УДК 681.324

А.Э.Саак

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПОЛНОЙ ЗАГРУЗКИ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему, содержащую N параллельно действующих объектов, предназначенную для обслуживания наборов из L заявок. Каждая из заявок требует число параллельно действующих объектов R_i, $i = \overline{1, L}$, равновероятно распределенное в интервале

$$0 < R_i \le R \le N, \quad i = \overline{1, L}. \qquad (1)$$

Практический интерес представляет определение вероятности полной загрузки системы одновременно обслуживаемыми заявками. Выражение для полной загрузки системы имеет вид

$$\sum_{i=1}^{L} R_i = N. \qquad (2)$$

Таким образом, требуется определить вероятность выполнения равенства (2) при условии (1)

$$\sum_{i=1}^{L} R_i = N, \qquad 0 < R_i \le R \qquad i = \overline{1, L}. \qquad (3)$$

В [1] определена вероятность выполнения неравенства

$$\sum_{i=1}^{L} R_i \le N \qquad (4)$$

при условии (1)

$$\sum_{i=1}^{L} R_i \le N, \qquad 0 < R_i \le R, \qquad i = \overline{1, L}. \qquad (5)$$

С помощью геометрической интерпретации можно показать, что вероятность выполнения (5) есть отношение числа точек с целочисленными координатами, принадлежащих одновременно L-мерному кубу (1) и L-мерному тетраэдру (4), к числу точек с целочисленными координатами, принадлежащих L-мерному кубу (1). При L<<N и L<<R, а именно при таком со-

отношении предполагается использование системы, число целых точек может быть приближенно заменено мерой соответствующего тела.

Видим, что вероятность выполнения (3) есть отношение числа точек с целочисленными координатами, принадлежащих одновременно L-мерному кубу (1) и L-мерной гиперплоскости (2), к числу точек с целочисленными координатами, принадлежащих L-мерному кубу (1). Заменим приближенно число целых точек мерой соответствующих тел.

Меру сечения куба гиперплоскостью найдем аналогично тому, как в [1] определена мера усеченной части куба гиперплоскостью.

Рассмотрим основания приведенных в [1] тетраэдров. Для вычисления их меры воспользуемся формулой

$$V_j = \frac{1}{L} S_j h_j, \qquad (6)$$

где j — номер сечения, V_j — мера тетраэдра, S_j — мера основания, h_j — высота, и подобием возникающих в двойных, тройных и т.д. пересечениях тетраэдров и тетраэдра $\sum_{i=1}^{L} R_i \le N$. Из подобия имеем $\frac{h_j}{H} = \frac{N - jR}{N}$. Следовательно, $h_j = H\frac{N - jR}{N}$. Здесь H — расстояние от точки (0,0,...,0) до гиперплоскости $\sum_{i=1}^{L} R_i = N$. Приводя последнее уравнение к нормальному виду, получаем $H = \frac{N}{\sqrt{L}}$. Следовательно, $h_j = \frac{N - jR}{\sqrt{L}}$. Мера тетраэдров, получающихся в j-м пересечении, была равна [1]

$$V_j = \frac{(N - jR)^L}{L!} \qquad (7)$$

Из (6) и (7) находим меру основания $S_j = \frac{\sqrt{L}}{(L-1)!}(N - jR)^{L-1}$. Следовательно, искомая мера тела, получающегося в сечении куба (1) гиперплоскостью (2), равна

$$S = \frac{\sqrt{L}}{(L-1)!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{N}{R}\right]}(-1)^j C_L^j (N - jR)^{L-1} \tag{8}$$

Из (8), с учетом меры куба (1), равной R^L, следует, что вероятность выполнения (3) имеет вид

$$P = \frac{1}{R}\frac{\sqrt{L}}{(L-1)!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{N}{R}\right]}(-1)^j C_L^j \left(\frac{N}{R} - j\right)^{L-1}$$

Таким образом, определена вероятность полной загрузки системы. Отметим, что эта вероятность наряду с зависимостью от отношения N/R, обратно пропорциональна абсолютному значению R, что согласуется с качественными представлениями.

1. Сачков В.Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.:Наука, 1978.