# Introdução à classe de problemas NP-Completos

J. Pascoal Faria, R. Rossetti, L. Ferreira

FEUP, MIEIC, CAL, 2017/2018

# Índice

- A classe de problemas P
- A classe de problemas NP
- As classes de problemas NP-completos e NP-difíceis
- Análise de problemas por redução

# Preâmbulo

- Em alguns casos práticos, alguns algoritmos podem resolver problemas simples em tempo razoável (e.g. $n \leq 20$); mas quando se trata de *inputs* maiores (e.g. $n \geq 100$) o desempenho degrada consideravelmente
- Soluções desse género podem estar a executar em tempo exponencial, da ordem de $n^{\sqrt{n}}$, $2^n$, $2^{(2\hat{}n)}$, $n!$, ou mesmo pior
- Para algumas classes de problemas, é difícil determinar se há algum paradigma ou técnica que leve à solução do mesmo, ou se há formas de provar que o problema é intrinsecamente difícil, não sendo possível encontrar uma solução algorítmica cujo desempenho seja sub-exponencial
- Para alguns problemas difíceis, é possível afirmar que, se um desses problemas pode ser resolvido em tempo polinomial, então todos podem ser resolvidos em tempo polinomial!

# A classe de problemas P

# Tempo Polinomial como Referência

- Considera-se normalmente que é um **problema** é **resolúvel eficientemente** se for **resolúvel em tempo polinomial**, i.e., se houver um **algoritmo de tempo polinomial** que o resolva.
- Um algoritmo é de **tempo polinomial** se o tempo de execução é da ordem de $\boldsymbol{O(n^k)}$, no pior caso, em que ***n* é o tamanho do *input*** do problema e ***k* é uma constante independente de *n***
- Algumas funções parecem não ser polinomiais, mas podem ser tratadas como tal: e.g. $O(n \log n)$ tem delimitação superior $O(n^2)$
- Algumas funções parecem ser polinomiais, mas podem não o ser na verdade: e.g. $O(n^k)$, se $k$ variar em função de $n$, tamanho do *input*.

# Problemas de Decisão

- Um **problema de decisão** é um problema cujo *output* ou resposta deve ser um simples "SIM" ou "NÃO" (ou derivativos do tipo "V/F", "0/1", "aceitar/rejeitar", etc.)

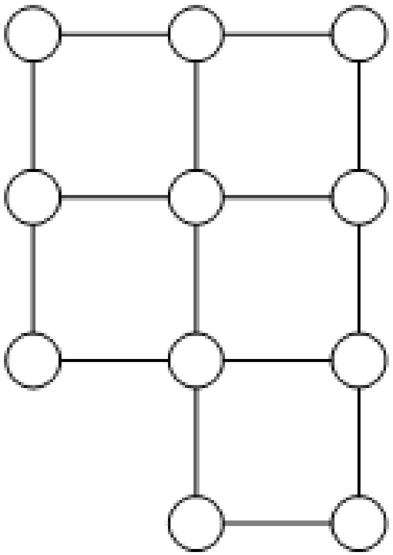
- Muitos dos problemas práticos são problemas de optimização (maximizar ou minimizar alguma métrica), mas podem ser expressos em termos de problemas de decisão
  - Por exemplo, o problema "qual o menor número de cores que se pode utilizar para colorir um grafo?," pode ser expresso como "Dado um grafo ***G*** e um inteiro *k*, é possível colorir ***G*** com *k* cores?"

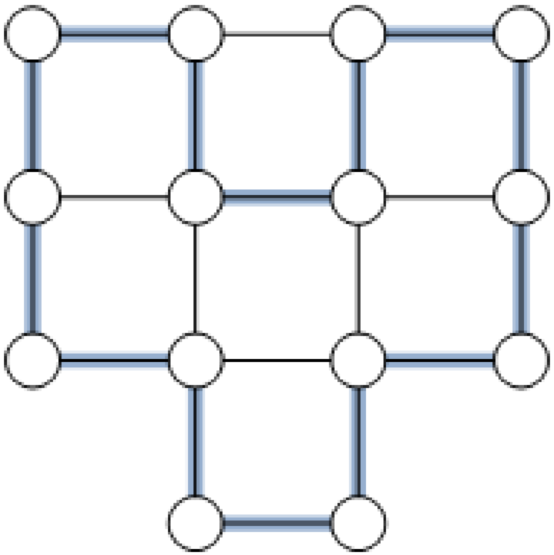
- A **classe de problemas P** é constituída por todos os **problemas de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial!**

# A classe de problemas NP

# Problema do Circuito Hamiltoniano

- Problema do circuito Hamiltoniano não dirigido (*Undirected Hamiltonian Cycle - UHC*): verificar se um grafo não dirigido dado ***G***, é Hamiltoniano, isto é, tem um ciclo (ou circuito) que visita cada vértice exatamente uma vez.





# Verificação em Tempo Polinomial

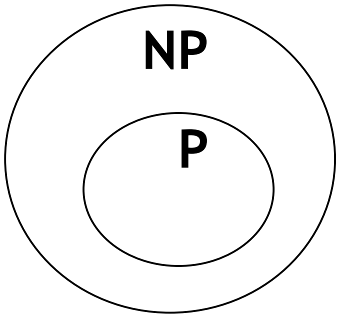
- Não se conhece nenhum algoritmo eficiente (de tempo polinomial) para resolver o problema anterior
- No entanto, dado um ciclo candidato ***C***, é fácil verificar em tempo polinomial (linear) se cumpre a propriedade pretendida
- Neste contexto, *C* diz-se ser um "**certificado**" de uma solução (uma "prova" de que o grafo é Hamiltoniano)
- Diz-se que o problema é **verificável em tempo polinomial,** se for possível verificar em tempo polinomial se um certificado de uma solução é correto
- Nem todos os problemas têm esta característica: e.g., o problema de determinar se um grafo *G* tem exactamente um ciclo de Hamilton. É fácil certificar que existe pelo menos um ciclo, mas não é fácil certificar que não há mais!

# Classe de problemas NP

- A **classe de problemas NP** (*<u>n</u>ondeterministic <u>p</u>olynomial*) é definida por todos os problemas que podem ser verificados por um algoritmo de tempo polinomial
  - "Verificados" no sentido explicado no slide anterior
  - Não confundir **execução** em tempo polinomial (P) com **verificação** em tempo polinomial (NP)!
  - O termo "*nondeterministic*" provém da definição inicial da classe NP em termos de máquinas de Turing não determinísticas, capazes de não deterministicamente conjeturar o valor do certificado (em geral conjeturar uma *string*) e verificá-lo depois, em tempo polinomial (em geral, verificar se a string faz parte da linguagem).

# Relação entre as classes P e NP

- $P \subseteq NP$
  - Se um problema é resolúvel em tempo polinomial, então pode-se certamente verificar se uma solução é correcta em tempo polinomial




- Não se sabe certamente se $P = NP$ ou $P \neq NP$!
  - Poder verificar se uma solução é correcta em tempo polinomial, não garante ou ajuda a encontrar um algoritmo que resolva o problema em tempo polinomial
  - Acredita-se que $P \neq NP$, mas não há provas!

# As classes de problemas NP-completos e NP-difíceis

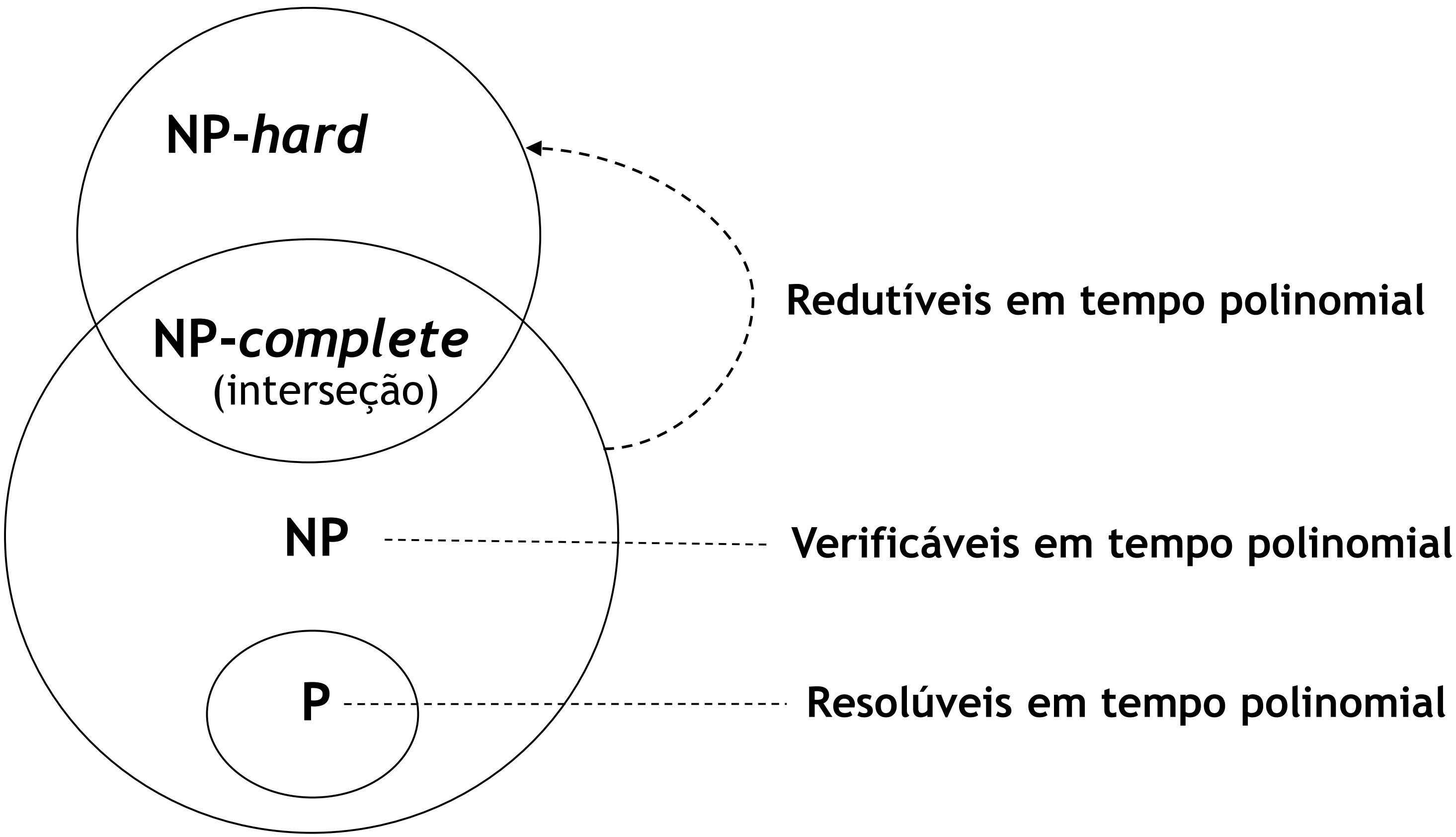
# Problemas NP-completos (NPC)

- A **classe de problemas NP-completos** é a classe dos problemas "mais difíceis" de resolver em toda a classe NP.
  - São pelo menos tão difíceis como qualquer outro problema em NP
- Mais precisamente, um problema de decisão *A* é NP-completo se (i) $A \in$ NP; e (ii) qualquer problema $A' \in NP$ é **redutível em tempo polinomial** a ***A*** **(*$A' \leq_P A$*)**
  - A redução envolve converter os dados de entrada de *A'* em dados de entrada de *A*, e os dados de saída de A em dados de saída de *A'*
  - As reduções serão estudadas adiante
  - Atualmente, para provar que *A* é NPC, basta encontrar um problema *A'* NPC já conhecido e provar que *A'* é redutível a *A* em tempo polinomial
- E.g., o problema do circuito Hamiltoniano é NP-completo

# Problemas NP-difíceis (NP-*hard*)

- Um problema NP-difícil é um problema que satisfaz a propriedade (ii) mas não necessariamente a propriedade (i)
- Ou seja, um problema de decisão *A* é NP-difícil se qualquer problema *A'* $\in$ *NP* é **redutível em tempo polinomial** a ***A***
- Por exemplo, o problema da paragem (em máquinas de Turing) é NP-difícil mas não NP-completo
  - Não pertence a NP, pois nem sequer é decidível
  - É NP-difícil, pois se pode converter qualquer problema NP no problema de paragem de uma máquina de Turing (ver referências)

# Classes P, NP, NP-*complete* e NP-*hard*




Na hipótese P $\neq$ NP!

# Análise de problemas por redução

# Como “provar” que um problema $X \notin$ **P**

1. Selecionar um problema *Y* não resolúvel em tempo polinomial ($Y \notin$ **P**)
   - De acordo com o conhecimento atual, em que se acredita que P ≠ NP
2. Provar que *Y* é redutível a *X* em tempo polinomial ($Y \leq_P X$)
   - Redução de entradas e saídas

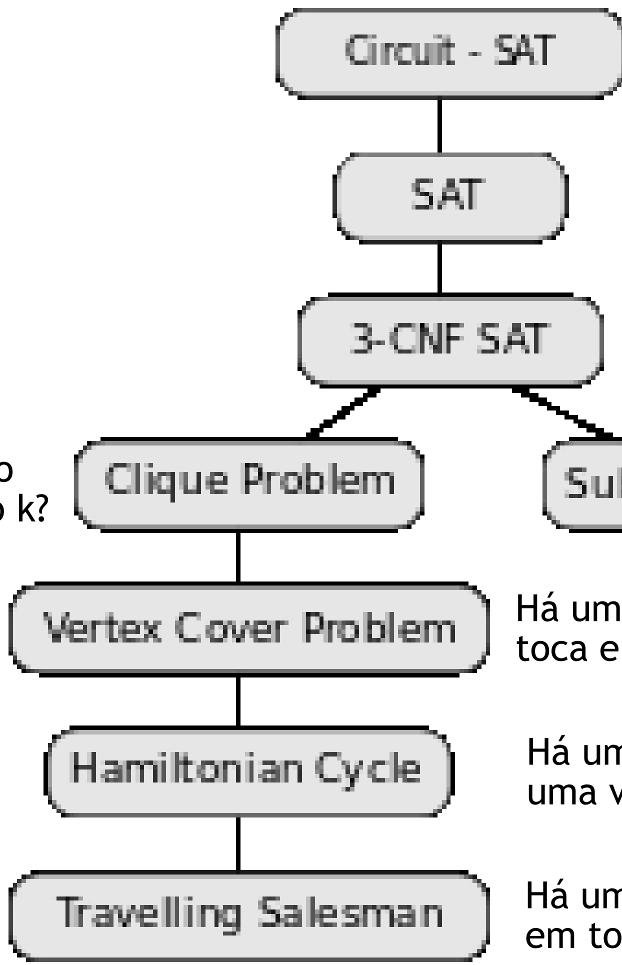
- Como a redução é efetuada em tempo polinomial, se *X* for resolúvel em tempo polinomial, então *Y* também o seria, o que contradiz a hipótese
- Em geral, a redução de *Y* a *X* permite provar que *Y* é pelo menos tão difícil como *Y*

# Como provar que um problema *X* é NPC

1. Provar que *X* está em *NP*
2. Seleccionar um problema *Y* que se sabe ser *NP*-completo
3. Definir uma redução de tempo polinomial de *Y* em *X* *(conversão de entradas)*
4. Provar que, dada uma instância de *Y*, *Y* tem uma solução se, e se somente, *X* tem uma solução *(conversão de saídas)*

# Exemplos de problemas NP-completos e reduções normalmente usadas

Sentido da redução




Circuit - SAT: Há um atribuição de valores lógicos às entradas de um circuito que torna as saídas verdadeiras?

SAT: Há um atribuição de valores lógicos que torna a expressão booleana verdadeira?

3-CNF SAT: Variante de SAT, em forma normal conjuntiva c/3 literais

Clique Problem: Há um clique (subgrafo completo) de tamanho k?

Subset Problem: Há um subconjunto de soma zero?

Vertex Cover Problem: Há um conjunto com ≤ k vértices que toca em todas as arestas?

Hamiltonian Cycle: Há um circuito que passa exatamente uma vez em cada vértice?

Travelling Salesman: Há um circuito com peso ≤ k que passa em todos os vértices?

# Referências e mais informação

- T. Cormen *et al*. (2009) "**Introduction to Algorithms.**" Cambridge, MA: MIT press.
  - Capítulo 34 NP-Completeness
  - Capítulo 35 Approximation Algorithms
- R. Johnsonbaugh & M. Schaefer (2004) "**Algorithms.**" Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- C.A. Shaffer (2001) "**A Practical Introduction to Data Structures and Algorithm Analysis.**" Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.