Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №5
«Численное интегрирование ОДУ одношаговыми методами»

Дисциплина: «Численные методы»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Анищенко М.Д.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург 2022

Оглавление

1 Формулировка задачи и её формализация **3**
- 1.1 Формулировка задачи . . . 3
- 1.2 Формализация задачи . . . 3

2 Алгоритм метода и условия его применимости **4**
- 2.1 Алгоритм метода . . . 4
- 2.2 Условия применимости . . . 4

3 Анализ задачи **4**

4 Тестовый пример **5**

5 Контрольные тесты **6**

6 Модульная структура программы **6**

7 Численный анализ **7**
- 7.1 Графики функций . . . 7
- 7.2 График ошибки . . . 8
- 7.3 Зависимость локальной и глобальной погрешностей от h . . . 8
- 7.4 Достижение точности с применением правила Рунге . . . 9
- 7.5 Объем вычислений . . . 9

8 Общие выводы **10**

Глава 1

Формулировка задачи и её формализация

1.1 Формулировка задачи

Пусть дано дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$F(x, y, y') = 0,$$

где $y(x)$ — неизвестная функция. Поставлена задача Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Необходимо найти приближенное решение этой задачи.

1.2 Формализация задачи

В данном варианте необходимо решить следующую задачу Коши методом Эйлера:

$$\begin{cases} (2x + 1)y' = 4x + 2y, x \in [0, 4] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Из условия известно точное решение, с которым мы будем сравнивать решение, полученное методом Эйлера:

$$y = (2x + 1) \ln |2x + 1| + 1$$

Глава 2

Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Алгоритм метода

1. Строим равномерную сетку:

$$x_k = a + kh, k = 0, \ldots, n; h = \frac{b-a}{n}$$

$$x, x + h \in [a, b]$$

2. Разложим в ряд Тейлора:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Пусть $x = x_k \Rightarrow y(x_k + h) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \mathcal{O}(h^2)$.

3. Отбросим $\mathcal{O}(h^2)$ и заменим $y(x_k)$ на y_k.

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

2.2 Условия применимости

Необходимо, чтобы $f(x, y)$ была определена на всем отрезке $[a, b]$.

Глава 3

Анализ задачи

Для корректного решения задачи, мы должны проверить выполнение условий применимости.

$$y' = f(x, y) = \frac{4x + 2y}{2x + 1}$$

$$2x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$$

В данном варианте вычисления проводятся на отрезке $[0, 4]$.
$-\frac{1}{2} \notin [0, 4]$. Значит, условия применимости выполнены.

Глава 4

Тестовый пример

Тестовый пример выполним для нашей функции $F(x, y, y')$. Сделаем два шага с длиной $h = 0.1$ и один шаг с длиной $2h = 0.2$, затем вычислим ошибку на каждом этапе и применим правило Рунге.

$$\begin{cases} y' = \frac{4x+2y}{2x+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Два шага длиной $h = 0.1$:

   (a)
   $$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot \frac{4 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 0 + 1} = 1 + 0.1 \cdot 2 = 1.2$$
   Фактическая ошибка равна $|y(0.1) - y_1| = |1.21879 - 1.2| = 0.01879$.

   (b)
   $$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.2 + 0.1 \cdot \frac{4 \cdot 0.1 + 2 \cdot 1.2}{2 \cdot 0.1 + 1} = 1.2 + 0.1 \cdot 2.33 = 1.433$$
   Фактическая ошибка равна $|y(0.2) - y_2| = |1.47106 - 1.433| = 0.0380611$.

2. Один шаг длиной $2h = 0.2$:
   $$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 2 \cdot 0.1 \cdot \frac{4 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 0 + 1} = 1 + 2 \cdot 0.1 \cdot 2 = 1.4$$
   Фактическая ошибка равна $|y(0.2) - y_1| = |1.47106 - 1.4| = 0.0710611$.

Проверка по правилу Рунге:

$$|y_{2h} - y_h| = |1.4 - 1.433| = 0.033$$

Мы видим, что при $h = 0.1$ и $2h = 0.2$ мы получили ответ с ошибкой порядка

10^{-2} с точностью до константы.

Глава 5

Контрольные тесты

1. Сравнить графики точного и численного решения. Для этого мы построим график, разбивая отрезок на 25 частей.
2. Построить график ошибки.
3. Исследовать зависимость локальной и глобальной погрешностей от h.
4. Проверить, достигается ли точность с применением правила Рунге.
5. Исследовать влияние заданной точности на объем вычислений.

Глава 6

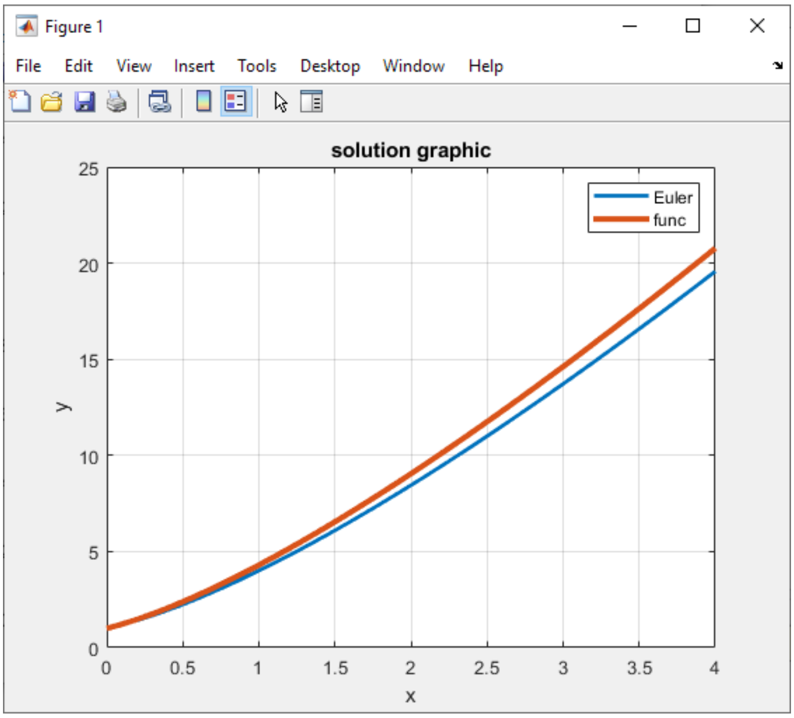
Модульная структура программы

- double f(double x, double y) — функция для вычисления значения y' в точке x.
- double* CreateGrid(double a, double b, int n) — функция для создания равномерной сетки.
- double* Euler(double a, double b, int n, double f_a) — функция, реализующая метод Эйлера на равномерной сетке, т.е. без правила Рунге, а с заданным числом отрезков n.
- int Error(double y_2h, double y_h, double epsl) — функция для вычисления ошибки между приближениями y_h и y_{2h} (правило Рунге). Если ошибка больше требуемой точности, то возвращается значение 1, иначе 0. Значение 1 означает, что нужно продолжать уменьшать h.
- double StepEulerRunge(double x, double h, double y_0, int &k) — функция для нахождения y_{k+1} и подсчета объема вычислений.
- double Euler_Runge(double a, double b, double epsl, int& n, double f_a, int& k) — функция, реализующая метод Эйлера с приминением правила Рунге.

Глава 7

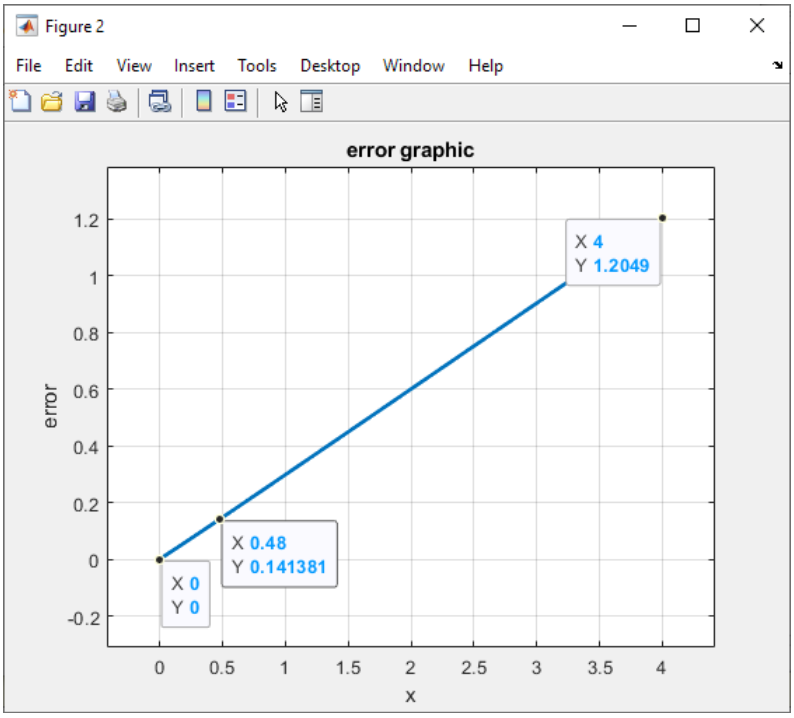
Численный анализ

7.1 Графики функций



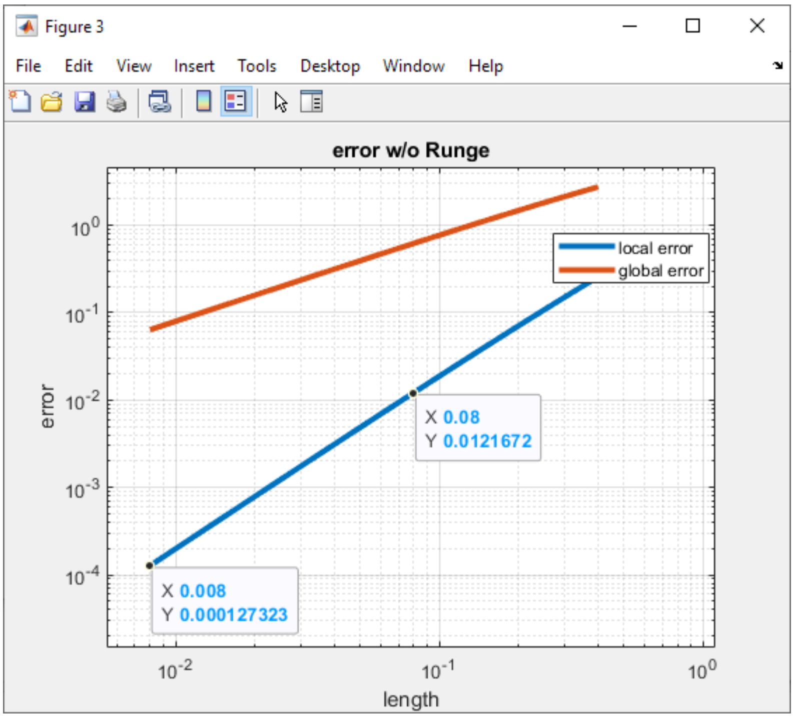
Мы можем видеть, что уже при 26 узлах график функции, полученной из численного метода, достаточно близок к точному графику функции $y(x)$.

7.2 График ошибки



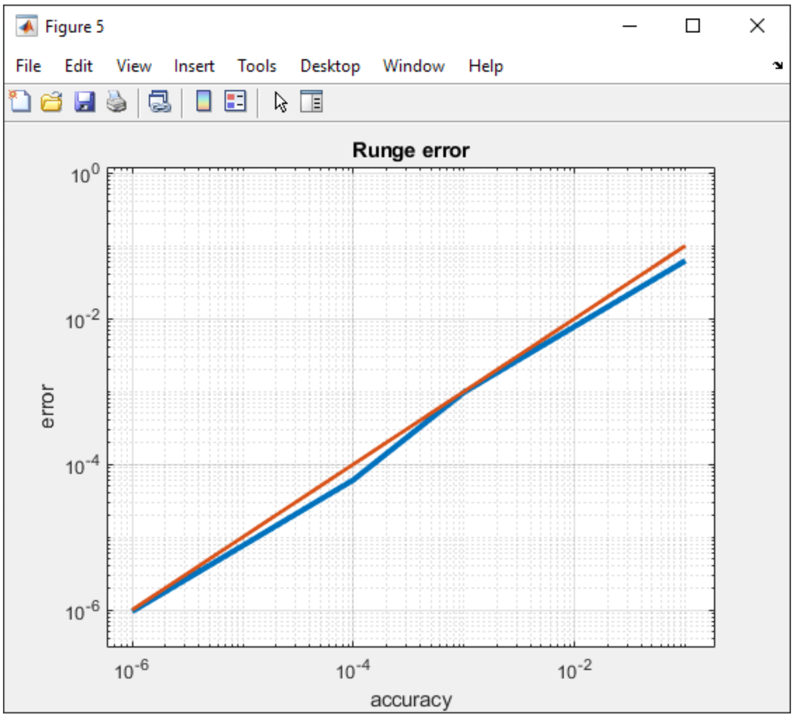
Из данного графика мы видим, что при увеличении значения x ошибка увеличивается. Это объясняется тем, что в алгоритме метода мы отбросили $\mathcal{O}(h^2)$. Соответственно, это отброшенное значение есть локальная ошибка. И так как каждое следующее значение y_{k+1} получается из $y(_k)$, так же отбрасывая $\mathcal{O}(h^2)$, ошибка накапливается. График соответствует этому.

7.3 Зависимость локальной и глобальной погрешностей от h



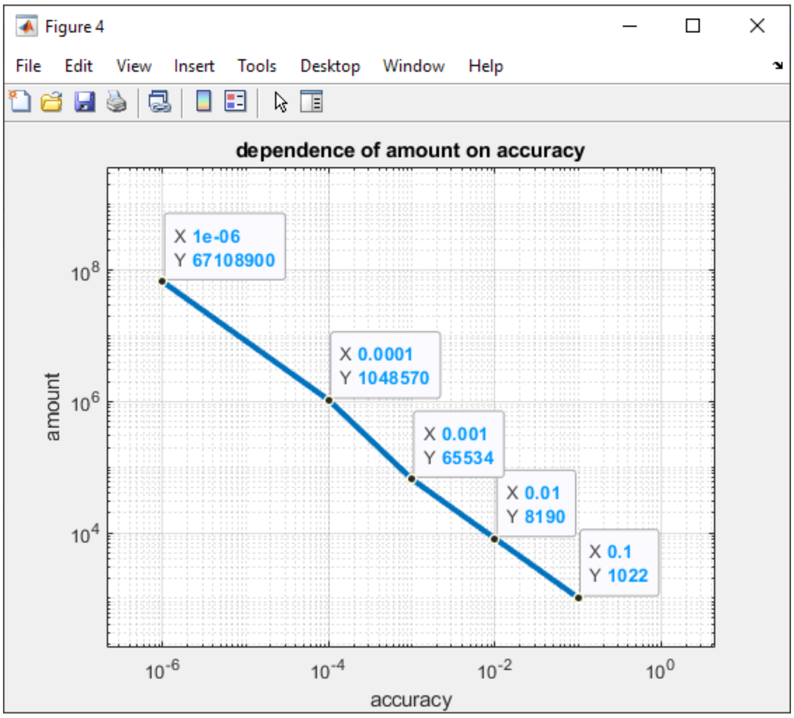
Из графика мы видим, что локальная погрешность зависит от h как $\mathcal{O}(h^2)$, потому что именно таким значением мы пренебрегали при нахождении каждого следующего y. При этом глобальная ошибка уменьшается, как и ожидалось, потому что большее количество узлов соответствует более точному результату (что также подтвердилось в тестовом примере). Однако разница между глобальной и локальной погрешностью увеличивается при уменьшении точности, поскольку количество таких пренебрежений $\mathcal{O}(h^2)$ возрастает.

7.4 Достижение точности с применением правила Рунге



Данный график показывает, что праивло Рунге действительно контролирует погрешность, вследствие чего достигается требуемая точность.

7.5 Объем вычислений



Из графика видно, что объем вычислений растет, причем нелинейно. При первых увеличениях точности объем возрастает в 8 раз, затем в 16, потом и вовсе в 64. Именно поэтому в данных исследованиях точность была ограничена 10^{-6}, так как при более высоких порядках объем вычислений был слишком велик и требовал много времени.

Глава 8

Общие выводы

Исходя из результатов исследования, можно сказать, что метод Эйлера легко реализуем, но из-за малого порядка точности требует большого обьъема вычислений. Плюсом данного метода также являются "слабые"условия применимости. Однако, его не следует применять на практике для нахождения решения с высокой точностью, поскольку он неэффективен по сравнению с методами более высоких порядков, например, модифицированным методом Эйлера (2 порядок точности) или методами Рунге-Кутты (3 и 4 порядки точности).