Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №1
«Решение алгебраических и трансцендентных уравнений»

Дисциплина: «Численные методы»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Анищенко М.Д.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург 2021

Оглавление

Глава 1

Формулировка задачи и её формализация

Существует два типа методов решения уравнений: аналитические и численные. На практике часто приходится сталкиваться с уравнениями, которые невозможно или затруднительно решит аналитически.
Основные проблемы аналитических методов:

- Алгебраические уравнения разрешимы только до 4-ой степени
- Трансцендентные уравнения в общем случае неразрешимы
- Заранее неизвестно, сколько корней и существуют ли они вообще

1.1 Формализация задачи

Пусть есть $f(x) : R \to R$ – алгебраическая или трансцендентная функция одной переменной. Требуется найти такой x^*, что $f(x^*) = 0$ с помощью двух численных методов и сравнить их эффективность.

1.2 Постановка задачи

1. Исследовать условия применимости методов и алгоритм их работы
2. Решить алгебраическую и трансцендентную функции с помощью метода половинного деления и комбинированного метода хорд и касательных
3. Построить графики для анализа результатов и сравнить решения с функцией fzero в MATLAB

Глава 2

Алгоритмы методов и условия их применимости

2.1 Метод половинного деления

2.1.1 Условия применимости

1. $f \in C([a, b])$
2. $f(a)f(b) < 0$

2.1.2 Алгоритм

Для выбранного промежутка $[a, b]$ принимаем $c = \frac{a+b}{2}$. Вычисляем $f(a) \cdot f(c)$. Если значение этого выражения меньше нуля, то принимаем $b = c$, иначе $a = c$. Повторяем эти действия, пока $|b - a| \leq 2\varepsilon$. В качестве конечного ответа возьмём $x = \frac{a+b}{2}$.

2.2 Комбинированный метод хорд и касательных (Ньютона)

2.2.1 Условия применимости метода хорд

1. $f \in C^{(2)}([a, b])$
2. $f(a)f(b) < 0$
3. f', f'' знакопостоянны на $[a, b]$
4. Стартовая точка $x^{(0)} : f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) < 0$
5. Неподвижный конец $\bar{x} : f(\bar{x})f''(\bar{x}) > 0$

2.2.2 Алгоритм метода хорд

Данный метод является итерационным. Для начала выберем стартовую и неподвижную точки, в качестве которых можно взять концы отрезка $[a, b]$ так, чтобы в этих точках выполнялись условия 4 и 5 соответственно. Далее действуем по итерационной формуле:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - \bar{x}}{f(x^{(k)}) - f(\bar{x})}$$

где $m_1 = min|f'(x)|$ и $M_1 = max|f'(x)|$, $x \in [a, b]$

Для остановки этого процесса существует такая оценка:

$$|x^* - x^{k+1}| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x^{k+1} - x^k|$$

2.2.3 Условия применимости метода касательных

1. $f \in C^{(2)}([a,b])$
2. $f(a)f(b) < 0$
3. f', f'' знакопостоянны на $[a,b]$
4. $x^{(0)} : f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0$ (условие Фурье)

2.2.4 Алгоритм метода касательных

Метод касательных (Ньютона) так же итерационный. В качестве стартовой точки выбирается один из концов отрезка $[a,b]$ так, чтобы выбранная точка удовлетворяла условию Фурье. Затем с помощью разложения функции f в ряд Тейлора в окрестности $x^{(k)}$ и дальнейшего отбрасывания слагаемых второй и выше степеней получаем итерационную формулу:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Итерационный процесс можно останавливать, когда $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$.

2.2.5 Алгоритм комбинированного метода

Применяя оба итерационных метода на каждом шаге нахождение корня ускоряется, так как приближение к нему происходит с двух сторон. В таком случае можно находить корень без использования оценки погрешности, сужая интервал как в методе половинного деления. При это мнадо учесть, что неподвижная точка в методе хорд будет меняться. Следующие значения концов сужающего отрезка выбираются согласно такому алгоритму:

- Если $f(a)f''(a) < 0$, то $a = a - f(a)\frac{a-b}{f(a)-f(b)}$
  иначе если $f(a)f''(a) > 0$, то $a = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$
- Если $f(b)f''(b) < 0$, то $b = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$
  иначе если $f(b)f''(b) > 0$, то $b = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$

Заканчиваем итерационный процесс, когда $|b-a| < 2\varepsilon$
В качестве корня берем значение

$$x = \frac{b+a}{2}$$

Глава 3

Анализ задачи

3.1 Алгебраическая функция

Возьмём функцию

$$f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10$$

3.1.1 Границы корней

- Верхняя граница положительных корней

  $$x^* \le 1 + \sqrt[m]{\frac{|a'|}{a_0}}$$

  Для данной функции

  $$x^* \le 1 + \sqrt[2]{\frac{12}{2}} \approx 3.45$$

- Нижняя граница положительных корней
  Выполним замену $x = \frac{1}{y}$

  $$y \le 1 + \sqrt[1]{\frac{12}{10}} = 2.2$$

  $$x^* \ge \frac{1}{2.2} \approx 0.45$$

- Нижняя граница отрицательных корней
  Выполним замену $x = -y$

  $$y \le 1 + \sqrt[1]{\frac{10}{2}} = 6$$

  $$x^* \ge -6$$

- Верхняя граница отрицательных корней
  Выполним замену $x = -\frac{1}{y}$

  $$y \le 1 + \sqrt[1]{\frac{12}{10}} = 2.2$$

  $$x^* \le -\frac{1}{2.2} \approx -0.45$$

Тогда для положительных корней $x^* \in [0.45, 3.45]$, для отрицательных $x^* \in [6, -0.45]$.

3.1.2 Проверка выполнения условий применимости

Воспользуемся теоремой о границах корней и графическим методом. Заметим, что найденный для положительных корней отрезок содержит два корня. Поэтому сузим промежуток до $[1.3, 3]$.

- Метод половинного деления:
  1. $f \in C([1.3, 3])$
  2. $f(1.3)f(3) < 0$, $((-3.0738) \cdot 595 < 0)$
- Комбинированный метод:
  1. $f \in C^{(2)}([1.3, 3])$
  2. $f(1.3)f(3) < 0$, $((-3.0738) \cdot 595 < 0)$
  3. f', f'' знакопостоянны на $[1.3, 3]$
  4. Стартовая точка для метода хорд $x^{(0)} = a = 1.3$, $f(1.3)f''(1.3) = = (-3.0738) \cdot 93.52 < 0$
  5. Неподвижный (начальный конец) $\bar{x} = b = 3$, $f(3)f''(3) = 595 \cdot 1308 > 0$
  6. Стартовая точка для метода касательных $x^{(0)} = b = 3$, вычисления указаны выше

Условия применимости проверены для обоих методов, следовательно выбранный отрезок подходит для вычисления корня на нём.

3.2 Трансцендетная функция

Возьмём функцию
$$g(x) = 5^x - \sin(x) - 3$$
Используя графический метод представления, заметим, что функция имеет единственный корень на отрезке $[0.8, 2]$.

- Метод половинного деления:
  1. $f \in C([0.8, 2])$
  2. $f(0.8)f(2) < 0$, $((-0.0935) \cdot 21.0907 < 0)$
- Комбинированный метод:
  1. $f \in C^{(2)}([0.8, 2])$
  2. $f(0.8)f(2) < 0$, $((-0.0935) \cdot 21.0907 < 0)$
  3. f', f'' знакопостоянны на $[0.8, 2]$
  4. Стартовая точка для метода хорд $x^{(0)} = a = 0.8$, $f(0.8)f''(0.8) = = (-0.0935) \cdot 10.1043 < 0$
  5. Неподвижный (начальный конец) $\bar{x} = b = 2$, $f(2)f''(2) = = 21.0907 \cdot 65.6665 > 0$
  6. Стартовая точка для метода касательных $x^{(0)} = b = 2$, вычисления указаны выше.

Условия применимости проверены для обоих методов, следовательно выбранный отрезок подходит для вычисления корня на нём.

Глава 4

Тестовый пример

В качестве тестового примера возмём простое квадратное уравнение $x^2+x-6=0$. Нетрудно определить, что корни данного уравнения $x_{1,2} = -3; 2$. Выберем для поиска корня отрезок $[1,4]$. Зададим точность $\varepsilon = 0.01$.

4.1 Метод половинного деления

Проверим выполнение условий применимости:

1. f непрерывна на $[1,4]$
2. $f(1)f(4) < 0$, $(-4)\cdot 14 < 0$

Этапы нахождения корня:

1. $[1, 2.5]$ $f(a) = -4$ $f(b) = 2.75$ $f(c) = 2.75$ $c = 2.5$
2. $[1.75, 2.5]$ $f(a) = -1.1875$ $f(b) = 2.75$ $f(c) = -1.1875$ $c = 1.75$
3. $[1.75, 2.125]$ $f(a) = -1.1875$ $f(b) = 0.640625$ $f(c) = 0.640625$ $c = 2.125$
4. $[1.9375, 2.125]$ $f(a) = -0.308594$ $f(b) = 0.640625$ $f(c) = -0.308594$ $c = 1.9375$
5. $[1.9375, 2.03125]$ $f(a) = -0.308594$ $f(b) = 0.157227$ $f(c) = 0.157227$ $c = 2.03125$
6. $[1.984375, 2.03125]$ $f(a) = -0.077881$ $f(b) = 0.157227$ $f(c) = -0.077881$ $c = 1.984375$
7. $[1.984375, 2.007813]$ $f(a) = -0.077881$ $f(b) = 0.039124$ $f(c) = 0.039124$ $c = 2.007813$
8. $[1.996094, 2.007813]$ $f(a) = -0.019516$ $f(b) = 0.039124$ $f(c) = -0.019516$ $c = 1.996094$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{1.996094 + 2.007813}{2} = 2.0019535$$

$$|x^* - x| = |2 - 2.0019535| = 0.0019535 \approx 0.002$$

Корень был найден с абсолютной погрешностью $\delta = 0.002$ при заданной точности $\varepsilon = 0.01$ за 8 итераций, то есть данное решение удовлетворяет нашим требованиям.

4.2 Комбинированный метод

Проверим выполнение условий применимости:

1. f непрерывна на $[1,4]$
2. $f(1)f(4) < 0$, $(-4)\cdot 14 < 0$
3. f', f'' знакопостоянны на $[1,4]$
4. Стартовая точка для метода хорд $x^{(0)} = a = 1$, $f(1)f''(1) = (-4)\cdot 2 < 0$

5. Неподвижный (начальный) конец $\bar{x} = b = 4$, $f(4)f''(4) = 14 \cdot 2 > 0$
6. Стартовая точка для метода касательных $x^{(0)} = b = 4$, вычисления указаны выше.

Этапы нахождения корня:

1. $[2.333333, 2.444444]$ $f(a) = 1.777778$ $f(b) = 2.419753$
2. $[2.019608, 2.033543]$ $f(a) = 0.098424$ $f(b) = 0.16884$
3. $[2.000076, 2.000222]$ $f(a) = 0.000381$ $f(b) = 0.00111$

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{2.000076 + 2.000222}{2} = 2.000149$$

$$|x^* - x| = |2 - 2.000149| = 0.000149 \approx 0.0001$$

Корень был найден с абсолютной погрешностью $\delta = 0.0001$ при заданной точности $\varepsilon = 0.01$ за 3 итерации, то есть данное решение удовлетворяет нашим требованиям.

Заметим, что с помощью комбинированного метода ответ был получен быстрее и с большей точностью, следовательно комбинированный метод хорд и касательных эффективнее метода половинного деления.

Глава 5

Контрольные тесты

Найдём по одному корню у выбранных алгебраической и трансцендентной функций двумя методами.

- $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10$, $x \in [1.3, 3]$, будем изменять точность ε от 10^{-10} до 10^{-2}, увеличивая ε в 10 раз на каждом шаге. Также будем изменять отрезок $[a, b]$ от $[1.3, 3]$ до $[1.3, 30]$ с шагом $\Delta = 3$ для фиксированной точности $\varepsilon = 10^{-7}$.
- $g(x) = 5^x - \sin(x) - 3$, $x \in [0.8, 2]$, будем изменять точность так же от 10^{-10} до 10^{-2}, увеличивая ε в 10 раз на каждом шаге, а отрезок $[a, b]$ от $[0.8, 2]$ до $[0.8, 29]$ с шагом $\Delta = 3$ для фиксированной точности $\varepsilon = 10^{-7}$.

Глава 6

Модульная структура программы

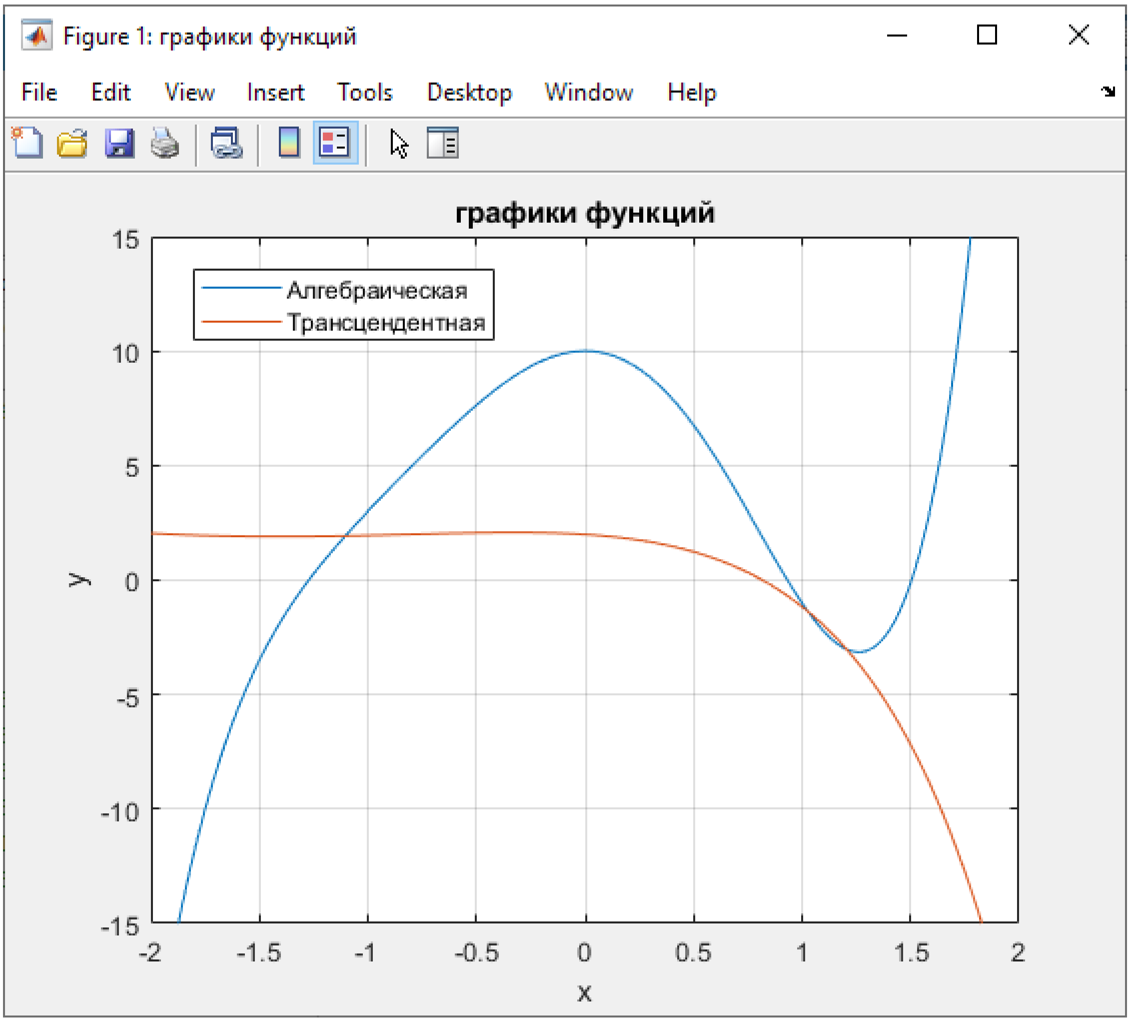
6.1 Заголовки функций и их значение

1. typedef struct root — структура, хранящая значение корня и номер итерации для соответствующего значения.
2. double FuncAlg(double x); — функция для нахождения значения алгебраической функции в данной точке.
3. double FuncTrans(double x); — функция для нахождения значения трансцендентной функции в данной точке.
4. double df(double x, double (*f)(double)); — функция, вычисляющая значение производной в данной точке. На вход поступает точка x и указатель на функцию (алгебраическую или трансцендентную).
5. double d2f(double x, double (*f)(double)); — функция, вычисляющая значение второй производной в данной точке.
6. root Bisection(double a, double b, double e, double (*f)(double), const char* filename, const char* filenameones) — функция, вычисляющая корень с помощью метода половинного деления. На вход поступают границы отрезка $[a, b]$, заданная точность ε, указатель на математическую функцию (алгебраическую или трансцендентную), имена файлов для записи информации об этапах нахождения корней.
7. root ChordNewton(double a, double b, double e, double (*f)(double), const char* filename, const char* filenameones); — функция, вычисляющая корень с помощью комбинированного метода хорд и касательных. Входные данные аналогичные предыдущему пункту.

Глава 7

Численный анализ

Графики функций:



7.1 Вычисление корней

Для заданной точности $\varepsilon = 10^{-7}$ получились следующие результаты:

- Алгебраическая функция
  1. МПД: $x = 1.5043907$ (24 итерации).
  2. Комбинированнный: $x = 1.5043907$ (8 итераций).
- Трансцендентная функция

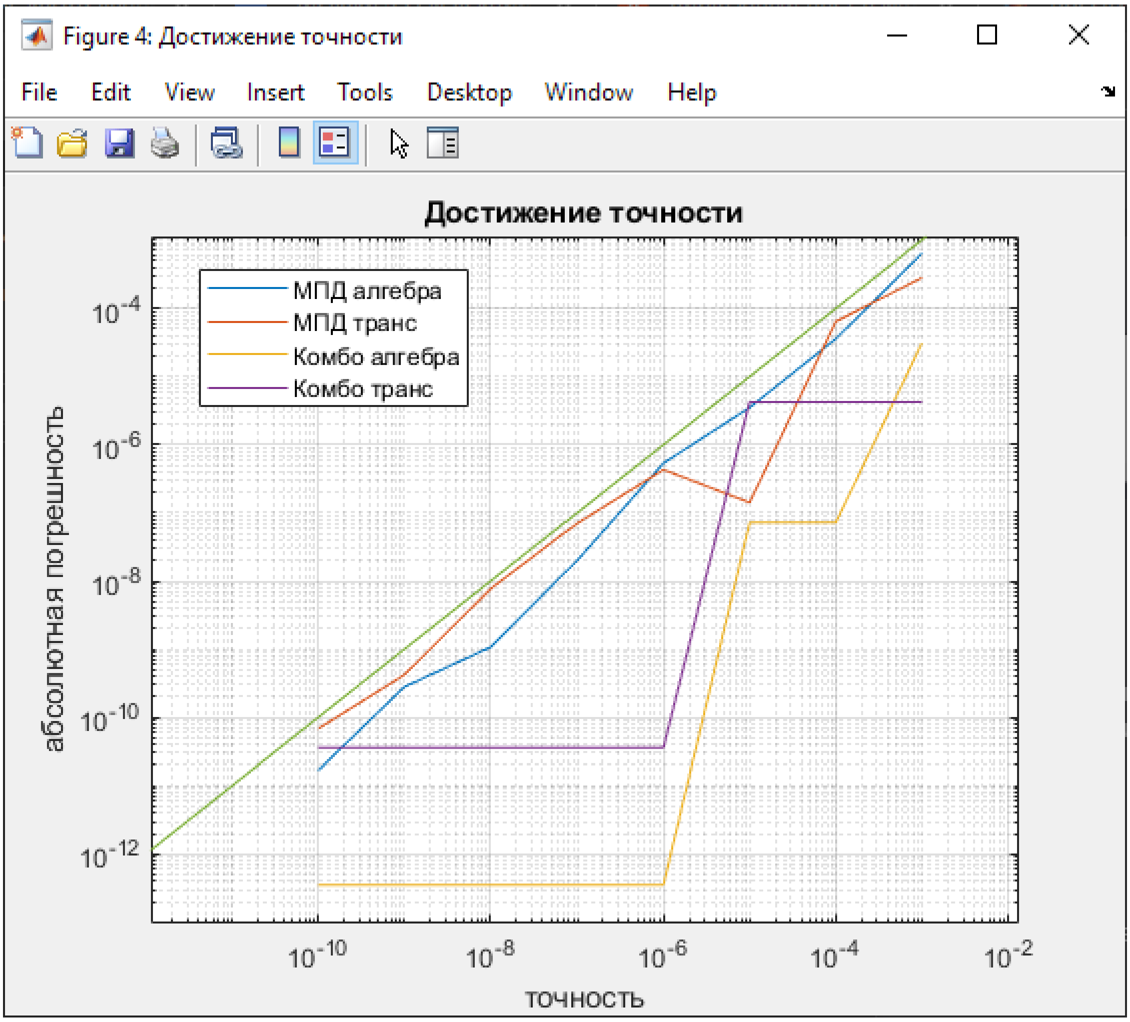
1. МПД: $x = 0.8178801$ (23 итерации).
2. Комбинированный: $x = 0.8178801$ (6 итераций).

Видим, что корни, найденные двумя разными методами, совпали. При этом более эффективным оказался комбинированный метод (быстрее в 3–4 раза).

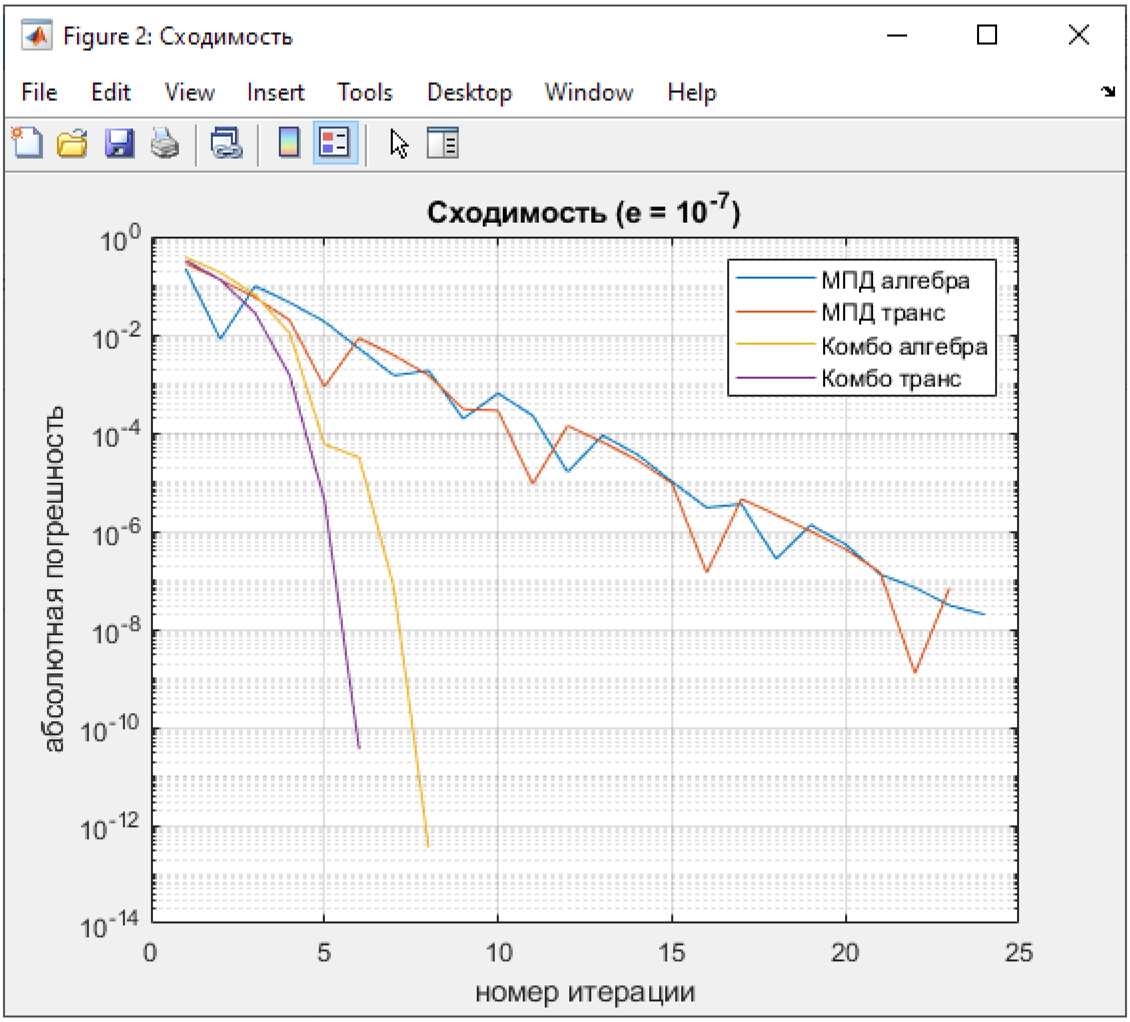
7.2 Сравнение с fzero() из MATLAB

С помощью пакета MATLAB было произведено сравнение, которое показало, что погрешность корней, найденных данными методами и с помощью fzero, имеет порядок 10^{-8} для МПД и 10^{-12} для комбинированного метода. Значит, корни были найдены верно.

Достижение точности:

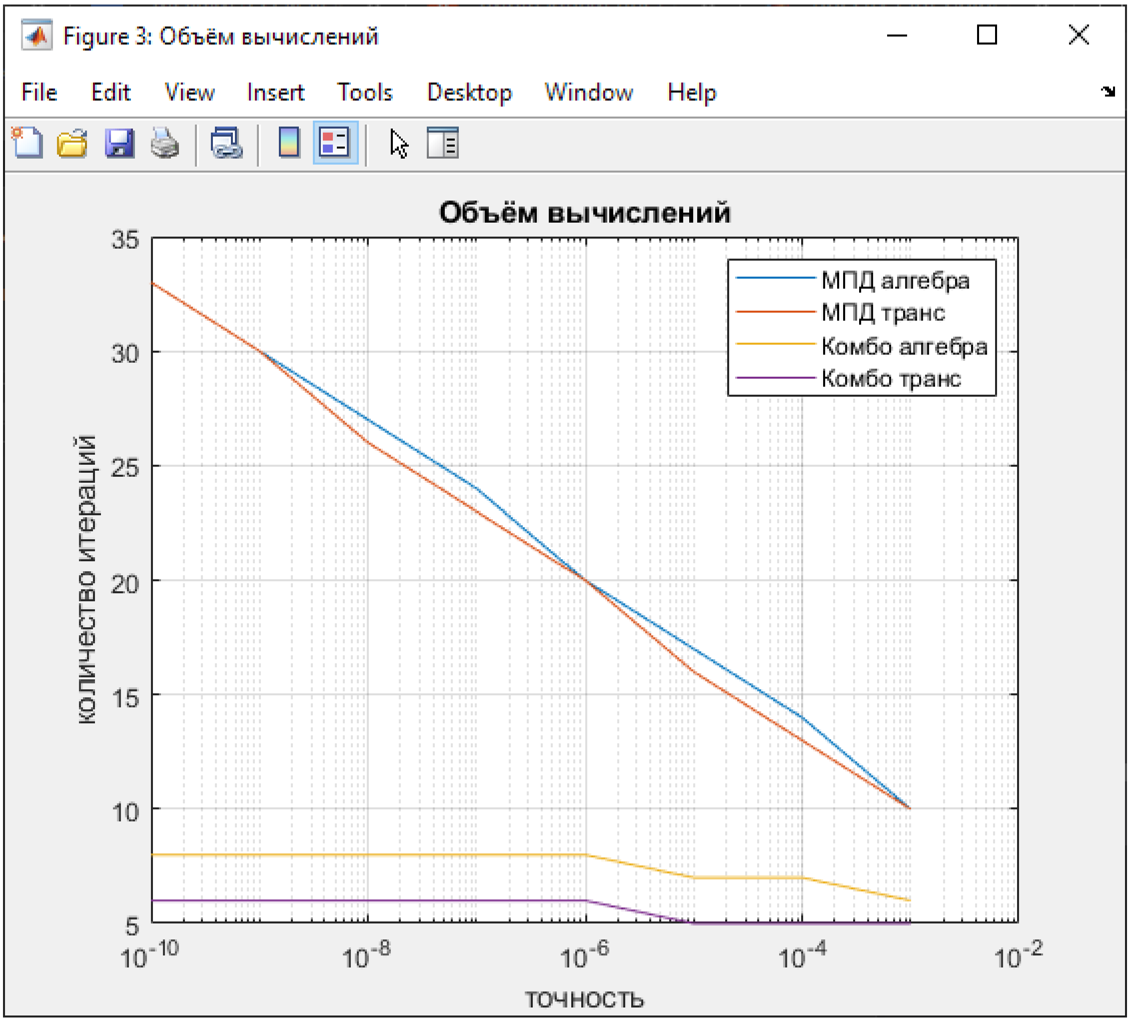


7.3 Сходимость



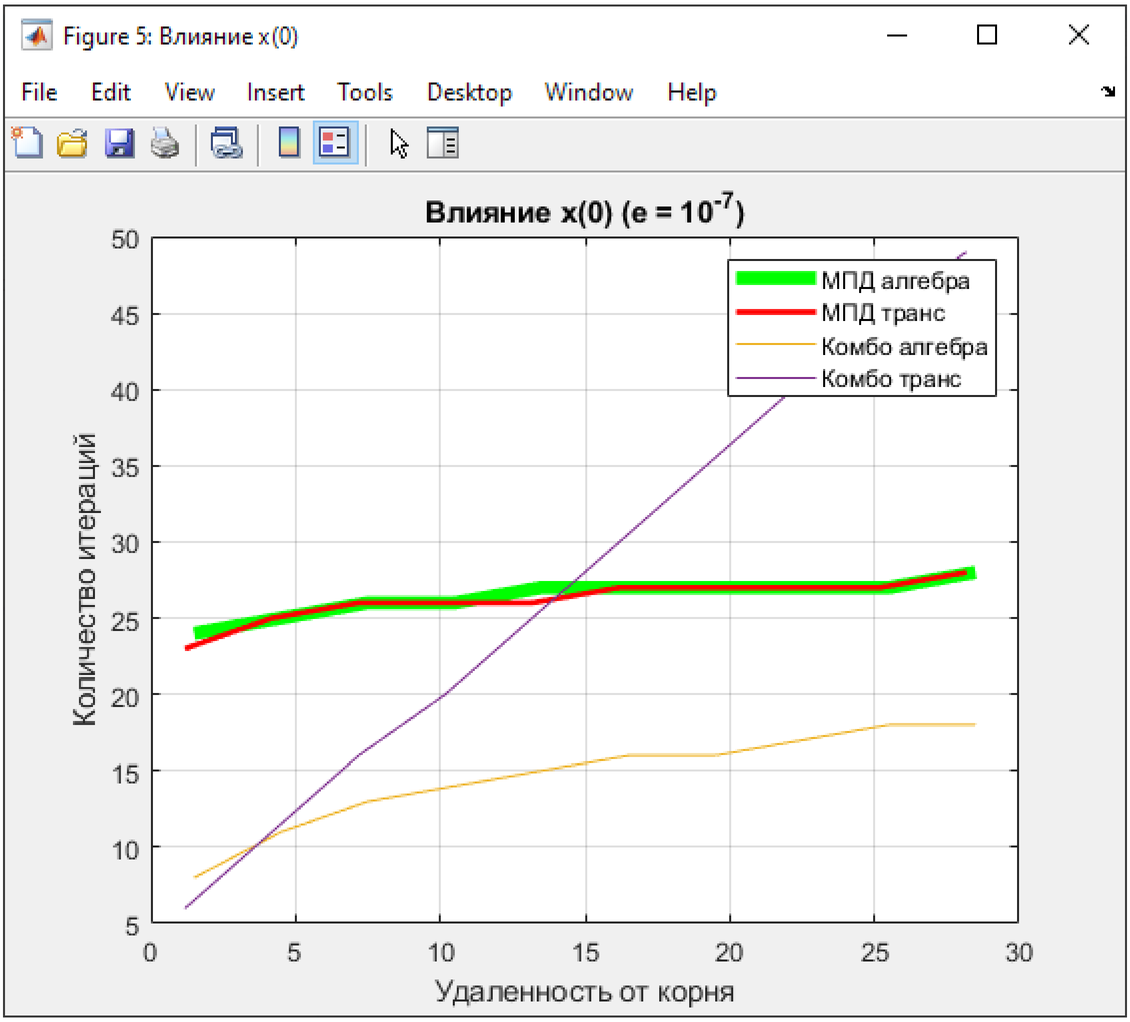
Метод половинного деления имеет линейную сходимость, однако сходится немонотонно. Определим порядок сходимости комбинированного метода, зная $|x^* - x^{(k+1)}| \leq C|x^* - x^{(k)}|^p$. С помощью пакета MATLAB прологарифмируем выражение и найдём p. Видим, что p принимает значение около 5. При этом комбинированный метод сходится монотонно.

7.4 Объём вычислений



Метод половинного деления имеет линейную зависимость количества итераций от заданной точности. Количество итераций комбинированного метода возрастает гораздо медленнее.

7.5 Влияние удалённости стартовой точки



По графикам видно, что метод половинного деления слабо зависим от удалённости стартовой точки. Это можно отметить для обеих функций. Комбинированный метод ведет себя хуже. Особенно это заметно для трансцендентной функции.

Глава 8

Общие выводы

В ходе данной работы мы научились вычислять корни алгебраических и трансцендентных функций с помощью методов половинного деления и комбинированного, сравнили их скорости сходимости, объёмы вычислений, влияние удалённости начальной точки. Мы выяснили, что МПД стабилен для любых функций и стартовых точек и линейно приближается к корню. Комбинированный метод сильно зависит от самой функции и может вести себя менее предсказуемо.

Как итог, мы видим, что для использования комбинированного метода необходимо детально исследовать функцию. В таком случае он окажется более эффективным. Если же детальное исследование функции не производится, то имеет место использование МПД.