Vacinação e tratamento ótimos em um modelo SIR com distinção de classes ecomômicas

Matheus Popst

Escola de Matemática Aplicada da FGV

ma.popst@hotmail.com

14 de abril de 2019

Modelo SIR

O modelo SIR é um modelo compartimental que no nosso problema terá dois controles:

$$
\begin{aligned}
S' &= b - \beta SI - dS - u_1 S, \\
I' &= \beta SI - u_2 I - dI - \alpha I, \\
R' &= u_1 S + u_2 i - dR
\end{aligned}
$$

u_1 é uma vacina u_2 é um tratamento

Principio de Pontryagin

O princípio de Pontryagin é o que nos permite resolver problemas do tipo.

$$\max_{u_1,\ldots,u_m} = \int_{t_0}^{t_1} f\left(x_1\left(t\right),\ldots,x_n\left(t\right),u_1\left(t\right),\ldots,u_m\left(t\right)\right)dt+$$

$\phi\left(x_1\left(t\right),\ldots,x_n\left(t\right)\right)$
Sujeito a

$$x_i'(t) = g_i\left(x_1\left(t\right),\ldots,x_n\left(t\right),u_1\left(t\right),\ldots,u_m\left(t\right)\right)$$

E a $x_i(t_0) = x_{i0}$ para $i = 1,\ldots,n$

Exemplo de Pontryagin

$$\min_u \int_0^1 u(t)^2 dt$$

sujeito a $x'(t) = x(t) + u(t)$ e $x(0) = 1$.

Resposta:

$\lambda \equiv 0$, $u^* \equiv 0$, $x^*(t) = e^t$.

Zika Virus no Brasil

Dados do Ministério da Saúde mostram que a maioria dos casos da Síndrome Congênita de Zika está concentrada na região Nordeste do Brasil, especialmente nos estados de Pernambuco, Bahia, Paraíba e Maranhão. Contudo, nessas áreas afetadas, inclusão social e acesso a mecanismos de apoio foram as principais preocupações das famílias de crianças com deficiência. Essas famílias estão entre os mais pobres, o que torna a responsabilidade de cuidar de uma criança com necessidades especiais ainda mais difícil.[CENTER FOR REPRODUCTIVE RIGHTS]

Tabela de variáveis

Aqui fazemos uma expansão das variáveis encontradas em [BENYAH/YUSUF 2012].[1]

- Total populacional suscetível pobre (S_p)
- Total populacional suscetível rico (S_r)
- Total populacional infectado pobre (I_p)
- Total populacional infectado rico (I_r)
- Total populacional recuperado pobre (R_p)
- Total populacional recuperado rico (R_r)
- Quantidade de vacina nos pobres ($0 \leq u_{p1} \leq u_{\max_{p1}} \leq 1$)
- Quantidade de vacina nos ricos ($0 \leq u_{r1} \leq u_{\max_{r1}} \leq 1$)
- Quantidade de tratamento nos pobres ($0 \leq u_{p2} \leq u_{\max_{p2}} \leq 1$)
- Quantidade de tratamento nos ricos ($0 \leq u_{r2} \leq u_{\max_{r2}} \leq 1$)

[1] Todas em função do tempo t.

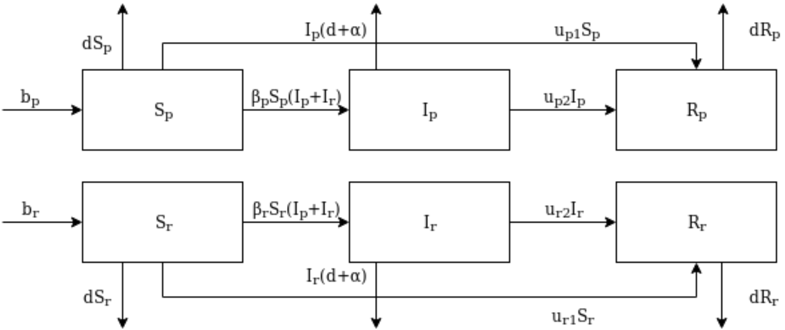
Tabela de constantes

- Taxa de recrutamento nos pobres (b_p)
- axa de recrutamento nos ricos (b_r)
- Taxa de transmissão nos pobres (β_p)
- Taxa de transmissão nos ricos (β_r)
- Taxa de morte natural (δ)
- Taxa de mortes causadas pela doença (α)
- Total populacional ($N(t) = S_p + S_r + I_p + I_r + R_p + R_r$)

O sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{S}_p &= b_p - \beta_p S_p(I_p + I_r) - dS_p - u_{p1} S_p \\
\dot{S}_r &= b_r - \beta_p S_r(I_p + I_r) - dS_r - u_{r1} S_r \\
\dot{I}_p &= \beta_p S_p(I_p + I_r) - dI_p - u_{p2} I_p - \alpha I_p \\
\dot{I}_r &= \beta_p S_r(I_p + I_r) - dI_r - u_{r2} I_r - \alpha I_r \\
\dot{R}_p &= u_{p1} S_p + u_{p2} I_p - dR_p \\
\dot{R}_r &= u_{r1} S_r + u_{r2} I_r - dR_r \\
\dot{N} &= b_p + b_r - dN - \alpha(I_p + I_r)
\end{aligned}
$$

Esquema


dSp
Ip(d+α)
up1Sp
dRp
bp
Sp
βpSp(Ip+Ir)
Ip
up2Ip
Rp
br
Sr
βrSr(Ip+Ir)
Ir
ur2Ir
Rr
dSr
Ir(d+α)
dRr
ur1Sr

Estabilidade local não endêmica

Para analisar a estabilidade local, devemos tomar $I_p = I_r = \dot{I}_p = \dot{I}_r = \dot{S}_p = \dot{S}_r = \dot{R}_p = \dot{R}_r = 0$

$$N\hat{*} = \frac{b_p + b_r}{d} \tag{1}$$

$$R_p^* = \frac{u_{p1} S_p}{d} \tag{2}$$

$$S_r^* = \frac{b_r}{d + u_{r1}} \tag{3}$$

$$S_p^* = \frac{b_p}{d + u_{p1}} \tag{4}$$

Valendo a pena notar que $S_p^*, S_r^*, R_p^*, N\hat{*} > 0$

Estabilidade não endêmica

O problema de controle ótimo

Queremos minimizar durante T anos o seguinte problema:

$$\min_{u_{p1},u_{p2},u_{r1},u_{r2}} \frac{1}{2}\int_0^T C_{p1}u_{p1}(t)^2+C_{p2}u_{p2}(t)^2+C_{r1}u_{r1}(t)^2+C_{r2}u_{r2}(t)^2 dt$$

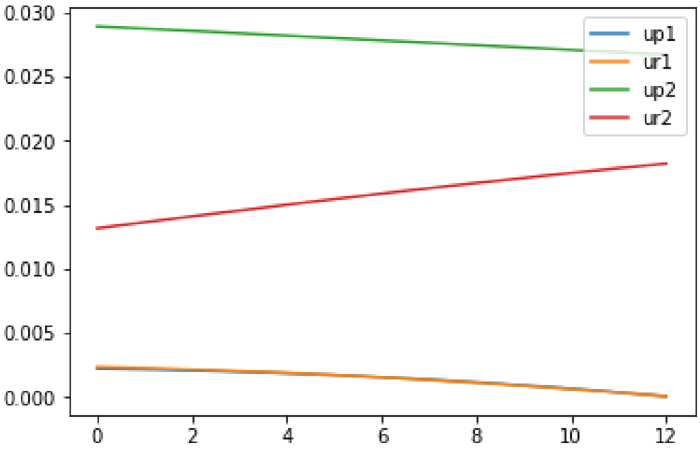
$$+I_p(T)+I_r(T)$$

Sujeito à equações diferenciais já apresentadas e a um conjunto de condições iniciais.

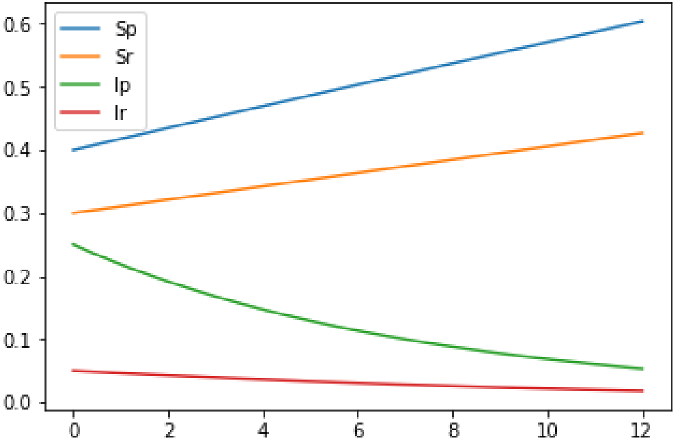
Os valores

bp = 0.03
br = 0.02
alpha = 0.1
delta = 0.005
d = 0.02
beta = 0.75
maxup1, maxup2, maxur3, maxur2 = 1,1,1,1
sp0 = 0.4
sr0 = 0.3
ip0 = 0.25
ir0 = 0.05
Cp1 = 4
Cp2 = 2
Cr1 = 3
Cr2 = 1

Resultados - controles ótimos



Resultados - população



Referências

Tunde Tajudeen YUSUF Francis BENYAH(2012)
Optimal control of vaccination and treatment for an SIR epidemiological model.
World Journal of Modelling and Simulation 8(3), 194 – 204.

Suzanne LENHART John Workman(2007)
Optimal Control Apllied to Biological Models
Chapter 1, 12 – 15.

Center for Reproductive Rights
Vozes sileciadas - a experiência da mulher com o Zika Vírus (Brasil)
Conclusão, 44.