.9

Dokažte, že platí $\vdash \forall x\forall y\varphi(x,y) \Rightarrow \forall x\varphi(x,x)$, dle následujícího návodu:

(a) Formuli $\forall x\forall y\varphi(x,y)$ vezměte jako předpoklad

(b) Axiom substituce.

(c) Pravidlo odloučení.

(d) Axiom substituce.

(e) Pravidlo odloučení.

(f) Pravidlo zobecnění.

(g) Výsledek předchozích úvah ve vztahu dokazatelnosti formule z předpokladů.

(h) Věta o dedukci.

Jakou obdržíte formuli po provedení kroku (f)?

2.2.10

Dokažte, že platí $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$. Zvolte si dva předpoklady. Na předpoklad aplikujte axiom substituce a potom metodu odloučení. Stejný postup aplikujte na druhý předpokla. Poté aplikujte metodu odloučení na předchozí výsledky a poté použijte dvakrát větu o dedukci.

2.2.11

S využitím předem dokázané formule $\alpha = (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$ dokažte $\varphi, \psi \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$.

a) předpoklad $\varphi \Rightarrow \neg\psi$

b) α

c) MP

d) MP 1,2

e) VD, přesuňte antecendent do předpokladu

f) VD, odstraňte $\varphi \Rightarrow \neg\psi$ z předpokladu

g) α

h) MP 6,7

i) VD

2.2.12

Dokažte (napsáním důkazu), že platí

$$\varphi \to \psi \vdash \varphi \to \forall x\psi$$

kde φ a ψ jsou formule a x nemá v φ volný výskyt. Návod: kromě předpokladu užijte pravidlo zobecnění, axiom kvantifikátoru, tautologický důsledek a pravidlo odloučení (ve vhodném pořadí a s případným opakováním).

2.2.13

Uvažujme jazyk L teorie uspořádání, tj. jazyk s rovností a binárním predikátovým symbolem $<$. Napište formuli v tomto jazyce vyjadřující vlastnost, že každé dva prvky daného univerza mají suprémum.

2.3 Realizace

2.3.1

Buď φ nasledující formule: $\forall x \forall y(x < y \Rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$. Bez použití spojky $\neg$ napište negaci formule φ. Určete, zda je pravdivá formule φ nebo její negace, jestliže univerzem je množina $\mathbb{Z}$ (celých čísel).

2.3.2

Uvažujme jazyk L s jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním binárním funkčním symbolem f.

1. Najděte nějakou realizaci jazyka L na množině $\{1, 2, 3\}$.
2. Nechť φ je následující formule jazyka L: $\forall z \forall y \exists z p(f(x, z), y)$

Uvažujme realizaci $\Re$ jazyka L s univerzem N, kde $p_{\Re}$ je relace uspořádání $\leq$ a $f_{\Re}$ je násobení přirozených čísel. Rozhodněte, zda $\Re$ je modelem teorie φ a svoje rozhodnutí odůvodněte.

2.3.3

Buď L jazyk predikátové logiky 1. řádu a rovností, jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním unárním funkčním symbolem f. Nechť T je teorie 1. řádu s jazykem L daná následujícími dvěma speciálními axiomy:

$$p(f(x), x)$$
$$f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(x, y)$$

Uvažujme realizaci $M = (\mathbb{Q}, \leq, h)$ jazkyka L, kde $\leq p_M$ a operace $h = f_M$ na množině $\mathbb{Q}$ je definována předpisem $h(a) = \frac{a}{2}$ pro libovolné $a \in \mathbb{Q}$. Rozhodněte, zda:

a) M je modelem teorie T

b) $f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(f(x), y)$ je důsledkem teorie T.

2.3.4

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním binárním funkčním symbolem f a predikátovými symboly p a q arit 1 a 3. Nechť $\Re$ je realizace jazyka L, kde univerzem je $P(\mathbb{N})$, tj. množina všech podmnožin množiny přirozených čísel, a symboly se realizují na množinách $A, B, C \subseteq N$ následovně:

$$f_{\Re}(A, B) = A \cap B$$
$$A \in P_{\Re} \Leftrightarrow A \neq \phi$$
$$(A, B, C) \in q_{\Re} \Leftrightarrow A \cap B \cap C$$

je konečná. Rozhodněte, zda jsou následující formule splněny v $\Re$:

1) $\forall x \forall y q(x, y f(x, y))$

2) $p(f(x, y)) \Rightarrow (p(x) \wedge p(y))$

3) $p(x) \wedge p(y) \Rightarrow \forall z q(x, y, z)$

4) $p(x) \Rightarrow q(x, f(x, x), x)$

2.3.5

Uvažujme jazyk L se dvěma konstantami k, l, jedním unárním funkčním symbolem f a jedním binárním predikátovým symbolem p. Nechť $\Re$ je realizace jazyka L, kde univerzem je množina všech bodů kulové plochy K se středem O s kulovou plochou K. Symbol f se realizuje v bodě x jako bod jemu protilehlý, tj. $f_\Re(x) \neq x$ je průsečík přímky procházející bodem x a středem O s kulovou plochou K. Realizace konstant jsou dva vzájemně protilehlé body: $k_\Re = S$ (severní pól) a $l_\Re = J$ (Jížní pól). Realizace symbolu p na bodech x, y je $p_\Re(x, y) \Leftrightarrow x, y$ leží na stejné (zeměpisné) rovnoběžce, tj. kružnicí vzniklé průnikem kulové plochy K a roviny kolmé na spojnici bodů S a J. Uvažujme následující formule:

(1) $\chi : p(x, f(x))$

(2) $\psi : p(l, x) \Leftrightarrow p(k, x)$

(3) $\theta : f(k) = l$

Určete ty z teorií $A = \{\psi, \theta\}$, $B = \{\neg\chi, \psi\}$, $C = \{\neg\chi, \theta\}$, $D = \{\psi, \theta\}$, jejichž je $\Re$ modelem.

2.3.6

Uvažujme jazyk L s jedním binárním predikátovým symbolem p. Nechť A je konečná množina a M je taková realizace jazyka L na množině $P(A)$ všech podmnožin množiny A, kde:

$$p_M(X, Y) \Leftrightarrow X \subseteq Y.$$

Uvažujme formule:

$$\varphi : \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow p(y, x))$$
$$\psi : \forall y (p(x, y) \Rightarrow p(y, x))$$

a teorii $T = \{\varphi, \psi\}$

(1) Najděte ohodnocení e volných proměnných formule φ tak, aby byla při tomto ohodnocení pravdivá, tedy aby platilo $M \models \varphi[e]$.

(2) Rozhodněte a odůvodněte, zda platí $M \models \varphi$.

(3) Najděte jinou realizaci N na univerzu $P(A)$ takovou, aby platilo $N \models T$.

2.3.7

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním unárním predikátovým symbolem p a jedním binárním funkčním symbolem f. Nechť M je taková realizace jazyka L na množině $P(\mathbb{R}^2)$ všech podmnožin reálné roviny $\mathbb{R}^2$, kde $p_M(X)$ znamená, že X je neprázdná množina bodů ležících uvnitř a na hranici nějakého obdelníku v $\mathbb{R}^2$, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, $f_M(X, Y) = X \cup Y$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda

(1) $M \models (\exists x)(p(x) \Rightarrow f(x, x) = x)$

(2) $p(f(x, y)) \models (p(x) \vee p(y))$

(3) $M \models p(f(x, y)) \Rightarrow (p(x) \vee p(y))$

2.3.8

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním unárním predikátovým symbolem p a jedním binárním funkčním symbolem f. Nechť M je taková realizace jazyka L na množině $P(\mathbb{R}^2)$ všech podmnožin reálné roviny $\mathbb{R}^2$, kde $p_M(X)$ znamená, že X je neprázdná množina bodů ležících uvnitř a na hranici nějakého obdelníku v $\mathbb{R}^2$, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, $f_M(X, Y) = X \cap Y$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda

(1) $M \models (\exists x)(f(x, x) = x \Rightarrow p(x))$

(2) $M \models (p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow p(f(x, y))$

(3) $(p(x) \wedge p(y)) \models p(f(x, y))$

2.3.9

Uvažujme jazyk L s rovností a jedním binárním predikátovým symbolem p. Buď R realizace jazyka L, jejimž univerzem je množina $S(\mathbb{Z})$ všechpodgrup grupy $(\mathbb{Z}, +)$ a v niž platí $p_R(G, H) \Leftrightarrow$ existuje injektivní homomorfismus grup $G \rightarrow H$.

1. Rozhodněte, zda R je modelm teorie uspořádaných množin.

2. Uvažujme formuli $\varphi \equiv \forall y p(y, x)$. Popište všechna ohodnocení e proměnných jazyka L taková, že $R \models \varphi[e]$.

2.3.10

Uvažujte jazyk L s rovností, jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním funkčním symbolem f. Buď $\Re$ realizace jazyka L, jejimž univerzem je množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel a v niž platí: $p_{\Re}(a, b) \Leftrightarrow a \leq b$, $f_{\Re}(a, b) = a+b$. Uvažujte teorii $T = \{p(f(x, y), f(y, z)) \Rightarrow (p(x, z)), p(x, f(y,$ a formuli $\varphi = p(x, f(x, y))$.

1) Rozhodněte, zda $\Re \models T$, tj. zda $\Re$ je modelem teorie T.

2) Dokažte, že $T \models \varphi$, tj. že φ je důsledkem teorie T.

2.3.11

Buď L jazyk s jedním binárním predikátovým symbolem p a funkčními symboly f(ternární) a g(unární). Uvažujme realizaci M jazyka L na univerzu $\mathbb{N}$ množiny přirozených čísel, kde $p_M(k, l) \Leftrightarrow 2 + k \leq l$, $f_M(k, l, m) = k + l + m$ a $g_M(k) = 3k$. Rozhodněte, zda platí:

$$M \models \forall z((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow (p(g(x), f(x, y, z)) \wedge p(x, z)))$$

Najděte formuli jazyka L o proměnných x, y, z, která bude v realizaci M při ohodnocení proměnných $x \mapsto k$, $y \mapsto l$ a $z \mapsto m$ ekvivalentní podmínce $2(m + 1) \leq k + l$.

2.3.12

Převeďte formuli $\forall x \exists y p(x, z) \rightarrow \exists y \exists z(q(x) \rightarrow \forall z p(y, z))$ do prenexního tvaru a najděte realizaci příšného jazyka, v niž bude tato formule splněna.

2.3.13

Převeďte na prenexní tvar a nalezněte realizaci, kdy bude následující formule splněna.

$$\forall x \forall z (q(x) \rightarrow \exists z \exists z p(z, x)) \rightarrow \forall y p(y, z)$$

2.3.14

Najděte formuli φ jazyka L s jedním binárním funkčním symbolem f, konstantou c a rovností, která bude v realizaci R s univerzem $\mathbb{N}$ (množina kladných celých čísel), kde $f_R(k, l) = kl$, $c_R = 1$ vyjadřovat vlastnost, že existuje prvočílo ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, dělitelné jen jedničkou a samo sebou)

2.3.15

Uvažujme jazyk K s rovností a jedním funkčním binárním symbolem f. Nechť $\Re$ je realizace jazyka K s univerzem $\mathbb{Z}$, kde $f_{\Re}$ je násobení na $\mathbb{Z}$. Napište formuli predikátové logiky, která bude f realizaci $\Re$ odpovídat vlastnosti, že každé dva prvky z $\mathbb{Z}$ mají největší společný dělitel.

2.3.16

Uvažujme jazyk L s rovností, unárním predikátovým symbolem v, unárním funkčním symbolem d a binárním funkčním symbolem g. Nechť M je realizace jazyka L s univerzem $\mathbb{R}^2$, kde

$$d_M(a, b) = (b, a)$$

$$g_M((a, b), (c, d)) = \begin{cases} (a, b), b \neq c \\ (a, d), b = c \end{cases}$$

Uvažujme teorii: $T = \{(x = d(x)) \rightarrow v(x), v(x) \rightarrow v(d(x)), (v(x) \wedge v(y)) \rightarrow v(g(x, y))\}$ Najděte unární relaci v_M takovou, aby realizace M byla modelem teorie T a rozhodněte, zda $T \models v(d(x)) \rightarrow v(x)$.

2.3.17

Mějme jazyk L nad univerzem $\{a, b, c, d\}$, s binárním predikátovým symbolem p a unárním funkčním symbolem u a teorii $T = \Big\{p\big(x, u(x)\big), u\big(u(x)\big) = x, p(x, y) \rightarrow \big(x = y \vee x = u(y)\big)\Big\}$.

a) Nalezněte realizaci R tohoto jazyka takovou, že je modelem teorie T. Měli jsme to zadat tabulkou, tj. 4x4 pro predikát (zapisujte 0 a 1) a 4x1 pro unární operaci.

b) Rozhodněte, zda $T \vdash p(x, y) \Rightarrow (x = y)$

2.3.18

Nechť L je jazyk s rovností, bin. predikatovy sym. p a binarnim funkcnim symbolem p. Uvazujte formule

$$\phi \equiv f(x, x) = x$$

$$\chi \equiv p(x, f(x, y)$$

$$\psi \equiv p(x, y) \Leftrightarrow f(x, y) = y$$

$$\omega \equiv f(x, f(y,z)) = f(f(x,y),z)$$

a teori $T = \phi, \chi, \psi, \omega$.

a) Uvazujte realizaci R jaz. do L s univerzum N a realizaci symbolu $p_R(a,b) \Leftrightarrow a \mid b$ (| znamena deli) a $f_R = nsn(a,b)$ rozhodnut zda $R \models T$

b) Zjistite zda plati $T \setminus \{\chi\} \cup \{\omega\} \models \chi$ a zduvodnete

2.3.19

Mějme jazyk s rovností, unárním funkčním symbolem f a binárním predikátovým symbolem p. Buď $\Re$ realizace tohoto jazyka a univerzem $\{a,b,c\}$, kde $f_\Re : \{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ je operace definovaná přiřazením $a \mapsto c$, $b \mapsto a$, $c \mapsto b$ a $p_\Re = \{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c)\}$. Uvažujme formule:

$$\varphi \equiv \forall x \exists y p(f(x), y),$$
$$\chi \equiv p(x,y) \to (x = y \vee y = f(x) \vee x = f(y)),$$
$$\psi \equiv \forall x \exists y (p(x,x) \to \neg x = f(y)),$$

Ověřte, zda $\Re$ je modelem některé z teorií $S = \{\varphi, \chi, \psi\}, T = \{\neg\varphi, \chi, \psi\}, U = \{\psi, \neg\chi\}$. Svůj závěr odůvodněte.

2.3.20

Buď L jazyk predikátové logiky 1. řádu s rovností a jediným binárním operačním symbolem p. Nechť T je teorie 1. řádu s jazykem L daná následujícími dvěma speciálními axiomy:

$$p(x,x) = x$$

$$p\left(p(x,y)), p(z,t)\right) = p(x,t)$$

Uvažujme realizaci $M\,(\mathbb{Z}^2, p)$ jazyka L, kde binární operace $p = p_M$ na množině $\mathbb{Z}^2$ je definovaná předpisem $p\left((a,b),(c,d)\right) = (a,d)$ pro libovolné prvky $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$. Dokažte, že

a) M je modelem teorie T

b) asociativní zákon je důsledkem teorie T (takže T je rozšířením teorie pologrup).

2.4 Prenexní tvar

2.4.1

Převeďte formuli

$$\forall x \varphi(x,y) \to \exists x(\psi(x) \vee \chi(y,z)))$$

do prenexního tvaru. K získané formuli (v prenexním tvaru) napište její negaci a upravte ji tak, aby se spojka negace vyskytovala jen před (některými) φ, ψ, χ.

2.4.2

Převeďte negaci formule $(\forall x p(x,y) \to \exists x \forall y q(x,y)) \wedge \exists y(\forall x p(y,y) \to \forall x p(x,y))$ do prenexního tvaru.

2.4.3

Převeďte negaci následující formule do prenexního tvaru:

$$\neg(\forall x(\Phi(x) \Rightarrow \forall y\psi(x,y)) \Rightarrow \forall x\exists y\psi(x,y))$$

2.4.4

Negaci formule

$$\exists x(\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)) \wedge (\forall x\chi)$$

převeďte do tvaru (ekvivalentní formule), ve kterém se nebude vyskytovat žádná ze spojek $\wedge$ a $\vee$.

2.4.5

Převeďte následující formuli do prenexního tvaru. Potom napište její negaci a upravte ji tak, aby se v ní nevyskytovala spojka $\Rightarrow$:

$$\forall xA(x) \Rightarrow (\forall xB(y) \Rightarrow \neg\forall xC(y,x))$$

2.4.6

Převeďte negaci formulce $\forall x\forall y\varphi(x,y) \Rightarrow \exists x(\psi(x) \Rightarrow \forall z\varphi(x,z))$ do prenexního tvaru.

2.4.7

Převeďte formuli

$$\forall x\exists y\varphi(x,y) \to (\varphi(x,x) \to \exists y\forall x\varphi(y,y))$$

do prenexního tvaru. Poté napište jeho negaci ve tvaru, kde se symbol $\neg$ bude vyskytovat pouze u atomických formulí.

2.4.8

Rozhodněte, zda jsou formule $(x \vee (y \wedge z)) \Rightarrow (y \wedge (x \vee z))$ a $((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \Rightarrow y$ ekvivalentní.

2.4.9

Rozhodněte, zda jsou formule $(y \wedge z) \Rightarrow (x \vee (x \wedge y))$ a $(z \wedge \neg x) \Rightarrow (\neg y \wedge (x \vee \neg y))$ ekvivalentní.

2.4.10

Převeďte formuli $(\forall xp(x,y) \Rightarrow \forall x\exists yq(x,x)) \Rightarrow \forall x(\exists xp(y,x) \Rightarrow q(y,x))$ do prenexního tvaru. Poté ji znegujte a převedte do tvaru, kde se spojka $\neg$ nebude vyskytovat u neatomických formulí.

2.4.11

Zjistěte, zda ϕ a ψ jsou ekvivalentní formule predikátové logiky s jazykem obsahujícím binární predikátové symboly p, q, kde

$$\phi : \forall x\, p(x,y) \to \neg\forall z\, q(z,x)$$

$$\psi : \exists z\big(p(z,y) \to \neg q(z,x)\big)$$

Návod: Vyjádřete formule ϕ, ψ bez použití spojky $\to$ a po úpravách jednu z nich převeďte na prenexní tvar snížením počtu kvantifikátorů.

2.4.12

Zjistěte, zda ϕ a ψ jsou ekvivalentní formule predikátové logiky s jazykem obsahujícím binární predikátové symboly p, q, kde :

$$\phi : \neg(\forall y\, p(x,y) \to \exists z\, q(z,y))$$

$$\psi : \forall z\big(\neg(p(x,z) \to q(z,y))\big)$$

Návod: Vyjádřete formule ϕ, ψ bez použití spojky $\to$ a po úpravách jednu z nich převeďte na prenexní tvar snížením počtu kvantifikátorů.

2.4.13

V jazyce s binárními predikátovými symboly p, q uvažujme formule:

$$\alpha \equiv \forall x(\exists u p(u,y) \to \exists y \exists z(\forall x q(y,z) \to \exists v p(v,z)))$$

$$\beta \equiv \forall x(p(x,y) \to \exists y \forall x(\forall x q(x,z) \to \exists z p(z,y)))$$

Převeďte na prenexní tvar a rozhodněte zda jsou formule ekvivalentní.

2.4.14

Pomocí převodu na prenexní tvar rozhodněte, zda φ a ψ jsou ekvivalentní formule v jazyce predikátové logiky obsahující unární predikátové symboly p,q:

$$\varphi \equiv \forall x p(x) \leftrightarrow \forall y q(y),$$
$$\psi \equiv \forall x \exists y \exists z((p(y) \to q(x)) \wedge (q(z) \to p(x))).$$

2.4.15

V jazyce s binárním predikátovými symboly p, q uvažujme formule:

$$\gamma \equiv \exists x(\exists u p(u,y) \to \forall y \exists u(\forall y q(y,z) \to p(x,u))),$$

$$\delta \equiv \forall x(p(x,y) \to \exists y \forall x(\forall x q(x,z) \to \forall z p(y,z))).$$

Pomocí převodu na prenexní tvar rozhodněte, zda jsou formule logicky ekvivalentní (svůj závěr objasněte).

2.4.16

Najděte formuli φ jazyka L s jedním binárním funkčním symbolem f, konstantou c a rovností, která bude v realizaci R s univerzem $\mathbb{N}$ (množina kladných celých čísel), kde $f_R(k,l) = kl, c_R = 1$ vyjadřovat vlastnost, že existuje prvočíslo (tj. přirozené číslo větší než 1 dělitelné pouze sebou samým a číslem 1).

3 Algebra

3.1 Grupy, podgrupy, cyklické grupy

3.1.1

Na množině $\mathbb{Z}$ všech celých čísel uvažujme binární operaci * definovanou takto: $x*y = xy+x+y$. Tato operace tvoří na množině $\mathbb{Z}$ -1 komutativní grupu, ve které inverzní prvek K danému prvku Je:

a) $\frac{1-x}{1+x}$

b) $\frac{1}{-1+x}$

c) $\frac{x}{-1+x}$

d) $\frac{1}{1+x}$

e) v jiném tvaru, než je uvedeno v (a)-(d).

3.1.2

Buď $A = (\mathbb{Z}, f)$ algebra typu (1) ($\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel), kde $f(z) = |z| - 8$ pro každé $z \in \mathbb{Z}$. Popište:

1. podalgebru $B = \langle -4 \rangle$ algebry A,
2. přímý součin algeber $B \times (0, 1, 2, g)$, kde g je permutace $g = (1, 2)$ (v cyklickém zápisu).

3.1.3

Popište:

a) podgrupu grupy $\Re$ s operací + generovanou množinou $\{3, 11\}$,

b) podtěleso tělesa $\Re$ (s obvyklými operacemi sčítání a násobení) generované množinou $\{n\}$, kde n je celé nenulové číslo.

3.1.4

Položme $P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists a \in \mathbb{R} - \{0\}\, \forall x \in \mathbb{R} : f(x)) = ax\}$. Dokažte, že $(P, \circ)$, kde $\circ$ značí skládání zobrazení, je grupoid. Zjistěte, zda $(P, \circ)$ je dokonce grupa (svůj závěr odůvodněte).

3.1.5

Uvažujme univerzální algebru $A = (\mathbb{C}, +, conj, 1)$, kde $+$ je binární operace sčítání komplexních čísel, $conj$ je unární operace konjungace (komplexní sdruženost), tj. $conj(a+bi) = a-bi$, a 1 je nulární operace. Popište podalgebru $\langle\{i\}\rangle$ algebry A (tj. podalgebru generovanou jednoprvkovou množinou $\{i\}$).

3.1.6

Nechť $G = \left\{x + y\sqrt{7}; x, y \in \mathbb{Q}\right\}$. Zjistěte, zda $(G, +, \cdot)$ je těleso ($+$ a $\cdot$ značí obvyklé operace sčítání a násobení).

3.1.7

Udejte příklad tříprvkového komutativního grupoidu, který není grupou, ale platí v něm zákony o krácení. Zdůvodněte, proč tento grupoid není grupa.

3.1.8

Na množině $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je dána binární relace $\odot$ vztahem $x \odot y = x + y - xy$. Pak $(\mathbb{Q}, \odot)$ tvoří:

(a) grupu

(b) komutativní monoid, který není grupou

(c) monid, který není komutativní

(d) pologrupu bez neutrálního prvku

(e) netvoří komutativní pologrupu

3.1.9

Buď S symetrická grupa na množině $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, tj. grupa všech permutací na množině $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ s operací skládání. Určete podgrupu grupy S generovanou permutací $\{f_1, f_2\}$, kde $f_1(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{x-1}{x}$.

3.1.10

Je dán grupoid s tří prvkovou množinou a s jednou operací $\circ$, která splňuje zákon o krácení. Sestavte tabulku pro tuto operaci. Zároveň grupoid není grupou, ukažte, že neplatí asociativní zákon.

3.1.11

Je dána grupa $(\mathbb{Z}, 1, 2, f)$, kde $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel a 1,2 jsou konstanty a f je unární operace definována předpisem $f(x) = 3x$. Určte podgrupu $\langle 6\rangle$ generovanou prvkem 6.

3.1.12

Máme algebru $A = (\mathbb{R}^2, +, k, (0,1))$, kde $+$ je sčítání po složkách, $k\,(a,b) = (-a,b)$ a $(0,1)$ je nulární operace. Najděte podalgebru algebry A generovanou z $\langle\{(1,0)\}\rangle$.

3.1.13

Uvažujte podgrupu symetrické grupy S_4(tj. grupy permutací množiny $\{1,2,3,4\}$ generované množinou permutací $\{(1,2,3,4)\,,(1,4,3,2)\}$. Určete řád podgrupy a zda je podgrupa komutativní, či dokonce izomorfní s pro nějaké $(\mathbb{Z}_n,+)$, kde $n \in \mathbb{N}$.

3.1.14

Uvažujme univerzální algebru $A = (A, p, q)$ typu $(1,1)$ na množině funkcí

$$A = \left\{ x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, 1-\frac{1}{x}, \frac{x}{x-1} \right\}$$

s definičním oborem $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, kde $p(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$ a $q(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$ pro $f(x) \in A$. Dokažte, že množina A je uzavřená vzhledem k operaci p i q a najděte podalgebru A generovanou prvkem $1-x$.

3.1.15

Dokažte, že grupoid $(A,*)$, kde $A = \{a,b,c,d\}$ a operátor * je dána níže uvedenou tabulkou, není pologrupou. Rozhodněte zda existuje nějaký tříprvkový podgrupoid grupoidu $(A,*)$ a nějaká vlastní kongruence (tj. taková, která není rovností ani univerzální relací) na $(A,*)$. (Ukažte na základě jaké úvahy vaše odpověď vznikla.)

*	**a**	**b**	**c**	**d**
a	a	b	a	a
b	a	c	d	c
c	b	c	d	c
d	a	d	b	b

3.1.16

Nechť $\mathbb{I}$ je množina iracionálních čísel a uvažujeme monoid všech zobrazení $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ s operací $\circ$ (skládání zobrazení) a jeho podmnožinou $M = \{f(x) = \frac{x}{1+ax} | a \in \mathbb{Z}\}$. Dokažte, že M je uzavřená vzhledem k $\circ$. Rozhodněte, které z následujících vlastností má grupoid $(M,\circ)$ (svá rozhodnutí zdůvodněte):

a) je pologrupa

b) je komutativní pologrupa

c) je monoid

d) je komutativní monoid

e) je grupa

f) je komutativní grupa

3.1.17

Dokažte, že grupoid $(A, *)$, kde $A = \{a, b, c, d\}$ a operátor * je dána níže uvedenou tabulkou, není pologrupou. Rozhodněte zda existuje nějaký tříprvkový podgrupoid grupoidu $(A, *)$ a nějaká vlastní kongruence (tj. taková, která není rovností ani univerzální relací) na $(A, *)$. (Ukažte na základě jaké úvahy vaše odpověď vznikla.)

*	**a**	**b**	**c**	**d**
a	b	a	c	c
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	d	b	b

3.1.18

Nechť $\mathbb{R}$ (Nebo tam bylo $\mathbb{C}$? s tím $\mathbb{R}$ mi to moc nesedí) je množina reálných čísel a uvažujeme monoid všech zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operací $\circ$ (skládání zobrazení) a jeho podmnožinou $M = \{f(x) = \sqrt[3]{a + x^3} | a \in \mathbb{Z}\}$. Dokažte, že M je uzavřená vzhledem k $\circ$. Rozhodněte, které z následujících vlastností má grupoid $(M, \circ)$ (svá rozhodnutí zdůvodněte):

a) je pologrupa

b) je komutativní pologrupa

c) je monoid

d) je komutativní monoid

e) je grupa

f) je komutativní grupa

3.1.19

Zjistěte, zda lze doplnit následující Cayleyovu tabulku binární operace $*$ tak, aby $(\{a, b, c\}, *)$ byla grupa a v kladném případě doplnění proveďte:

*	a	b	c	d
a		c		
b			d	
c				
d				

Návod: Využijte obecné vlastnosti grup nebo ověřte, zda grupa $(\{a, b, c\}, *)$ nemůže být izomorfní s některou z algeber $(\mathbb{Z}_n, +) \times (\mathbb{Z}_n, +)$, $(\mathbb{Z}_n, \cdot) \times (\mathbb{Z}_n, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_n, +) \times (\mathbb{Z}_n, \cdot)$ pro vhodné $n \in \mathbb{N}$.

3.1.20

Uvažujte typ $\Omega = \{\circ, f\}$ s aritami $a(\circ), a(f) = 1$. Nechť algebra $A = (\{a, b, c, d, e\}, *)$ patří do variety určené identitami $\{x * y = f(x), f(f(x)) = f(x)\}$ a f je určeno na prvních a, c, e : $f(a) = b, f(c) = d, f(e) = e$.

a) rozhodněte, zda $(\{a, b, c, d, e\}, *)$ patří do variety pologrup

b) najděte podalgebru algebry A generovanou množinou $\{a, e\}$

c) najděte všechny izomorfismy Ω-algebry A do sebe

3.1.21

Mějme grupu $G = S_2 \times S_3$, kde S_2, S_3 jsou symetrické grupy (tj. grupy permutací dvouprvkové, resp. tříprvkové množiny), a definujme zobrazení $f : G \to G$ předpisem

$$f(x, y) = (x \circ x, y \circ y).$$

Zjistěte, zda zobrazení f je homomorfismus. Dále nalezněte podgrupu generovanou množinou $\{x\}$, kde

$$x = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

a určete, zda je tato podgrupa izomorfní grupě $(\mathbb{Z}_n, +)$ pro nějaké n.

3.2 Morfismy

3.2.1

Na množině $\mathbb{C}$ komplexních čísel uvažujme operaci $+$ obvyklého sčítání. Buď $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zobrazení dané předpisem $f(a + ib) = a - ib$. Pak:

a) $(\mathbb{C}, +)$ není grupa

b) f je zobrazení grupy $(\mathbb{C}, +)$ do sebe, které není homomorfismem

c) f je homomorfismus grupy $(\mathbb{C}, +)$ do sebe, který není izomorfismem

d) f je izomorfismus grupy $(\mathbb{C}, +)$ na sebe (tedy automorfismus)

e) neplatí žádná z uvedených možností

3.2.2

Uvažujme aditivní grupu reálných čísel $(\mathbb{R}, \oplus)$, kde operace $\oplus$ je daná předpisem

$$a \oplus b = a + b - 1$$

1. Rozhodněte, zda grupoid $(\mathbb{R}, \oplus)$ je monoid.
2. Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = 2x + 1$ je homomorfismus grupidů $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, \oplus)$.

3.2.3

Nechť pro libovolné přirozené číslo $m > 0$ značí symbol Z_m okruh zbytkových tříd modulo m a pro libovolné $x \in Z$ nechť symbol $[x]_m$ značí tu třídu kongruence modulo m (tedy prvek množiny Z_m), která obsahuje prvek x. Jaký musí být vztak mezi přirozenými čisly $m, n > 0$, aby platilo $[x]_m \subseteq [x]_n$ pro všechna $z \in Z$? Je pak zobrazení $f : Z_m \to Z_n$ dané předpisem $f([x]_m) = [x]_n$ pro všechna $x \in Z$ homomorfismus?

3.2.4

Mějme grupu $M(n, \mathbb{R})$ všech čtvercových matic řádu $n(n \in \mathbb{N} - \{0\})$ nad $\mathbb{R}$ s operací sčítání a grupu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel s operací sčítání. Definujeme zobrazení $f : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ předpisem $f(A) = tr(A)$ pro všechna $A \in M(n, \mathbb{R})$ (kde $tr(A)$ značí stopu matice A, tj. součet prvků na hlavní diagonále matice A). Dokažte, že j je homomorfismus, popište třídy jádra $M(n, \mathbb{R})/f$ a určete normální podgrupu grupy $M(n, \mathbb{R})$ odpovídajicí jádru $M(n, \mathbb{R})/f$. Zjistěte, zda grupy $M(n, \mathbb{R})/f$ a $\mathbb{R}$ jsou izomorfní.

3.2.5

Uvažujme univerzální alagebru $A = \left(\mathbb{Z}, ^*, ^\prime\right)$ typu $(1, 1)$ na množině celých čísel $\mathbb{Z}$, kde odpovídající unární operace jsou dány vztahy: $a^{'} = |a|$ a $a^* = (-1)^a\, a$. Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi(a) = 4a^2$ je homomorfismus $A \to A$ a pokoud ano, popište jeho jádro.

3.2.6

Uvažujme univerzální algebru $A = (\mathbb{Z}^2, e, \delta, \oplus, \odot, \nabla)$, kde e je nulární operace, δ je unární operace, $\oplus, \odot$ jsou binární operace a ∇ je ternární operace. Tyto operace jsou dány následovně: $e = (0, 1)$, $\delta(x, y) = (x, y+2)$, $\oplus(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1 + y_2)$, $\nabla((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$. Zjistěte a zdůvodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x, y) = (3x, x + y)$ je homomorfismus algebry A do A.

3.2.7

Uvažujme univerzální algebru $A = (\mathbb{Z}^2, e, \delta, \oplus, \odot, \nabla)$, kde e je nulární operace, δ je unární operace, $\oplus, \odot$ jsou binární operace a ∇ je ternární operace. Tyto operace jsou dány následovně: $e = (0, 1)$, $\delta(x, y) = (x+1, y)$, $\oplus(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1y_2)$, $\nabla((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$. Zjistěte a zdůvodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x, y) = (x + y, 2y)$ je homomorfismus algebry A do A.

3.2.8

Mějme grupu $T(3, \mathbb{R})$ všech invertibilních (tj. regulárních) trojúhelníkových matic řádu 3 s operací násobení a grupou $\mathbb{R}^*$ všech nenulových reálných čísel s operací násobení. Definujeme zobrazení $f : T(3, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ předpisem $f(A) = |A|$ pro všechna $A \in T(3, \mathbb{R})$, (kde $|A|$ značí determinant matice A). Zjistěte, zda f je homomorfismus a nalezněte netriviální vlastní normální podgrupu grupy $T(3, \mathbb{R})$.

3.2.9

Mějme grupu $(GL(2,\mathbb{R}),\cdot)$ regulárních (tj. invertibilních) čtvercových matic řádu 2 spolu s operací násobení. Nalezněte podgrupu $B \subseteq GL(2,\mathbb{R})$ generovanou jednoprvkovou množinou

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a rozhodněte, zda $f : B \to (\mathbb{Q},+)$, kde

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ac$$

je homomorfismus grup. Své tvrení zdůvodněte.

3.2.10

Uvažujme binární operaci $*$ na množině $\mathbb{R}^2_+$ dvojic kladných reálných čísel definovanou vztahem

$$(a,b)*(c,d) = (a^d c, bd).$$

Rozhodněte, zda algebra $(\mathbb{R}^2_+, *)$ je

a) pologrupa

b) monoid

c) komutativní monoid

d) grupa

e) komutativní grupa

a najděte nějaký její netriviální homomorfismus do grupy $(\mathbb{R}_+,\cdot)$.

3.3 Kongruence

3.3.1

Mějme grupu regulárních matic řádu 2 nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ spolu s operací násobení matic, označíme ji $(GL(2,\mathbb{R}),\cdot)$. Uvažujme binární relaci $\sim$ na $(GL(2,\mathbb{R}),\cdot)$ definovanou předpisem $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$ (kde $||$ značí determinant). Dokažte, že

1. $\sim$ je kongurence na grupě $(GL(2,\mathbb{R}),\cdot)$ a
2. faktorová grupa $(GL(2,\mathbb{R})/\sim,\cdot)$ je izomorfní s grupou $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ všech nenulových reálných čísel s násobením.
3. Definujte normální podgrupu grupy $(GL(2,\mathbb{R}),\cdot)$, která odpovídá kongruenci $\sim$.

3.3.2

Na multiplikativní grupě $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ všech nenulových komplexních čísel nechť jsou dva prvky v relaci $\sim$ právě tehdy, když mají stejnou absolutní hodnotu. Dokažte, že relace $\sim$ je kongruence na uvedené grupě, a graficky znázorněte třídy kongruence $\sim$ a také normální podgrupu určenou kongruencí $\sim$.

3.3.3

Uvažujme algebru $A = (\mathbb{Z}, t)$ s jednou unární operací t definovanou pro libovolné $x \in \mathbb{Z}$ předpisem $t(x) = x + 1$.

a) Popište všechny podalgebry algebry A.

b) Uvažujme rozklad množiny $\mathbb{Z}$, jehož třídy jsou všechny dvouprvkové množiny tvaru $\{2k, 2k+1\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Je příslušná ekvivalence kongruencí na algebře A?

3.3.4

Nechť $\mathbb{C}^*$ značí multiplikativní grupu všech nenulových komplexních čísel a G její podgrupu všech komplexních čísel s absolutní hodnotou 1. Nechť $f : \mathbb{C}^* \to G$ je zobrazeni dane vztahem $f(z) = \frac{z}{|z|}$. Popište kongruenci na $\mathbb{C}^*$ danou jádrem zobrazení f a určete jí odpovídající normální podgrupu grupy $\mathbb{C}^*$.

3.3.5

Uvažujeme algebru $A = (\Sigma^*, \mu, \delta_a, b)$ typu $(3, 1, 0)$, kde Σ^* je množina všech konečných řetězců (slov) vytvořených z prvků (písmen) konečné množiny (abecedy) Σ. Symbol μ označuje ternární operaci zřetězení tří slov v daném pořadí, nulární operace b je dána vybraným prvkem $b \in \Sigma$, $a \in \Sigma$ je pevně daný prvek $a \neq b$ a δ_a je unární operace, která nahrazuje všechny výskyty prvku b v daném řetězci řetězce ab. Definujme binární relaci $\sim$ na Σ^* takto: $u \sim v \Leftrightarrow |u| = |v|$, kde $|u|$ je počet prvků řetězce u. Rozhodněte, zda $\sim$ je kongruencí na algebře A, a pokud ano, popište třídy příslušného rozkladu. Pokud ne, pak najděte takovou podalgebru algebry A, pro kterou příslušné zúžení relace $\sim$ kongruencí je.

3.3.6

Mějme algebru $A = (\mathbb{R}^2, a, b, c)$ typu $(2, 1, 0)$, kde operace $\{a, b, c\}$ jsou dány vztahy:

$$a((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1y_1 + x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$b(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$$

$$c = (0, 0)$$

Definujeme relaci ekvivalence $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$. Rozhodněte, zda $\sim$ je či není kongruence na A (odůvodněte).

3.3.7

Najděte všechny rozklady množiny $\{x, y, z\}$ takové, že jim odpovídající ekvivalence jsou kongruence na algebře $A = (\{x, y, z\}, b)$, kde $f(x) = y$, $f(y) = f(z) = z$.

3.3.8

Uvažujme univerzální algebru $A = (\Sigma^*, \cdot, ^*, 2)$, kde $\Sigma \in \{a, b, c\}$ a Σ^* je množina slov nad abecedou Σ včetně prázdného slova ε, $\cdot$ je binární operace $x \cdot y = xay$ a * je unární operace $x^* = xcc$. Na Σ^* definujeme binární relace $\sim_1$ a $\sim_2$ následovně:

$$x \sim_1 y \Leftrightarrow |x|_a = |y|_b$$

$$x \sim_2 y \Leftrightarrow |x|_c = |y|_c$$

kde $|x|_p$ je počet výskytů písmene $p \in \Sigma$ ve slově x. Rozhodněte o každé z relací, zda je kongruence na A. Pokud ano, popište prvky příslušné faktorové algebry.

3.3.9

Uvažujme algebru $A = (A, \cdot, u, 9)$ typu $(2, 1, 0)$ na množině $A = \left\{3^k | k \in \mathbb{Z}\right\}$, kde $\cdot$ je součin, u je funkce přiřazující převrácenou hodnotu a 9 je konstanta. Dokažte, že A je uzavřená vzhledem ke všem třem operacím. D8le, pro libovolné $z \in \mathbb{Z}$ uvažujme binární relaci $\sim_z$ na A danou vztahem

$$x \sim_z y \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z}) \frac{x}{y} = z^m$$

Rozhodněte, zda pro $z = \frac{1}{9}$ je $\sim_z$ kongruencí na algebře A. Pokud ano, popište faktorovou algebru $A/\sim$, a pokud ne, pak najděte takové z, pro které je $\sim_z$ kongruence na A.

3.3.10

Uvažujme algebru $A = (M, \oplus, \otimes)$ typu $(3, 1)$ definovanou následovně:

$$M = P(N), N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\oplus(A, B, C) = C$$

$$\otimes(A) = A - \{3\}$$

a ekvivalenci $\sim$ na množině M danou vztahem:

$$A \sim B \Leftrightarrow |A - \{3\}| = |B - \{3\}|.$$

Určete počet tříd ekvivalence $\sim$ a zjistěte, zda je kongruencí na algebře A. Své závěry odůvodněte.

3.4 Zbytkové třídy

3.4.1

Vypočtěte v tělese $(\mathbb{Z}_5, \cdot, +)$

$$(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{4}$$

3.4.2

V tělese $\mathbb{Z}_7$ vypočtěte $\frac{4}{3}(2 - \frac{3}{4} - \frac{5}{3})$.

3.4.3

Vypočtěte v tělese $\mathbb{Z}_7$ zbytkových tříd modulo 7:

$$\frac{4(3+5)}{6} - \frac{2}{3}$$

3.4.4

Najděte největší společný dělitel polynomů $x^4 + x^3 + 3x + 3$ a $x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ nad okruhem $(\mathbb{Z}_5, \cdot, +)$. Během výpočtu používejte jen reprezentanty prvků $\mathbb{Z}_5$ z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

3.4.5

Najděte všechny generátory cyklické grupy $(\mathbb{Z}_5, +)$.

3.4.6

Najděte všechny generátory cyklické grupy $(\mathbb{Z}_7, +)$.

3.4.7

V okruhu $\mathbb{Z}_5$ polynomů nad telesem $\mathbb{Z}_5$ zbytkových tříd modulo 5 naleznětě největší společný dělitel prvků $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ a $4x^3 + x^2 + 4$.

3.4.8

Vypočtěte v tělese $(\mathbb{Z}_7, \cdot, +)$

$$\frac{\frac{2}{5} \times \left(\frac{(5+(-2))}{3}\right) + 6^{(-2)}}{2}$$

3.4.9

Ve zbytkové třídě modulo 41 vyřešte rovnici:

$$18x - 1 = x + 1$$

3.4.10

V tělese $\mathbb{Z}_5$, tj. zbytkových tříd modulo 5, vypočtěte

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1\right)$$

(Uvědomte si, že každá číslice x v uvedeném vztahu znamená třídu $[x]_5$ kongruence modulo 5 na okruhu celých čísel.)

3.4.11

V tělese $\mathbb{Z}_5$, tj. zbytkových tříd modulo 5, vypočtěte

$$-\frac{4}{3}\left(2-\frac{3}{4}-\frac{3}{3}\right)$$

(Uvědomte si, že každá číslice x v uvedeném vztahu znamená třídu $[x]_5$ kongruence modulo 5 na okruhu celých čísel.)

3.4.12

V tělese zbytkových tříd $\mathbb{Z}_7$ vypočítejte:

$$3-2(2-4)^{-1}+5^3$$

3.4.13

Najděte největší společný dělitel polynomů nad polem zbytkových tříd $\mathbb{Z}_5 : p = x^4+3x^2+2, q = 3x^3+2x^2+x+4$.

4 Funkcionalni analýza

4.1 Metrické prostory

4.1.1

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3$ s euklidovskou metrikou p definujeme vzdálenost libovolných dvou množin A a B vztahem $\delta(A,B) = inf\,\{(p(a,b)|a \in A, b \in B)\}$. Rozhodněte, zda $(P(\mathbb{R}_3),\delta)$ tvoří metrický prostor (symbol $P(\mathbb{R}_3)$ značí množinu všech podmnožin množiny $\mathbb{R}_3$).

4.1.2

Na $\mathbb{Z}^2$ definujeme metriku δ následovně: $\delta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$. Zakreslete kružnici určenou touto metrikou a poloměru 2 se středem v bodě $(0,0)$, tj. množinu

$$S_\delta(2) = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : \delta((x,y),(0,0)) = 2\right\}$$

. Určete počet prvků množiny $S_\delta(2)$ a tyto prvky vypište.

4.1.3

Definujeme zobrazení $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\delta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \frac{|x_1-x_2|}{2} + 3\,|y_1-y_2|$$

Rozhodněte, zda zobrazení δ definuje metriku na množině $\mathbb{R}^2$ (využijte skutečnost, že vztahem $d(x,y) = |x-y|$ je definována metrika na $\mathbb{R}$). V kladném případě zakreslete v rovině $\mathbb{R}^2$ jednotkovou kružnici vzhledem k této metrice, tj. množinu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \delta((x,y),(0,0)) = 1\}$.

4.1.4

Na množině $\mathbb{Z}^2$ je definovaná metrika δ vztahem $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$. Zjistěte, pro které body $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ platí současně $\delta((-1, 1), (x, y)) = 3$ a $\delta((3, 0), (x, y)) = 2$.

4.1.5

Na množině $\mathbb{Z}^2$ je definovaná metrika δ vztahem $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$. Zjistěte, pro které body $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ platí současně $\delta((1, -1), (x, y)) = 3$ a $\delta((2, 3), (x, y)) = 2$.

4.1.6

Nad abecedou $\Gamma = \{x, y, z\}$ uvažujeme jazyk $\Sigma = x^*y^+z^*$. Buď $\mu(u, v) = n$, kde n je nejmenší počet změn řetězce u, které je potřeba provést, aby se tento řetězec transformoval na řetězec v. Přitom změnou řetězce rozumíme vypuštění či vložení symbolu nebo nahrazení symbolu jiným symbolem v tomto řetězci. Ověřte (dokažte), zda μ je či není metrika na Σ a v kladném případě určete všechny prvky množiny Σ, které leží v otevřené kouli o poloměru 2 se středem v prvku xyz.

4.1.7

Na množině $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}$ mějme metriku $p((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|)$. Znázorněte graficky v M jednotkovou kouli se středem v bodě $(0, 0, 0)$ vzhledem k metrice p, tj. množinu $S = \{(x, y, z) \in M : p((x, y, z), (0, 0, 0)) = 1\}$.

4.1.8

Uvažujme metriku na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definovanou rovností

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

a množinu bodů, které jsou vzhledem k této metrice stejně vzdálené od bodů $(8, 17)$ a $(12, 9)$. Určete v této množině všechny body, které mají tuto vzdálenost minimální.

4.2 Normované prostory

4.2.1

V lineárním prostoru $C[-1, 1]$ všech (reálných) spojitých funkcí na intervalu $[-1, 1]$ uvažujme normu $\|f\| = max\{|f(t))|; t \in [-1, 1]\}$ a funkci $h \in C[-1, 1]$ danou vztahem $h(t) = 1 - |t|$ pro všechna $t \in [-1, 1]$. Určete všechny konstantní funkce $g \in C[-1, 1]$ s vlastností $p(g, h) = 1$, kde p je metrika indukovaná danou normou. (Návod: Úlohu řešte graficky.)

4.2.2

V reálné rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme normu danou vztahem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ a nechť p je metrika v $\mathbb{R}^2$ inkludovaná touto normou. Načrtněte množinu všech bodů $[x_0, x_1]$ v $\mathbb{R}^2$, pro než platí $p([x_0, x_1], [0.0]) \leq 1$. Jaký je rovinný obsah této množiny?

4.2.3

Mějme na $C\langle -1,1\rangle$ (prostor spojitých funkcí na $\langle -1,1\rangle$) definovanou normou

$$\|f\| = max\left\{|f(x)|, x \in [-1,1]\right\}$$

Buď δ metrika daná touto normou. Určete vzdálenost $\delta(f,g)$ funkcí $f(x)$ a $g(x)$, kde $f(x) = |2x-1|-1$ a $g(x) = -\left|x+\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}$

4.2.4

Uvažujme normu na $\mathbb{R}^3$ definovanou rovností

$$\|(x,y,z)\| = |x| + max\left\{|y|, |z|\right\}.$$

Načrtněte a slovně popište jednotkovou kouli v této normě, tj. množinu $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \|(x,y,z)\| = 1\right\}$.

4.2.5

V lineárním prostoru $C = [-2,2]$ všech reálných spojitých funkcí na intervalu $[-2,2]$ uvažujte normu $\|f\| = max\left\{|f(t)|\, t \in [-2,2]\right\}$ a funkci $h \in [-2,2]$ danou vztahem $h(t) = t^2 - 3$ pro všechna $t \in [-2,2]$. Určete všechny konstantní funkce $g \in [-2,2]$ s vlastností $p(g,h) = 2$, kde p je metrika indukovaná danou normou.

4.3 Unitární prostory

4.3.1

Na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ definujme skalární součin vztahem

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi podprostoru prostoru $\mathbb{R}^3$ generovaného vektory $(1,2,-1)$, $(1,2,-3)$, $(4,8,-8)$, $(3,6,-9)$.

4.3.2

Na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ definujeme skalární součin vztahem

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte orotnormální bázi podprostoru prostoru $\mathbb{R}^3$ generovaného vektory $(2,-1,3)$, $(-1,2,-3)$, $(3,0,3)$ a $(8,2,6)$.

4.3.3

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortonormální bázi podprostoru W generovaného vektory $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,1,1,-1)$, $u_3 = (1,1,-1,1)$ a $u_4 = (-1,1,1,1)$.

4.3.4

Uvažujte prostor V vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ generovaný vektory $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$ a $v_3 = (1,-1,1,-1)$. Určete dimenzi prostoru V a jeho ortonormální bázi.

4.3.5

Uvažujte prostor V lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ generovaný množinou

$$\{(1,0,2,2), (-1,0,2,0), (1,0,6,4), (2,0,0,2)\}.$$

Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu nalezněte ortonormální bázi v prostoru V.

4.3.6

Uvažujte prostor V lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ generovaný množinou

$$\{(1,2,0,-1), (1,1,0,0), (2,3,0,-1), (0,-1,0,1)\}.$$

Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu nalezněte ortonormální bázi v prostoru V.

5 Grafy

5.1 Nazelezeni grafu

5.1.1

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{1, 2, \ldots, 2n\}$, $n > 0$ přirozené číslo a H má 15 prvků. Pro každé číslo $i = 1, 2, \ldots, n$ mají uzly i a $n+i$ tentýž stupeň i. Určete hodnotu čísla n a pak graf G přehledně nakreslete.

5.1.2

Nakreslete všechny navzájem neizomorfní stromy se 6 uzly.

5.1.3

Graf G má 11 uzlů, která mají všechny stejný stupeň n. Určete počet h hran grafu G, víte-li, že $n > 2$ a že G je nesouvislý. Pokuste se graf G přehledně nakreslit.

5.1.4

Uvažujme obyčejný graf G, který má 19 hraf a součet stupňů lichých uzlů je menší nebo roven součtu stupňů sudých uzlů. Kolik má graf G lichých uzlů, víte-li, že jich je více než 2 a všechny mají stejný stupeň větší než 1?

5.1.5

Kolik hran má sedmnáctistěn s 30 vrcholy? Nápověda: Uvažujte planární graf odpovídající danému mnohostěnu.

5.1.6

Kolik hran má patnáctistěn s 26 vrcholy? Nápověda: Uvažujte planární graf odpovídající danému mnohostěnu.

5.1.7

Každá ze 13 zemí má uzavřenou bilaterální smlouvu o hospodářské spolupráci s právě n ostatními zeměmi (z těchto 13ti). Jakých hodnot může nabývat n, jestliže víme, že $n > 2$ a n není dělitelné číslem 4 ani číslem 5.

5.1.8

Uzel obyčejného grafu se nazývá artikulace, pokud se po jeho odstranění a odstranění s ním incidentních hran zvýší počet komponent grafu. Kolik existuje navzájem neizomorfních lesů o 6 uzlech s právě 1 artikulací? Nakreslete je.

5.1.9

Jaký je nejmenší počet hran grafu se 7 uzly, jehož každý uzel má stupeň 2,4 nebo 6 a každý z těchto stupňů je zastoupen? Nakreslete takový graf.

5.1.10

V obci Skorošice se koná amatérský fotbalový turnaj, kterého se účastní 9 týmů. V dopolední části turnaje každý tým odehrál 2 zápasy. Kolik zápasů v odpolední části musí každý tým odehrát, aby si zahráli co nejvíce zápasů, avšak celkový počet odehraných zápasů musí být menší jak 32.

5.1.11

Nakreslete obyčejný graf o 6 uzlech s uzly stupně 1,2,3,4,5. Kolik existuje možností, jak tento graf zakreslit (až na izomorfismus).

5.1.12

Nakreslete obyčejný graf o 5 uzlech, který obsahuje uzly stupňů 1,2,3,4. Kolik takových grafů existuje (až na izomorfismus)?

5.1.13

Jaký je nejmenší počet uzlů n grafu, takového aby platilo $H = 3 * n + 4$ (kde H je počet hran). Nakreslete takový graf.

5.1.14

Jaký je nejmenší počet uzlů n grafu, takového aby platilo $H = 2 * n + 3$ (kde H je počet hran). Nakreslete takový graf.

5.1.15

Je dán obyčejný graf $G = (U, H)$, kde $U = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n > 0$ přirozené číslo, a H má 12 prvků. Pro každé číslo $i = 1, 2, \ldots, n$ má uzel i tentýž stupeň $n - 2$. Určete hodnotu čísla n a pak graf G přehledně nakreslete.

5.1.16

Buď G planární graf s uzly $\{1, 2, 3\}^2$, (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou spojeny hranou když $|x_1 - x_2| = 1 \wedge |y_1 - y_2| = 1$. Určete počet automorfismů grafu. (Návod nakreslite graf tak, že uzly odpovídají bodům v $\mathbb{R}^2$)

5.1.17

G planarni graf s mnozinou uzlu $0, 1, 2^2$ kde uzly $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ su spojene hranou ked $|(x_1 - x_2)| = 1 \wedge |(y_1 - y_2)| = 1$. Urcete pocet vsech automorfizmu G. Navod: nakreslte graf tak, že uzly odpovídají bodům v $\mathbb{R}^2$.

5.1.18

Na sportovním turnaji se každé dvě družstva utkali právě jednou a každé z těchto utkání skončilo vítěstvím jednoho z obou soupeřů. Turnaj vyhrálo družstvo, které získalo nejvíce vítězství. Toto družstvo však dvakrát prohrálo. Jaký byl nejmenší možný počet družstev na turnaji? Návod: uvažujte turnaj jako orientovaný graf.

5.1.19

Buď G strom, v němž součet stupňů všech uzlů je 72. Vypočtěte, jaký nejvyšší počet buněk může obsahovat rovinný graf, který z grafu G získáme přidáním 25 hran. Svůj výpočet přehledně zapište a užité vztahy odůvodněte.

5.1.20

Graf G má 8 uzlů a 13 hran. Každý uzel má stupeň n, kde $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, a uzlů stupně 3 je o jeden více než uzlů stupně 2. Vypočtěte, kolik uzlů stupně n má graf G pro každé $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

5.1.21

Nakreslete všechny neizomorfní kostry grafu s pěti vrcholy.

5.1.22

Buď G planární graf s množinou uzlů $\{0, 1, 2\}^2$, kde uzly $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ jsou spojeny hranou právě tehdy, když součet $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ je dělitelný třemi. Určete počet všech automorfismů grafu G. Návod: Nejprve si graf G nakreslete tak, že jeho uzly budou odpovídající body v $\mathbb{R}^2$.

5.2 Nazeteni minimální kostry

5.2.1

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 15 prvků s oceněním $v : H \to N$ takovým, že $v\{a, b\} = 2, v\{a, c\} = 1, v\{a, d\} = 1, v\{b, c\} = 1, v\{b, d\} = 2, v\{c, d\} = 3, v\{b, e\} = 4, v\{d, e\} = 3, v\{d, g\} = 2, v\{e, f\} = 4, v\{e, g\} = 3, v\{e, h\} = 2, v\{f, g\} = 3, v\{f, h\} = 1, v\{g, h\} = 1$. Nakreslete tento graf tak, že každá z následujících čtveřic (a, b, c, d), (b, d, e, g) a (e, f, g, h) tvoří vrcholy čtveřice a hrany jsou znázorněny úsečkami spojujícími příslušné vrcholy. Určete cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakreslete do obrázku.

5.2.2

V grafu $G = \{U, H\}$, kde H=

5.2.3

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 13 prvků s oceněním $v : H \to N$ takovým, že $v\{a, b\} = 2, v\{a, d\} = 5, v\{a, f\} = 1, v\{b, c\} = 0, v\{c, d\} = 5, v\{c, e\} = 1, v\{d, e\} = 10, v\{d, f\} = 0, v\{e, g\} = 3, v\{e, h\} = 3, v\{f, g\} = 1, v\{f, h\} = 2, v\{g, h\} = 6$. Určete cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakreslete.

6 Řešení

6.1 Logika - Důkazy výrokových formulí

2.1.1

1) $\vdash \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

1, $\neg B \vdash \neg B$

2, $B \vdash B$

3, $\vdash B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B)$

4, $\vdash \neg B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$

5, $B \vdash \neg C \Rightarrow B$

6, $\neg B \vdash \neg C \Rightarrow \neg B$

7, $\vdash (\neg C \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

8, $\neg B \vdash B \Rightarrow C$

9, $\neg B, B \vdash C$

10, - || -

11, - 12, $\vdash \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

2.1.2

Řešení

1. **axiom 1:** $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$
2. VD: $B \to C \vdash A \to (B \to C)$
3. **axiom 2:** $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
4. MP: $B \to C \vdash (A \to B) \to (A \to C)$
5. VD: $A \to B, B \to C \vdash (A \to C)$

2.1.3

1) **A**
2) **-B -> -A**
3) A3: **(-B-> -A) -> (A->B)**
4) MP 2,3 vysledek (A->B)
a to z předpokladu (-B -> -A), takže
(-B -> -A) |- (A->B)
5) MP 1 a 4 vysledek je B
a to zpředchoziho předpokladu a předpokladu A
A, (-B -> -A) |- B
6) věta o dedukci jen posouvá
A |- (-B -> -A) -> B
7) a ještě jednou
A -> (-B -> -A) -> B

2.1.4

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.1.5

1) $A \vdash A$ (vhodný předpoklad)

2) $A \to \neg\neg A$ (předpoklad)

3) $\neg\neg A$ (modus ponens)

4) $\neg B, A \vdash \neg\neg A$ (vhodně dosazeno)

5) $A \vdash \neg B \to \neg\neg A$ (věta o dedukci)

6) $(\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg A \to B)$ (Axiom A3)

7) $A \vdash \neg A \to B$ (modus ponens)

8) $\vdash A \to (\neg A \to B)$ (věta o dedukci)

2.1.6

Řešení

1. ¬B |- ¬B
2. ¬B -> (A -> ¬B)
3. ¬B |- (A -> ¬B)
4. (A -> ¬B) -> ¬¬(A -> ¬B)
5. ¬B |- ¬¬(A -> ¬B)
6. ¬B -> ¬¬(A -> ¬B)
7. ¬B -> ¬¬(A -> ¬B) -> ¬(A -> ¬B) -> B
8. ¬(A -> ¬B) -> B

2.1.7

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

6.2 Logika - Důkazy predikátových formulí

2.2.1

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.2.2

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.2.3

Řešení

1. $\vdash \forall x\varphi \Rightarrow \varphi$

   $\vdash \varphi$

2. $\vdash \forall x\,(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi$

   $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$

3. $\vdash \psi$

   $\vdash \forall x\psi$

4. $\vdash \forall x\varphi \vdash \forall x\psi$

   $\vdash \forall x\varphi \Rightarrow \forall x\psi$

   $\vdash \forall x\,(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x\varphi \Rightarrow \forall x\psi)$

2.2.4

Řešení:

1. $\vdash \neg(\exists x(\varphi \wedge \psi))$
   $\vdash \forall x \neg(\varphi \wedge \psi)$
   $\vdash \forall x(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
   $\vdash \forall x(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$
2. $\vdash \forall x(\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \forall x \neg\psi)$
3. $\vdash \varphi \Rightarrow \forall x \neg\psi$
   $\vdash \neg\varphi \vee \forall x \neg\psi$
   $\vdash \neg\varphi \vee \neg\exists x \psi$
4. $\vdash \neg(\varphi \wedge \exists x \psi)$
5. $\vdash \neg(\exists x(\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \exists x \psi)$
6. $\vdash (\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \exists x \psi)) \Rightarrow ((\varphi \wedge \exists x \psi) \Rightarrow (\exists x(\varphi \wedge \psi)))$
7. $\vdash (\varphi \wedge \exists x \psi) \Rightarrow (\exists x(\varphi \wedge \psi))$

2.2.5

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.2.6

D) $\varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x) \vdash \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow (\neg\psi(x) \Rightarrow \psi(y))$

$\varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x) \vdash \varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x)$

1, $\vdash \forall x\, \psi(x) \Rightarrow \psi(y)$

2, $\varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x) \vdash \varphi(x) \Rightarrow \psi(y)$

3, $\vdash \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x)$

4, $\varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x) \vdash \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \psi(y)$

5, $\vdash \psi(y) \Rightarrow (\neg\psi(x) \Rightarrow \psi(y))$

6, $\varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x) \vdash \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow (\neg\psi(x) \Rightarrow \psi(y))$

2.2.7

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.2.8

(2) $\varphi \Rightarrow (\forall x \varphi \Rightarrow \chi), \varphi \vdash \forall x \varphi \Rightarrow \chi$

1. $\varphi \Rightarrow (\forall x \varphi \Rightarrow \chi), \varphi \vdash \varphi \Rightarrow (\forall x \varphi \Rightarrow \chi)$

a) 2. $\chi \vdash \chi$

3. $\forall x \varphi \vdash \forall x \varphi$

b) 4. $\vdash \forall x \varphi \Rightarrow \varphi$ Axiom substituce

5. $\vdash \varphi$ M.P.

c) 6. $\varphi \Rightarrow (\forall x \varphi \Rightarrow \chi), \varphi \vdash \forall x \varphi \Rightarrow \chi$ M.P.

d) 7. $\forall x \varphi \vdash \forall x \varphi$

e) 8. $\varphi \Rightarrow (\forall x \varphi \Rightarrow \chi), \varphi, \forall x \varphi \vdash \chi$ M.P.

$\varphi \Rightarrow (\forall x \varphi \Rightarrow \chi), \varphi \vdash \forall x \varphi \Rightarrow \chi$

2.2.9

(a) $\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y)$

(b) $\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \forall y \varphi(x, y)$

(c) $\vdash \forall y \varphi(x, y)$

(d) $\vdash \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \varphi(x, x)$

(e) $\vdash \varphi(x, x)$

(f) $\underline{\vdash \forall x \varphi(x, x)}$

(g) $\forall x \forall y \varphi(x, y) \vdash \forall x \varphi(x, x)$

(h) $\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \forall x \varphi(x, x)$

2.2.10

Řešení

1. předpoklad: $\forall x \varphi \vdash \forall x \varphi$
2. axiom subst.: $\vdash \forall x \varphi \to \varphi$
3. MP: $\forall x \varphi \vdash \varphi$
4. předpoklad: $\forall x(\varphi \to \psi) \vdash \forall x(\varphi \to \psi)$
5. axiom subst.: $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$
6. MP: $\forall x(\varphi \to \psi) \vdash \varphi \to \psi$
7. MP 3,6: $\forall x(\varphi \to \psi), \forall x \varphi \vdash \psi$
8. VD: $\forall x(\varphi \to \psi \vdash \forall x \varphi \to \psi$
9. VD: $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \psi)$

2.2.11

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.2.12

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.2.13

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

6.3 Logika - Realizace

2.3.1

Řešení: $\exists x \exists y(x < y \wedge \forall z(z \leq x \vee z \geq y))$. Formule φ je nepravdivá, ale její negace je pravdivá.

2.3.2

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.3

Máme zadány 2 specialni axiomy

A1. P(f(x),x)
A2. f(fx))=f(f(y)) -> P(x,y)
Teorie definuje pak předpisy:
h(a)=a/2
≤=Pm

Zvolíme:
x=a
y=b

1. P(f(a),a) = a/2 ≤ a
   Což zjevně platí

2. f(f(a))=f(f(b)) -> P(a,b)
   f(a/2)=f(b/2) -> P(a,b)
   a/4=b/4 -> a ≤ b
   což platí

M je tedy modelem teorie

2.3.4

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.5

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.6

1, $X = \emptyset$

2, neplatí

3, $P_N(X,Y) \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$

2.3.7

Podla mna vsetky 3 su TRUE, ale nevidim prakticky rozdiel medzi 2 a 3. t

1: V realizacii M je splnitelna formula "existuje mnozina bodov, ktora je vnutri alebo na hranici obdlznika"
2: Za predpokladu, ze zjednotenie 2 mnozin je vnutri/na hranici obdlznika je splnitelna formula “bud 1. mnozina lezi vnutri/na hranici alebo 2. mnozina lezi vnutri/na hranici”
3: V realizacii M je splnitelna formula "ak zjednotenie 2 mnozin je vnutri/na hranici obdlznika, potom 1 mnozina lezi vnutri/na hranici a druha mnozina lezi vnutri/na hranici alebo je prazdna".

1: True - pravdaze podmnozina R^2 taka, co to splna, existuje
2: True - Bud obe mnoziny su neprazdne a lezia vnutri/na hranici, alebo je jedna z nich prazdna (v tom pripade p je False), avsak ta, ktora bola neprazdna, musela lezat vnutri/na hranici. Ak by boli obe prazdne, teoria neplati.
3: True - Opet bud su obe prazdne a vtedy lava strana implikacie = False, cize spolu impilkacia = True, alebo aspon jedna je neprazdna a potom lava strana = True, ale aj prava strana sa vzdy rovna True.

Rozdiel medzi 2 a 3: 2 hovorí, že formula napravo je “dôsledkom” formule naľavo, t.j. že formula napravo bude splnená v každej realizáci, kde je splnená formula naľavo. Takže riešenie 2 so zadanou realizáciou nesúvisí. Napr. ak by univerzom boli prirodzené čísla väčšie alebo rovné 2, a p(x) by znamenalo, že x nie je prvočíslo, tak p(f(x,y)) bude pravdivé, kým (p(x) alebo p(y)) nebude.
+1 tím pádem, by mělo být 2 False

Dalším příkladem kdy 2. nebude splněna, je realizace N, která má universum přirozená čísla a P(x) ⇔ x != 0, f(x,y) = x + y +1. V této realizaci bude p(f(x,y)) splněna vždy, protože ať vezmu kterákoliv dvě čísla nikdy nebude výsledek rovnice 0, ovsem rovnice (p(x) or p(y)) nebude splnněna např. pro čísla 1 a 2.

2.3.8

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.9

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.10

Řešení

1. Realizace $\mathcal{R}$ je modelem teorie T, pokud každá formule ψ z T je pravdivá v realizaci $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \models \psi$).

   vyšetření formule: $p(x, f(y,x))$
   $x \leq y + x$
   $0 \leq y$ tato formule neplatí pro y, která jsou menší jak nula, tudíž formule je nepravdivá v realizaci $\mathcal{R}$, tím pádem realizace $\mathcal{R}$ není modelem teorie T.

2. Formule φ je důsledkem teorie T, pokud je formule φ pravdivá v každé realizaci $\mathcal{R}$, která je modelem teorie T.

   ...

2.3.11

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.12

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.13

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.14

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.15

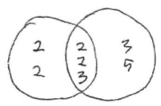
$\forall x,y \in \mathbb{Z}\ \exists n \in \mathbb{Z}\ n|x \wedge n|y \wedge \forall m \in \mathbb{Z}\ m|x \wedge m|y \Rightarrow m|n$

formule:

$\forall x,y \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : \exists a,b \in \mathbb{Z} : x = a.n \wedge y = b.n$
$\wedge\ \forall m \in \mathbb{Z}\ (\exists c,d \in \mathbb{Z} : x = c.m \wedge y = d.m) \Rightarrow \exists g : m.g = n$

pak n je $NSD(x,y)$

$48 = 2.2.2.2.3$
$180 = 2.2.3.3.5$



NSN:

$\forall x,y \in \mathbb{Z}\ \exists n \in \mathbb{Z} : x|n \wedge y|n \wedge \forall m \in \mathbb{Z} : x|m \wedge y|m \Rightarrow n|m$

pak n je $NSN(x,y)$

2.3.16

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.17

Řešení

[editovat]

a.

x	u(x)
a	a
b	b
c	c
d	d

p	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

b. Tvrdím, že daná formule není důsledkem teorie T, protože $p(x,y) \rightarrow (x = y \vee x = u(y))$. Najdeme protipříklad, tedy takový model teorie T pro který neplatí $T \models p(x,y) \Rightarrow (x = y)$.

x	u(x)
a	b
b	a
c	d
d	c

p	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	0	0
c	0	0	0	1
d	0	0	1	0

Pro $x = b, y = a : \overbrace{\underbrace{p(x,y)}_{1} \rightarrow \underbrace{(x = y)}_{0}}^{0}$

df (str. 17 - Definice 4.4, 32 - Definice 7.3 a 7.4)

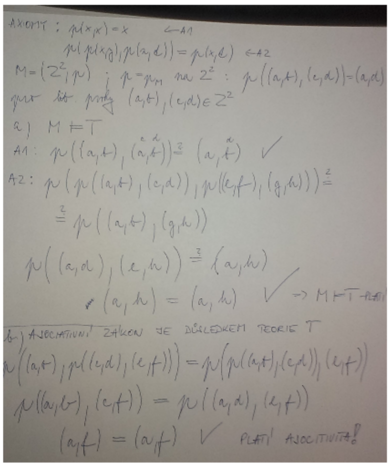
2.3.18

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.19

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.3.20



ASOCIATIVITA - dukaz:

(y°x°z) = (x°y)°z
p(x, p(y,z)) = p(p(x,y), z)
p(p(x,x), p(y,z)) = p(p(x,y), p(z,z))
p(x,z) = p(x,z)

vysvetleni: 1. radek - asociativni zakon; 2. radek - za operaci ° dana “operace” predikat; 3.radek - leva strana (pouzit axiom A1), prava strana (pouzit A1; 4.radek - pouzit axiom A2; A1 a A2 dle fotky nahore

6.4 Logika - Prenexní tvar

2.4.1

$$(\forall x \varphi(x, y) \Rightarrow \exists t(\psi(t) \vee \chi(y, z)))$$
$$\exists x(\varphi(x, y) \Rightarrow \exists t(\psi(t) \vee \chi(y, z)))$$
$$\exists x \exists t(\varphi(x, y) \Rightarrow (\psi(t) \vee \chi(y, z)))$$

$$\neg(\exists x \exists t(\varphi(x, y) \Rightarrow (\psi(t) \vee \chi(y, z))))$$
$$\forall x \forall t \neg(\varphi(x, y) \Rightarrow (\psi(t) \vee \chi(y, z)))$$
$$\forall x \forall t \neg(\neg\varphi(x, y) \vee (\psi(t) \vee \chi(y, z)))$$
$$\forall x \forall t(\varphi(x, y) \wedge \neg(\psi(t) \vee \chi(y, z)))$$
$$\forall x \forall t(\varphi(x, y) \wedge \neg\psi(t) \wedge \neg\chi(y, z))$$

2.4.2

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.4.3

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.4.4

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.4.5

② ~~$\forall x\, A)$~~ PULSEMKA

$\forall x\, A(x) \Rightarrow ((\forall x\, B(y)) \Rightarrow \neg \forall x\, C(y,x))$

$\forall x\, A(x) \Rightarrow (B(y) \Rightarrow \exists x' \neg C(y,x'))$

$\exists x\, \neg A(x) \vee (B(y) \Rightarrow \exists x' \neg C(y,x'))$

$\exists x\, \neg A(x) \vee \neg B(y) \vee \exists x' \neg C(y,x')$

$\exists x \exists x' (\neg A(x) \vee \neg B(y) \vee \neg C(y,x'))$ ← PRENEXNÍ TVAR

$\neg(\exists x \exists x' (\neg A(x) \vee \neg B(y) \vee \neg C(y,x')))$

$\forall x \forall x' (A(x) \wedge B(y) \wedge C(y,x'))$ ← NEGACE

2.4.6

② $\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \Rightarrow \exists x (\psi(x) \Rightarrow \forall z\, \varphi(x,z))$

$A \Rightarrow B = \neg A \vee B$
$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$

$\neg(\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \Rightarrow \exists x' (\psi(x') \Rightarrow \forall z\, \varphi(x',z)))$

$\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \wedge \forall x' (\psi(x') \wedge \exists z\, \neg \varphi(x',z))$ ← negace

$\forall x \forall y \forall x' \exists z (\varphi(x,y) \wedge \psi(x') \wedge \neg \varphi(x',z))$ ← PRENEXNÍ TVAR

2.4.7

Prenexní tvar: $\exists x_1 \forall y_1 \exists y_2 (\neg\varphi(x_1, y_1) \vee \neg\varphi(x, x) \vee \varphi(y_2, y_2))$

Po negaci: $\forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 (\varphi(x_1, y_1) \wedge \varphi(x, x) \wedge \neg\varphi(y_2, y_2))$

x je volná premenná, tie sa nesmú preznačovať (strhával bod ak ste preznačili).

Pozn: Pro převod do prenexního tvaru není potřeba odstraňovat implikace. Pokud však je potřeba negovat výraz obsahující implikaci, tak může být nutné negovat implikaci podle známého pravidla $\neg(A- > B) <=> A \wedge \neg B$

2.4.8

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.4.9

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.4.10

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.4.11

Upravíme ϕ:

1. $\phi : \neg\forall x\, p(x, y) \vee \neg\forall z\, q(z, x)$ (prevod implikácie na disjunkciu)
2. $\phi : \exists x\, \neg p(x, y) \vee \exists z\, \neg q(z, x)$ (presun negácií dovnútra)
3. $\phi : \exists z\, (\neg p(z, y) \vee \neg q(z, x))$ (zníženie počtu kvantifikátorov, viazané x sme premenovali na z)

Upravíme ψ: $\psi : \exists z\, (\neg p(z, y) \vee \neg q(z, x))$ (prevod implikácie na disjunkciu) Formuly sú zrejme ekvivalentné.

2.4.12

Řešení

Upravíme φ:

$\phi : \forall y p(x, y) \wedge \forall z \neg q(z, y)$ (presun negácie dovnútra)

$\phi : \forall z p(x, z) \wedge \forall z \neg q(z, y)$ (premenovanie y na z)

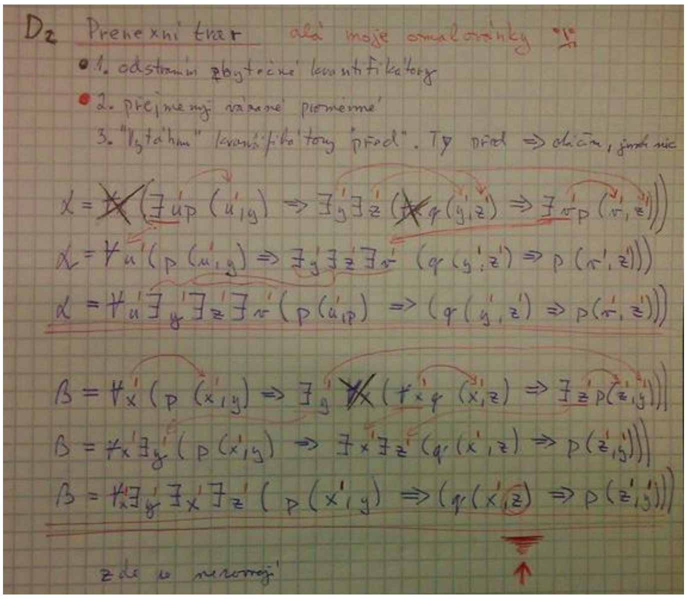
$\phi : \forall z (p(x, z) \wedge \neg q(z, y))$ (zníženie počtu kvantifikátoru - viz algoritmus prevodu na prenexný tvar v skriptách)

Upravíme ψ:

$\psi : \forall z (p(x, z) \wedge \neg q(z, y))$ (presun negácie dovnútra)

Po týchto úpravách je jasné, že φ a ψ sú ekvivalentné.

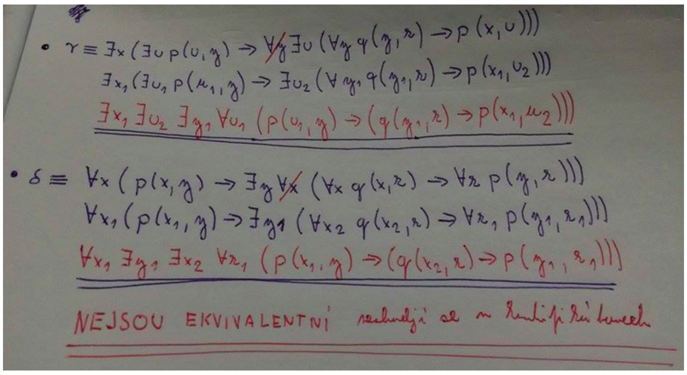
2.4.13



2.4.14

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

2.4.15



2.4.16

$\exists x \forall a \forall b\, (a \neq c \wedge b \neq c \wedge a \neq x \wedge b \neq x \wedge f(a, b) \neq x)$

6.5 Algebra - Grupy, podgrupy, cyklické grupy

3.1.1

(4) inverzní prvek $= a * i = e$

$x * i = 0$

$xi + x + i = 0$

$\cancel{i = \frac{-x}{x+1}}$

$i \cdot (x+1) + x = 0$

$i \cdot (x+1) = -x$

$i = \frac{-x}{x+1} =$

$= \frac{x}{1-x} \Rightarrow$ (c)

neutrální prvek:

$a * e = a$

$x * e = x$

$\cancel{xe + x + e = x}$

$\cancel{xe = -y}$

$\cancel{e = \frac{-y}{x}}$

$xe + x + e = x$

$e \cdot (x+1) = 0$

$e = \frac{0}{x+1} = \underline{\underline{0}}$

3.1.2

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.1.3

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.1.4

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.1.5

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.1.6

PULSEMKA

(5) těleso $\iff$ kom. grupa vůči + a grupa vůči ~~•~~ •

(+) uzavřená$_x$ $\Rightarrow$ ano
asociativní $\Rightarrow$ ano
komutativní $\Rightarrow$ ano
neu

neutrál. pr.: $a + e = a$
$x + y\sqrt{7} + e = x + y\sqrt{7}$
$\underline{e = 0}$ ... má

inverzní: $a + i = e$
$x + y\sqrt{7} + i = 0$
$\underline{i = -x - y\sqrt{7}}$ ... má

$\Downarrow$

vůči (+) je abelovská grupa

(•) uzavřená $\Rightarrow$ ano
asociativní $\Rightarrow$ ano
neutrální prvek: $a \cdot e = a$
$(x + y\sqrt{7}) \cdot e = x + y\sqrt{7}$
$\underline{e = 1}$ ... ano

inverzní prvek: $a \cdot i = e$
$(x + y\sqrt{7}) \cdot i = 1$ $\quad x \neq -y\sqrt{7}$
$i = \frac{1}{x + y\sqrt{7}}$, $\underline{\text{má}}$

$\Downarrow$

vůči (•) ~~je grupa, tj. je těleso~~
vůči (•) není grupa, tj. není $\underline{\underline{\text{těleso}}}$

(4)

2

3.1.7

(1) $M = \{a, b, c\}$ $\quad \varphi: M \times M \to M$ $\quad G(M, \varphi)$

φ	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

není neutrální ani inverzní prvek $\Rightarrow$ není grupa

3.1.8

Jelikož nebylo řečeno, že $(\mathbb{Q}, \odot)$ je algebra, mělo by se i dokázat, zda je operace $\odot$ na množině $\mathbb{Q}$ uzavřena. Bude-li uzavřena, můžeme říci, že $(\mathbb{Q}, \odot)$ je algebra. Pak budeme postupně dokazovat další vlastnosti a považovat tento grupoid za pologrupu/monoid/grupu. Komutativnost zkusíme dokázat hned na počátku, jelikož velmi zjednodušuje důkazy ostatních vlastností.

Uzavřenost operace $\odot$ na množině $\mathbb{Q}$:
$\forall x, y \in \mathbb{Q} \; : \; x \odot y \in \mathbb{Q}$

$x \odot y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x + y - xy \in \mathbb{Q}$

Což zřejmě platí, jelikož operace $+$, $-$ a . jsou na $\mathbb{Q}$ uzavřeny. $(\mathbb{Q}, \odot)$ je tedy grupoid.

Komutativita $\odot$:
$\forall x, y \in \mathbb{Q} \; : \; x \odot y = y \odot x$

$x \odot y = y \odot x \Leftrightarrow x + y - xy = y + x - yx$

Což opět zřejmě platí, jelikož operace $+$ a . jsou na $\mathbb{Q}$ uzavřeny (operace $-$ komutativní není,

ale také její operandy se nemění).

Asociativita $\odot$:
$\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \; : \; (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$

$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z) \Leftrightarrow (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz)$

$L = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z = x + y - xy + z - xz - yz + xyz$

$P = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz$

$L = P$

Tedy operace $\odot$ je asociativní ($(\mathbb{Q}, \odot)$ je pologrupa).

Existence neutrálního prvku e:
Jelikož je operace $\odot$ komutativní, hledáme přímo neutrální prvek a ne pravý a levý neutrální

prvek.
$\forall x \in \mathbb{Q} \; : \; \exists e \; : \; x \odot e = e \odot x = x$

$x \odot e = x \Leftrightarrow x + e - xe = x \Rightarrow e = 0$

Našli jsme neutrální prvek operace $\odot$ a $(\mathbb{Q}, \odot)$ je tedy monoid.

3.1.9

Řešení

Generování množiny permutací $< \{f_1, f_2\} >$ z permutací f_1, f_2 nad operací $\circ$ se systematicky provede postupným vyplňováním Caleyho tabulky. Pokud se při vyplňování tabulky vypočte nová permutace f_n, je tabulka rozšířena o tuto permutaci a dopočteny příslušné buňky.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_2	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_4	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_5	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1
f_6	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2

postupný výpočet tabulky:
$f_1 \circ f_1 = f_1(f_1(x)) = x$ ...je nová permutace, takže $f_3 = x$.
$f_2 \circ f_1 = f_2(f_1(x)) = \frac{1}{x}$ ...je nová permutace, takže $f_4 = \frac{1}{x}$.
$\vdots$
pozn. jelikož operace $\circ$ není komutativní $f \circ g \neq g \circ f$, je nutné poctivě vypočítat vždy obě varianty $f_2 \circ f_1$ i $f_1 \circ f_2$.

Po vypočtení tabulky jsme dostali 6 permutací, které tvoří podgrupu generovanou permutacemi f_1, f_2:
$f_1(x) = \frac{x}{x-1}$
$f_2(x) = \frac{x-1}{x}$
$f_3(x) = x$ (je neutrálním prvkem)
$f_4(x) = \frac{1}{x}$
$f_5(x) = 1 - x$
$f_6(x) = \frac{-1}{x-1}$

Výsledek $< \{f_1, f_2\} >= \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.

3.1.10

Řešení

$\circ$	A	B	C
A	A	C	B
B	B	A	C
C	C	B	A

asociativni zákon: $\forall x, y, z \in M : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$$\begin{aligned}(A \circ B) \circ C &= A \circ (B \circ C)\\ (C) \circ C &= A \circ (C)\\ A &= B\end{aligned}$$

$A \neq B \Rightarrow$ neplatí asoc. zákon pro operaci $\circ$.

3.1.11

Řešení

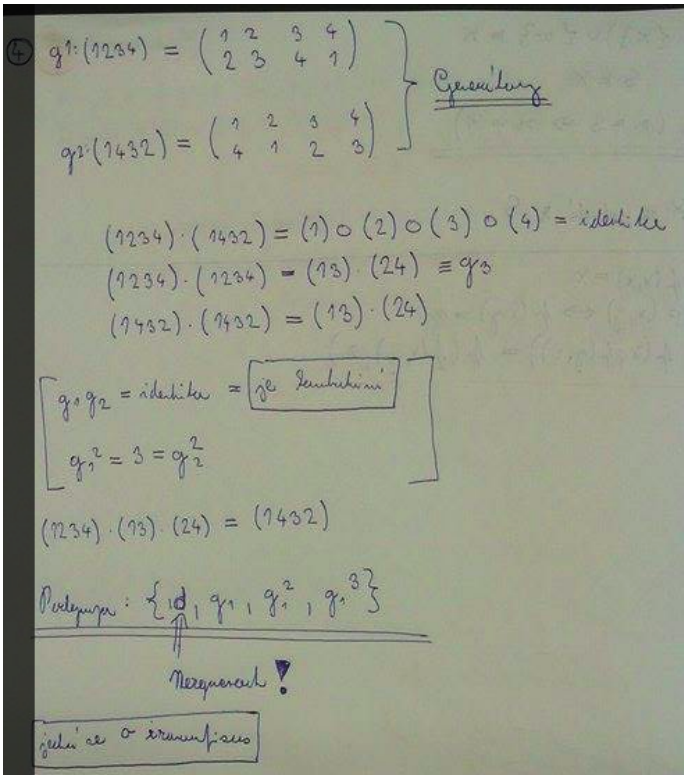
$< 6 >=< \{1, 2, 6\} >= \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 \dots\} = \{3^n, 2 \cdot 3^n |$ kde $n \in \mathbb{N}_0\}$

pozn. $\mathbb{N}_0$ značí množinu přirozených čísel včetně nuly

3.1.12

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.1.13



$$g_1: (1234) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2: (1432) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Generátory}$$

$$(1234)\cdot(1432) = (1)\circ(2)\circ(3)\circ(4) = \text{identita}$$

$$(1234)\cdot(1234) = (13)\cdot(24) \equiv g_3$$

$$(1432)\cdot(1432) = (13)\cdot(24)$$

$$g_1 g_2 = \text{identita} \Rightarrow \boxed{\text{je inverzní}}$$

$$g_1^2 = 3 = g_2^2$$

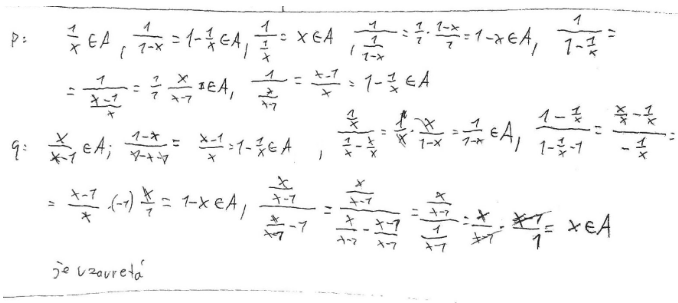
$$(1234)\cdot(13)\cdot(24) = (1432)$$

Podgrupa: $\{id, g_1, g_1^2, g_1^3\}$

Nezgeneruje!

$\boxed{\text{jedná se o izomorfismus}}$

3.1.14



p: $\frac{1}{x} \in A$, $\frac{1}{1-x} = 1-\frac{1}{x} \in A$, $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x \in A$, $\frac{1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1-x}{1} = 1-x \in A$, $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{1}\frac{x}{x-1} \in A$, $\frac{1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x} = 1-\frac{1}{x} \in A$

q: $\frac{x}{x-1} \in A$; $\frac{1-x}{1-x+1} = \frac{x-1}{x} = 1-\frac{1}{x} \in A$, $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{x}{x}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} \in A$, $\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-1} = \frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}\cdot(-1)\frac{x}{1} = 1-x \in A$, $\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{\cancel{x-1}}\cdot\frac{\cancel{x-1}}{1} = x \in A$

je uzavřená

+ chybí výpočet algebry generované prvkem 1-x

3.1.15

Řešení [editovat]

Napr. pre prvky a,b,c: $(a * b) * c = b * c = d$ $a * (b * c) = a * d = a$ Teda * nie je asociatívna, $(A, *)$ nie je pologrupa.

Existuje jediný trojprvkový podgrupoid s nosnou množinou $\{b,c,d\}$. Toto je vidieť z tabuľky, z týchto troch prvkov dostanete znova len niektorý z nich, teda množina je uzavretá voči *, pre žiadnu inú trojicu to neplatí:

$\{a, b, c\}: \ b * c = d$, množina nie je uzavretá voči *
$\{a, b, d\}: \ b * b = c$, množina nie je uzavretá voči *
$\{a, c, d\}: \ c * a = b$, množina nie je uzavretá voči *

Na množine neexistuje netriviálna kongruencia - žiadna z prípustných ekvivalencií (je ich 13) nemá vlastnosti kongruencie. Toto je možné demonštrovať napr. nasledovne: Označujme ~ hľadanú kongruenciu. Zvolíme dvojicu rôznych prvkov, ktorá bude v tejto relácii (v netriviálnej kongruencii takáto dvojica musí existovať), a budeme ekvivalenciu ~ rozširovať tak, aby sme splnili požiadavky na kongruenciu. Ak sa dostaneme k univerzálnej relácii (AxA), zvolená dvojica nemôže byť v netriviálnej kongruencii.

Ak a~b, potom aj a*b ~ b*b, teda a~b~c. Potom tiež a*c ~ b*c, teda a~b~c~d. Čiže v netriviálnej kongruencii nemôže platiť a~b. Analogicky pre ďalšie možné dvojice:

Ak a~c, potom aj a*a ~ c*a, teda a~b~c, teda a~b~c~d (viz prvý riadok - a~b nemôže platiť v netriviálnej kongruencii).

Ak a~d, potom aj a*d ~ d*d, teda a~b~d, teda a~b~c~d (viz prvý riadok - a~b nemôže platiť v netriviálnej kongruencii).

Ak b~c, potom aj b*a ~ c*a, teda a~b~c, teda a~b~c~d (viz prvý riadok - a~b nemôže platiť v netriviálnej kongruencii).

Ak b~d, potom aj a*b ~ a*d, teda a~b~d, teda a~b~c~d (viz prvý riadok - a~b nemôže platiť v netriviálnej kongruencii).

Ak c~d, potom aj c*a ~ d*a, teda a~b, teda a~b~c~d (viz prvý riadok - a~b nemôže platiť v netriviálnej kongruencii).

Teda žiadna dvojica prvkov nemôže byť v netriviálnej kongruencii, teda netriviálna kongruencia neexistuje.

3.1.16

Řešení [editovat]

Vyberme ľubovoľné dva prvky: $f(x) = \dfrac{x}{1+ax}$, $g(x) = \dfrac{x}{1+bx}$.

Potom

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{1+ag(x)} = \frac{\frac{x}{1+bx}}{1+a\frac{x}{1+bx}} = \frac{\frac{x}{1+bx}}{\frac{1+bx+ax}{1+bx}} = \frac{x}{1+bx+ax} = \frac{x}{1+(a+b)x},\ a+b \in \mathbb{Z}.$$

f(x) nemôže byť definované pre $-\dfrac{1}{a}$, g(x) pre $-\dfrac{1}{b}$, f(g(x)) pre $-\dfrac{1}{a+b}$, čo sú však všetko racionálne čísla, takže f(x), g(x) aj f(g(x)) sú definované pre všetky iracionálne čísla.

Teda $f \circ g \in M$.

Operácia zloženia zobrazení je vždy asociatívna (pre tento konkrétny prípad ľahko dokázateľné - zvolíme tri funkcie, a bez ohľadu na zátvorkovanie nám vyjde $\dfrac{x}{1+(a+b+c)x}$. Teda $(M, \circ)$ je pologrupa.

V tomto konkrétnom prípade je operácia aj komutatívna - $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \dfrac{x}{1+(a+b)x}$, teda $(M, \circ)$ je komutatívna pologrupa.

Prvok $e(x) = \dfrac{x}{1+0x} = x$ je neutrálny prvok, teda $(M, \circ)$ je (komutatívny) monoid.

Pre ľubovoľný prvok $\dfrac{x}{1+ax}$ je zrejme $\dfrac{x}{1+(-a)x}$ inverzný prvok, teda $(M, \circ)$ je (komutatívna) grupa.

$(M, \circ)$ má teda všetky z uvedených vlastností.

3.1.17

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.1.18

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.1.19

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.1.20

$\Omega = \{\circ, f\}$ typu $(2,1)$

$A = (\{a,b,c,d,e\}, *)$

$x * y = f(x)$, $f(f(x)) = f(x)$

a, c, e : $f(a) = b$, $f(c) = d$, $f(e) = e$

(a) $A \in$ varieta pologrup $\equiv$ podmnožina pologrup ?

grupoid $- \circ$ ✓

pologrupa $-$ asociativita

$$\underbrace{x * (y * z)}_{L} = \underbrace{(x * y) * z}_{P}$$

$L = (x * f(y)) = f(x)$

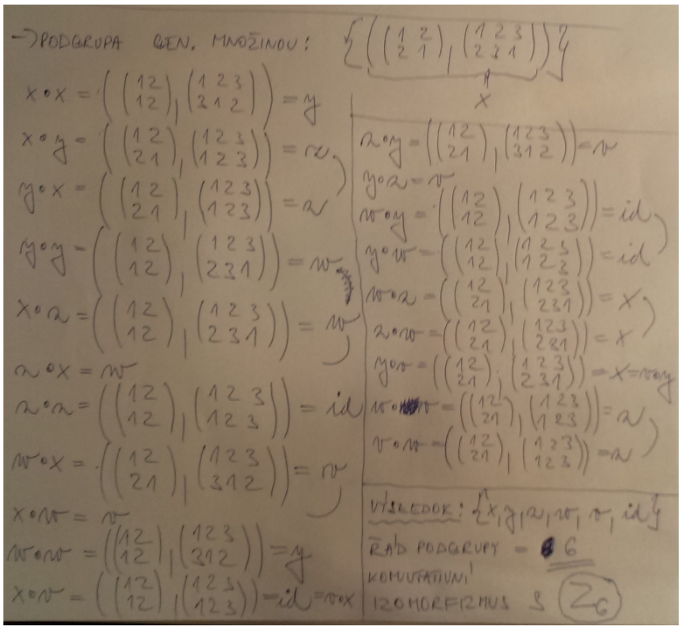
$P = (f(x)) * z = f(f(x)) = f(x)$

$L = P \Rightarrow$ platí asociativita $\rightarrow$ pologrupa

(b) $\langle\{a, e\}\rangle = \{a, b, e\}$? co víc ?

(c) ? (celý to je divný)

3.1.21



Grupy S_2, S_3 jsou grupy permutací na dvouprvkové a tříprvkové množině s operací skládání

$$S_2 = (\{(1), (12)\}, \circ)$$
$$S_3 = (\{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}, \circ)$$

Grupa G je jejich součin

$$G = (\{((1),(1)), ((1),(12)), ((1),(13)), ..., \\ ((12),(1)), ((12),(12)), ((12),(13)), ...\}, \circ')$$

tzn. v nosné množině jsou dvojice prvků z těch původních dvou grup (celkem jich bude 12) a ta operace vypadá takto:

$$(a_1, a_2) \circ' (b_1, b_2) = (a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2)$$

Je f homomorfismus?

Jak už psal někdo na facebooku:

$$f(A) \circ' f(B) \stackrel{?}{=} f(A \circ' B)$$
$$f((a_1, a_2)) \circ' f((b_1, b_2)) \stackrel{?}{=} f((a_1, a_2) \circ' (b_1, b_2))$$
$$(a_1 \circ a_1, a_2 \circ a_2) \circ' (b_1 \circ b_1, b_2 \circ b_2) \stackrel{?}{=} f((a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2))$$
$$((a_1 \circ a_1) \circ (b_1 \circ b_1), (a_2 \circ a_2) \circ (b_2 \circ b_2)) \stackrel{?}{=} ((a_1 \circ b_1) \circ (a_1 \circ b_1), (a_2 \circ b_2) \circ (a_2 \circ b_2))$$

Toto obecně neplatí. Protipříklad:

$$a_1 = (1), a_2 = (123), b_1 = (1), b_2 = (12)$$
$$((1), ((123) \circ (123)) \circ ((12) \circ (12))) \stackrel{?}{=} ((1), ((123) \circ (12)) \circ ((123) \circ (12)))$$
$$((1), ((132) \circ (1)) \stackrel{?}{=} ((1), (13) \circ (13))$$
$$((1), (132)) \neq ((1), (1))$$

Není to homo!

Generování podgrupy

$< \{x\} >=?$

$$x = ((12), (123))$$
$$x \circ' x = ((1), (132))$$
$$x \circ' x \circ' x = ((12), (1))$$
$$x \circ' x \circ' x \circ' x = ((1), (123))$$
$$x \circ' x \circ' x \circ' x \circ' x = ((12), (132))$$
$$x \circ' x \circ' x \circ' x \circ' x \circ' x = ((1), (1))$$

Kdybych teď zkoušela ještě složit cokoli s čímkoli, tak už získám jenom prvky, co už tam mám. Navíc už tam mám i neutrální prvek a ke všem prvkům inverze, takže už nemusím nic přihazovat.

Je to izo se Z_6?

Ano, jde to vidět z toho, že všechny prvky té podgrupy jsou nějaké mocniny jednoho prvku x. Ten izomorfismus pak zobrazí $x \to 1$, $x \circ' x \to 1+1$, $x \circ' x \circ' x \to 1+1+1$, atd. takže takto:

$$((1),(1)) \to 0$$
$$((12),(123)) \to 1$$
$$((1),(132)) \to 2$$
$$((12),(1)) \to 3$$
$$((1),(123)) \to 4$$
$$((12),(132)) \to 5$$

Kdyby se udělaly tabulky operace $\circ'$ nad těmi dvojcemi permutací a + nad Z_6, tak jsou stejné, jen s přejmenovanými prvky.

A to je vše!

6.6 Algebra - Morfismy

3.2.1

3 a) asoc. $\Rightarrow$ ano
uzavř. $\Rightarrow$ ano
neutr. pr. $a + e = a$
$a+bi + e = a+bi$
$\underline{e = 0 = 0+0i}$ ano

inverzní: $a + i = e$
$a+bi + i = 0$
$i = -a-bi$
je grupa

b) homomorfismus?: $f(a+b) = f(a) + f(b)$
$f(a+bi+c+di) = f(a+bi) + f(c+di)$
$f(a+c+(b+d)i) =$ —||— —||—
$(a+c)-(b+d)i = a-bi + c-di$
$(a+c)-(b+d)i = (a+c)-(b+d)i$ je homomorfismus

c) izomorfismus = bijektivní homomorfismus ← je injekce + surjekce ← platí

3.2.2

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.2.3

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.2.4

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.2.5

2 $f(a') = f(a)'$
$f(|a|) = f(4a^2)'$
$4 \cdot |a|^2 = |4a^2|$
$4 \cdot |a^2| = 4 \cdot |a^2|$
platí

$f(a^*) = f(a)^*$
$f((-1)^a \cdot a) = (4a^2)^*$
$4 \cdot (-1)^{2a} \cdot a^2 = (-1)^{4a^2} \cdot 4a^2$
platí

je homomorfismus

jádro: $x \sim y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

3.2.6

$$\varphi: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 : \varphi(x,y) = (3x, x+y)$$ JE HOMOMORFISMUS?

$$\varphi(\sigma(x,y)) = \sigma(\varphi(x,y))$$
$$\varphi(x, y+2) = \sigma(3x, x+y)$$
$$(3x, x+2y+2) = (3x, x+2y+2) \checkmark$$

$$\varphi((x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)) = \varphi(x_1,y_1) \oplus \varphi(x_2,y_2)$$
$$\varphi(x_1+x_2, y_1+y_2) = (3x_1, x_1+y_1) \oplus (3x_2, x_2+y_2)$$
$$(3x_1+3x_2, x_1+y_1+x_2+y_2) = (3x_1+3x_2, x_1+y_1+x_2+y_2) \checkmark$$

$$\varphi((x_1,y_1) \odot (x_2,y_2)) = \varphi(x_1,y_1) \odot \varphi(x_2,y_2)$$
$$\varphi(x_1x_2, y_1+y_2) = (3x_1, x_1+y_1) \odot (3x_2, x_2+y_2)$$
$$(3x_1x_2, x_1x_2+y_1+y_2) \neq (3x_1 \cdot 3x_2, x_1+y_1+x_2+y_2) \;//$$

NEPLATÍ HOMOMORFIZMUS!

Poznámka: Kdyby platil, pak by bylo potřeba dokázat i pro ni = 0:
fí(0,1) = (0,1)
(0,1) = (0,1)

3.2.7

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.2.8

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.2.9

Toto je zle - f homomorfizmus bude, keďže uvažujeme len matice z B. Bude totiž vždy pl atiť a = e = d = h = 1, b = f = 0, takže posledný riadok je vlastne (1+0)*(c+g) = c + g, čo zrejme platí.

$$f(\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix}) = f(\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}) + f(\begin{bmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix})$$
$$f(\begin{bmatrix}1 & 0\\ a+b & 1\end{bmatrix}) = f(\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}) + f(\begin{bmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix})$$
$$1*(a+b) = 1*a + 1*b$$
$$a+b = a+b$$

Homomorfismus platí

3.2.10

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

6.7 Algebra - Kongruence

3.3.1

PÍSEMKA 2008

5) 1, kongruence:

? ekvivalence: reflexivní $A \sim A \Leftrightarrow |A| = |A|$ ... platí

symetrická $A \sim B \Rightarrow B \sim A \Leftrightarrow |A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ platí

tranzitivní $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$: $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \Rightarrow$
$\Rightarrow |A| = |C|$ platí

je ekvivalence

$A \sim B \wedge C \sim D \Rightarrow A \cdot C \sim B \cdot D$

$|A| = |B| \wedge |C| = |D| \Rightarrow$ ~~platí~~ $\Rightarrow$ ~~$B \cdot D \sim B \cdot D$~~

$|A \cdot C| = |B \cdot D|$

$|A| \cdot |C| = |B| \cdot |D|$

$|B| \cdot |D| = |B| \cdot |D|$ platí

2, $(GL(2,\mathbb{R}), \cdot)/_\sim = \{[A]_\sim, A \in GL(2,\mathbb{R})\}$

$[A]_\sim = \{B \mid |B| = |A|\}$

izomorfní = homomorfní bijekce $\Rightarrow$ surjekce + injekce

$f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

platí

$\forall a \in \mathbb{R}: \exists A \mid |A| = a$

platí

$\forall A \in GL(2,\mathbb{R}) \exists a: |A| = a$

platí

$\Rightarrow$ je izomorfní

3, normální podgrupa:

$N = \{A \mid |A| = 1\}$

3.3.2

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

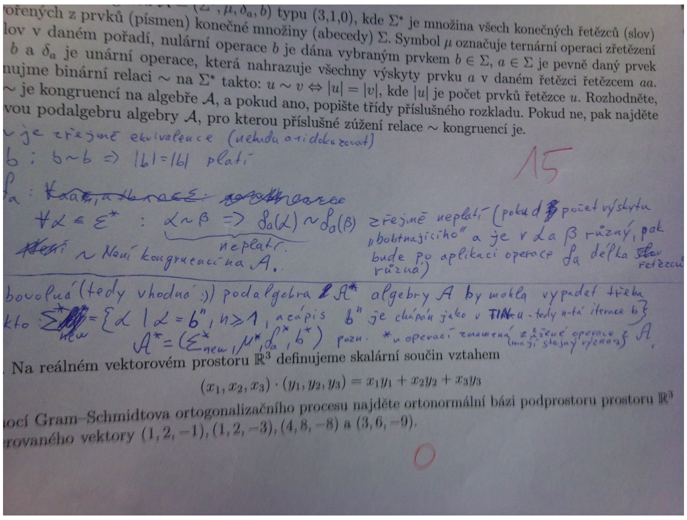
3.3.3

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.3.4

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.3.5


(…$\Sigma^*, \mu, \delta_a, b$) typu (3,1,0), kde Σ^* je množina všech konečných řetězců (slov) …ořených z prvků (písmen) konečné množiny (abecedy) Σ. Symbol μ označuje ternární operaci zřetězení …lov v daném pořadí, nulární operace b je dána vybraným prvkem $b \in \Sigma$, $a \in \Sigma$ je pevně daný prvek … b a δ_a je unární operace, která nahrazuje všechny výskyty prvku a v daném řetězci řetězcem aa. …nujme binární relaci $\sim$ na Σ^* takto: $u \sim v \Leftrightarrow |u| = |v|$, kde $|u|$ je počet prvků řetězce u. Rozhodněte, … $\sim$ je kongruencí na algebře $\mathcal{A}$, a pokud ano, popište třídy příslušného rozkladu. Pokud ne, pak najděte …vou podalgebru algebry $\mathcal{A}$, pro kterou příslušné zúžení relace $\sim$ kongruencí je.

$\sim$ je zřejmě ekvivalence (nebudu ani dokazovat)

b : $b \sim b \Rightarrow |b| = |b|$ platí

δ_a : ~~…~~

$\forall \alpha \in \Sigma^* : \underbrace{\alpha \sim \beta \Rightarrow \delta_a(\alpha) \sim \delta_a(\beta)}_{\text{neplatí.}}$ zřejmě neplatí (pokud počet výskytu „bobtnajícího" a je v α a β různý, pak bude po aplikaci operace δ_a délka řetězců různá)

$\sim$ Není kongruencí na $\mathcal{A}$.

…bovolná (tedy vhodná :)) podalgebra $\mathcal{A}^*$ algebry $\mathcal{A}$ by mohla vypadat třeba …kto: $\Sigma^*_{new} = \{\alpha \mid \alpha = b^n, n \geq 1$, a zápis b^n je chápán jako v TIN-u - tedy n-tá iterace b$\}$

$\mathcal{A}^* = (\Sigma^*_{new}, \mu^*, \delta_a^*, b^*)$ pozn. * u operací znamená zúžené operace z $\mathcal{A}$ (mají stejný význam).

… Na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ definujeme skalární součin vztahem

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

…ocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi podprostoru prostoru $\mathbb{R}^3$ …rovaného vektory $(1, 2, -1), (1, 2, -3), (4, 8, -8)$ a $(3, 6, -9)$.

15

0

3.3.6

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.3.7

Řešení

1. Relace odpovídající kongruencím na algebře A, kde kongruence: $a, b \in M, (a, b) \in R \Rightarrow (f(a), f(b)) \in R$.
   $R_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (y, z), (z, y)\}$
   $R_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$
   $R_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, x), (x, z), (z, x), (y, z), (z, y)\} = M \times M$
2. Nalezení rozkladů množiny M indukované relacemi R, M/R.
   $M/R_1 = \{\{x\}, \{y, z\}\}$
   $M/R_2 = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$
   $M/R_3 = \{\{x, y, z\}\}$

Výsledkem jsou tedy tři rozklady množiny M.

3.3.8

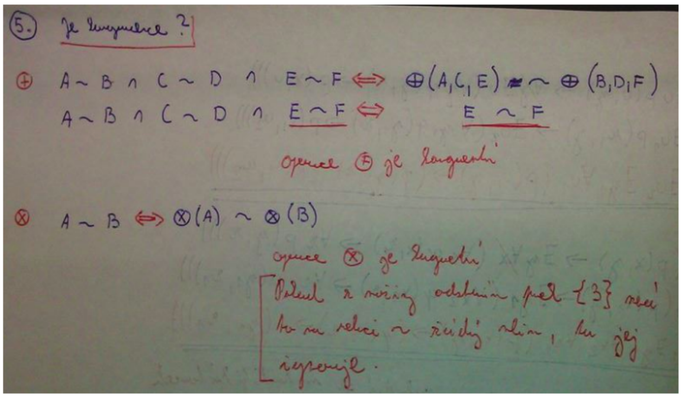
Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.3.9

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.3.10

T1: {∅},{3}
T2: {1}, {2}, {4}, {1,3}, {2,3}, {4,3}
T3: {1,2}, {1,4}, {2,4}, {1,2,3}, {1,4,3}, {2,4,3}
T4: {1,2,4}, {1,2,4,3}



Poznámka: V opoře je v definici relace kogruence pouze implikace, tzn.
a1~b1 and … an~bn => +a1...an ~ +b1...bn

6.8 Algebra - Zbytkové třídy

3.4.1

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.4.2

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

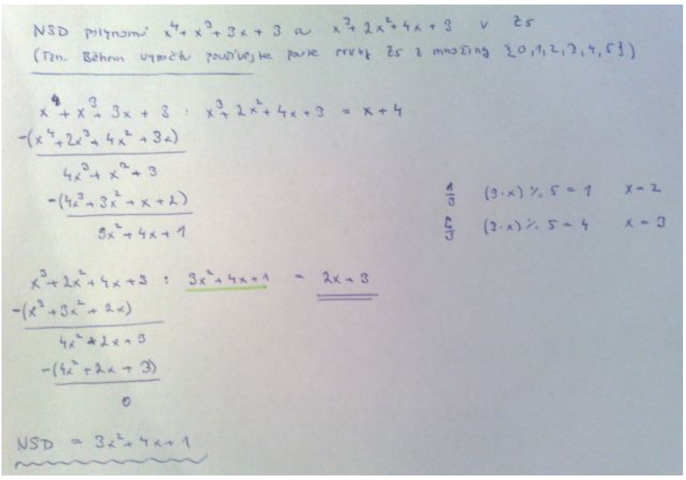
3.4.3

$\mathbb{Z}_7$:

$$\frac{4\cdot(3+5)}{6} - \frac{2}{3} = \frac{4\cdot 1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{4}{6} - \frac{2}{3} = 4\cdot\frac{1}{6} - 2\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= 4\cdot 6 - 2\cdot 5 = 3 - 3 = \underline{\underline{0}}$$

3.4.4



NSD polynomů $x^4 + x^3 + 3x + 3$ a $x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ v Z_5

(Tzn. Během výpočtu používejte pouze prvky Z_5 z množiny $\{0,1,2,3,4,5\}$)

$x^4 + x^3 + 3x + 3 : x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = x + 4$

$-(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x)$

$4x^3 + x^2 + 3$

$-(4x^3 + 3x^2 + x + 2)$

$3x^2 + 4x + 1$

$\frac{1}{3} \quad (3 \cdot x) \% 5 = 1 \quad x = 2$

$\frac{4}{3} \quad (3 \cdot x) \% 5 = 4 \quad x = 3$

$x^3 + 2x^2 + 4x + 3 : 3x^2 + 4x + 1 = 2x + 3$

$-(x^3 + 3x^2 + 2x)$

$4x^2 + 2x + 3$

$-(4x^2 + 2x + 3)$

0

NSD $= 3x^2 + 4x + 1$

3.4.5

Riesenie:

Zobereme postupne kazdy prvok a zacneme ho scitat zo sebou a prvkami, co uz vygeneroval

<0> = {0} .. nieje generator

<1> = {1, 2, 3, 4, 0} .. je generator

<2> = {2, 4, 1, 3, 0} .. je generator

<3> = {3, 1, 4, 2, 0} .. je generator

<4> = {4, 3, 2, 1, 0} .. je generator

3.4.6

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.4.7

```
NSD = Poslední nenulový zbytek = 2x + 1.

4x^3 + x^2 + 4 : x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 4
x^3 + 2x^2 + 4x + 1
--------------------
0 + 3x^2 + 4x + 0


x^3 + 2x^2 + 4x +1 : 3x^2 + 4x = 2x + 3
4x^3 + 2x^2 + 0 + 0
---------------------
0 + 4x^2 + 4x + 1
0 + x^2 + 3x + 0
--------------------
0 + 0 + 2x + 1


3x^2 +4x : 2x + 1 = 4x
2x^2 + x
------------
0 + 0
```

3.4.8

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.4.9

Řešení

- $18x - 1 = x + 1$
- $17x = 2$
- $[17x]_{41} = [2]_{41}$
- Kdy se bude $(17 \cdot x) \% 41 = 2$?
  - $41 = 17 \cdot 2 + 7$
  - $17 = 7 \cdot 2 + 3$
  - $7 = 3 \cdot 2 + 1$
  - $1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - ((17 - 7 \cdot 2) \cdot 2)$
  - $1 = 7 - 2 \cdot 17 + 4 \cdot 7 = -2 \cdot 17 + 5 \cdot 7$
  - $1 = -2 \cdot 17 + 5 \cdot (41 - 17 \cdot 2) = -2 \cdot 17 + 5 \cdot 41 - 17 \cdot 10$
  - $1 = -12 \cdot 17 + 41 \cdot 5$
    - $-12 + 41 = 29$
  - $2 = -24 \cdot 17 + 41 \cdot 10$
    - $-24 + 41 = 17$
- $x = 17$

3.4.10

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.4.11

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

3.4.12

$$3 \cdot 2(2-4)^{-1} + 5^3$$
$$3 + (-2 \cdot (2 + (-4))^{-1}) + 5 \cdot 5 \cdot 5$$
$$3 + (-2 \cdot (2+3)^{-1} + 5 \cdot 4$$
$$3 + (-2 \cdot (5)^{-1}) + 6$$
$$3 + (-2 \cdot 3) + 6$$
$$3 + (-6) + 6$$
$$3 + 1 + 6$$
$$4 + 6$$
$$3$$

$$(-4) + 4 \equiv 0$$
$$3 + 4 \equiv 0$$
$$5 \cdot (5^{-1}) = 1$$
$$5 \cdot a = (7_a) + 1$$
$$5 \cdot 3 = (2 \cdot 7) + 1$$
$$5^{-1} = 3$$

3.4.13

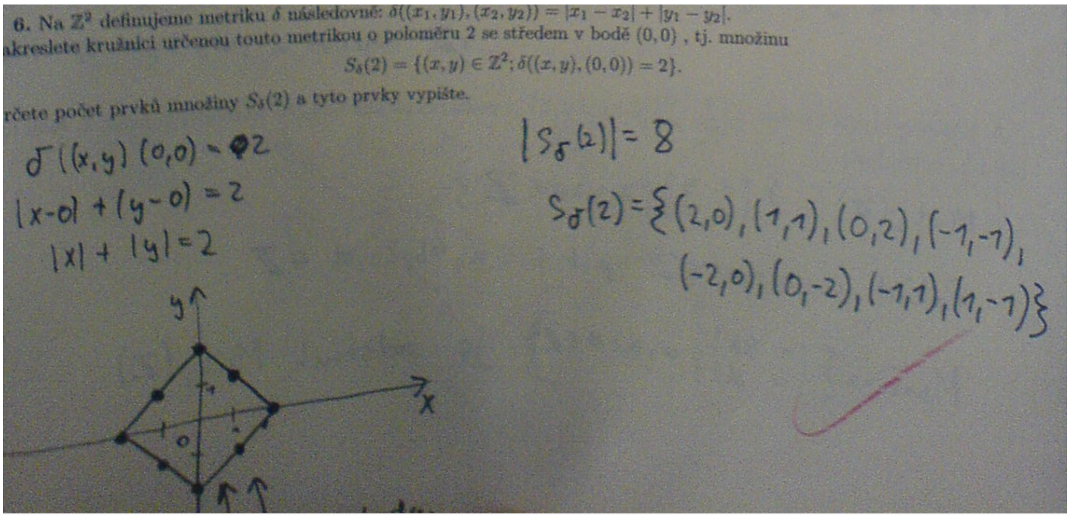
Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

6.9 Funkcionalni analýza - Metrické prostory

4.1.1

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

4.1.2



6. Na $\mathbb{Z}^2$ definujeme metriku δ následovně: $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.
akreslete kružnici určenou touto metrikou o poloměru 2 se středem v bodě $(0,0)$, tj. množinu

$$S_\delta(2) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2; \delta((x,y),(0,0)) = 2\}.$$

rčete počet prvků množiny $S_\delta(2)$ a tyto prvky vypište.

$\delta((x,y)(0,0)) = 2$

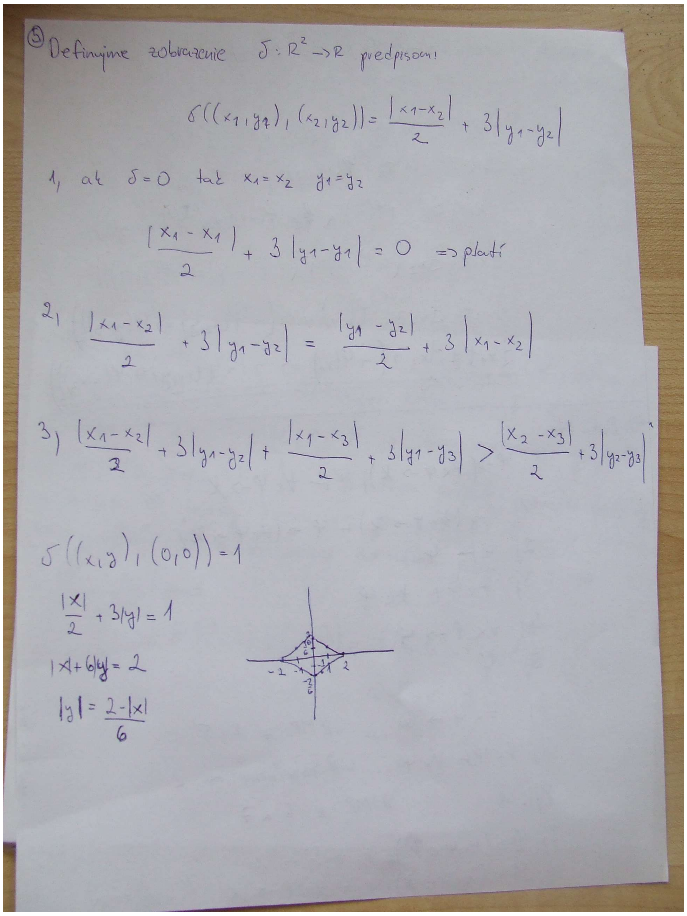
$|x-0| + (y-0) = 2$

$|x| + |y| = 2$

$|S_\delta(2)| = 8$

$S_\delta(2) = \{(2,0),(1,1),(0,2),(-1,-1),(-2,0),(0,-2),(-1,1),(1,-1)\}$

4.1.3



(5) Definujme zobrazenie $\delta : R^2 \to R$ predpisom

$$\delta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \frac{|x_1-x_2|}{2} + 3|y_1-y_2|$$

1, ak $\delta = 0$ tak $x_1 = x_2$ $y_1 = y_2$

$$\frac{|x_1 - x_1|}{2} + 3|y_1-y_1| = 0 \Rightarrow \text{platí}$$

2, $$\frac{|x_1-x_2|}{2} + 3|y_1-y_2| = \frac{|y_1-y_2|}{2} + 3|x_1-x_2|$$

3) $$\frac{|x_1-x_2|}{2} + 3|y_1-y_2| + \frac{|x_1-x_3|}{2} + 3|y_1-y_3| > \frac{|x_2-x_3|}{2} + 3|y_2-y_3|$$

$$\delta((x,y),(0,0)) = 1$$

$$\frac{|x|}{2} + 3|y| = 1$$

$$|x| + 6|y| = 2$$

$$|y| = \frac{2-|x|}{6}$$

4.1.4

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

4.1.5

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

4.1.6

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

4.1.7

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

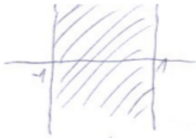
4.1.8

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

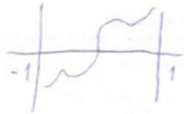
6.10 Funkcionalni analýza - Normované prostory

4.2.1

A⑧ lineárny prostor $C[-1,1]$

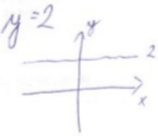


spojitá f-ce na intervalu $[-1,1]$



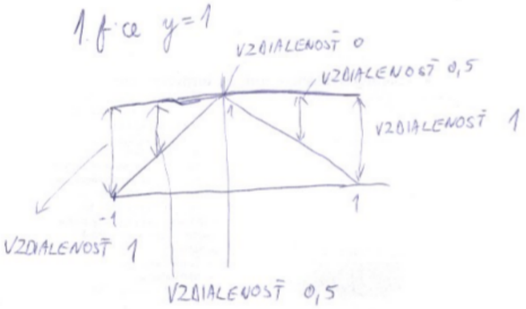
f-ce $1-|t|$

konš. f-ce $y=2$

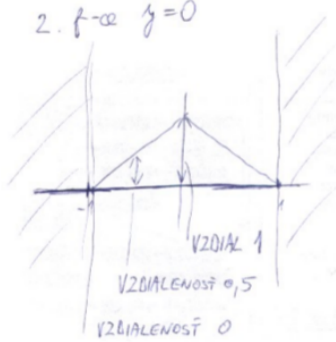


Hľadáme $\rho(g,h) = \max(|g(t) - h(t)|)$

1. f-ce $y=1$



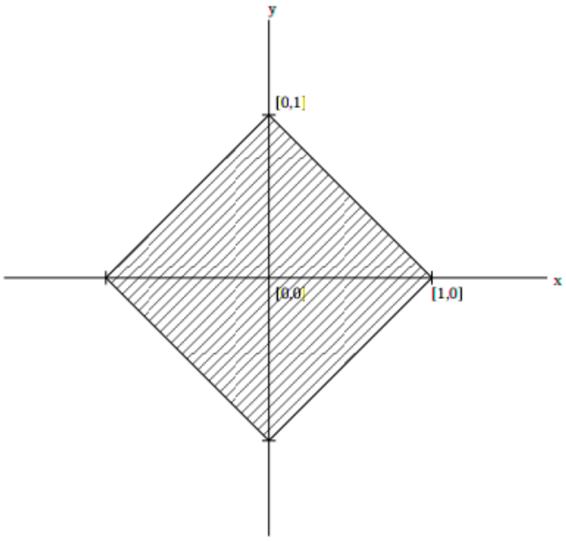
2. f-ce $y=0$



4.2.2

Řešení:
Tady je nejlehčí si obrazec nakreslit a pak zjistit obsah. Abychom mohli nakreslit obrazec, je třeba si představit, co daná metrika znamená. $\rho([x_0, x_1], [0, 0])$ znamená vzdálenost bodu $[x_0, x_1]$ od bodu $[0, 0]$ (počátek souřadnic). Ale pozor, nejedná se o klasickou vzdálenost, ale o vzdálenost indukovanou normou $||(x, y)|| = |x| + |y|$ (klasická norma v ploše je $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Tím, že se jedná o součet absolutních hodnot, stačí přemýšlet pouze o prvním kvadrantu, jelikož ostatní budou symetrické. Takže, kdy bude platit $\rho([x_0, x_1], [0, 0]) \leq 1$? Vztah lze převést na $|x| + |y| \leq 1$ (protože měříme od počátku, stačí uvažovat čistě jen normu). Když se zamyslíme, co znamená $|x| + |y|$, tak si lze představit, že při $x = 0$ je $y = 1$ a naopak. Dále je rovnice $|x| + |y|$ lineární, takže tyto body spojíme...



Z nákresu je vidět, že obsah čtverce je 2.

4.2.3

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

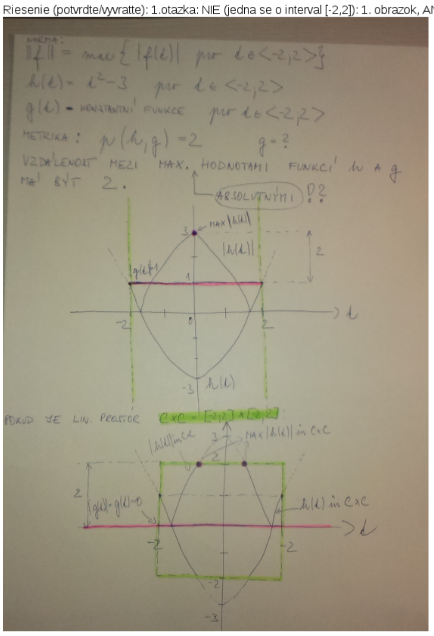
4.2.4

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

4.2.5

1. Otazka: Co znamena linearni prostor C=[-2,2]? Znamena to, ze ten prostor je dany ako C x C, akoze kartezsky soucin C?
2. Otazka: Ta funkce v tej norme je opravdu mezi || - je to tam absolutni hodnota?

Riesenie (potvrdte/vyvratte): 1.otazka: NIE (jedna se o interval [-2,2]): 1. obrazok, ANO: 2. obrazok; 2.otazke ANO (obidve obrazky)



6.11 Funkcionalni analýza - Unitární prostory

4.3.1

$f_1 = (1,2,-1)$ $\quad f_2 \cdot 3 = f_4$

$f_2 = (1,2,-3)$ $\quad f_1 + f_2 = (2,4,-4) \cdot 2 = f_3$ } lineárne závislé

~~$f_3 = (4,8,-8)$~~ $\quad \varphi_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1+4+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

~~$f_4 = (3,6,-9)$~~

$$d_2 = (f_2, \varphi_1) = \left((1,2,-3), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{8}{\sqrt{6}}$$

$$h_2 = f_2 - d_2 \cdot \varphi_1 = (1,2,-3) - \frac{8}{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = (1,2,-3) - \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \frac{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2}} = \frac{h_2}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{25}{9}}} = \frac{h_2}{\sqrt{\frac{30}{9}}} = \frac{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)}{\frac{\sqrt{30}}{3}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

myslím, že iba na zmätenie nepriateľa (vyšlo mi to rovnako).
Myslím, že skalární součin může být definován i jinak (Definice 9.1. Funkcionální analýza). Postupovalo by se asi stejně, akorát by se jinak počítal ten skalární součin.

4.3.2

f1=(2,-1,3); f2=(-1,2,-3); f3=(3,0,3); f4=(8,2,6)
f4 = f3 * 3 + f2
f3 = f2 + 2 * f1
Vyslo mi:
S1 = (2/sqrt(14), -1/(sqrt(14), 3/sqrt(14)))
S2 = (12/sqrt(378), 15/(sqrt(378), -3/sqrt(378)))
izomorfizmus
Prepocital som to s Gaussovou eliminaciou a vyslo mi toto:

$$f_1=(2;-1;3);\ f_2=(-1;2;-3);\ f_3=(3;0;3);\ f_4=(8;2;6)$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&-3\\3&0&3\\8&2&6\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}+\\ \\ /3\\ /2\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&-3\\1&0&1\\4&1&3\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ *4\\ -\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&-3\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}+\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-2\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ /2\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}-\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}=f_1\\=f_2\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{\underline{\varphi_1}}=\frac{h_1}{\|h_1\|}=\frac{f_1}{\|f_1\|}=\frac{(1;0;1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\underline{\underline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$$

$$(f_2;\varphi_1)=0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1\cdot 0+(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h_2=f_2-(f_2;\varphi_1)\cdot\varphi_1=(0;1;-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{\varphi_2}}=\frac{h_2}{\|h_2\|}=\frac{\left(\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}}=\frac{\left(\frac{1}{\cancel{2}};\frac{2}{\cancel{2}};-\frac{1}{\cancel{2}}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{\cancel{2}}}=\underline{\underline{\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}}$$

A nevadi tuto ze vysledky nie su rovnake, ked to robime s/bez Gaussovou eliminaciou?

4.3.3

Řešení

1. Nejpřímočařejším postupem je napsat si vektory jako řádky matice a provést Gaussovu eliminaci. Nenulové řádky pak tvoří bázi (el. transformace nemění lineární obal).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{gauss. elim.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{gauss. elim.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   $B_1 = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,0,1)\}$ není ortogonální, není ortonormání.
   $B_2 = \{(1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$ je ortogonální, není ortonormální.

2. Provedení ortonormalizace, vstupem je báze (tvořena linearně nezávislými vektory), která bude převedena na ortonormální bázi.

   Ortonormalizace např. pro B_2:
   $f_1 = (1,0,0,0)$, $f_2 = (0,1,1,0)$, $f_3 = (0,0,0,1)$
   $\varphi_1 = \frac{f_1}{|f_1|} = \frac{(1,0,0,0)}{\sqrt{1^2+0^2+0^2+0^2}} = \frac{(1,0,0,0)}{\sqrt{1^2}} = (1,0,0,0)$
   $h_{21} = (f_2, \varphi_1) = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$
   $h_2 = f_2 - h_{21}\cdot\varphi_1 = (0,1,1,0) - 0\cdot(1,0,0,0) = (0,1,1,0) - (0,0,0,0) = (0,1,1,0)$
   $\varphi_2 = \frac{h_2}{|h_2|} = \frac{(0,1,1,0)}{\sqrt{0^2+1^2+1^2+0^2}} = \frac{(0,1,1,0)}{\sqrt{2}} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
   $h_{31} = (f_3, \varphi_1) = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0$
   $h_{32} = (f_3, \varphi_2) = 0\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot 0 = 0$
   $h_3 = f_3 - h_{31}\cdot\varphi_1 - h_{32}\cdot\varphi_2 = (0,0,0,1) - 0\cdot(1,0,0,0) - 0\cdot(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0) = (0,0,0,1)$
   $\varphi_3 = \frac{h_3}{|h_3|} = \frac{(0,0,0,1)}{\sqrt{(0^2+0^2+0^2+1^2)}} = \frac{(0,0,0,1)}{\sqrt{(1^2)}} = (0,0,0,1)$

2

Výsledná ortonormální báze je $B = \{(1,0,0,0), (0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0), (0,0,0,1)\}$, prostor W je 3-dimenzionální .

4.3.4

$g_1 = v_1 = (1,1,1,1) \quad \|g_1\| = \sqrt{4} = 2$

$\mathrm{proj}_{g_1}(v_2) = \frac{(g_1, v_2)}{\|g_1\|^2} g_1 = \frac{((1,1,1,1);(0,1,0,1))}{4}(1,1,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$

$g_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{g_1}(v_2) = (0,1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) \equiv (-1,1,-1,1) \quad \|g_2\| = \sqrt{4} = 2$

$\mathrm{proj}_{g_1}(v_3) = \frac{(g_1, v_3)}{\|g_1\|^2} \cdot g_1 = \frac{((1,1,1,1);(1,-1,1,-1))}{4}(1,1,1,1) = 0$

$\mathrm{proj}_{g_2}(v_3) = \frac{(g_2, v_3)}{\|g_2\|^2} \cdot g_2 = \frac{(-1,1,-1,1),(1,-1,1,-1))}{4}(-1,1,-1,1) = -\frac{4}{4}(-1,1,-1,1) =$
$= (1,-1,1,-1)$

$g_3 = v_3 - \mathrm{proj}_{g_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{g_2}(v_3) = (1,-1,1,-1) - 0 - (1,-1,1,-1) = 0$

v_3 není lin. nezávislé od v_1, v_2 $\quad v_3 = v_1 - 2 \cdot v_2$

$v_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \qquad v_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} = \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$ - normalizace

$B = \{v_1, v_2\} = \{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)\}$ - ortonormální báze

$\langle B \rangle = V \qquad \dim V = |B| = 2$

prostor generovaný bází B

4.3.5

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

4.3.6

12
lin. závislé vektory: f3 = f1+f2, f4=2*f2 - f3
$\varphi_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{6}})$ (nějak blbne math zápis, ten symbol má být phi)
$d_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}$, $h_2 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$
$\varphi_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

6.12 Grafy - Nazelezeni grafu

5.1.1

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

5.1.2

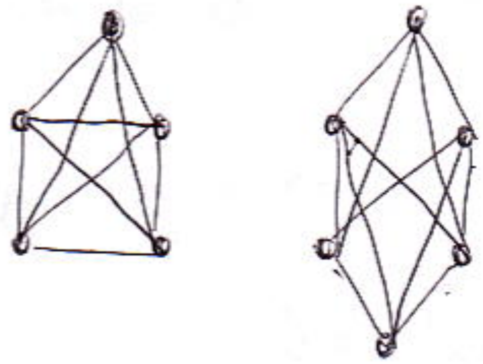
Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

5.1.3

$$11 \cdot \overset{4}{n} = 2 \cdot x$$

$$44 = 2 \cdot x$$

$$x = 22$$



5.1.4

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

5.1.5

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

5.1.6

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

5.1.7

Řešení:
Jestliže víme, že $n > 2$ a n není dělitelné číslem 4 ani číslem 5 a také $n \leq 13$ (máme 13 zemí), pak tedy $n \in \{3, 6, 7, 9, 11, 13\}$.
Sestrojme tedy graf $G = (U, H)$, kde uzly jsou státy a hrany jsou smlouvy. Pak platí $|U| = 13$, $\forall u \in U \ : \ deg(u) = n$.
Vyjděme ze známé podmínky pro obecné grafy $\sum_{u \in U} deg(u) = 2m$, kde $m = |H|$.
Z výše uvedeného vyplývá, že $\sum_{u \in U} deg(u)$ je sudé číslo. Také samozřejmě $\sum_{u \in U} deg(u) = 13n$ (všechny uzly mají stejný stupeň n).
Položme $13n = 2m$, tedy $13n$ je sudé.
Rovnice je splněna pouze pro $n = 6$ (nezapomeňtě, že $n \in \{3, 6, 7, 9, 11, 13\}$.

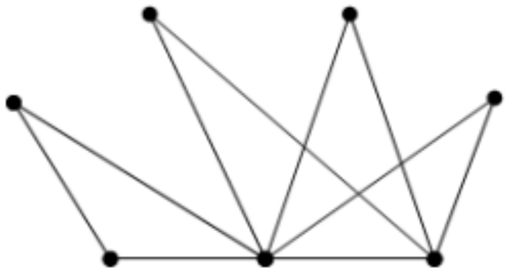
5.1.8

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

5.1.9

Řešení

$2|H| = 2 + 4 + 6 + 4n$
pro $n = 2 \Rightarrow |H| = 10$
Nejmenší počet hran grafu je 10.



5.1.10

Řešení
$2|H| = 9n$
pro $n = 6$ rovnice platí $32 > \frac{9 \cdot 6}{2}$
Stupeň uzlu vyšel 6, tedy odpoledne každý tým odehraje 4 zápasy.

5.1.11

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

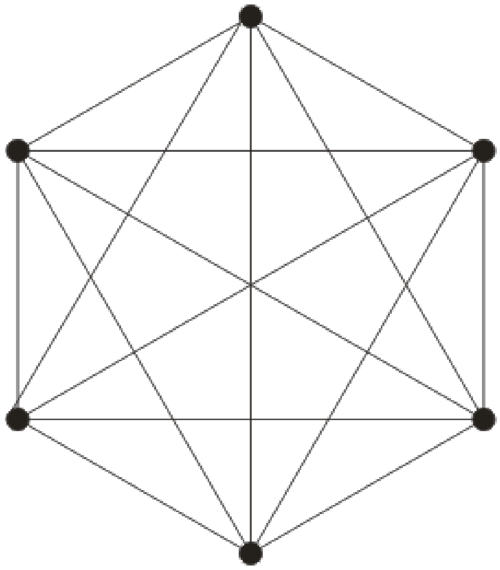
5.1.12

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

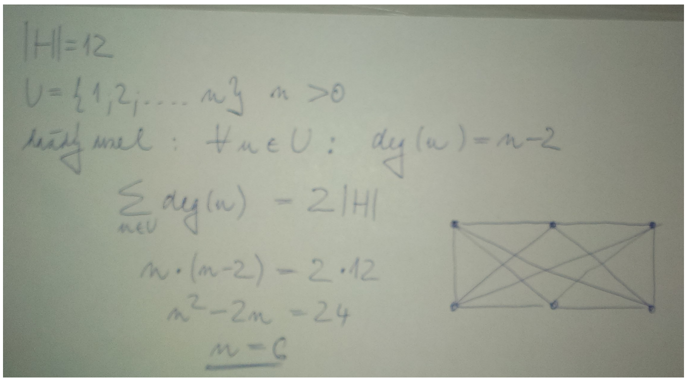
5.1.13

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

5.1.14



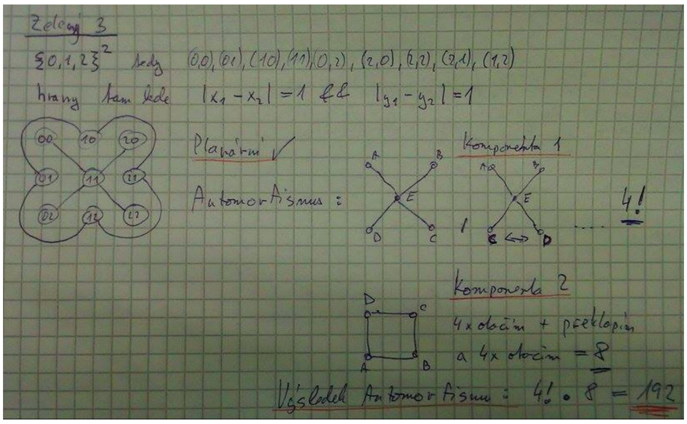
5.1.15



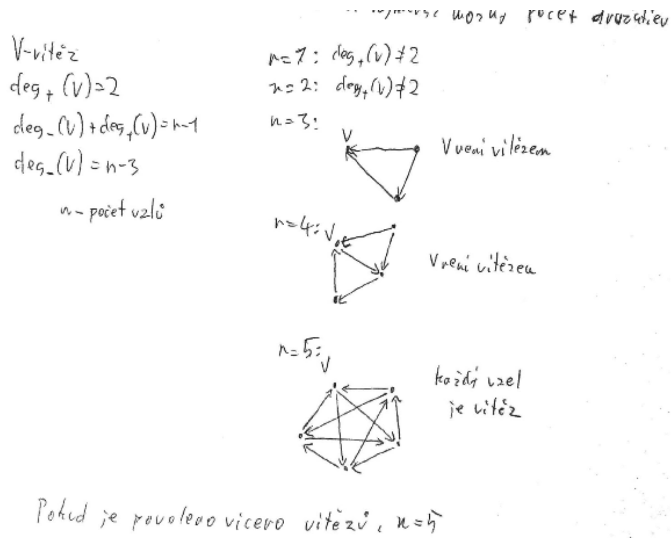
5.1.16

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

5.1.17



5.1.18



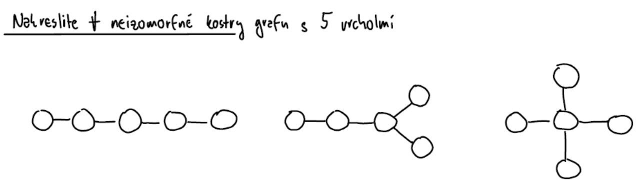
5.1.19

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

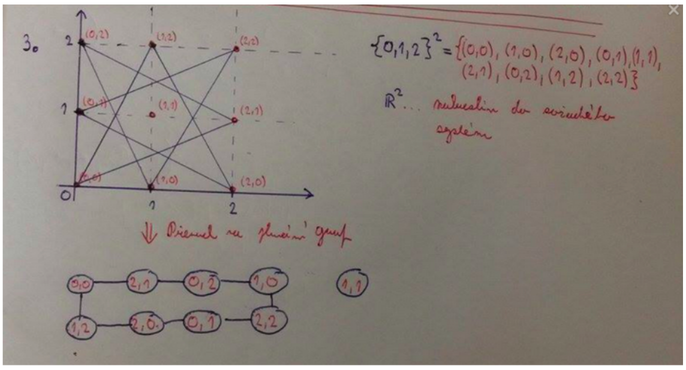
5.1.20

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

5.1.21



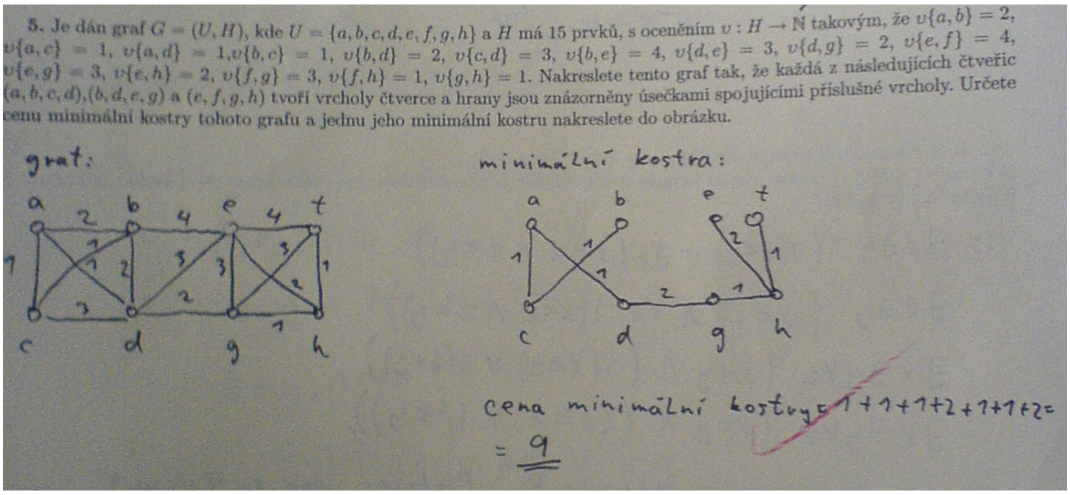
5.1.22



8 (všechny otočení kolem středu) x 2 (osově otočený) = 16 * druhá komponenta = 1 … tedy 16.

6.13 Grafy - Nazeteni minimální kostry

5.2.1



5. Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 15 prvků, s oceněním $v : H \to \mathbb{N}$ takovým, že $v\{a, b\} = 2$, $v\{a, c\} = 1$, $v\{a, d\} = 1$, $v\{b, c\} = 1$, $v\{b, d\} = 2$, $v\{c, d\} = 3$, $v\{b, e\} = 4$, $v\{d, e\} = 3$, $v\{d, g\} = 2$, $v\{e, f\} = 4$, $v\{e, g\} = 3$, $v\{e, h\} = 2$, $v\{f, g\} = 3$, $v\{f, h\} = 1$, $v\{g, h\} = 1$. Nakreslete tento graf tak, že každá z následujících čtveřic (a, b, c, d), (b, d, e, g) a (e, f, g, h) tvoří vrcholy čtverce a hrany jsou znázorněny úsečkami spojujícími příslušné vrcholy. Určete cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakreslete do obrázku.

5.2.2

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).

5.2.3

Vyřešil si tento příklad? Přidej ho sem (na githubu najdeš instrukce).