Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №2
«Решение СЛАУ прямыми методами»

Дисциплина: «Численные методы»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Анищенко М.Д.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург 2021

Оглавление

Глава 1

Формулировка задачи и её формализация

Юольшинство расчётных математических задач сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Существует два типа методов решения таких задач: прямые и итерационные. В данной работе будет рассмотрен прямой метод, т.е. метод, который приводит к точному, а не приближенному ответу за конечное число операций, зависящее только от количества неизвестных.

1.1 Формализация задачи

Пусть дана система из n линейных уравнений с n неизвестными. $Ax = B$ – её матричная форма записи. Требуется найти вектор X, удовлетворющий данному матричному уравнению и являющийся решением данной СЛАУ. В этой работе буде использован метод прогонки (Thomas Algorithm).

1.2 Постановка задачи

1. Исследовать условия применимости метода и алгоритм его работы.
2. Решить СЛАУ данным методом.
3. Построить графики для анализа выбранного метода, а именно: его поведение при разных обусловленности матрицы, её размерах и возмущении правой части.

Глава 2

Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Условия применимости метода

Метод прогонки применяется для трёхдиагональных матриц. Также метод прогонки будет корректным и устойчивым, если коэффициенты матрицы A удовлетворяют условиям диагонального преобладания:

$$|c_i| > |b_i| + |d_i| \quad \forall i = 1, \dots, n$$

2.2 Алгоритм метода

Пусть дана трёхдиагональная матрица. Сделаем следующие обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}$$

Причем $b_1 = 0, d_n = 0$.
Пусть $\exists \delta_i, \lambda_i$:

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n \tag{2.1}$$

Рекурентные выражения для δ_i и λ_i:

$$\delta_i = -\frac{d_i}{b_i \delta_{i-1} + c_i}, \lambda_i = \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{b_i \delta_{i-1} + c_i}, i = 1, 2, \dots, n \tag{2.2}$$

1. Прямой ход: используя формулу (2.2), находим значения $\delta_1, \dots, \delta_n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, принимая $i = 1, \dots, n$

2. Обратный ход: используя формулу (2.1), находим значения $x_n, \dots, x_1$, принимая $i = n, \dots, 1$

Глава 3

Анализ задачи

Чтобы построить матрицу A с разным заданным числом обусловленности, зададим её как $A = QDQ^T$, где Q – ортогональная матрица, D – диагональная, которую мы составили так, чтобы $cond(A) = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$, где λ_i – собственное число. Затем приведём полученную матрицу A к форме Хессенберга и получим трёхдиагональную матрицу с тем же числом обусловленности.

Глава 4

Тестовый пример

В качестве тестового примера возьмём следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -3, \\ 4x_2 - 2x_3 = 16 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Найдём числа $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, применив прямой ход:

$$\delta_1 = -\frac{1}{2} = -0.5, \lambda_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\delta_2 = -\frac{3}{-1 \cdot (-0.5) + 5} = -\frac{6}{11} = -0.5454545454, \lambda_2 = \frac{-3 - (-1) \cdot 2}{-1 \cdot (-0.5) + 5} = -\frac{2}{11} = -0.1818181818$$

$$\delta_3 = 0, \lambda_3 = \frac{16 - 4 \cdot (-0.1818181818)}{4 \cdot (-0.5454545454) + (-2)} = -4.0000000002$$

Теперь найдём числа x_3, x_2, x_1, применив обратный ход:

$$x_3 = -4.0000000002 \approx -4$$

$$x_2 = -0.5454545454 \cdot (-4.0000000002) + (-0.1818181818) = 1.99999999990909 \approx 2$$

$$x_1 = -0.5 \cdot 1.99999999990909 + 2 = 1.000000000045455 \approx 1$$

Как мы можем видеть, метод находит решение за число шагов, пропорциональное количеству неизвестных. Погрешность ответа появилась из-за дроби, не приводимой к конечному десятичному виду. Если подставлять в выражения простые дроби, то ответ получится точным.

Глава 5

Контрольные тесты

Создадим 10 матриц размером $15{\times}15$ с числами обусловленности от 10 до 10^{10} и для каждой найдём корни методом прогонки. Так же для оценки метода будем вносить в правую часть возмущение порядков от 10^{-5} до 1. Для оценки времени выполнения метода будет менять размерность матрицы от $15{\times}15$ до $1500{\times}1500$.

Глава 6

Модульная структура программы

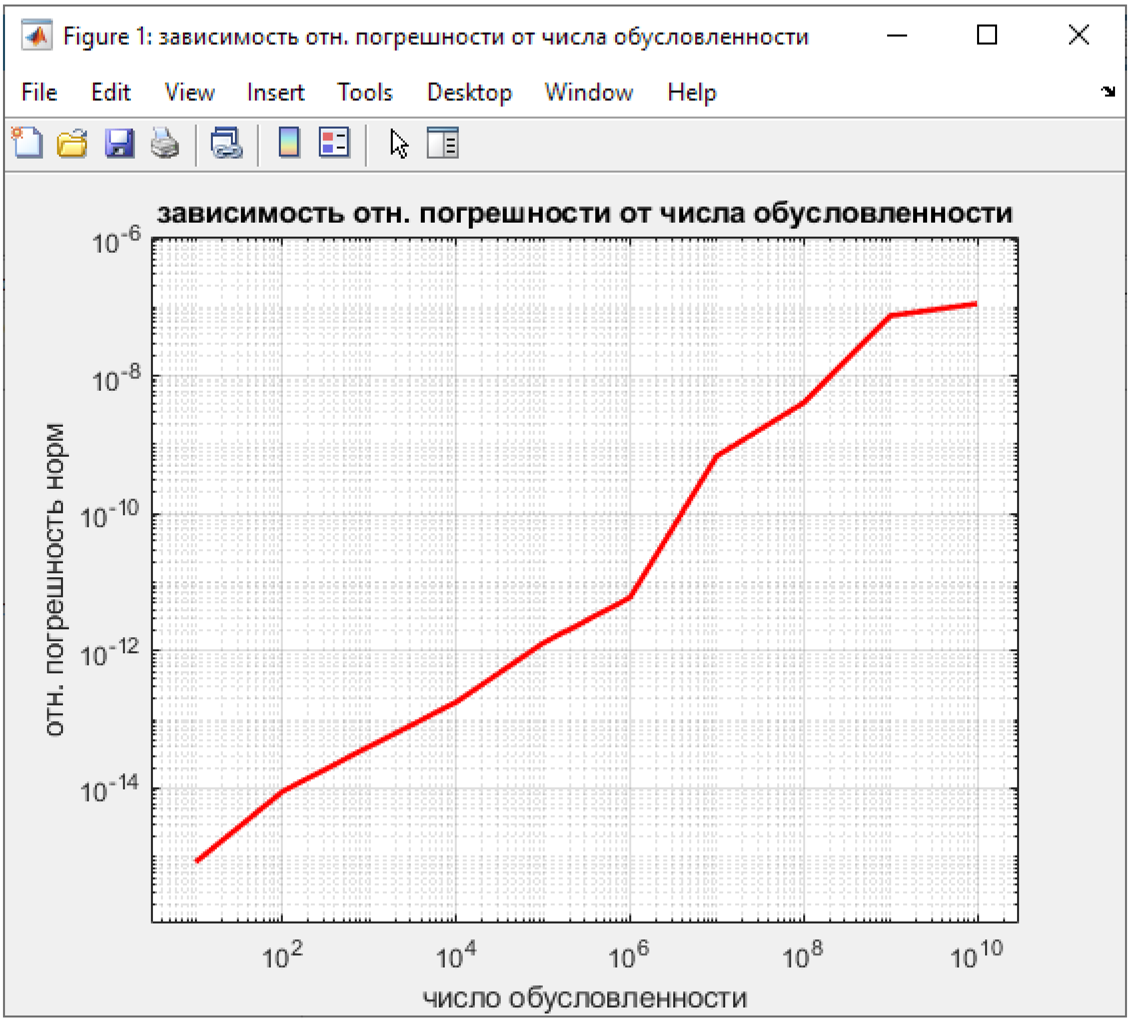
- double** CreateMatrix(int n, int m); — функция, которая выделяет память под матрицу с заданным количеством строк и столбцов.
- void DestroyMatrix(double** A, int n); — функция, которая очищает память, выделенную под матрицу.
- double** ReadMatrix(FILE* matrixfile, FILE* freekoeffile, int n); — функция, выполняющая считывание матриц с файла.
- void PrintVector(FILE* rootsfileforrec, double* arr, int n); — функция, выполняющая запись вектора корней в файл.
- double* Thomas(double** matrix, int n, FILE* time); — функция, осуществляющая непосредственно расчёты по методу прогонки.

Глава 7

Численный анализ

7.1 Влияние обусловленности матрицы

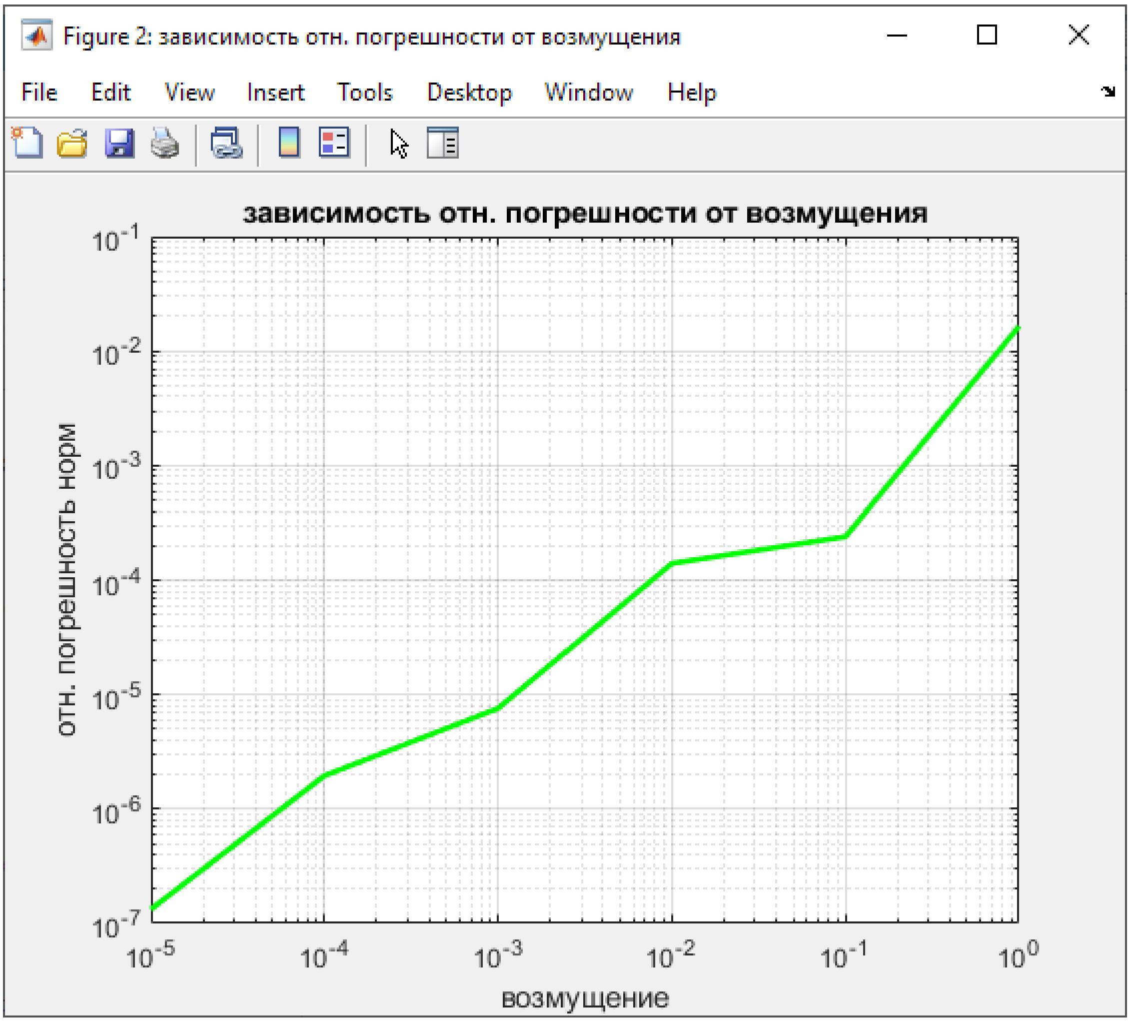
Для того, чтобы узнать, как обусловленность матрицы влияет на конечный ответ, выполним следующие действия. Сравним относительную погрешность нормы полученного с помощью выбранного метода ответа и заданным вектором X. Построим график зависимости относительной погрешности от числа обусловленности с помошью пакета MATLAB.



Мы видим, что относительная погрешность ответа растёт при увеличении числа обусловленности, как и ожидалось. При этом точность при наилучшей обусловленности достигает порядка 10^{-15}, что близко к машинному ε, т.е. ответ можно назвать точным.

7.2 Влияние возмущения правой части

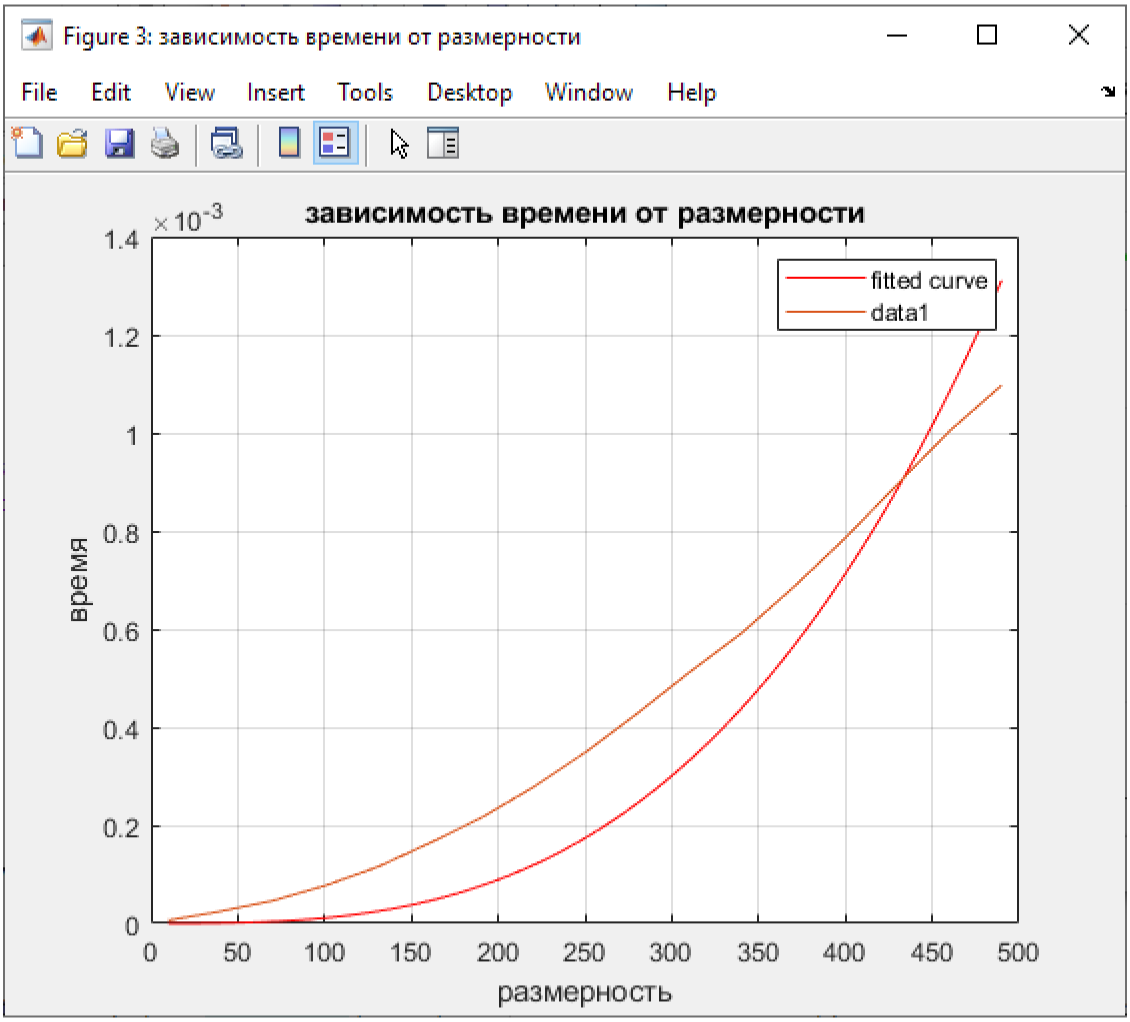
Внесём возмущения в правую часть, согласно выбранному диапазону (Глава 5). Так же, как и в предыдущем пункте, воспользуемся пакетом MATLAB, чтобы построить график зависимости относительной погрешности ответа от возмущения.



Заметим, что погрешность увеличивается вместе с ростом возмущения, что логично, так как матрица A и вектор корней X остаётся тем же. При этом при минимальном возмущении порядок точности падает примерно в два раза по сравнению с точностью решения без возмущения правой части (10^{-7}против10^{-15}).

7.3 Влияние размерности матрицы

Изучим, как меняется время выполнения подсчётов по методу прогонки в зависимости от размерности матрицы. Будем менять её, как описывалось в начале Главы 5. График будем строить так же с помощью пакета MATLAB.



Справедливо было ожидать, что при увеличении размерности матрицы, время выполнения тоже увеличивается. При этом можно заметить, что это возрастание не линейное, а экспоненциальное $(\alpha \cdot n^3)$.

Глава 8

Общие выводы

В этой работе мы изучили прямые методы решения СЛАУ, в частности метод прогонки. Сравнили результаты этого метода с точным ответом, узнали, как на его выполнение влияют число обусловленности матрицы, возмущения свободных коэффициентов, а также размерность матрицы. Про метод прогонки можно сказать следующее: метод выполняется стабильно и достаточно быстро, требует всего $O(n)$ арифметических операций. Внесенные изменения и осложнения не критично влияют на результат выполнения метода.