Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №3
«Численное интегрирование с помощью формул Ньютона-Котеса»

Дисциплина: «Численные методы»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Анищенко М.Д.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург 2022

Оглавление

Глава 1

Формулировка задачи и её формализация

1.1 Формулировка задачи

Представим определённый интеграл на промежутке $[a, b]$ функции $F(x)$ в виде

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx$$

где $p(x)$ — весовая функция. Необходимо вычислить приближенное значение интеграла, используя квадратурные формулы:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

где A_k — коэффициенты, а x_k — узлы квадратурной функции.

1.2 Формализация

В данном варианте необходимо решить задачу, используя формулу Гаусса по трем узлам, для следующей функции на отрезке $[0, 3]$:

$$F(x) = x^2\cos(2x) + 1$$

Глава 2

Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Алгоритм метода

1. Выбрать $[a, b]$, весовую функцию $p(x)$ и количество узлов n (которое по условию метода равно трем).
   Возьмём отрезок $[0, 3]$, весовую функцию $p(x) = 1$.

2. Найти $\omega(x) : \int\limits_a^b p(x)\omega(x)P_{n-1}(x)dx = 0, \forall P_{n-1}(x)$.
   Это можно сделать разными способами. Выберем для этого формулу Родрига. Но учтем, что достижение точности мы будем использовать правило Рунге, согласно которому количество отрезков на следубщем шаге становится в два раза больше предыдущего. Поэтому, чтобы на каждом шаге не искать заново корневой полином (и не выполнять повторно следующие шаги), будем использовать отрезок $[-1, 1]$, а затем отображать необходимые точки на отрезок $[0, 3]$. Тогда формула Родрига принимает вид:

$$P_n(x) = \frac{c_n}{p(x)} \frac{d^n}{dx^n}[p(x)Y(x)], Y(x) \in c^{(n)}([a, b]), Y(x) = (x-a)^n(b-x)^n,$$

$$p(x) = 1, [a, b] = [-1, 1], n = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_3(x) = c_3 \frac{d^3}{dx^3}[(1-2x)^3]$$

   Решая ее, получаем:

$$c_3 \frac{d^3}{dx^3}[(1-2x)^3] = c_3[72x - 120x^3]$$

3. Решить $\omega(x) = 0 \Rightarrow x_k, k = 1, \ldots, n$
   Из предыдущего пункта получаем:

$$c_3(72x - 120x^3) = 0 \Rightarrow x(3 - 5x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

4. Найти A_k. Это тоже можно сделать несколькими способами, но в данном случае проще это будет сделать с помощью первых трех уравнений системы определяющих уравнений.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = \int\limits_{-1}^{1} x^0 dx = 2 \\ A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \int\limits_{-1}^{1} x^1 dx = 0 \\ A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 = \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Решая систему, получаем $A_1 = \frac{5}{9}, A_2 = \frac{8}{9}, A_3 = \frac{5}{9}$.

Итого получаем следующее выражение для нашей функции на отрезке $[-1, 1]$:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}[5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})]$$

Теперь на каждом шаге мы будем отображать точки x_1, x_2, x_3 на отрезок $[a_i, b_i]$. Это отрезки, на которые разбивается отрезок $[a, b]$, т.е. $a_1 = a, b_k = b$, где k — количество отрезков разбиения. Затем сложим полученные результаты. Количество слагаемых равно количеству трезков на данном шаге. Формула для отображение из отрезка $[-1, 1]$ в отрезок $[0, 3]$:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$$

2.2 Условия применимости

Для того, чтобы формула Гаусса была верна необходимо и достаточно, чтобы количество узлов было не ниже, чем $\frac{m+1}{2}$, где m – степень полинома.

Глава 3

Анализ задачи

Нам необходимо решить несколько задач: решить корневой полином и решить СЛАУ (относительно A_k). Это мы уже сделали в пункте выше. Затем будем применять полученные результаты для нашей функции $F(x) = x^2 \cos(2x) + 1$.

Глава 4

Тестовый пример