# Gabarito lista 7

Matheus Popst e Vitória Guardieiro
Curvas e Superfícies

14 de abril de 2019

**Exercício 4.1.** Considere o cone $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2, z > 0\}$ . Prove, usando a definição, que se trata de uma superfície. Mostre que se $S$ tem o mesmo plano tangente nos pontos pertencentes a reta $x = 0, y = z$.

*Demonstração.* Considere o seguinte mapa $\sigma(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, r)$, com $U \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$. Para todo $p \in S$, existe ao menos um $(r, \theta)$ que leva em $p$. Considere $(r, \theta)_\epsilon \in V_\epsilon(r, \theta)$, pela continuidade da função $\sigma$, ele irá levar numa vizinhança também de $\sigma$, o que conclui a demonstração. É claro, $\sigma$ é difeomorfismo.

Quando se trata desta reta, temos que o ponto é da forma $\sigma(\frac{\pi}{2}, r)$ ou $\sigma(\frac{3\pi}{2}, r)$. A demonstração é análoga. Basta calcularmos o plano tangente (usando as derivadas parciais) que nos leva que o vetor normal deve ser $(-r \cos\theta, -r \sin\theta, r)$, que avaliados em $\theta = \frac{\pi}{2}$ ficam $(0, -r, r)$. □

**Exercício 4.2.** Seja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | yx^2 + y^2 = 1\}$. a) Justifique que $C$ seja uma superfície. b) Determine uma equação para o plano tangente a $C$ em $p = (0, 1, 2)$.

*Demonstração.* a) O atlas composto dos seguintes mapas

$$\sigma_1(u, v) = \left(\sqrt{\frac{1-u^2}{u}}, u, v\right)$$
$$\sigma_2(u, v) = \left(-\sqrt{\frac{1-u^2}{u}}, u, v\right)$$

Define completamente a superfície. Note que esse atlas define uma superfície pois tem frações parciais contínuas. O leitor perspicaz pode pensar que no quando $u = 0$ não terá, mas quando isso acontece, sequer vale a igualdade que define a superfície.

b) Ao plano tangente, basta calcularmos as derivadas parciais de um dos mapas no ponto

$\sigma_1(1,2)$ e tirarmos o cross-product:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} = \left( \frac{-u^2 - 1}{2u^2\sqrt{\frac{1}{u} - u}}, 1, 0 \right)$$
$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = (0,0,1)$$
$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = \left( 1, -\frac{-u^2 - 1}{2u^2\sqrt{\frac{1}{u} - u}}, 0 \right)$$

Que quando avaliado em $(1,2)$, chega a infinito, nos levando a crer que não há plano tangente. $\square$

**Exercício 4.3.** Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2y^2$. Determine o conjunto dos valores regulares de $f$. b) Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2y^2 = c\}, c \in \mathbb{R}^+$. Prove que qualquer plano tangente a $S$ é paralelo à reta $x = 1, y = 2$.

*Demonstração.* Para que seja um valor regular, basta que $\nabla f \neq 0$. Ora, sendo $\nabla f = (2xy^2, 2yx^2, 0)$, basta notar que se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ isso não ocorre.

Escrevamos o atlas

$$\sigma_1(y,z) = \left( +\sqrt{\frac{c}{y^2}}, y, z \right)$$
$$\sigma_2(y,z) = \left( -\sqrt{\frac{c}{y^2}}, y, z \right)$$

Agora, temos que o cross product, para o primeiro mapa (é análogo) gera $\left(-1, -\frac{\sqrt{c}}{|y|^2}, 0\right)$. Agora basta verificar que a normal do plano tangente em qualquer ponto tem dot product igual a 0 em qualquer ponto, porque o vetor da reta é $(0,0,z)$. $\square$

**Exercício 4.7.** Considere o cilindro parabólico $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = x^2\}$. a) Prove que $S$ é uma superfície que pode ser coberta com uma parametrização. b) Determine a reta normal a $S$ em 0.

*Demonstração.* O mapa global parece claro que se houver, será $\sigma(u,v) = (u, u^2, v)$.

Agora, suponha que $\sigma$ não seja. Então existe $p = (p_x, p_y, p_z)$ tal que $p \in S$ mas $\nexists u, v$ tal que $\sigma(u,v) = p$.

Para tal $p$, temos que $p_x = p_y^2$ por isso se tomarmos $u = p_x$, já garantimos a segunda entrada. Ainda, se tomarmos $v = p_z$, achamos um $(u,v)$ que cobre. ABSURDO! Portando é parametrização global.

Agora, temos:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 2u, 0)$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0,0,1)$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (2u, -1, 0)$$

No ponto 0, temos que $u = 0$, portanto o vetor normal é $(0, -1, 0)$. A reta só pode ser $r(t) = (0, -t, 0)$. □

**Exercício 4.11.** Não faço ideia como faz a 4.11.

*Demonstração.* a □

**Exercício 4.12.** a) Mostre que os meredianos e paralelos se intersectam sempre ortogonalmente. b) Sabendo que uma geodésica de uma superfície $S$ é uma curva $\gamma : J \to S$ cuja aceleração $\gamma''(t)$ pertence a $(T_{\gamma(t)}S)^{\perp}$ para todo $t \in J$, também prove que (i) Cada meridiano $a_\theta$ é uma geodésica da superfície de revolução $S$ acima definida. (ii) Um paralelo $\beta_t$ é uma geodésica se e só se $\gamma_1'(t) = 0$.

*Demonstração.* Mostrar o primeiro é fácil, pois temos que

$$\begin{aligned} \alpha_\theta'(t) &= (\gamma_1'(t)\cos\theta, \gamma_1'(t)\sin\theta, \gamma_3'(t)) \\ \beta_t'(\theta) &= (-\gamma_1(t)\sin\theta, \gamma_1(t)\cos\theta, 0) \\ \alpha_\theta'(t) \cdot \beta_t'(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

Para provar b, trocando em miúdos, percebemos que uma curva é uma geodésica se a segunda derivada dela dela é normal da própria superfície.

O item (i) sai quando derivamos

$$\alpha_\theta''(t) = (\gamma_1''(t)\cos\theta, \gamma_1''(t)\sin\theta, \gamma_3''(t))$$

E é ortogonal à normal $(-\gamma_3'(t)\gamma_1(t)\cos\theta, -\gamma_3'(t)\gamma_1(t)\sin\theta, \gamma_1(t)\gamma_1'(t))$, pois o dot product é 0.

No entanto o dot product de $\beta_t''(\theta) = -(-\gamma_1(t)\cos\theta, -\gamma_1(t)\sin\theta, 0)$ e a normal é

Para (ii), o enunciado parece errado. Pois $\beta_t''(\theta) = -(\gamma_1(t)\cos\theta, \gamma_1(t)\sin\theta, 0)$ e a normal é $(-\gamma_3'(t)\gamma_1(t)\cos\theta, -\gamma_3'(t)\gamma_1(t)\sin\theta, \gamma_1(t)\gamma_1'(t))$. Portanto o dot product é $\gamma_3'(t)\gamma_1^2$, que nos faz pensar que deve ser a derivada de ordem 0 e não de ordem 1. □

**Exercício 5.1.** Calcule as primeiras formas fundamentais de

- $\sigma_1(u, v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2)$
- $\sigma_3(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$

*Demonstração.* a)

- $E_1 = 2 + 4u^2$
- $F_1 = 4uv$
- $G_1 = 2 + 4v^2$

c)

- $E_3 = 1 + 4u^2$

- $F_3 = 4uv$
- $G_3 = 1 + 4v$

$\square$

**Exercício 5.3.** A aplicação da metde do cone circular $x^2 + y^2 = z^2, z > 0$, no plano $0XY$, dada por $(x, y, z) \to (x, y, 0)$ é uma isometria?

*Demonstração.* Lembrete: uma função $f : S_1 \to S_2$ é isometria se e só se, para cada mapa $\sigma_1$ de um atlas de $S_1$, as primeiras formas fundamentais de $\sigma_1$ e $f \circ \sigma_1$ são idênticas.

Primeiramente, achemos um mapa para tal cone circular, que pode ser $\sigma(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$. Temos, portanto, que calcular as primeiras formas fundamentais de $\sigma$ e de $f \circ \sigma(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$.

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$
$$\frac{\partial(f \circ \sigma)}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$\frac{\partial(f \circ \sigma)}{\partial\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

Calculemos as primeiras formas fundamentais.

$$\mathcal{F}_\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \mathrm{r}^2 \end{bmatrix}$$

$$F_{f\circ\sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{r}^2 \end{bmatrix}$$

Como as primeiras formas fundamentais são diferentes, não se treta de isometria. $\square$

**Exercício 5.5.** Um mapa global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície $S$ diz-se conformal se a projeção

$$\begin{array}{llll} f: & S & \to & \Pi \\ & (x, y, z) & \to & (\sigma^{-1}(x, y, z), 0) \end{array}$$

na superfície plana $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in U, z = 0\}$, é conformal. Mostre que: a) O mapa $\sigma$ é conformal se e só se $E = G$ e $F = 0$. b) O mapa

$$\sigma(u, v) = \left(x - \frac{x^3}{3} + xy^2, x^2 - y^2\right)$$

é conformal

*Demonstração.* Lembrete: um difeomorfismo $f : S_1 \to S_2$ é conformal se e só se para todo $\sigma_1$ de um atlas de $S_1$, as primeiras formas fundamentais de $\sigma_1$ e $f \circ \sigma_1$ são proporcionais para alguma função $\lambda : U \to \mathbb{R}^+$.

Pois bem, seja $\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ o que nos leva que $f \circ \sigma(u,v) = (u,v,0)$. Parece claro que $\mathcal{F}_{f\circ\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Portanto $E_\sigma = \lambda \cdot 1$, $F_\sigma = \lambda \cdot 0$ e $G\sigma = \lambda \cdot 1$ o que implica que $E_\sigma = G_\sigma$ e $F_\sigma = 0$. Para provar o próximo item, basta calcular as derivadas parciais

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \left(1 - x^2 + y^2, 2xy, 2x\right)$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \left(2xy, 1 - y^2 + x^2, -2y\right)$$

Agora, basta verificar que $F_\sigma = 0$ e que $E_\sigma = G_\sigma$. □

**Exercício 5.7.** a) Prove que qualquer isometria é uma aplicação conformal. Mostre que a projeção estereográfica é um exemplo de um difeomorfismo conformal que não é uma isometria.

b) Prove que qualquer isometria é uma aplicação equiareal. Mostre que que a projeção de Arquimedes é um exemplo de um difeomorfismo equiareal que não é uma isometria.

*Demonstração.* Isometria $f : S_1 \to S_2$ é uma função tal que $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{f\circ\sigma}$. Uma aplicação conformal é uma tal que $F_\sigma = \lambda F_{f\circ\sigma}$. Ora, é óbvio, basta tomar $\lambda = 1$.

$$\sigma(x,y) = \left(\frac{2xr^2}{x^2+y^2+r^2}, \frac{2yr^2}{x^2+y^2+r^2}, \frac{r\left(x^2+y^2+r^2\right)}{x^2+y^2+r^2}\right)$$

Lembrete: um difeomorfismo é equiareal quando $E_\sigma G_\sigma - F_\sigma^2 = E_{f\circ\sigma} G_{f\circ\sigma} - F_{f\circ\sigma}^2$. Basicamente é que ele mantém área. Trocando em miúdos: o determinante do jacobiano é o mesmo.

Ora, é óbvio. Afinal uma isometria é tal que $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{f\circ\sigma}$, portanto a igualdade necessariamente tem que valer.

A fórmula da aplicação de Arquimedes de $S_1$ (esfera unitária) em $S_2$ (cilindro unitário) é

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, z\right)$$

Basta verificarmos. Primeiro, achemos a PFF da esfera. Após algumas contas omitidas achamos

$$\mathcal{F}_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

Agora, encontremos a PFF de $f(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$. Temos que as derivadas parciais de $f$ são $\frac{\partial f\circ\sigma}{\partial \phi} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ e $\frac{\partial f\circ\sigma}{\partial \theta} = (0, 0, \cos\theta)$. Achamos portanto Primeiras formas fundamentais idênticas, o que contradiz o enunciado, pois

$$\mathcal{F}_{f\circ\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

□

**Exercício 5.9.** Considere as superfícies

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0, |x| < \pi/2\right\}$$

e

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, y > 0\right\}$$

e seja $g : S_1 \to S_2$ definida por

$$g(x,0,z) = (\sin x, \cos x, z).$$

a) Prove que $g$ é uma isometria. b) Sabendo que o caminho mais curto em $S_2$ entre os pontos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -3\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 4\right)$ define uma curva (regular) determine: (i) o comprimento desse caminho. (ii) esse caminho

c) Determine a área do triângulo em $S_2$ de vértices $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $(0,1,2)$.

*Demonstração.* Primeiro, encontramos parametrizações para $S_1$. Para $S_1$ podemos usar $\sigma_1(u,v) = (\arctan(u), 0, v)$.

Agora precisamos mostrar que $\mathcal{F}_{\sigma 1} = \mathcal{F}_{f \circ \sigma_1}$. Temos que

$$\mathcal{F}_{\sigma 1} = \left[\frac{1}{(u^2+1)^2} 001\right]$$

Agora, façamos algumas contas pelo didatismo para achar a forma fundamental da isometria:

$$g\left(\arctan\left(u\right), 0, v\right) = \left(\sin\left(\arctan\left(u\right)\right), \cos\left(\arctan\left(u\right)\right), v\right)$$
$$\frac{\partial g \circ \sigma_1}{\partial u} = \left(\frac{1}{u^2+1}\cos\left(\arctan u\right), -\frac{1}{u^2+1}\sin\left(\arctan u\right), 0\right)$$
$$\frac{\partial g \circ \sigma_1}{\partial v} = (0,0,1)$$

Daí sai que $\mathcal{F}_{f \circ \sigma_1}$ é idêntico, portanto, isometria.

b) Não sei se sei fazer

c) Aqui basta se aproveitar do fato do cilindro ser uma isometria e portanto uma transformação equiareal.

Portanto aproveitemos a parametrização $\sigma_2(\theta, r) = (\cos\theta, \sin\theta, r)$. Encontremos os $\theta$ e $r$ correspondentes e calculemos a área. Eles são $(\pi/4, 0), (-\pi/4, 0)$ e $(0,2)$. Se calcularmos a área pelo determinante achamos que é $\pi$. Assim também o é para o círculo. $\square$

**Exercício 6.2.** a) Prove que todos os pontos de $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2\right\}$ são elípticos.

b) Prove que todos os pontos de $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 - y^2\}$ são hiperbólicos.

c) Prove que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^3 - y^3\}$ contém pontos de qualquer um dos quatro tipos, determinando-os.

*Demonstração.* a) Utilizaremos a parametrização:

$$\sigma_1(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

Assim, temos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) = (1, 0, 2u)$$
$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) = (0, 1, 2v)$$

Calculamos a primeira forma fundamental:

$$E = \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) = (1,0,2u) \cdot (1,0,2u) = 1 + 4u^2$$
$$F = \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) = (1,0,2u) \cdot (0,1,2v) = 4uv$$
$$G = \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) = (0,1,2v) \cdot (0,1,2v) = 1 + 4v^2$$

Além disso, as derivadas parciais de segunda ordem da parametrização são:

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u^2}(u,v) = (0,0,2)$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u \partial v}(u,v) = (0,0,0)$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial v^2}(u,v) = (0,0,2)$$

Também:

$$N(u,v) = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

Com isso, calculamos a segunda forma fundamental:

$$e = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u^2}(u,v) \cdot N(u,v)\right) = -\left((0,0,2) \cdot \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$
$$f = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u \partial v}(u,v) \cdot N(u,v)\right) = -\left((0,0,0) \cdot \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = 0$$
$$g = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial v^2}(u,v) \cdot N(u,v)\right) = -\left((0,0,2) \cdot \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

Finalmente, calculamos a curvatura gaussiana:

$$K(p) = \frac{e(q)\cdot g(q) - f(q)^2}{E(q)\cdot G(q) - F(q)^2} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \cdot -\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} - 0}{(1+4u^2)(1+4v^2) - 16u^2v^2} =$$
$$= \frac{\frac{4}{4u^2+4v^2+1}}{1+4u^2+4v^2+16u^2v^2-16u^2v^2} = \frac{4}{(4u^2+4v^2+1)^2}$$

Assim, como $(4u^2+4v^2+1)^2 > 0$, então $K(p) > 0$ para todo $p$ e, portanto, todos os pontos de S são elípticos.

b)Utilizaremos a parametrização:

$$\sigma_1(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$$

Assim, temos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) = (1,0,2u)$$
$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) = (0,1,-2v)$$

Calculamos a primeira forma fundamental:

$$E = \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) = (1,0,2u)\cdot(1,0,2u) = 1+4u^2$$
$$F = \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) = (1,0,2u)\cdot(0,1,-2v) = -4uv$$
$$G = \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) = (0,1,-2v)\cdot(0,1,-2v) = 1+4v^2$$

Além disso, as derivadas parciais de segunda ordem da parametrização são:

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u^2}(u,v) = (0,0,2)$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u \partial v}(u,v) = (0,0,0)$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial v^2}(u,v) = (0,0,-2)$$

Também:

$$N(u,v) = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

Com isso, calculamos a segunda forma fundamental:

$$e = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u^2}(u,v)\cdot N(u,v)\right) = -\left((0,0,2)\cdot\frac{(-2u,2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$
$$f = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u \partial v}(u,v)\cdot N(u,v)\right) = -\left((0,0,0)\cdot\frac{(-2u,2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = 0$$
$$g = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial v^2}(u,v)\cdot N(u,v)\right) = -\left((0,0,-2)\cdot\frac{(-2u,2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

Finalmente, calculamos a curvatura gaussiana:

$$K(p) = \frac{e(q) \cdot g(q) - f(q)^2}{E(q) \cdot G(q) - F(q)^2} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} - 0}{(1+4u^2)(1+4v^2) - 16u^2v^2} =$$
$$= \frac{-\frac{4}{4u^2+4v^2+1}}{1 + 4u^2 + 4v^2 + 16u^2v^2 - 16u^2v^2} = -\frac{4}{(4u^2+4v^2+1)^2}$$

Assim, como $(4u^2 + 4v^2 + 1)^2 > 0$, então $K(p) < 0$ para todo $p$ e, portanto, todos os pontos de S são hiperbólicos.

c)Utilizaremos a parametrização:

$$\sigma_1(u, v) = (u, v, u^3 + v^3)$$

Assim, temos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v) = (1, 0, 3u^2)$$
$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 3v^2)$$

Calculamos a primeira forma fundamental:

$$E = \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v) = (1, 0, 3u^2) \cdot (1, 0, 3u^2) = 1 + 9u^4$$
$$F = \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v) = (1, 0, 3u^2) \cdot (0, 1, 3v^2) = 9u^2v^2$$
$$G = \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 3v^2) \cdot (0, 1, 3v^2) = 1 + 9v^4$$

Além disso, as derivadas parciais de segunda ordem da parametrização são:

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u^2}(u, v) = (0, 0, 6u)$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u \partial v}(u, v) = (0, 0, 0)$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial v^2}(u, v) = (0, 0, 6v)$$

Também:

$$N(u, v) = \frac{(-3u^2, -3v^2, 1)}{\sqrt{9u^4 + 9v^4 + 1}}$$

Com isso, calculamos a segunda forma fundamental:

$$e = -\left(\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial u^2}(u,v)\cdot N(u,v)\right) = -\left((0,0,6u)\cdot\frac{(-3u^2,-3v^2,1)}{\sqrt{9u^4+9v^4+1}}\right) = -\frac{6u}{\sqrt{9u^4+9v^4+1}}$$
$$f = -\left(\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial u\partial v}(u,v)\cdot N(u,v)\right) = -\left((0,0,0)\cdot\frac{(-3u^2,-3v^2,1)}{\sqrt{9u^4+9v^4+1}}\right) = 0$$
$$g = -\left(\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial v^2}(u,v)\cdot N(u,v)\right) = -\left((0,0,6v)\cdot\frac{(-3u^2,-3v^2,1)}{\sqrt{9u^4+9v^4+1}}\right) = -\frac{6v}{\sqrt{9u^4+9v^4+1}}$$

Finalmente, calculamos a curvatura gaussiana:

$$K(p) = \frac{e(q)g(q)-f(q)^2}{E(q)G(q)-F(q)^2} = \frac{-\frac{6u}{\sqrt{9u^4+9v^4+1}}\cdot -\frac{6v}{\sqrt{9u^4+9v^4+1}} - 0}{(1+9u^4)(1+9v^4)-81u^4v^4} =$$
$$= \frac{\frac{36uv}{9u^4+9v^4+1}}{1+9u^4+9v^4+81u^4v^4-16u^4v^4} = \frac{36uv}{(9u^4+9v^4+1)^2}$$

Calculamos também a curvatura média:

$$H(p) = \frac{e(q)G(q)-2f(q)F(q)+g(q)E(q)}{2(E(q)G(q)-F(q)^2)} = \frac{-\frac{6u}{\sqrt{9u^4+9v^4+1}}(1+9v^4) - \frac{6v}{\sqrt{9u^4+9v^4+1}}(1+9u^4)}{2(9u^4+9v^4+1)} =$$
$$= \frac{6u+6v+54v^4u+54vu^4}{2(9u^4+9v^4+1)^{3/2}}$$

Assim, como $(9u^4+9v^4+1)^2 > 0$ e $2(9u^4+9v^4+1)^{3/2} > 0$, temos:

- Se $u = 0$ e $v = 0$: $K(p) = 0$ e $H(p) = 0 \Rightarrow$ p é um ponto planar;
- Se $u = 0$ e $v \neq 0$: $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0 \Rightarrow$ p é um ponto parabolóico;
- Se $u \neq 0$ e $v = 0$: $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0 \Rightarrow$ p é um ponto parabolóico;
- Se $u < 0$ e $v > 0$: $K(p) < 0 \Rightarrow$ p é um ponto hiperbólico;
- Se $u > 0$ e $v < 0$: $K(p) < 0 \Rightarrow$ p é um ponto hiperbólico;
- Se $u > 0$ e $v > 0$: $K(p) > 0 \Rightarrow$ p é um ponto elíptico;
- Se $u < 0$ e $v < 0$: $K(p) > 0 \Rightarrow$ p é um ponto elíptico.

$\square$

**Exercício 6.4.** Considere a superfície de revolução, com eixo de revolução $OZ$, parametrizada por

$$\sigma(u,v) = (f(u)cos(v), f(u)sin(v), g(u))$$

onde $v \in (0, 2\pi), u \in I$ e $f$ é uma função positiva.

a) Determine a segunda forma fundamental da parametrização $\sigma$.

b) Quando é que a geratriz $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ está parametrizada por comprimento de arco?

c) Se a geratriz $\gamma$ está parametrizada por comprimento de arco, mostre que

$$K(u, v) = -f''(u)/f(u)$$

d) Determine as geratrizes $\gamma$, parametrizada por comprimento de arco, cujas superfícies de revolução tenham curvatura gaussiana constante igual a 4.

*Demonstração.* a) As derivadas parciais de primeira ordem da parametrização são:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = (f'(u)cos(v), f'(u)sin(v), g'(u))$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (-f(u)sen(v), f(u)cos(v), 0)$$

Também:

$$N(u, v) = \frac{(-g'(u)cos(v), -g'(u)sin(v), f'(u))}{\sqrt{g'(u)^2 + f'(u)^2}}$$

As derivadas parciais de segunda ordem da parametrização são:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}(u, v) = (f''(u)cos(v), f''(u)sin(v), g''(u))$$
$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}(u, v) = (-f(u)cos(v), -f(u)sin(v), 0)$$
$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2}(u, v) = (-f'(u)sin(v), f'(u)cos(v), 0)$$

Assim, a segunda forma fundamental é:

$$e = -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}(u, v) \cdot N(u, v)\right) = \frac{f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u)}{\sqrt{g'(u)^2 + f'(u)^2}}$$
$$f = -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}(u, v) \cdot N(u, v)\right) = 0$$
$$g = -\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2}(u, v) \cdot N(u, v)\right) = -\frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{g'(u)^2 + f'(u)^2}}$$

b) Se $\gamma$ está parametrizada por comprimento de arco, então $\|\gamma(u)\| = 1$, ou seja, $\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2} = 1 \Rightarrow f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$.

c) Temos que a primeira forma fundamental é:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) = f'(u)^2 + g'(u)^2 \\
F &= \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) = 0 \\
G &= \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) = f(u)^2
\end{aligned}
$$

$\square$

Se $\gamma$ está parametrizada por comprimento de arco, a curvatura gaussiana da superfície é:

$$
\begin{aligned}
K(p) = \frac{e(q)g(q) - f(q)^2}{E(q)G(q) - F(q)^2} &= \frac{[f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u)][-f(u)g'(u)]}{f(u)^2} \\
&= \frac{-f''(u)g'(u)^2 + f'(u)g'(u)g''(u)}{f(u)}
\end{aligned}
$$

Também por $\gamma$ estar parametrizada por comprimento de arco, temos que $2f''(u)f'(u) + 2g''(u)g'(u) = 0 \Rightarrow f''(u)f'(u) = -g''(u)g'(u)$. Então:

$$
\begin{aligned}
K(p) = \frac{-f''(u)g'(u)^2 + f'(u)g'(u)g''(u)}{f(u)} &= \frac{-f''(u)g'(u)^2 - f'(u)^2 f''(u)}{f(u)} \\
&= -\frac{f''(u)[g'(u)^2 + f'(u)^2]}{f(u)} = -\frac{f''(u)}{f(u)}
\end{aligned}
$$

d) Resolver a EDO $f''(u) = -4f(u)$ sabendo que $f(u) > 0$.