1

Técnicas de Concepção de Algoritmos (1ª parte): algoritmos gananciosos

J. Pascoal Faria, R. Rossetti, L. Ferreira
CAL, MIEIC, FEUP

2

Algoritmos gananciosos (*greedy algorithms*)

Algoritmos Gananciosos

- É qualquer algoritmo que aplica uma heurística de solução em que se tenta realizar uma escolha óptima local em todo e cada estágio da solução.
- Aplicável a problemas de optimização (*maximização* ou *minimização*)
- Em diversos problemas, a optimização local garante também a optimização global, permitindo encontrar a solução óptima de forma eficiente
- **Subestrutura óptima**: um problema tem subestrutura óptima se uma solução óptima p/ problema contém soluções óptimas para os seus subproblemas!

Estratégia Gananciosa

- Um algoritmo ganancioso funciona em fases. Em cada fase verifica-se a seguinte estratégia:
  1. Pega-se o melhor que se pode obter no exacto momento, sem considerar as consequências futuras para o resultado final
  2. Por se ter escolhido um **óptimo local** a cada passo, espera-se por acabar a encontrar um **óptimo global**!
- Portanto, a opção que parece ser a melhor no momento é a escolhida! Assim,
  - Quando há uma escolha a fazer, uma das opções possíveis é a "gananciosa." Portanto, é sempre seguro optar-se por esta escolha
  - Todos os subproblemas resultantes de uma alternativa gananciosa são vazios, excepto o resultado

5

Premissas

- Cinco principais características que suportam essa solução:

1. Um **conjunto de candidatos**, de onde a solução é criada
2. Uma **função de selecção**, que escolhe o melhor candidato a ser incluído na solução
3. Uma **função de viabilidade**, que determina se o candidato poderá ou não fazer parte da solução
4. Uma **função objectivo**, que atribui um valor a uma solução, ou solução parcial
5. Uma **função solução**, que determinará se e quando se terá chegado à solução completa do problema

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2017-2018)

6

Algoritmo abstracto

- Inicialmente o conjunto de itens está vazio (i.e. conjunto solução)
- A cada passo:
  - Um item será adicionado ao conjunto solução, pela função de selecção
  - SE o conjunto solução se tornar inviável, ENTÃO rejeita-se os itens em consideração (não voltando a seleccioná-los)
  - SENÃO o conjunto solução ainda é viável, ENTÃO adiciona-se os itens considerados

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2017-2018)

Problema do troco

extrair 8 cêntimos

(com nº mínimo de moedas)

Saco / depósito / stock de moedas

extrair(8, {1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 10})

(com nº mínimo de moedas)

Resol. c/ algoritmo ganancioso

extrair(8, {1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 10})

5

extrair(3, {1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5, 10})

2

extrair(1, {1, 1, 1, 2, 2, 2, 5, 10})

1

extrair(0, {1, 1, 2, 2, 2, 5, 10})

FIM

Escolhe-se a moeda de valor mais alto que não excede o montante em falta (pois com moedas de valor mais alto o nº de moedas necessário será mais baixo)

Sub-problema do mesmo tipo

Dá a solução óptima, se o sistema de moedas tiver sido concebido apropriadamente (caso do euro) e não existirem problemas de *stock*!

9

Implementação iterativa (Java)

```
static final int moedas[] = {1,2,5,10,20,50,100,200};

// stock[i] = nº de moedas de valor moedas[i]
public int[] select(int montante, int[] stock) {
  int[] sel = new int[moedas.length];
  for (int i=moedas.length-1; montante>0 && i>=0; i--)
    if (stock[i] > 0 && moedas[i] <= montante) {
      int n_moed=Math.min(stock[i],montante/moedas[i]);
      sel[i] += n_moed;
      montante -= n_moed * moedas[i];
    }
  if (montante > 0)
    return null;
  else
    return sel;
}
```

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2017-2018)

10

Prova de optimalidade

- Definição: Um sistema de moeda diz-se *canónico*, se o algoritmo ganancioso encontra sempre uma solução ótima para o problema do troco (com stock ilimitado).[1]
- A maioria dos sistemas de moedas são canónicos (USA, EU, etc.).
- Teorema: Sendo $C = \{1, c_2, \cdots, c_n\}$ as denominações do sistema de moedas, se o sistema for não canónico, o menor contra-exemplo situa-se na gama $c_3 + 1 < x < c_{n-1} + c_n$. [1]
  - Logo basta fazer pesquisa exaustiva nesta gama para determinar se é canónico.
- Exemplo: Seja o sistema de moedas C = {1, 4, 5}.
  - Basta procurar contra-exemplos na gama de $6 < x < 9$.
  - No caso x = 7, o algoritmo ganancioso dá a solução ótima (5,1,1).
  - No caso x = 8, o algoritmo ganancioso {5, 1, 1, 1} mas o ótimo é {4,4}).
  - Logo o sistema não é canónico.

[1] Xuan Cai (2009). "Canonical Coin Systems for CHANGE-MAKING Problems". *Proc. of the Ninth International Conference on Hybrid Intelligent Systems*.

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP (2017-2018)

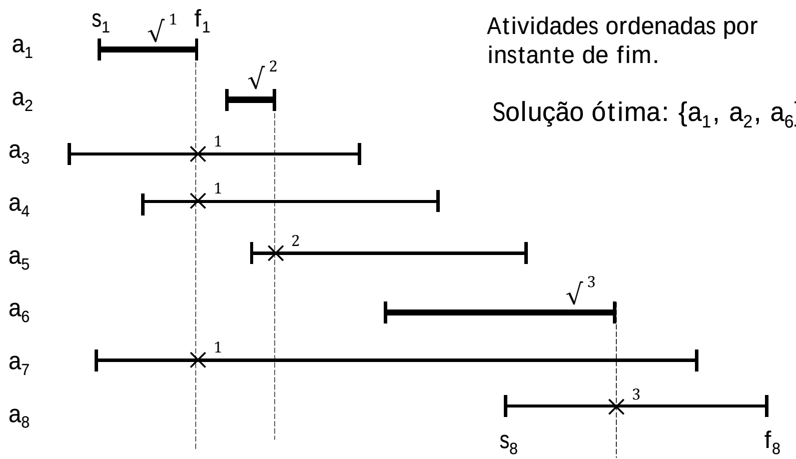
Escalonamento de atividades

- Problema: dado um conjunto de atividades, encontrar um subconjunto com o maior número de atividades não sobrepostas!

- <u>Input:</u> Conjunto *A* de *n* atividades, a_1, a_2, …, a_n.
  - s_i = instante de início (*start*) da atividade *i*.
  - f_i = instante de fim (*finish*) da atividade *i*.

- <u>Output:</u> Subconjunto *R* com o número máximo de atividades compatíveis (i.e. não sobrepostas)

Escalonamento de atividades: exemplo



Atividades ordenadas por instante de fim.

Solução ótima: {a_1, a_2, a_6}

Escalonamento de atividades: abordagem gananciosa

- Passos:
  - Considerar as atividades numa ordem específica
  - Escolher a "melhor opção" de atividade.
  - Descartar as atividades incompatíveis com a atividade escolhida.
  - Proceder da mesa forma para as atividades restantes.
- Estratégias:
  - "Earliest finishing time" -> ascendente em f_i
  - "Earliest starting time" -> ascendente em s_i
  - "Shortest interval" -> ascendente em $f_i - s_i$
  - "Fewest conflicts" -> para cada atividade, contar o número de conflitos e ordenar segundo este número.

Escalonamento de atividades:
algoritmo ganancioso por fim mais cedo

Baseado na intuição de que, para realizar o maior nº de atividades sequencialmente, devemos começar pela que termina mais cedo!

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\}$

$R = \emptyset$

While $A \neq \emptyset$

  $a \leftarrow a_i$ | earliest finishing time

  $R \leftarrow R \cup \{a\}$

  $A \leftarrow A \setminus \{a_j \in A \mid a_j$ não é compatível com $a_i\}$ (incl. a_i)

EndWhile

Return R

Escalonamento de atividades:
prova de optimalidade do algoritmo

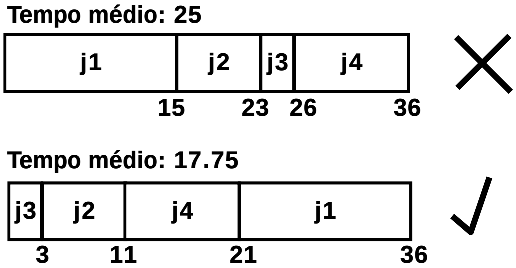
- No exemplo e algoritmo dados sejam:
  - *A* – conjunto inicial de atividades
  - *a* – atividade selecionada com fim mais cedo (a_1)
  - *I* – conj. de atividades incompatíveis com *a* ($\{a_3, a_4, a_7\}$)
  - *C* – conj. de atividades restantes ($\{a_2, a_5, a_6, a_8\}$)
- Do conjunto $\{a\} \cup I$, só pode ser selecionada no máximo uma atividade (pois são mutuamente incompatíveis)
- Desse conjunto, escolhemos uma, que é o máx. possível
- A atividade escolhida (*a*) não tem incompatibilidade com as restantes (*C*), logo a escolha de *a* permite maximizar o nº de atividades que se podem escolher de *C*

Escalonamento de atividades:
minização tempo médio de conclusão

Variação do problema de escalonamento de atividades:

- Dados: tarefas (*jobs*) e tempo (duração)
- Objectivo: sequenciar tarefas minimizando o tempo médio de conclusão
- Método: tarefas mais curtas primeiro

Tarefa	Tempo
j1	15
j2	8
j3	3
j4	10



19

Prova de optimalidade

- Tarefas: j_1, j_2, …, j_n , ordenadas por ordem de execução
- Durações: d_1, d_2, …, d_n
- Instantes de conclusão (fim): $f_1=d_1$, $f_2=d_1+d_2$, …
- Tempo médio de conclusão das tarefas (custo):

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)d_i}{n} = \frac{(n+1)\sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} i\, d_i}{n}$$

- Se existe x > y tal que $d_x < d_y$, troca de j_x e j_y diminui custo da solução
- Assim, custo é minimizado se tarefas forem ordenadas tal que $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$

20

Outros Exemplos de Problemas

- Problemas em que se garante uma solução óptima:
  - Problema do troco, desde que não haja falta de stock e o sistema de moedas esteja bem concebido
  - Problema de escalonamento
  - Árvores de expansão mínima (a ver mais tarde)
  - Dijkstra, para cálculo do caminho mais curto num grafo (a ver mais tarde)
  - Codificação de Huffman (a ver mais tarde)
- Problemas em que não garante uma solução óptima
  - Problema da mochila (mas pode dar boas aproximações …)

Referências

- Mark Allen Weiss. Data Structures & Algorithm Analysis in Java. Addison-Wesley, 1999
- Steven S. Skiena. The Algorithm Design Manual. Springer 1998
- Robert Sedgewick. Algorithms in C++. Addison-Wesley, 1992
- Slides de Maria Cristina Ribeiro