Gabarito lista 6

Matheus Popst
Curvas e Superfícies

8 de novembro de 2018

Exercício 1. Prove que o parabolóide hiperbólico $S = \{(x, y, z) : z = x^2 - y^2\}$ é uma superfície regular.

Demonstração. O parabolóide é uma função, portanto podemos escrever a parametrização

$$S(u, v) = \left(u, v, u^2 - v^2\right)$$

Daí, fica fácil pois podemos calcular facilmente

$$\frac{\partial S}{\partial u}(u, v) = (1, 0, 2u)$$
$$\frac{\partial S}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 2v)$$
$$\frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) = (-2u, 2v, 1)$$

□

Nota-se que $\frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial S}{\partial v}(u, v)$ é não-nulo para todo u e v, o que conclui a demonstração.

Exercício 2. Mostre que, se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de ^{2}, então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma *superfície parametrizada regular*, que descreve o gráfico da função f.

Demonstração. O atlas de X possui apenas um mapa $\sigma = (u, v, f(u, v))$. Primeiramente, para notar que se trata de um homeomorfismo de um aberto do ^{2}, isto é, que X é uma aplicação contínua com inversa contínua, primeiro notamos que cada uma das componentes é uma função contínua, portanto X é contínua (proposição 28 do livro de Análise do Ronaldo). Ainda, exibimos a sua inversa contínua $g(u, v, w) \Rightarrow (u, v)$ que obviamente é contínua.

Para mostrar que se trata de uma função suave, basta verificar que o gradiente de cada uma das componentes existe e é contínuo, ou seja:

$$(\nabla u, \nabla v, \nabla f(u, v))$$
$$((1, 0), (0, 1), \nabla f(u, v))$$

O gradiente de f existe pela hipótese do problema. Que é regular, podemos fazer de maneira semelhante ao primeiro exercício com

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) &= (1,0,f_u)\\ \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) &= (0,1,f_v)\\ \frac{\partial X}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial X}{\partial v}(u,v) &= (-f_u,f_v,1)\neq(0,0,0)\end{aligned}$$

□

Exercício 3. Considere uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in I \subset$. Seja o subconjunto de ^{3} gerado pelas retas que passam por $\alpha(s)$, paralelas ao eixo 0_x. Dê uma condição suficiente que deve satisfazer a curva α para que S seja o traço de uma *superfície parametrizada regular*.

Demonstração. Oras, se para cada ponto de α iremos desenhar uma reta paralela a O_x, por exemplo $\beta(t) = (t,0,0)$ seria uma reta pertinente. Agora, para criar uma superfície fica fácil.

$$S(s,t) = \alpha(s) + \beta(t)$$

Agora basta analisarmos o que devemos exigir para que o gradiente seja não nulo.

$$\begin{aligned}S(s,t) &= (x(s)+t, y(s), z(s))\\ \frac{\partial S}{s} &= \frac{\partial \alpha}{\partial s}\\ \frac{\partial S}{t} &= (1,0,0)\\ \frac{\partial S}{s}\wedge\frac{\partial S}{t} &= (0,z,-y)\end{aligned}$$

Portanto, a condição é que $\forall s$ tenhamos que $z(s)+y(s)\neq 0$. □

Exercício 4. Mostre que as superfícies

$$\begin{aligned}X(u,v) &= (u+v, u-v, 4uv), (u,v)\in^2\\ Y(s,t) &= (s,t,s^2-t^2), (s,t)\in^2\end{aligned}$$

tem o mesmo traço.

Demonstração. Se realizarmos a substituição $s = u+v$ e $t = u-v$ teremos que

$$Y(s,t) = (u+v, u-v, 4uv)$$

Que podemos chamar de $X(u,v) = (u+v, u-v, 4uv)$ □

Exercício 5. (Picado, 2.4) Mostre que o *cilindro circular* $S = \{(x, y, z) \in^3 \colon x^2 + y^2 = r^2\}, r \neq 0$, pode ser coberto por uma parametrização e, portanto, é uma superfície.

Demonstração. Basta exibirmos a parametrização

$$S(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$$

Para cada $(x, y, z) \in S$ tomamos $v = z$ e $u = \arctan \frac{y}{x}$. Ademais basta verificar que $r^2 \cos^2 u + r^2 \sin^2 u = r^2$. □

Exercício 6. (Picado 2.6) Seja $f : U \to^3$, $(x, y) \to (x^2, xy, y^2)$, sendo $U = \{(x, y) \in^2 \colon x > 0, y > 0 .Proveq$

Demonstração. Precisamos mostrar que f é um homeomorfismo do ^{2} no ^{3}. Para tanto devemos primeiro mostrar que f é contínua em U. Isso decorre naturalmente do fato de que cada uma de suas componentes é contínua.

Para verificarmos a inversa, basta tomarmos $f^{-1}(u, v, w) = (\sqrt{u}, \sqrt{w})$. Pode-se suscitar dúvidas que essa inversa esteja efetivamente bem definida, mas devemos nos lembrar que o quadrado é sim bijetor quando $x > 0$. □

Exercício 7. Para que valores c pode-se garantir que $S = \{(x, y, z) \in^3 \colon z(z-2) + xy = c\}$ é uma superfície?

Demonstração. Tentemos escrever uma das variáveis como função das outras duas e usar a teoria dos gráficos de funções.

$$x = -\frac{z(z-2) - c}{y}$$

Portanto a parametrização seria

$$\sigma(u, v) = \left(-\frac{v(v-2) - c}{u}, u, v \right)$$

Se $c = 0$, então teremos que

$$\lim_{u,v \to 0} \frac{v(v-2) - c}{u} = \lim_{u,v \to 0} \frac{r \cos\theta (r \cos\theta - 2) - c}{r \cos\theta} = \lim_{r \to 0} \frac{2r \cos^2\theta - 2\cos\theta - c}{\cos\theta}$$

Nota-se que se $c \neq 0$, não conseguimos resolver o limite para não deixá-lo em função de θ. Em particular, no caso contrário, se nos aproximamos por $\theta = \frac{\pi}{2}$, o limite fica infinito, tornando impossível que a superfície esteja definida no ponto $\sigma(0, 0)$.

Para que a função seja contínua, naturalmente, temos que ter $\sigma(0, 0) = (-2, 0, 0)$, precisando de uma nova parametrização no nosso atlas. Mas como?

Oras, pensemos agora na parametrização que ao inves de termos colocado y no denominador, colocamos x.

□