

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | | | | |
|  | | O Padeiro da Vila em Época Covid | | | | |  | |
|  |  | | | | | | |  |
|  | | | |  |  | | | |
|  | | | | A picture containing text  Description automatically generated |  | | | |
|  | | | | 16 / 04 / 2021  —  Conceção e Análise de Algoritmos  —  Bruno Rosendo  Domingos Santos  João Mesquita |  | | | |
|  | | |  | | |  | | |

# Índice

|  |  |
| --- | --- |
| [O Padeiro da Vila em Época Covid 1](#_Toc68887836)  [Índice 2](file:///C:\Users\monki\Desktop\FEUP\2ano\2semestre\cal\projeto\relatorio.docx#_Toc68887845)  [Descrição do Problema 2](file:///C:\Users\monki\Desktop\FEUP\2ano\2semestre\cal\projeto\relatorio.docx#_Toc68887846)  [1ª Fase: Minimizar o tempo do itinerário sem considerar hora de entrega e apenas uma carrinha de capacidade ilimitada 2](#_Toc68887847)  [2ª Fase: Entrega considerando a hora preferencial, equilibrando o tempo de atraso, com uma carrinha de capacidade ilimitada 2](#_Toc68887848)  [3ª Fase: Entrega com múltiplas carrinhas de capacidade limitada 2](#_Toc68887849)  [Formalização do Problema 2](file:///C:\Users\monki\Desktop\FEUP\2ano\2semestre\cal\projeto\relatorio.docx#_Toc68887850)  [Dados de Entrada 2](#_Toc68887851)  [Dados de Saída 2](#_Toc68887852)  [Restrições 2](#_Toc68887853)  [Aos dados de entrada: 2](#_Toc68887854)  [Aos dados de saída: 2](#_Toc68887855)  [Funções Objetivo 2](#_Toc68887856)  [Perspetiva de Solução 2](file:///C:\Users\monki\Desktop\FEUP\2ano\2semestre\cal\projeto\relatorio.docx#_Toc68887857)  [Pré-Processamento dos Dados de Entrada 2](#_Toc68887858)  [Tratamento do grafo 2](#_Toc68887859)  [Tratamento dos Clientes 2](#_Toc68887860)  [Tratamento dos Percursos 2](#_Toc68887861)  [Identificação dos problemas encontrados 2](#_Toc68887862)  [Percurso de duração mínima entre dois pontos 2](#_Toc68887863)  [Percurso de duração mínima entre todos os pares de pontos 2](#_Toc68887864)  [Execução repetida do Algoritmo de Dijkstra 2](#_Toc68887865)  [Algoritmo de Floyd-Warshall 2](#_Toc68887866)  [Algoritmos considerados para a 1ª Fase 2](#_Toc68887867)  [Soluções Aproximadas 2](#_Toc68887868)  [Soluções Exatas 2](#_Toc68887869)  [Integração da hora de entrega do pão (2ª Fase) 2](#_Toc68887870)  [Utilização de múltiplas carrinhas com capacidade limitada (3ª Fase) 2](#_Toc68887871)  [Análise da conectividade 2](#_Toc68887872)  [Algoritmo de Kosaraju 2](#_Toc68887873)  [Algoritmo de Tarjan 2](#_Toc68887874)  [Casos de Utilização 2](file:///C:\Users\monki\Desktop\FEUP\2ano\2semestre\cal\projeto\relatorio.docx#_Toc68887875)  [Conclusão 2](file:///C:\Users\monki\Desktop\FEUP\2ano\2semestre\cal\projeto\relatorio.docx#_Toc68887876)  [Contribuição 2](file:///C:\Users\monki\Desktop\FEUP\2ano\2semestre\cal\projeto\relatorio.docx#_Toc68887877)  [Bibliografia 2](file:///C:\Users\monki\Desktop\FEUP\2ano\2semestre\cal\projeto\relatorio.docx#_Toc68887878) Descrição do Problema O trabalho incide numa distribuição de pães, começando na padaria e passando pela casa de todos os clientes que aderiram. Por fim, teremos ainda de voltar à padaria.  Cada cliente indica a hora preferencial para a sua entrega, tendo uma margem de tolerância definida (antes e depois da hora). Quando o padeiro chega a uma habitação, demora uma quantidade de tempo definida a efetuar a entrega.  A solução ótima é uma rota a seguir, minimizando o tempo total do itinerário e equilibrando o tempo de atraso nas entregas. Para simplificar o problema, dividimo-lo em diversas fases: 1ª Fase: Minimizar o tempo do itinerário sem considerar hora de entrega e apenas uma carrinha de capacidade ilimitada Numa primeira fase, despreza-se a hora preferível dos clientes e as entregas são todas feitas por uma única carrinha de capacidade ilimitada. Assim, o problema resume-se a encontrar o trajeto mais curto (neste caso, o menos demorado) que começa na padaria (vértice inicial), passa por todas as moradas dos clientes e volta à padaria. | |
|  | É importante notar que as entregas só conseguem ser efetuadas se existir pelo menos um caminho que liga as moradas de todos os clientes e a padaria (tanto de ida como de volta), ou seja, todos os vértices de entrega devem fazer parte do mesmo componente fortemente conexo. Assim, é necessário avaliar a conetividade do grafo subjacente à zona considerada, com o fim de identificar moradas com pouca acessibilidade, cujas estradas podem ter sido obstruídas por imprevistos como obras públicas (se alguma morada não fizer parte deste componente, a entrega a esse cliente será cancelada). 2ª Fase: Entrega considerando a hora preferencial, equilibrando o tempo de atraso, com uma carrinha de capacidade ilimitada Numa segunda fase, ter-se-á em consideração a ordem de entrega aos clientes, de modo a satisfazer a hora preferencial deles.  Como consequência desta nova restrição, teremos que minimizar dois parâmetros: o tempo total do itinerário e o tempo de atraso das entregas, sendo que se dará prioridade ao último critério, para que os clientes não tenham de esperar mais do que precisam. 3ª Fase: Entrega com múltiplas carrinhas de capacidade limitada Numa última fase, passa-se a considerar múltiplas carrinhas com capacidade limitada, ou seja, cada cliente pede X pães e cada carrinha entrega Y pães, sendo que o objetivo é minimizar o número de carrinhas utilizadas. Assim sendo, no início do algoritmo, cada carrinha será alocada aos seus respetivos clientes.  Com esta adição, temos três critérios de minimização, sendo eles, por ordem decrescente de prioridade: número de carrinhas alocadas, tempo de atraso das entregas e tempo total do itinerário.  Além disso, como cada carrinha tem um condutor diferente, o tempo entrega de cada um também poderá ser diferente. Formalização do ProblemaDados de Entrada Ci- Sequência de carrinhas na padaria, sendo Ci(i) o seu i-ésimo elemento. Cada um é caracterizado por:   * Q- quantidade total de pães que a carrinha consegue transportar (infinito nas 1ª e 2ª fases) * T- tempo que o condutor demora a fazer a entrega   Gi = (Vi, Ei) – Grafo pesado (dirigido ou não), composto por:   * V- vértices, representando pontos da rede rodoviária, com:   + ID- identificador do vértice   + Adj ⊆ E, arestas que partem do vértice   + Lat- latitude real do ponto no mapa   + Long- longitude real do ponto no mapa * E- arestas, representando estradas da rede rodoviária, com:   + ID- identificador da aresta   + W- Peso da aresta, que no contexto do projeto representa o tempo aproximado que se demora a percorrer a aresta   + Dest ∈ V- destino da aresta   Ui- Sequência de clientes da padaria, sendo Ui(i) o seu i-ésimo elemento. Cada um é caracterizado por:   * Name- nome do cliente * ID- identificador do cliente * Addr- morada do cliente (deve pertencer aos vértices do grafo) * H- hora da entrega * Q- quantidade de pães na encomenda   S ∈ Vi - vértice da padaria (inicial)  Ra – Raio de ação dos veículos (centro na padaria)  Upper- Tolerância de atraso nas entregas  Lower- Tolerância de adiantamento nas entregas Dados de Saída Gf = (Vf, Ef) – grafo pesado (dirigido ou não), tendo Vf e Ef os mesmos atributos que Vi e Ef (à excessão de atributos utilizados pelos algoritmos).  Cf- Sequência de carrinhas com a informação das entregas realizadas, sendo Cf(i) o seu i-ésimo elemento. Cada carrinha é composta por:   * Qf- quantidade final de pães (sobras) * Qe- quantidade entregue de pães * T- Tempo total do itinerário * Ta- Tempo total de atraso nas encomendas * Uf (u ∈ Ui | 1 <= j <= |Uf|) - sequência de clientes a quem a carrinha realizou entregas, sendo Uf(i) o seu i-ésimo elemento. Cada cliente é caracterizado por:   + Name- nome do cliente   + Addr- morada do cliente   + Ht- hora marcada para a encomenda   + Hp- hora real da encomenda * I (i ∈ Ei | 1 <= j <= |I|) – sequência de arestas a percorrer no itinerário, sendo P(j) o seu j-ésimo elemento.  RestriçõesAos dados de entrada:  * ∀ e ∈ Ei, w(e) > 0, visto que w representa o tempo necessário para percorrer uma aresta. * Ra > 0, visto este valor representar a zona de entregas. * S ∈ Vi, visto que a padaria tem que pertencer ao grafo. * Upper > 0 e Lower > 0, visto que é virtualmente impossível chegar a todos os locais no instante exato que foi marcado. * ∀ c ∈ Ci, Q(c) > 0 e T(c) > 0, visto que não faz sentido usar uma carrinha que não tem pães para entregar e essas entregas não podem ser instantâneas. * ∀ u ∈ Ui, Q(u) > 0, visto que não faz sentido haver encomendas em que não se entregam pães.   Nota: Não é obrigatório a morada do cliente fazer parte do grafo e da zona de entrega, mas, se tal acontecer, essas encomendas serão canceladas. O mesmo acontece com moradas fora da mesma componente fortemente conexa do grafo. Aos dados de saída:  * |Cf|<=|Ci|, visto que pode não ser preciso usar todas as carrinhas. * ∀ vf ∈ Vf, ∃ vi ∈ Vi tal que vi e vf têm os mesmos atributos (à exceção de atributos utilizados pelos algoritmos). * ∀ ef ∈ Ef, ∃ ei ∈ Ei tal que ei e ef têm os mesmos atributos (à exceção de atributos utilizados pelos algoritmos). * ∀ cf ∈ Cf,   + Qe(cf) > 0   + T(cf) > 0   + Ta(cf) >= 0   + ∃ ci ∈ Ci tal que Q(ci) = Qf(cf) + Qe(cf)   + ¬ ∃ c2 ∈ Cf tal que cf = c2   + ∀ i ∈ [1, |Uf|-1], Hp(Uf[i]) < Hp(Uf[i+1]) * ∀ uf ∈ Uf,   + ∃ ui ∈ Ui tal que name(uf)=name(ui), addr(uf)=addr(ui) e Ht(uf)=H(ui) * Seja e1 o primeiro elemento de I, é necessário que e1 ∈ adj(S), pois cada carrinha parte da padaria. * Seja ef o último elemento de I, é necessário que dest(ef)=S, pois cada carrinha regressa à padaria.  Funções Objetivo A solução ótima do problema passa por minimizar o número de carrinhas usadas, o tempo de atraso das entregas e o tempo total do itinerário. Logo, é necessário minimizar as seguintes funções:  f = |Cf|  g = ∑c ∈ Cf Ta(c)  h = ∑c ∈ Cf T(c)  Tal como foi dito na descrição do problema, dar-se-á prioridade às funções na ordem f->g->h. | |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  | |
|  |  | | | | |  |

Demonstram-se de seguida os principais obstáculos encontrados ao longo das diferentes etapas e as suas respetivas soluções. Serão identificadas as técnicas de conceção e os algoritmos a serem desenvolvidos.

# Perspetiva de Solução

## Pré-Processamento dos Dados de Entrada

### Tratamento do grafo

De modo a melhorar a eficiência temporal dos algoritmos que serão aplicados posteriormente, o grafo G deve ser pré-processado, reduzindo o seu número de vértices e arestas.

Inicialmente, devem ser eliminadas as arestas do grafo que se encontrem inacessíveis, devido a fatores externos, tal como vértices inacessíveis ou demasiado afastados do inicial, ou seja, num raio (Ra) à volta deste (simplificando).

Após a primeira filtragem, será necessário remover os vértices que não pertencem ao mesmo componente fortemente conexo do grafo onde a padaria (vértice inicial) se encontra. Este segundo fator de eliminação resulta da natureza circular do trajeto, dado que as carrinhas regressam à sua origem, após a finalização das entregas.

Assim, é possível aumentar significativamente a eficiência temporal dos algoritmos que serão aplicados de seguida, garantindo que o grafo não terá vértices nem arestas que não podem ser percorridos pelas carrinhas.

### Tratamento dos Clientes

Inicialmente, a sequência de clientes C deve ser percorrida à procura de clientes cuja morada não pertença ao grafo G. Nos casos em que isto acontece, o respetivo cliente deve ser removido, dada a impossibilidade de efetuar a entrega. Durante esta iteração, será calculado o intervalo de tempo segundo o qual a empresa deverá efetuar a entrega para cada cliente (hora mínima e máxima).

### 

### Tratamento dos Percursos

Foi analisada a opção de pré-calcular o caminho mais curto entre todos os pares de vértices do grafo processado, utilizando o algoritmo de **Dijkstra** para cada vértice ou o algoritmo de **Floyd-Warshall**.

A utilização de um destes métodos permitiria aumentar a eficiência do restante programa, já que não seria necessário calcular o peso mínimo entre os vários pontos em cada novo percurso. No entanto, esta alternativa provou-se demasiado exigente a nível computacional, visto que calcula a distância entre todos os pares de vértices e não apenas os necessários.

Por esta razão, foi decidida a não utilização desta técnica.

## Identificação dos problemas encontrados

Na primeira fase, com uma única carrinha e sem restringir a ordem de entrega pela hora das encomendas, o problema inerente é o de passar por todos os pontos de interesse e regressar à partida, gastando o menor tempo possível, assemelhando-se vivamente ao problema *NP-hard* chamado ***Travelling Salesman Problem (TSP).***

Numa segunda fase, adiciona-se a restrição da hora de entrega preferível pelos clientes, pelo que terão de ser concebidos novos algoritmos que consigam ter este detalhe em atenção.

Passando para uma frota de carrinhas, na última fase do projeto, o algoritmo deve conseguir decidir o número de carrinhas a usar e a alocação ótima delas aos clientes, de modo a minimizar a função objetivo. Assim sendo, o problema tem parecenças com o ***Vehicle Routing Problem***, uma generalização do TSP, que tínhamos nos pontos anteriores.

## Percurso de duração mínima entre dois pontos

Primeiramente, é preponderante apresentar soluções para o problema base deste projeto, isto é, obter o caminho mais curto (de peso total mínimo) entre dois pontos do grafo.

Para tal, sugere-se a utilização do algoritmo de **Dijkstra**, devido à sua facilidade de implementação e à sua eficiência temporal, com uma complexidade de Θ ((|V| + |E|) log(|V|)). Para além disso, é possível otimizá-lo, fazendo-o parar quando alcança o vértice de destino.

Contudo, este algoritmo ganancioso efetua a sua procura num círculo que se vai expandindo em torno da origem e, consequentemente, se os dois vértices não estiverem próximos, o método pode tornar-se altamente ineficiente devido à quantidade crescente de vértices inúteis a serem explorados.

De modo a melhorar a sua eficiência temporal, será tida em conta a possibilidade de utilizar o algoritmo **Bidirectional Dijkstra**, uma vez que executa o algoritmo previamente descrito nos dois sentidos, ou seja, de s (origem) para t (destino) e de t para s, alternando entre um e outro e terminando a iteração atual quando se vai processar um vértice que já foi processado na outra direção. Por fim, basta manter a distância do caminho mais curto encontrado até ao momento e verificar se ainda é possível ser melhorado através de outra iteração.

Este último método enunciado processa uma área de 2πr2, em vez de 4πr2 na pesquisa unidirecional (ganho ~ 2x), tal como podemos observar nas imagens apresentadas de seguida:

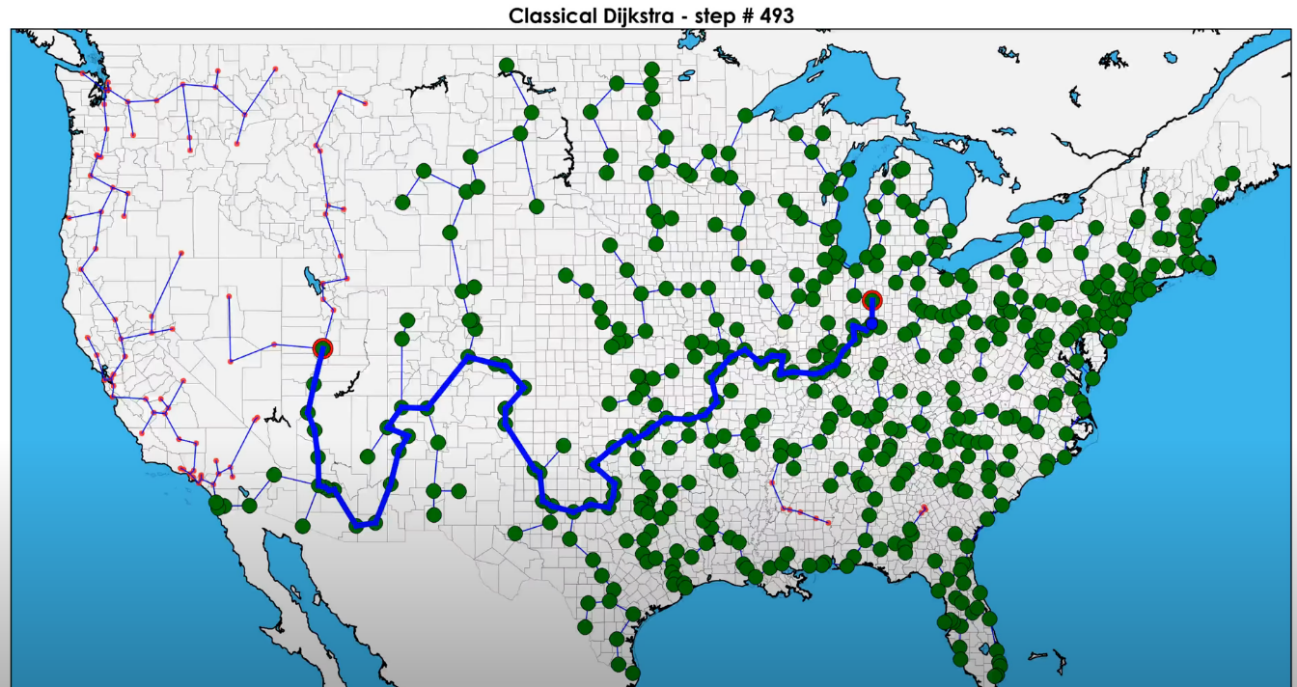


Figura 1 - Pesquisa com Algoritmo de Dijkstra Unidirecional

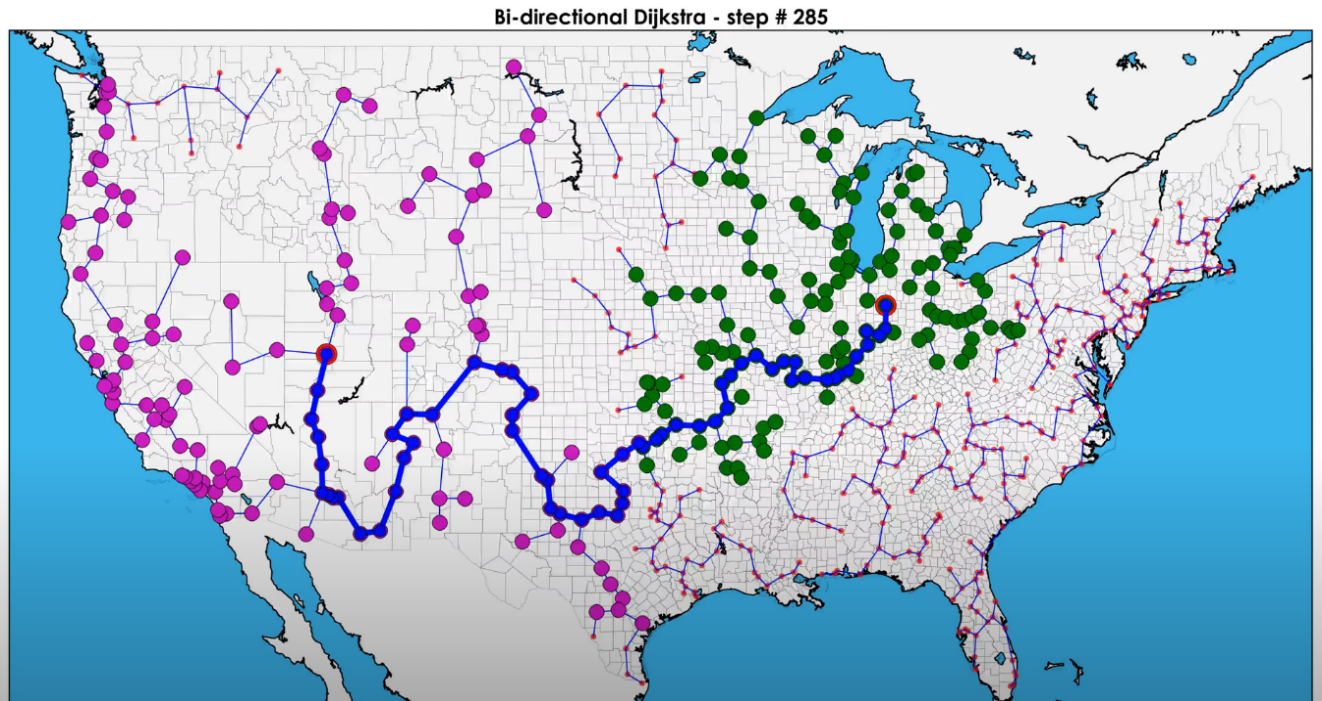


Figura 2 - Pesquisa com algoritmo de Dijkstra Bidirecional

## Percurso de duração mínima entre todos os pares de pontos

Como já foi referido na fase de pré-processamento, surgiu a hipótese de pré-calcular os percursos de duração mínima entre todos os pares de vértices.

Embora não tenham sido utilizadas, as duas abordagens foram analisadas:

### Execução repetida do Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra, como já foi previamente referido, executa com uma complexidade temporal de Θ ((|V|+|E|) log|V|). Consequentemente, visto ser necessário executar este algoritmo para todos os vértices, esta abordagem executa com uma complexidade temporal de Θ (|V| (|V|+|E|) log|V|) e é recomendada a sua utilização em grafos esparsos (|V| ~ |E|), como é normalmente o caso das redes viárias.

Finalmente, a complexidade desta alternativa será Θ (|V|2 log(|V|)), sendo mais eficiente do que o algoritmo que será mencionado de seguida.

### Algoritmo de Floyd-Warshall

Este algoritmo baseado em programação dinâmica, prova ser superior ao anterior se o grafo for denso (|E| ~ |V|2). Adicionalmente, outro fator a seu favor é simplicidade do seu código e utiliza uma matriz de adjacências com pesos. Por fim, o algoritmo retorna uma matriz de distâncias mínimas e uma matriz de predecessores, que permite determinar os vértices que pertencem ao caminho mais curto entre dois pontos.

A sua complexidade temporal é (Θ (|V|3)), pelo que, relativamente aos outros métodos possíveis, é preferível em situações de grafos densos.

## Algoritmos considerados para a 1ª Fase

Como este problema se assemelha ao TSP, existem vários algoritmos que procuram alcançar soluções para este problema. Assim, existem soluções exatas de elevada complexidade temporal e, por outro lado, soluções mais eficientes, que alcançam resultados aproximados.

### Soluções Aproximadas

O **nearest neighbour (NN)** é um algoritmo heurístico, que fornece uma solução razoavelmente eficiente, mas que não é a mais próxima da ótima (em média, possui um desvio de 25%). Este algoritmo, de natureza gananciosa, começa escolhendo um vértice aleatório e, repetidamente, visitando o vértice mais próximo que ainda não foi visitado, até ter percorrido todos os nós, tendo uma complexidade temporal de O(n2), no pior caso.

Observe-se que, neste caso de estudo, o vértice inicial será sempre a padaria, o que remove a aleatoriedade associada a este passo.

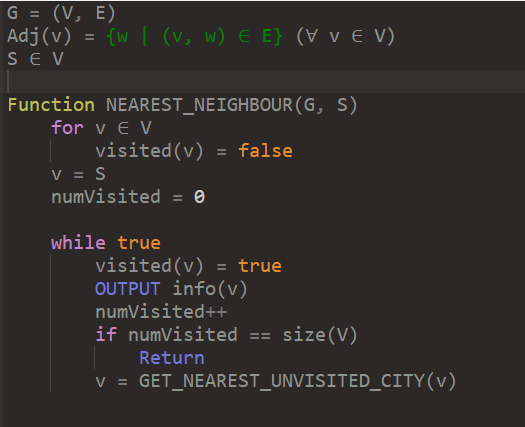


Figura 3 - Pseudocódigo para o algoritmo Nearest Neighbour

O **Bitonic tour** **(BT)** é um algoritmo baseado em programação dinâmica que calcula a cadeia poligonal fechada, de perímetro mínimo, que inclui todos os vértices de um grafo. Este poderá ser aplicado nos vértices de interesse, resolvendo o problema desta fase. As implementações deste algoritmo também têm, usualmente, complexidade temporal de O(n2), embora sejam conhecidas algumas com O (n log2 n).

### 

### Soluções Exatas

O algoritmo **naïve** (*brute force*) consistiria em calcular todas as permutações entre vértices do grafo, escolhendo a solução que possui o caminho mais curto. No entanto, possui uma complexidade de O (n!).

O algoritmo **Held-Karp** é outra solução possível, baseada em programação dinâmica, com complexidade O (n2 2n).

Desta forma, se for pretendida uma solução ótima para este problema, será tido em conta o número de vértices (N) a analisar no caso em questão, dado que para N < 8 a técnica de *brute force* apresentará um tempo menor de execução, relativamente ao segundo método apresentado. Consequentemente, para N ≥ 8, o Held-Karp revela-se superior.

## Integração da hora de entrega do pão (2ª Fase)

Como se pretende minimizar o tempo de atraso das entregas para além do tempo de viagem total, foi necessário encontrar novos algoritmos que tomam isto em consideração. Devido a caminhos mais curtos e horas de entrega diferentes, é agora possível passar pelo vértice de um cliente mais do que uma vez (embora se faça uma única entrega).

Em relação a uma solução exata, poderia ser usada **força bruta**, tal como para a 1ª fase, calculando os tempos de viagem e atraso para todas as ordens possíveis de clientes. Estes tempos poderiam ser calculados previamente (para tentar melhorar ligeiramente o tempo de execução), usando, para tal, um algoritmo de cálculo do percurso de duração mínima entre todos os pontos, que foram expostos previamente. Mesmo assim, este algoritmo teria uma complexidade temporal fatorial, o que não é viável.

A primeira possibilidade de solução heurística, que se torna apeladora pela sua simplicidade de implementação, é a de **ordenar** todos as encomendas pelas suas horas de preferência e, por essa ordem, descobrir, dois a dois, o tempo mínimo de viagem entre as casas dos clientes, usando um algoritmo de cálculo do percurso mínimo entre dois pontos, como o de **Dijsktra**, o que nos daria uma solução aproximada. No entanto, devido à sua natureza gananciosa, que só tenta minimizar o tempo de atraso da próxima entrega, o erro (comparando à solução ótima) deste método pode crescer significativamente de acordo com o caso em questão (por exemplo, imaginemos um caso onde a casa de um cliente que pediu uma encomenda às 9:10 fica no trajeto da casa de um cliente que pediu para as 9:00. Se forem já 9:05, é provavelmente melhor parar na casa do primeiro cliente antes do segundo em vez de repetir o caminho de volta, embora a hora dele seja mais tarde).

Para combater este problema, foram consideradas otimizações a aplicar ao algoritmo. Uma delas foi a seguinte condição:

* Se, a caminho da casa de um cliente, passarmos pela casa de um outro cliente cuja hora de preferência é mais tardia, mas a hora atual está dentro da margem de entrega, então realiza-se essa entrega.

Foi também estudada a possibilidade de escalar esta condição a vértices próximos dos que estamos a percorrer, tal como outras possíveis otimizações.

Este algoritmo tem a mesma complexidade temporal que o algoritmo usado para calcular a distância entre os vértices, visto ser a ação mais dispendiosa.

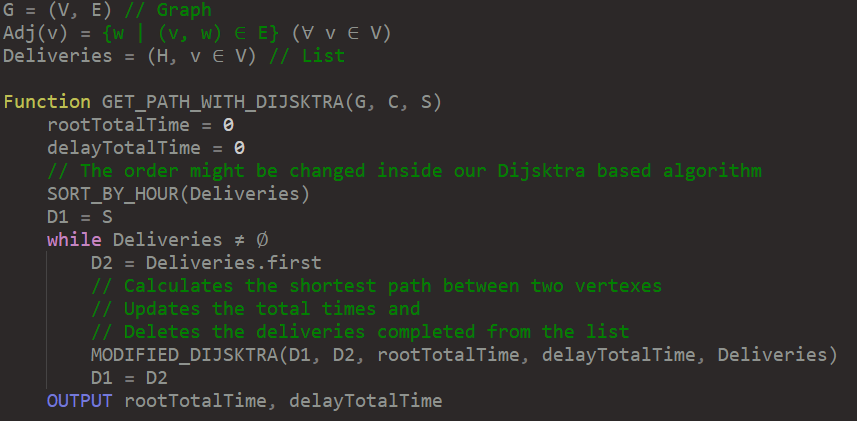


Figura 4 - Pseudocódigo do algoritmo para visita ordenada a clientes, usando Dijsktra

Outra técnica que foi considerada, embora mais complexa e com uma implementação mais trabalhosa, foi uma aplicação de *General Variable Neighborhood Search (GVNS)*, que se divide em duas fases: uma fase construtiva, que resulta numa solução possível, mas não necessariamente perto da ótima e uma fase de otimização, que pega na solução anterior e tenta melhorá-la o máximo que conseguir.

Para a fase construtiva, poderíamos reutilizar uma solução da 1ª fase ou, para tentar diminuir a complexidade temporal, gerar uma solução aleatória e melhorá-la até termos uma solução prática (de forma semelhante à segunda fase). Em relação à fase de otimização, a ideia será fazer mudanças aleatórias ligeiras, calcular o resultado da nova solução e comparando-a à antiga e atualizando-a, caso tenhamos obtido um resultado melhor.

De seguida, é possível analisar pseudocódigo que tenta explicitar este algoritmo, que terá de ser adaptado para o projeto, retirado do artigo *“A General VNS heuristic for the traveling salesman problem with time windows”* (ver bibliografia):

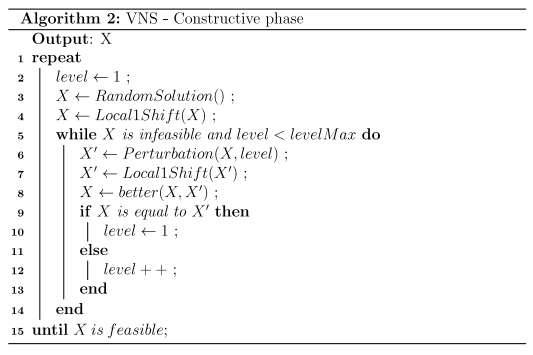


Figura 5 - Fase construtiva

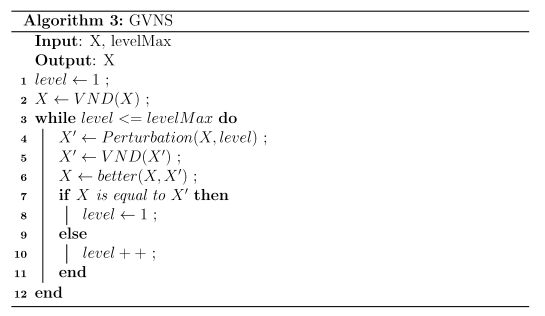


Figura 6 - Fase de otimização, onde VND e Perturbation são funções para obter novas soluções

Também foi estudada uma possibilidade de modificar os algoritmos implementados na 1ª fase, alterando a forma como são tratados os pesos das arestas, de forma a calcular, dinamicamente, novos pesos tendo em conta a hora atual (dando mais importância ao tempo de atraso do que ao tempo de viagem). No entanto, este método pareceu rebuscado e iria ser difícil ter em conta a possibilidade de repetir visitas a vértices passados, visto que os métodos anteriores buscam passar apenas uma vez por cada cliente.

## Utilização de múltiplas carrinhas com capacidade limitada (3ª Fase)

Numa última fase, integrou-se múltiplas carrinhas ao problema resolvido na 2ª fase, sendo que os clientes também pedem um certo número de pães. Assim sendo, será necessário alocar as várias carrinhas aos seus clientes, de forma a minimizar o número de veículos usados, além dos atributos que já se tentavam minimizar anteriormente.

A abordagem preferida foi resolver o problema de alocação das carrinhas independentemente, usando, após este primeiro passo, um dos algoritmos implementados na 2ª fase para cada um dos veículos utilizados (como já sabemos que a carrinha tem capacidade para todos os clientes alocados, caímos num problema idêntico ao anterior).

Assim sendo, encontramo-nos num problema semelhante ao ***Knapsack problem***, com a diferença de ter várias “mochilas”. Como o nosso objetivo primário é minimizar o número de carrinhas usadas, usamos uma abordagem gananciosa e preenchemos primeiro as carrinhas com maior capacidade, até acabarem as encomendas.

De forma a otimizar o algoritmo, e como é provável que a última carrinha fique com algum espaço livre, percorremos as alocações das outras carrinhas à procura de clientes cuja entrega seja um transtorno menor na rota do último veículo, isto é, se a carrinha tiver um número de entregas muito superior à última ou se há casas que ficam mais perto das moradas dos clientes alocados ao último veículo *(edge cases).* Além disso, se surgirem clientes cuja encomenda era demasiado grande para ser realizada por uma carrinha, é possível a encomenda deste ser separada por várias.

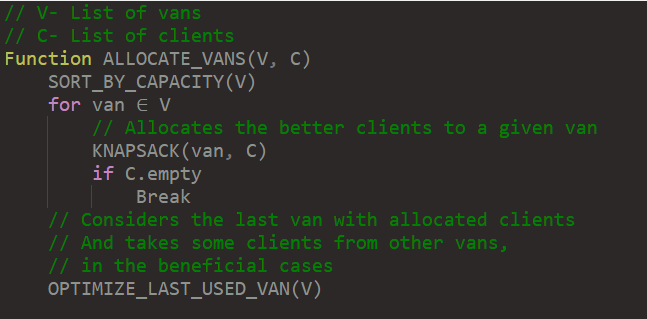


Figura 7 - Pseudocódigo do algoritmo de alocação de clientes a carrinhas

O problema de ***Knapsack*** pode ser resolvido através de vários métodos, como a programação dinâmica, o *backtracking*, métodos gananciosos, entre outros. No entanto, optamos por utilizar o primeiro, pois é uma forma muito eficiente de ultrapassar este obstáculo.

Este método armazena recursivamente o resultado para que cada vez que um problema é dado, é retornado o resultado ao invés de outro problema (de forma iterativa).

Como o problema do *knapsack* pode ser resolvido em O(nW), onde W é a capacidade máxima da carrinha e n o número de clientes, este algoritmo teria complexidade O(nWC), onde C é o número de carrinhas.

Um segundo algoritmo utilizado na alocação dos clientes às carrinhas trata-se de uma abordagem gananciosa, que, para cada carrinha e a cada iteração, escolhe o cliente com mais valor cuja encomenda ainda é suportada por essa carrinha. O valor destes é calculado em cada iteração e tem em conta:

* Uma constante (qualquer cliente tem valor por si próprio)
* O número de pães na encomenda (maior número de pães implica valor maior)
* Soma das distâncias à padaria e aos outros clientes (maior distância implica valor substancialmente menor). É usada a distância euclidiana pela sua simplicidade e eficiência de cálculo
* Soma do valor absoluto das diferenças (em minutos) da hora de entrega em relação às horas dos outros clientes já alocados (um maior afastamento das horas dos outros clientes implica valor consideravelmente maior). Isto é feito com o objetivo de distribuir, ao máximo, as encomendas ao longo do dia, reduzindo atrasos.

No fim deste processo, também é aplicado um algoritmo se otimização idêntico ao usado no *Knapsack*.

Outro algoritmo que merece uma menção é o *“Vehicle Routing Problem with Time Windows”,* que usa MCPSO (*multi-swarm cooperative particle swarm optimizer)* para tentar minimizar custos de deslocação de vários veículos que cobrem um mesmo conjunto de pontos no mapa. No entanto, esta técnica tem uma complexidade elevada e não tem foco no nosso principal objetivo, o de usar o mínimo de carrinhas possíveis, pelo que foi decidido não o implementar.

## 

## Análise da conectividade

Tal como já foi referido anteriormente, durante a fase de pré-processamento do grafo, os vértices que não se encontram no componente fortemente conexo da padaria devem ser removidos do grafo.

Consequentemente, torna-se necessário analisar a conectividade do grafo, de forma a excluir os nós com pouca acessibilidade.

Como os grafos analisados podem tanto ser dirigidos como não dirigidos, consideram-se análises para esta duas situações distintas. Apresentam-se de seguida alguns algoritmos para resolver este problema:

### Algoritmo de Kosaraju

Aplicado em grafos dirigidos, este algoritmo encontra todos os componentes fortemente conexos de um grafo e consiste em fazer uma pesquisa em profundidade, numerando os vértices em pós-ordem, e fazendo, após a inversão de todas as arestas, uma segunda pesquisa em profundidade, começando pelos vértices de numeração superior. No final desta sequência de passos, cada árvore obtida é um componente fortemente conexo. Contudo, apenas interessa o componente que inclui a origem, ou seja, a padaria.

Este método tem uma complexidade O (|V| + |E|), ou seja, corre em tempo linear.

### Algoritmo de Tarjan

O método proposto por Robert Tarjan surge como uma alternativa ao algoritmo de Kosaraju, sendo, portanto, também aplicado a grafos dirigidos. Apesar de também executar em tempo linear, executa apenas uma pesquisa em profundidade, sendo por isso mais eficiente.

Por este motivo, a implementação deste algoritmo é mais vantajosa.

### Depth-First Search

Para analisar a conetividade de um grafo não dirigido, basta aplicar DFS a partir do vértice considerado (padaria), marcando os vértices percorridos como visitados. Pela natureza do grafo, todos os vértices a que a pesquisa chegar terão também caminhos de volta para o vértice inicial, criando um componente fortemente conexo.

A DFS visita todos os vértices para os marcar como não visitados e, na pesquisa, percorre todas as arestas de cada vértice encontrado, tendo, portanto, uma complexidade temporal O (|V| + |E|).

# Estruturas de dados e Classes utilizadas

## Estruturação do Grafo

### Grafo (classe *Graph*)

A representação do grafo, baseada na implementação fornecida para as aulas práticas de CAL, é constituída por um vetor de vértices (vector<Vertex\*>), tal como um H*ashMap* (unordered\_map<int, Vertex\*>) , associando o ID do vértice com o próprio. Isto foi feito tendo em conta que as duas operações mais frequentes para com os vértices do grafo, iteração e acesso único, são facilitadas e otimizadas nestas duas estruturas de dados, respetivamente.

Além disso, o grafo contém vários algoritmos implementados que são usados na resolução dos problemas em questão, entre eles, *Dijkstra* (várias versões, sendo mais versátil em diversas situações), algoritmos de análise de conetividade e pesquisa em profundidade.

O grafo também apresenta algumas funções utilitárias, tais como adicionar/remover arestas/vértices, imprimir o grafo e obter o caminho de arestas calculado num outro algoritmo.

É importante notar que este grafo tem a possibilidade de ser tanto dirigido como não dirigido, escolhido dinamicamente pelo utilizador (por *input* ou por ficheiro de texto).

### Vértice (classe *Vertex)*

Tendo em conta a implementação do grafo, estes vértices têm um ID único, igual ao usado no mapa anterior, uma posição, um vetor de arestas adjacentes a este (*outgoing*), tal como outros atributos criados especificamente para os algoritmos aplicados nesta estrutura, como *Dijkstra* e DFS.

### Aresta (class *Edge*)

As arestas possuem informação os vértices de origem e de destino (Vertex\*), um ID único e um peso, que, neste caso, representa o tempo, em minutos, que a carrinha demora a passar nessa aresta. Contém ainda alguns métodos que facilitam o seu uso e a sua mostragem ao utilizador.

## Modelação da Padaria

### Padaria (classe *Bakery*)

De modo a agrupar e manipular toda a informação sobre as entregas do serviço, foi criada uma classe que contém:

* Um vetor de clientes (vector<Client\*>), cada um com a respetiva informação sobre o seu pedido.
* Um vetor de carrinhas (vector<Van>), cada uma com a respetiva informação (explicitada em baixo).
* Um vértice de início, representando a padaria de onde todas as carrinhas terão de partir e voltar.
* Parâmetros sobre o raio máximo de entrega, os tempos máximos de atraso e adiantamento, e o próprio grafo onde se incide o serviço.
* Métodos para a resolução das três diferentes fases do problema, parametrizadas com as escolhas dos algoritmos a utilizar, de acordo com a preferência do utilizador em relação à melhor otimização ou à rapidez dos algoritmos.
* Vários algoritmos essenciais para resolver o problema, que usam, como base, o grafo previamente carregado dum ficheiro de texto.

### Cliente (classe *Client*)

Tal como explicitado na formalização do problema, os clientes são constituídos por um ID próprio, um nome, um vértice contido no grafo em questão, representando a sua morada, a quantidade de pães que encomendou e a hora marcada.

Estes também contêm atributos e métodos auxiliares aos algoritmos que usam esta classe (e.g. *flag* a informar se já foi alocado) e um tempo real de entrega, a ser definido pelos mesmos.

### Carrinha (classe *Van*)

As carrinhas têm informação sobre a sua capacidade máxima, o tempo de entrega do seu condutor, um vetor de clientes a quem vai realizar as encomendas (vector<Client\*>) e um vetor de arestas (vector<Edge>) a ser preenchido pelos algoritmos que incidem nesta classe.

Além disso, também contêm vários atributos a serem definidos, tais como a quantidade de pão reservada e entregue e os tempos totais de viagem e atraso. Conta também com alguns métodos úteis, como o de ordenação dos seus clientes pela hora de entrega e o de remover e retornar o cliente que mais se distancia de todos os outros (tendo em conta uma quantidade máxima de pães aceite), usado em algoritmos de otimização.

### Interface (class *Interface*)

Foi criada uma classe cujo objetivo é interagir com o utilizador, permitindo-o escolher os dados do problema (por ficheiro texto ou *input* direto) e quais os algoritmos a usar. Depois da escolha, a interface invoca a classe *Bakery* para obter o resultado.  
 Após obtida a solução para o problema, a interface permite mostrar a solução na saída padrão, gravá-la num ficheiro de texto e até apresentá-la numa interface gráfica (*GraphViewer*), mostrando ao utilizador o caminho percorrido num mapa real do grafo escolhido.

## Classes Utilitárias

### Posição (classe *Position*)

Visto que temos várias situações onde são usadas coordenadas (vértices, clientes, *GraphViewer*, etc.), foi criada uma classe que facilita o uso destas, agrupando-as e implementando métodos inerentemente relacionados, tais como a distância euclidiana e a comparação de posições.

### Tempo (classe *Time*)

Tendo em conta a natureza do problema, foi considerada pertinente a criação de uma classe que facilitasse o armazenamento e manipulação de horas (e.g. de entrega) e durações (e.g. da viagem das carrinhas ou do atraso das entregas).

Assim sendo, esta estrutura tem a possibilidade de ser criada com uma hora e minutos definidos ou simplesmente com o número de minutos. Também apresenta métodos utilizados por vários algoritmos, tais como a conversão em minutos (para facilitar cálculos) e a comparação entre “tempos”.

### Construtor de Grafos (classe *GraphBuilder*)

Com vista a facilitar a criação de grafos e a separar esta responsabilidade da *Bakery*, foi criada uma classe cujo encargo é criar um grafo padrão (*hard coded*) ou carregá-lo de um ficheiro de texto.

### MutablePriorityQueue

Retirada das aulas práticas de CAL, esta classe foi utilizada num dos algoritmos principais da solução para o problema, permitindo-o atualizar dinamicamente o item no início da fila prioritária, sem ter que repetir ou iterar elementos já lá contidos.

# Algoritmos Implementados

Destacam-se nesta secção os principais algoritmos concessionados para o projeto. Estes serão separados pela fase do projeto em que são usados, começando pelos comuns a todas elas. Alguns dos algoritmos não serão analisados a fundo, visto serem já vivamente conhecidos e implementados, nomeadamente, DFS, Tarjan e Dijkstra. Para estes, será explicitada a pertinência no projeto e a sua implementação.

Nota: Em todas as análises empíricas, apenas uma variável é mudada em cada ponto calculado (o que está explicitado no eixo das abcissas do gráfico). Esta foi feita no seguinte computador:

* Modelo: Lenovo Ideapad 5 15ARE05
* CPU: AMD Ryzen 5 4500U
* Memória RAM: 8GB
* Placa Gráfica: AMD Radeon Graphics

##### Análise da Conetividade - Depth-First Search

### Pseudocódigo

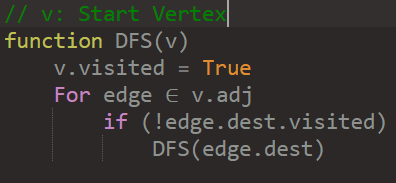


Figura 8 - Pseudocódigo do Algoritmo de DFS

### Análise da Complexidade

Este algoritmo começa por visitar todos os vértices do grafo, marcando-os como não visitados. Depois, a partir do vértice inicial parametrizado, visita, recursivamente, todas as arestas que encontra nos vértices por onde passa, percorrendo e marcando o componente fortemente conexo relevante. Assim sendo, visto que o número de arestas visitadas é no máximo |E|, o algoritmo terá uma complexidade temporal de O (|V| + |E|), tal como foi dito anteriormente, e uma espacial de O(|V|), tendo em conta o atributo adicional do vértice, necessário para saber se já foi ou não visitado.

##### Análise da Conetividade – Algoritmo de Tarjan’s

### Pseudocódigo

### Análise da Complexidade

EXPLICAR ALGORITMO

##### Algoritmo de Dijkstra e variações

### Pseudocódigo

### Text Description automatically generated

Figura 9 - Pseudocódigo Dikstra

Text

Description automatically generated

Figura 10 - Pseudocódigo Função Relax

### Análise da Complexidade

O algoritmo começa por marcar a distância de todos os vértices como infinita, à exceção do inicial, que é marcado com 0. De seguida, usando uma fila de prioridade mutável, visita, recursivamente, todas as arestas do vértice atual e coloca os vértices de destinos na fila, visitando, de seguida, sempre o vértice com menor distância, até os visitar a todos.

Assim sendo, a complexidade do algoritmo será O ((|V| + |E|) log(|V|)). O log é derivado do tempo de inserção/atualização na fila de prioridade, enquanto que |V| e |E| derivam da iteração nos vértices e arestas do grafo.

Por sua vez, a complexidade espacial será O (|V|), visto serem necessários atributos adicionais no vértice (distância e caminho), tal como uma fila de prioridade que irá guardar os vértices a serem visitados (todos dependem de |V|).

### Variações do algoritmo

**Dijkstra com vértice de destino:** Parametrizando um vértice de destino, o algoritmo é capaz de terminar a sua execução mais rapidamente, visto não ter que visitar todos os restantes vértices depois de encontrar o de destino.

Esta variação é útil nos casos em que apenas importa chegar a uma posição específica do grafo, como por exemplo, a casa do cliente seguinte. Como é usada uma fila de prioridade mutável, também é obtido o caminho mais curto entre os dois pontos.

**Dijkstra com um conjunto de possíveis destinos:** Em certos algoritmos, não nos é importante encontrar o caminho para um cliente específico mas para um dos clientes restantes (***nearest neighbour***), pelo que esta variação de Dijkstra se torna muito relevante.

Parando a execução no encontro de um dos destinos possíveis, satisfazemos perfeitamente o problema num tempo consideravelmente menor do que com o algoritmo clássico.

**Dijkstra bidirecional:** Com a mesma intenção do Dijkstra com vértice de destino, esta variação revela-se ainda mais eficaz do que o anterior (tal como explicado anteriormente).

Ao procurar, paralelamente, o caminho de ambos os vértices (início e destino), é possível convergir para uma solução mais rapidamente.

##### Pré-processamento:

### Pseudocódigo

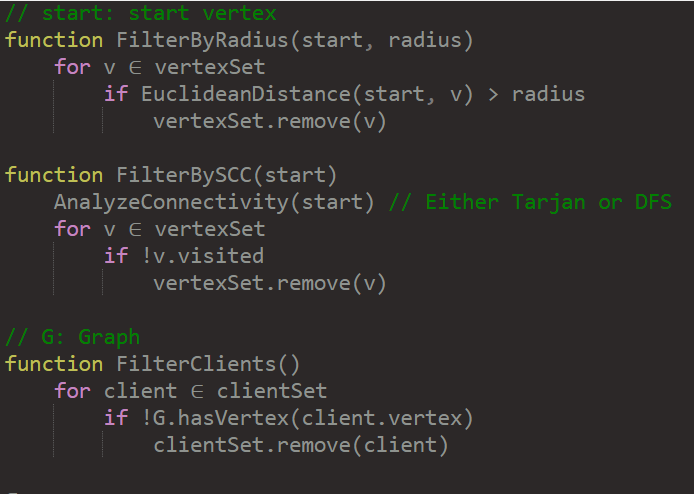


Figura 11 - Pseudocódigo Pré-processamento

### Análise da Complexidade

O pré-processamento dos dados pode ser resumido pelos seguintes passos:

* Remover os vértices do grafo, e respetivas arestas, cuja distância seja superior da permitida pelos dados de entrada (raio de entrega). Para tal, precisamos de percorrer todos os vértices, verificando se devem ser removidos, e, se tal acontecer, removê-lo. Por fim, teremos que remover as arestas que começavam em algum dos vértices removidos.  
  Visto que a operação de remoção de um vértice é O(|V|) e a de remover as arestas é O(|E|), a complexidade temporal geral deste passo é O (|V|2 + |E|). A complexidade espacial é O (1)  
    
  Nota: As arestas no conjunto de arestas adjacentes em cada vértice nunca são repetidas, pelo que a iteração e remoção destas podem ser consideradas uma operação em tempo linear, em função do número de arestas, visto que nunca vão ser feitas mais que |E| iterações.
* Análise da conetividade e posterior remoção de vértices fora do SCC. Seja feito com DFS (grafo não dirigido) ou com Tarjan (grafo dirigido), este passo tem uma complexidade de O (|V| + |E|).  
  A remoção dos vértices não visitados pelo algoritmo de conetividade é uma situação idêntica à do passo anterior, pelo que a complexidade deste passo vai ser dita por esta, sendo O (|V|2 + |E|). A complexidade espacial é O (|V|) em ambos os casos.
* Filtragem dos clientes cuja morada não corresponde a um vértice do grafo. Visto usarmos um *HashMap* para procurar vértices (*lookup* em O (1)), a complexidade temporal depende apenas da iteração e remoção de clientes. Assim sendo, como é usado um vetor, a complexidade será O(|C|2), visto que a operação de remoção ocorre em tempo linear. Por sua vez, a espacial é simplesmente O (1).

Concluindo, tendo em conta os fatores dominantes e a sequência dos passos, o algoritmo de pré-processamento possui, na sua totalidade, complexidade temporal O (|V|2 + |E| + |C|2) e espacial O(|V|).

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 12 - Análise Empírica Pré-processamento

##### 1ª fase- Carrinha única com capacidade ilimitada e em consideração de horas de entrega:

O algoritmo utilizado para a 1ª fase do projeto é uma implementação do *Nearest Neighbour*, com o auxílio de duas variações do algoritmo de Dijkstra:

### Pseudocódigo

### Text Description automatically generated

Figura 13 - Pseudocódigo Nearest Neighbour

### Análise da Complexidade

O algoritmo inicia-se marcando todos os vértices do grafo como não visitados, o que é feito em O(|V|).

De seguida, começa-se um conjunto de iterações, sendo que cada uma conta com os seguintes passos:

* Cópia para um vetor auxiliar de todos clientes que ainda não foram visitados, tendo complexidade temporal e espacial O (|C|).
* Obtenção do cliente mais próximo do vértice atual (começando na padaria), usando o algoritmo de Dijkstra com conjunto de possíveis destinos, tendo complexidade temporal O ((|V| + |E|) log(|V|)) e espacial O (|V|).
* Adiciona-se à carrinha as arestas do caminho encontrado no passo anterior. Isto é feito percorrendo o caminho do vértice de destino até ao inicial, colocando a aresta utilizada num vetor, e, posteriormente, inserir pela ordem correta no conjunto de arestas da carrinha. Assim sendo, a complexidade temporal é O (|V| + |E|) e a espacial é O (|E|).

Visto que este processo acontece |C| vezes, esta parte do algoritmo tem complexidade temporal O (|C|2 + |C| (|V| + |E|) log(|V|)), tendo em conta os fatores dominantes.

Por fim, é executado o Dijkstra bidirecional para encontrar o caminho de volta à padaria, a partir do último cliente visitado. Evidentemente, a execução temporal está na ordem de O ((|V| + |E|) log(|V|)).

Assim sendo, o algoritmo usado para a 1ª fase tem uma complexidade temporal O (|C|2 + |C| (|V| + |E|) log(|V|)), sendo o ciclo o fator dominante. Por sua vez, a complexidade espacial é O (|C| + |V| + |E|).

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 14 - Análise Empírica Nearest Neighbour

##### 2ª fase- Carrinha única com capacidade ilimitada e com consideração de horas de entrega:

O algoritmo usado para esta fase do projeto é tem uma natureza gananciosa, ordenando os clientes pela sua hora de entrega e, posteriormente, calculando o caminho mais curto entre eles usando Dijkstra bidirecional, tal como foi explicado na secção da perspetiva da solução. A otimização falada anteriormente, onde a ordem de entrega dos clientes pode ser trocada, foi implementada independentemente do algoritmo de Dijkstra.

### Pseudocódigo

### Text Description automatically generated

Figura 15 - Pseudocódigo Algoritmo Ganancioso

### Análise da Complexidade

O algoritmo começa com uma simples ordenação do vetor de clientes, o que pode ser feito em O (C log|C|).

Depois, é executado o seguinte processo para cada cliente:

* Chamada do Dijkstra bidirecional para calcular o caminho entre o vértice atual (começando na padaria) e a morada do próximo cliente, o que é executado em O ((|V| + |E|) log(|V|)).
* De forma idêntica ao *Nearest Neighbour*, adiciona-se à carrinha as arestas do caminho encontrado no passo anterior. Com já foi analisado antes, a complexidade temporal deste passo é O (|V| + |E|) e a espacial é O (|E|).

No seu total, este processo tem uma complexidade temporal de O (|C| (|V| + |E|) log(|V|)).

Por fim, é mais uma vez usado o Dijkstra bidirecional para calcular o caminho de volta à padaria, com O ((|V| + |E|) log(|V|)).

Concluindo, a complexidade temporal deste algoritmo é O (|C| (|V| + |E|) log(|V|)) e a espacial é O (|V| + |E|).

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 16 - Análise Empírica Algoritmo Ganancioso

##### 3ª fase- Múltiplas carrinhas com capacidade limitada e com consideração de horas de entrega:

A 3ª fase do projeto utiliza dois algoritmos distintos na sua resolução: um para a alocação dos clientes às carrinhas e outro para efetivamente calcular o trajeto de cada carrinha. Para o segundo, é usado o mesmo algoritmo que na 2ª fase, mas o primeiro tem várias opções, que vão ser explicitadas em baixo.

### Pseudocódigo - *Knapsack Allocation*

### Text Description automatically generated

Figura 17 - Pseudocódigo Knapsack

### Pseudocódigo – Alocação Gananciosa

Text

Description automatically generated

Figura 18 - Pseudocódigo Alocação Gananciosa

### Pseudocódigo - Otimização da Alocação

Text

Description automatically generated

Figura 19 - Pseudocódigo Otimização de Carrinhas

Text

Description automatically generated

Figura 20 - Pseudocódigo Dividir Entrega

### Pseudocódigo - Algoritmo Completo

Text

Description automatically generated

Figura 21 - Pseudocódigo 3ª fase

### Análise da Complexidade - *Knapsack Allocation*

O primeiro algoritmo possível de alocação de clientes a uma dada carrinha é baseado no famoso *Knapsack Problem* resolvido com programação dinâmica, sendo o valor dado por uma constante e pela quantidade de pães na encomenda. Assim sendo, o algoritmo dá-se pelos seguintes passos:

* Criação de um vetor de valores, sendo que estes são calculados pela fórmula:  
  Value = numBreads + 10
* Criação de um vetor de clientes, contido pelos que não foram previamente alocados. Inerentemente, este passo possui uma complexidade temporal e espacial O(|C|).
* A seguir segue-se o cálculo da tabela de soluções (visto tratar-se de programação dinâmica). A complexidade (temporal e espacial) deste depende do número de clientes não alocados e do número da capacidade da carrinha (Representada por W) em O (W |C|)
* Por fim, são retirados da tabela os clientes com maior valor combinado, o que pode ser feito em O(|C|).

Assim sendo, a complexidade temporal e espacial deste algoritmo é O (W |C|), o que é extremamente rápido. No entanto, este algoritmo não obtém resultados tão perto dos ótimos como se pretendia, pelo que se resolveu criar um mais dispendioso, mas que conseguisse obter melhores resultados.

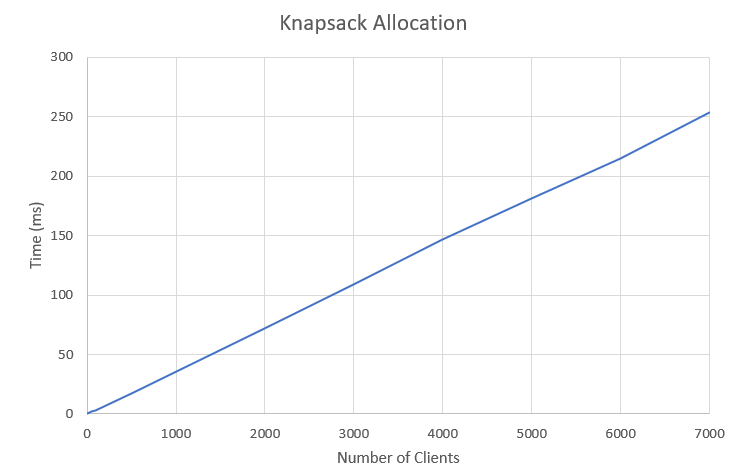


Figura 22 - Análise Empírica Knapsack

Nota: Análise feita com uma carrinha com 2000 de capacidade.

### Análise da Complexidade - Alocação Gananciosa

Com o objetivo de obter uma solução heurística mais próxima da ótima, foi criado um algoritmo ganancioso que tem em consideração, a cada iteração, da distância dos clientes aos que já foram alocados (e ao vértice de início) e a hora de entrega destes. Assim sendo, foi usada a seguinte fórmula para calcular, dinamicamente em cada iteração, o valor dos clientes:

Value = 5000 + numBreads + ∑v(i) ∈ V (|v(i).time – time| - Euclidean(v(i).pos, pos))

É usada a constante 5000 para equilibrar os valores, estando mais próximos de 0, sendo que podem ser negativos.

Este algoritmo repete, até a carrinha já não tiver capacidade suficiente para mais clientes, um processo que consiste em escolher, em cada iteração, o cliente com mais valor, que ainda não foi alocado e cuja quantidade de pães não excede a capacidade da carrinha.

Como o cálculo valor implica percorrer a lista de clientes já alocada, o algoritmo tem a complexidade O (W |C|2), sendo que W representa a capacidade total da carrinha, e a espacial O (|C|), devido a uso de um atributo auxiliar em *Client*.

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 23 - Análise Empírica Alocação Gananciosa

Nota: Análise feita com uma carrinha com 2000 de capacidade.

### Análise da complexidade - Otimização da Alocação

De modo a colmatar possíveis aproximações grotescas (tais como a última carrinha alocada ficar com muito espaço livre ou a existência de clientes cuja encomenda não conseguir ser alocada, por falta de espaço nas carrinhas), o utilizador tem a possibilidade de usar um algoritmo de otimização, que consegue obter melhores resultados.

Este algoritmo passa pelos seguintes passos:

* Percorre a lista de clientes e, se encontrar alguns que não foram alocados, tenta separar as suas encomendas e atribuí-las a várias carrinhas. Este processo tem uma complexidade temporal de O (|V||C|) e espacial de O (1), desprezando a memória extra utilizada na representação de novas encomendas.
* Percorre a lista de carrinhas à procura da última que foi utilizada. Inerentemente, em O(|V|), em relação ao tempo, e O (1) em relação ao espaço.
* Percorre de novo o conjunto de carrinhas, retirando, de cada uma destas, o seu cliente mais custoso que poderia ser alocado à carrinha encontrada no passo anterior. Depois, calcula o custo desse cliente na nova carrinha e, se for menor, troca-o de veículo. Isto é executado em O (|V| |C|2) e tem uma complexidade espacial O (1).

Assim sendo, no seu todo, o algoritmo de otimização tem uma complexidade temporal O (|V| |C|2), tendo em conta os fatores dominantes, e espacial O (1).

Nota: A análise empírica é feita juntamente com o algoritmo completo.

### Análise da complexidade - Algoritmo completo

Terminada a análise de todos algoritmos usados, o algoritmo da 3ª fase, de acordo com as escolhas do utilizador, pode ter as seguintes complexidades, considerando que usa o algoritmo da 2ª fase para todas as carrinhas alocadas e que, antes da alocação, ordena todas as carrinhas por ordem decrescente de capacidade:

*Knapsack* sem otimização: O (|V| (log|V| + W |C)|)) temporal e O (W |C| + |V| + |E|) espacial

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 24 - Análise Empírica Knapsack Sem Otimização

*Knapsack* com otimização: O (|V| (|V| + W |C|)) temporal e O (W |C| + |V| + |E|) espacial

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 25 - Análise Empírica - Knapsack Com Otimização

Nota: Para ser notório o crescimento temporal em função do número de clientes na utilização do algoritmo de otimização, foi usado um caso ligeiramente diferente ao de cima, pelo que os resultados não devem ser comparados.

Ganancioso sem otimização: O (|V| (log|V| + W |C|2)) temporal e O (|C| + |V| + |E|) espacial

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 26 - Análise Empírica Ganancioso sem Otimização

Ganancioso com otimização O (|V| (|V| + W |C|2)) temporal e O (|C| + |V| + |E|) espacial

Chart, line chart

Description automatically generated

Figura 27 - Análise Empírica Ganancioso com Otimização

O pico que se pode ver na figura deriva-se da natureza do algoritmo de otimização, que depende não só do tamanho dos dados de entrada como da situação em questão.

Nota: Aplicou-se a mesma estratégia explicada no algoritmo *knapsack* com otimização.

POR NA CONCLUSAO QUE A OTIMIZACAO AJUDA O DIJKSTRA E O TEMPO DE EXECUCAO NÃO AUMENTA

# Casos de Utilização

A aplicação desenvolvida tem uma interface simples onde o utilizador poderá inserir os dados de entrada e escolher as opções que pretende, tais como:

* Se pretende carregar um ficheiro de texto com toda a informação necessária para o algoritmo ou se quer inserir a informação manualmente.
* Se quer guardar o resultado do programa num ficheiro de texto.
* Se quer utilizar uma única carrinha com capacidade infinita (e dentro desta opção, se quer inserir horas de entrega ou não) ou várias com capacidades limitadas.
* Se prefere uma solução mais otimizada (e possivelmente mais demorada) ou menos (e mais rápida).
* Nome do ficheiro contendo os dados de entrada ou apenas do grafo (coordenadas reais retiradas do [OpenStreetMaps](https://www.google.com/url?q=http://www.openstreetmap.org&sa=D&source=editors&ust=1617931022735000&usg=AOvVaw3H6Cpih-yc3b7jhwuTu6Uk)).
* Caso escolha fazê-lo manualmente, pode inserir informação sobre a(s) carrinha(s), os clientes, o raio de entrega da padaria e as margens de falha para a hora preferencial dos clientes. O vértice de partida será o primeiro no ficheiro do grafo.
* É possível, ainda, visualizar o grafo representante dum mapa e caminho efetuado pelas carrinhas, através do *GraphViewer*.
* Também existe uma opção de gerar um ficheiro de *input* aleatório, carregando na tecla ‘L’ no início do programa.

Além disso, o programa terá as seguintes funcionalidades:

* Cálculo do caminho para realizar as encomendas.
* Verificação da acessibilidade dos destinos pretendidos (moradas dos clientes).
* Organização e alocação de encomendas a uma lista de carrinhas.
* Toda a informação obtida (trajeto, entregas, tempo total, etc.) pelos pontos anteriores será mostrada ao utilizador (e guardada, se assim for pretendido).

# Conclusão

Em suma, o caso de estudo em questão, a criação de um programa que trata da distribuição de pão numa vila em tempo de COVID-19, foi analisado e desenvolvido de modo a criar um produto final eficaz e funcional. Para tal, o seu desenvolvimento foi dividido em três partes, progressivamente mais complexas.

Para a execução do projeto, foi feito um estudo acerca dos problemas intrínsecos ao tema em questão, tendo como objetivo o planeamento e discussão sobre as técnicas e algoritmos mais adequados e eficientes.

Com efeito, através da utilização de grafos, procedemos à construção do pseudocódigo para as três fases previamente enunciadas. Deste modo, um dos principais problemas associados a esta estratégia foi a implementação de um algoritmo que permitisse entregar o pão num caminho mais curto e com menor tempo de atraso, tendo em conta a hora de cada encomenda, os pontos de entrega a visitar e a distância entre eles.

A primeira análise do problema, mais simples, consistia em elaborar uma solução para um problema semelhante ao NP-hard, mais conhecido como **TSP,** que tratava a deslocação de uma única carrinha, sem restrição de ordem de entrega pela hora das encomendas, nem limite de capacidade da carrinha e retorno ao ponto de partida, ou seja, a padaria. Tudo isto, no menor tempo possível.

De seguida, na segunda fase, com base na fase anterior, criou-se um algoritmo capaz de executar o problema, tendo em atenção a restrição da hora de entrega, equilibrando o tempo de atraso nas entregas através da alteração de ordem de passagem pelos pontos de interesse.

Por fim, tendo em conta os algoritmos já elaborados, foram efetuadas alterações de modo a resolver o mesmo problema de estudo, tendo em conta as duas fases já concluídas, bem como novas funcionalidades, nomeadamente, a escolha do número de carrinhas que tratarão das entregas e a alocação otimizada das mesmas aos clientes.

Assim, é importante referir quais foram os métodos/algoritmos utlizados ao longo do projeto, sendo eles, o **Dijkstra**, **Floyd-Warshall**, **Nearest Neighbor**, **Held-Karp**, **Trajan, Bitonic Tour** e **Kosaraju**. Além disso, recorreu- se a vários conceitos, entre eles, **recursividade**, ***bruteforce***, **algoritmos gananciosos e programação dinâmica (Knapsack Problem)**.

# Contribuição

Cada membro do projeto realizou as tarefas a si atribuídas, nomeadamente:

* **Bruno Rosendo (1/3)**:
  + Descrição do problema
  + Formalização do problema
  + Algoritmos para as 1ª e 2ª fases
  + Casos de utilização
  + Bibliografia
* **Domingos Santos (1/3)**:
  + Algoritmos para a 3ª fase
  + Conclusão
  + Estruturação do documento
  + Contribuição
* **João Mesquita (1/3)**:
  + Descrição do problema
  + Pré-processamento
  + Análise da conetividade
  + Algoritmos de percurso de duração mínima entre dois pontos
  + Algoritmos de percurso de duração mínima entre todos os pares de pontos

# Bibliografia

* Slides utilizados nas aulas teóricas de CAL, pelos professores: R. Rossetti, A. Rocha, L. Ferreira, G. Leão, F. Ramos e J. Fernandes
* “Introduction to Algorithms”, Thomas H. Cormen
* Travelling Salesman Problem- [https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling\_salesman\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem#Computing_a_solution)

<https://en.ppt-online.org/31503>

* Vehicle routing problem- <https://en.wikipedia.org/wiki/Vehicle_routing_problem>
* Strongly Connected Component- <https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component>
* Heuristics and Local Search- <https://paginas.fe.up.pt/~mac/ensino/docs/OR/CombinatorialOptimizationHeuristicsLocalSearch.pdf>
* Nearest neighbour algorithm- <https://en.wikipedia.org/wiki/Nearest_neighbour_algorithm>
* Tarjan's strongly connected components algorithm- <https://en.wikipedia.org/wiki/Tarjan%27s_strongly_connected_components_algorithm>
* Kosaraju's algorithm- <https://en.wikipedia.org/wiki/Kosaraju%27s_algorithm>
* Held–Karp algorithm- <https://en.wikipedia.org/wiki/Held–Karp_algorithm>
* Bitonic tour- <https://en.wikipedia.org/wiki/Bitonic_tour>
* Problema da Mochila- <https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_da_mochila>
* A General VNS heuristic for the traveling salesman problem with time windows- <https://core.ac.uk/download/pdf/82432413.pdf>
* An Optimal Algorithm for the Traveling Salesman Problem

with Time Windows- <https://pubsonline.informs.org/doi/pdf/10.1287/opre.43.2.367>

* Vehicle Routing Problem with Time Windows and Simultaneous Delivery and Pick-Up Service Based on MCPSO- <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2012/104279/>
* Dijkstra vs Bi-directional Dijkstra Algorithm on US Road Network- <https://www.youtube.com/watch?v=1oVuQsxkhY0>