Semilatice

Adrian Vrabie

October 28, 2014

1 Generalizarea Noțiunii de Latice: Semilatice

student: Adrian Vrabie

In [1]:
```
from IPython.display import YouTubeVideo
from IPython import display
from IPython.display import FileLink, FileLinks # allows
```

1.1 Introducere

Pentru a înțelege laticele, avem nevoie de noțiunea unui set. $A = \{"Bananna","Apple","Melon","Kiwi","Mango"\}$ este un set arbitrar format din 5 elemente, însă nimic nu putem spune dacă acestă mulțime este parțial ordonată.

1.2 Relație Binară

Ce este o relație binară "$\preceq$" sau se mai notează cu "$*$" ?

> O relație binară $(*)$ în mulțimea S este o funție (mapping) din $S \times S \mapsto S$

Sursa: Youtube Video

In [2]:
```
YouTubeVideo('gXxugQrrEgU?t=1m49s')
```

```
<IPython.lib.display.YouTubeVideo at 0x7febbce14710>
```

Out [2]:

Ce este o mulțime Parțial Ordonată?

Source: Wikipedia >In mathematics, especially order theory, a partially ordered set (or poset) formalizes and generalizes the intuitive concept of an ordering, sequencing, or arrangement of the elements of a set. A poset consists of a set together with a binary relation that indicates that, for certain pairs of elements in the set, one of the elements precedes the other. Such a relation is called a partial order to reflect the fact that not every pair of elements need be related: for some pairs, it may be that neither element precedes the other in the poset. Thus, partial orders generalize the more familiar total orders, in which every pair is related.Traducere: >O mulțime parțial ordonată (sau se mai numește și **un set parțial ordonat** (sau **poset**)) formalizează și generalizează conceptul intuitiv de secvențierea, sau ordonarea elementelor într-o mulțime. Un poset constă dintr-o mulțime împreună cu o relație binară care indică faptul că, pentru anumite perechi de elemente din mulțime, unul dintre elementele precede celălalt (adica se află înaintea lui). O astfel de relație se numește **parțial ordonată**!

Observăm că nu orice pereche de elemente numaidecât trebuie să aibă o legătură. Pentru unele perechi e posibil ca nici unul din ele să precedă pe celălalt în poset. Aceast fapt devine evident dacă examinăm un poset prin diagrama (*Hasse*) prezentată alaturat.

Ex: Un poset finit care descrie relația de ordine.

** Această definiție nu este chiar clară ** , așa că facem 2 pași înapoi și încercăm să definim relațiile de ordine pe un anumit set (mulțime).

1.3 Relațiile de Ordine

Acum că am definit o relație binară, putem defini și o Relație de Ordine.

Sursa Wikipedia: >O relație binară “$\preceq$” sau “$\mathcal{R}$” $\subseteq\ A \times A$ pe o mulțime A se numește ‘’**relație de ordine**” dacă îndeplinește următoarele proprietăți:

- **reflexivitate**: $\forall x \in A\,,\ x \preceq x$
- **antisimetrie**: $\forall x, y \in A$, dacă $x \preceq y$ și $y \preceq x$ atunci $x = y$
- **tranzitivitate**: $\forall x, y, z \in A$, dacă $x \preceq y$ și $y \preceq z$ atunci $x \preceq z$

În limba engleză, Schaum’s Outline of Abstract Algebra by L. Jaisingh and F. Ayres :

- A relation $\mathcal{R}$ on a set S is called **reflexive** if $a\mathcal{R}a$ for every $a \in S$.
- A relation $\mathcal{R}$ on a set S is called **symmetric** if whenever $a\mathcal{R}b$ then $b\mathcal{R}a$
- A relation $\mathcal{R}$ on a set S is called **antisymmetric** if $a\mathcal{R}b$ and $b\mathcal{R}a \implies a = b$
- A relation $\mathcal{R}$ on a set S is called **transitive** if whenever $a\mathcal{R}b$ and $b\mathcal{R}c$ then $a\mathcal{R}c$.

Observație: O relație de ordine nu este altceva decât o pre-ordine cu proprietatea antisimetrică.

Mai mult ca atât, dacă o relație parțial ordonată are proprietatea că orice două elemente sunt comparabile, atunci această relație se numește **relație de ordine totată (sau relație de ordine liniară)**.

1.4 Exemplu Mulțime Parțial Ordonată

O mulțime Parțial Ordonată $\mathcal{P}.\mathcal{O}.(D)$ este mulțimea $D = \{a|b = 0, a, b \in \mathbb{N}\}$ unde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, iar $a|b$ este relația de divizibilitate.

Demonstrația în video atașat.

```
In [3]: YouTubeVideo('SqPOlE57cX8')
```

```
Out [3]: <IPython.lib.display.YouTubeVideo at 0x7febbce14910>
```

Noțiuni de Majorant/Maximum/Supremum

Dacă M este o submulțime nevidă a lui A ($M \subseteq A$, $M \neq \emptyset$), un element $a \in A$ se numește:

- **majorant** al lui ‘’M’‘dacă $\forall b\ \in\ M\ ,\ b\ \preceq\ a$. O mulțime care are un majorant se numește’‘’majorată’‘ sau’‘’mărginită superior’’’.
- **minorant** al lui ‘’M’‘dacă $\forall b\ \in\ M\ ,\ a\ \preceq\ b$. O mulțime care are un minorant se numește’‘’minorată’‘ sau’‘’mărginită inferior’’’
- **maximul** lui M dacă este majorant al lui ‘’M’‘și aparține lui’‘M”. Dacă o mulțime are un maxim, acesta este unic.
- **minimul** lui ‘’M’‘dacă este minorant al lui’‘M’‘și aparține lui’‘M”. Dacă o mulțime are un minim, acesta este unic.
- **supremum-ul** sau ‘”marginea superioară’‘ a lui’‘M’‘dacă’‘a’‘este minimul mulțimii majoranților lui’‘M”.
- **infimum-ul** sau ‘”marginea inferioară’‘ a lui’‘M’‘dacă’‘a’‘este maximul mulțimii minoranților lui’‘M”.

Exemple de imfimum:

$\inf\{1,2,3\} = 1.$

$\inf\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} = 0.$

$\inf\{x \in \mathbb{Q} : x^3 > 2\} = \sqrt[3]{2}.$

$\inf\{(-1)^n + 1/n : n = 1, 2, 3, \dots\} = -1.$Aceeași definiție în limba engleză:

Definition of a **Partially Ordered Set**, source Schaum's Outline of Abstract Algebra by L. Jaisingh and F. Ayres >A set S will be said to be **partially ordered** (the possibility of a total ordering is not excluded) by a binary relation $\mathcal{R}$ if for arbitrary $a, b, c \in S$,

1. $\mathcal{R}$ is reflexive, i.e., $a\mathcal{R}a$;
2. $\mathcal{R}$ is anti-symmetric, i.e., $a\mathcal{R}b$ and $b\mathcal{R}a$ if and only if $a = b$;
3. $\mathcal{R}$ is transitive, i.e., $a\mathcal{R}b$ and $b\mathcal{R}c$ implies $a\mathcal{R}c$.

source Schaum's Outline of Abstract Algebra by L. Jaisingh and F. Ayres

> Let S be a partially ordered set with respect to $\mathcal{R}$. Then:

1. every subset of S is also partially ordered with respect to $\mathcal{R}$ while some subsets may be **totally ordered**.
2. the element $a \in S$ is called a **first element** of S if $a\mathcal{R}x$ for every $x \in S$.
3. the element $g \in S$ is called a **last element** of S if $x\mathcal{R}g$ for every $x \in S$.
4. the element $a \in S$ is called a **minimal element** of S if $x\mathcal{R}a$ implies $x = a$ for every $x \in S$.
5. the element $g \in S$ is called a **maximal element** of S if $g\mathcal{R}x$ implies $g = x$ for every $x \in S$.

Observation: The first (last) element of an ordered set, assuming there is one, is unique.

In [7]:
```
#Figure 2(a,b)
display.Image('Images/min_max.jpg')
```

Out [7]:

In imaginea de mai sus, Fig 2(a), $S = \{a, b, c, d\}$, multimea S are elementul minim, dar nu are maximum. In fig 2(b) $S = \{a, b, c, d, e\}$, S are maximum dar nu are minimum.

An ordered set S having the property that each of its non-empty subsets has a first element, is said to be ***well ordered***.

1.5 Operații Binare / Binary Operatioins

Definitions:

- A binary operation $\circ$ on a set S is called **commutative** whenever $x \circ y = y \circ x$ for all $x, y \in S$
- A binary operation $\circ$ on a set S is called **associative** whenever $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ for all $x, y, z \in S$:

1.6 Quasi-order Relation

Source: Discrete Mathematics by S Lipschutz and M Lipson

Suppose $\prec$ is a relation on a set S satisfying the following two properties:

1. (Irreflexive) For any a $\in$ A, we have a $\not\prec$ a.
2. (Transitive) If a $\prec$ b, and b $\prec$ c, then a $\prec$ c.

Then $\prec$ is called a quasi-order on S.

There is a close relationship between partial orders and quasi-orders. Specifically, if $\preceq$ is a partial order on a set S and we define a $\prec$ b to mean $a \preceq b$ but $a \neq b$, then $\prec$ is a quasi-order on S. Conversely, if $\prec$ is a quasi-order on a set S and we define $a \preceq b$ to mean $a \prec b$ or a = b, then $\preceq$ is a partial order on S.

In [ ]: