Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №1
«Интерполяционные полиномы приближения табличных функций.
Полином в форме Лагранжа»

Дисциплина: «Численные методы»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Анищенко М.Д.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург 2022

Оглавление

Глава 1

Формулировка задачи и её формализация

1.1 Формализация

Пусть известны пары $(x_i, y_i), i = 0, 1, \ldots, n$, а также $x^h := \{x_i\}_{i=0}^n$ — сетка, $y^h := \{y_i\}_{i=0}^n$ — сеточная функция. Необходимо построить $\phi(x)$, которая удовлетворяет условию близости: $\phi(x) \approx (x^h, y^h)$, и $\phi(x) \in C^{(k)}([a, b])$, где $[a, b]$ — отрезок, содержащий все x_i.

1.2 Формулировка

В данном варианте требуется построить интерполяционный полином в форме Лагранжа, используя равномерную и Чебышевскую сетки, исследовать влияние количества узлов и их расположения на сходимость интерполяционного процесса.

Глава 2

Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Алгоритм построения сеток

1. Равномерная сетка: $x_i = x_0 + ih$.
2. Чебышевская сетка: $x_i = \cos(\frac{\pi(2i+1)}{2n}), i = 0, 1, \ldots, n-1$.

2.2 Алгоритм метода

Построим интерполяционный полином $P_n(x) : P_n(x_i) = y_i$.
Будем искать $P_n(x)$ в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \Phi_i(x),$$

где $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$.
$\Phi_i(x) = \alpha_i \prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (x - x_k)$ — i-ый базисный полином Лагранжа.

$$\Phi_i(x_i) = 1 = \alpha_i \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (x_i - x_k) \Rightarrow \alpha_i = \ldots \Rightarrow \Phi_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}.$$

Тогда интерполяционный полином в форме Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

2.3 Условия применимости

В последней формуле мы видим, что в знаменателе находится разность $x_i - x_k$, поэтому необходимо поставить условие $\forall k \neq i : x_i \neq x_k$.

Глава 3

Анализ задачи

Задана табличная функция $(x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n$, потребуем выполнения условия интерполяции $\phi(x_i) = y_i$, что можно записать в виде СЛАУ. Откуда следует, что интерполяционный полином существует и единственен, если степень полинома на единицу меньше количества узлом, и x_i попарно различны.
Видим, что эти два условия будут выполнены при таком построении полинома, а также при соблюдении условий его применимости.

Глава 4

Тестовый пример

Построим интерполяционный полином в форме Лагранжа для табличной функции $y = x^4 - 1$. Используем равномерную сетку на отрезке $[-2, 2]$.

x_i	y_i
-2	15
0	-1
2	15

Теперь по формуле для интерполяционного полинома Лагранжа вычисляем коэффициенты:

$$L_n(x) = 15\frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)} + (-1)\frac{(x-(-2))(x-2)}{(0-(-2))(0-2)} + 15\frac{(x-(-2))(x-0)}{(2-(-2))(2-0)} =$$

$$= 4x^2 - 1$$

Мы получаем, что $4x^2 - 1 \approx x^4 - 1$. Как и ожидалось, точность интерполяции невелика, так как мы взяли всего три узла, соответственно полином имеет степень не выше второй. Условие интерполяции $\phi(x_i) = y_i$ при этом выполняется.

Глава 5

Контрольные тесты

Для исследования выберем функцию $f(x) = x^2\cos(2x) + 1$. Применим для нахождения интерполяционного полинома разные сетки: равномерную и Чебышевскую. Изучим влияние количества узлов и их расположения а сходимость интерполяционного процесса. Для этого выберем отрезок $[-2, 2]$, количество узлов будем изменять от 4 до 8 с шагом в 2 для статичных графиков и построим зависимость ошибки интерполяции для каждой сетки при разном количестве узлов. Для динамичной картинки и влиянии большого количества узлов примем их значение от 6 до 61 с шагом 5.

Глава 6

Модульная структура программы

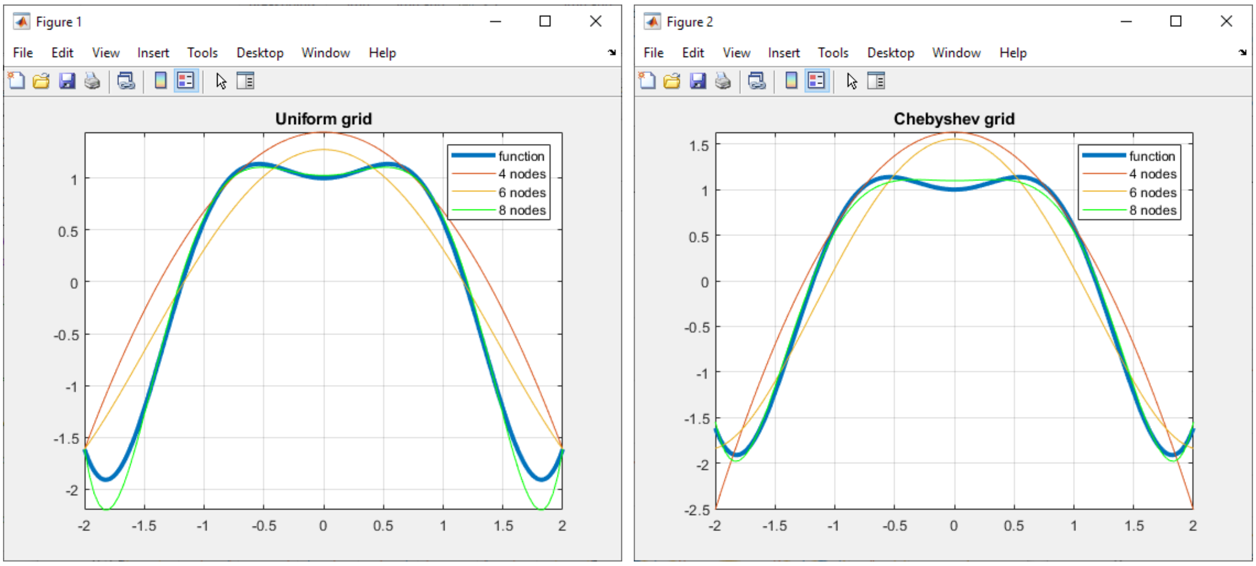
- double f(double x) — функция, вычисляющая значение $f(x)$.
- double LagrangePolynom (const double* nodes, const double* y, double x, int nodesCount) — функция, вычисляющая значения полинома Лагранжа. Принимает на вход набор пар $(x_i, y_i$, точку x для вычисления значения и количество узлов.
- void FillFile(FILE* file, double a, double b, const double* nodes, const double* y, int nodesCount) — функция для заполнения файла значениями полинома для будущего построения графика функции и её исследования.

Глава 7

Численный анализ

7.1 Графики функций

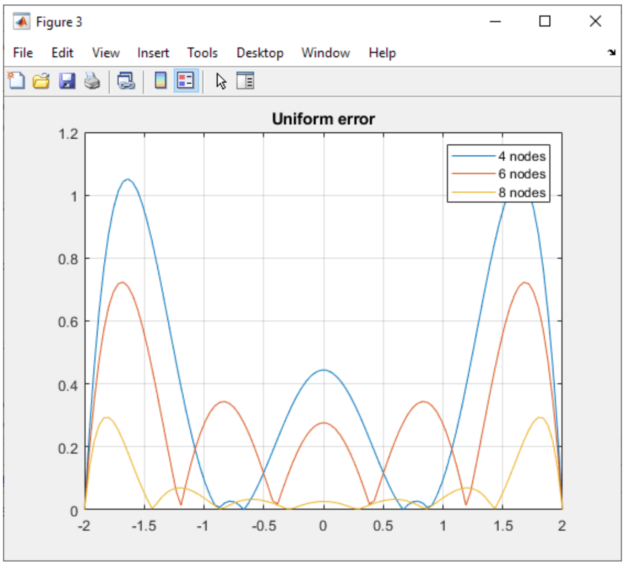
Построим графики заданной функции и полученных полиномов.

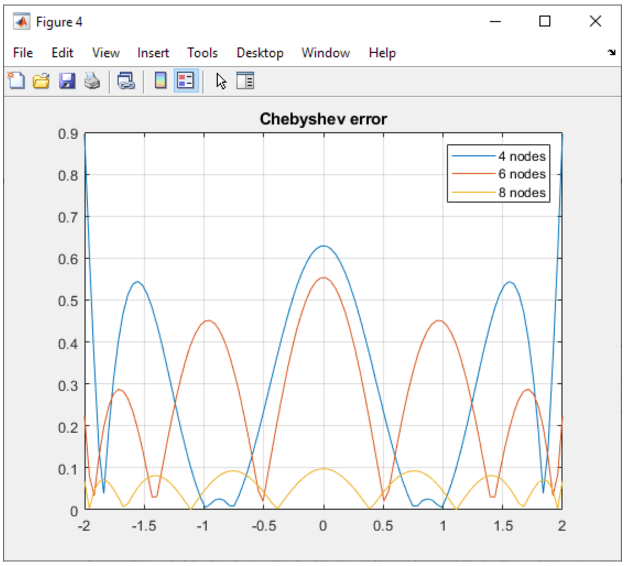


Мы можем видеть, что с увеличением числа узлов полиномы почти полностью сливаются с заданной функцией, то есть интерполяционный процесс действительно сходится.

7.2 Ошибка интерполяции

Посмотрим, какую ошибку интерполяции мы получаем для каждой сетки при разном количестве узлов.

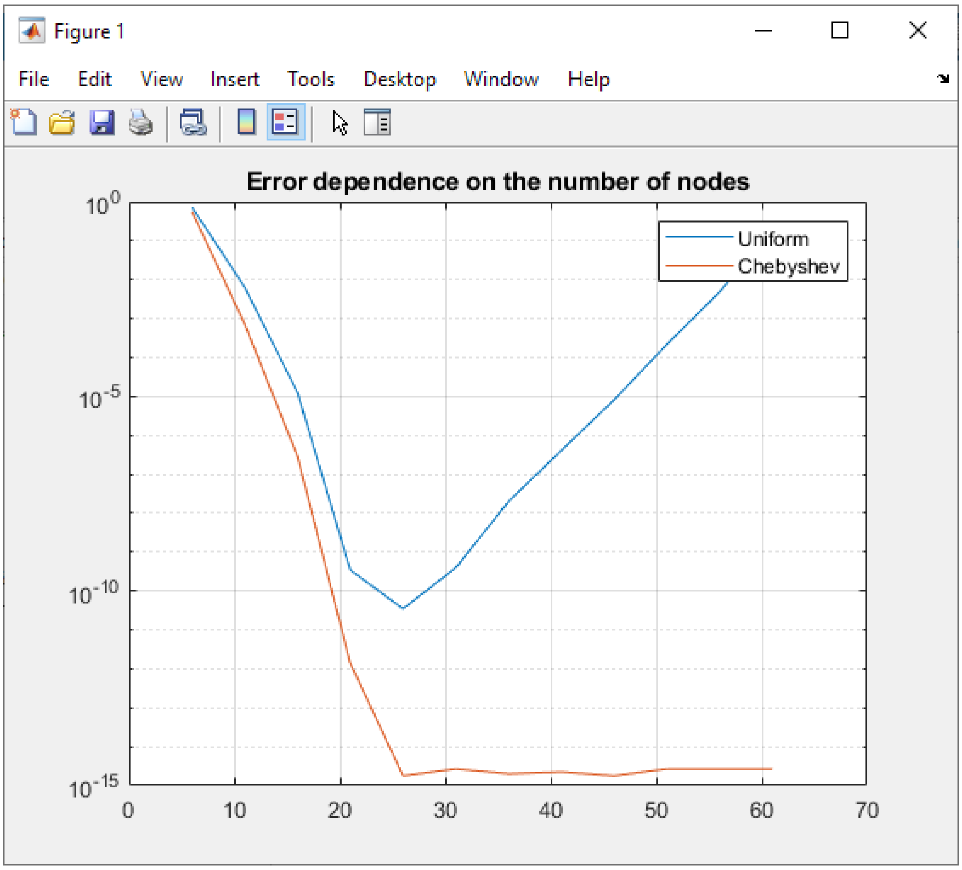




Для равномерной сетки наблюдается рост ошибки интерполяции ближе к краям отрезка. Для Чебышевской же сетки наоборот, наибольшую ошибку мы видим в середине отрезка.

7.3 Ошибка интерполяции при большом числе узлов

Теперь будем менять количество узлов от 6 до 61 и смотреть, как ведет себя максимальная ошибка интерполяции.



Характерной чертой равномерной сетки является возрастание ошибки интерполяции, начиная с некоторого количества узлов. В данном случае с 26.

Глава 8

Общие выводы

Исследования интерполяционного полинома в форме Лагранжа для разных сеток показали, что выбор сетки зависит от конкретных случаев и ситуаций. В случае, когда число узлов становится достаточно большим, использовать равномерную сетку уже нецелесообразно, поскольку она дает большую погрешность (вероятно, точка этого преломления зависит от функции). При этом для небольшого количества ее удобно использовать, потому что вычисление точек x_i проще в данном случае. Также важно учитывать, что наибольшая ошибка для равномерной и Чебышевской сеток наблюдается в противоположных местах. Для первой — на концах отрезка, а для второй — ближе к середине. Однако для обоих случаев можно сказать, что интерполяционный полином Лагранжа достаточно близок к заданной функции (при подходящем количестве узлов), а значит пригоден для использования.