Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики
и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №2
«Приближение табличных функций с использованием квадратичного сплайна с производной на левом конце.»

Дисциплина: «Численные методы»

Выполнил студент гр. 5030102/00003 Анищенко М.Д.

Преподаватель: Курц В.В.

Санкт-Петербург 2022

Оглавление

1 Формулировка задачи и её формализация **3**
1.1 Формализация . . . 3
1.2 Формулировка . . . 3

2 Алгоритм метода и условия его применимости **4**
2.1 Условия применимости . . . 4
2.2 Алгоритм метода . . . 4

3 Анализ задачи **4**

4 Выполение условий применимости **5**

5 Тестовый пример **5**

6 Контрольные тесты **7**

7 Модульная структура программы **7**

8 Численный анализ **8**
8.1 Графики функций . . . 8
8.2 Ошибка интерполяции . . . 9
8.3 Ошибка интерполяции при большом числе узлов . . . 9
8.4 Зависимость возмущения начальных данных . . . 10

9 Общие выводы **11**

Глава 1

Формулировка задачи и её формализация

1.1 Формализация

Пусть даны $x_0, \ldots, x_n$ - $n+1$ различных узлов на отрезке $[a, b]$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$. Функция S_k^ν на отрезке $[a, b]$ называется сплайном степени k отнисительно узлов x_i, если

$$S_k^\nu|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_k, i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$S_k^\nu \in C^{k-\nu}([a, b])$$

Пусть известны пары $(x_i, y_i), i = 0, 1, \ldots, n$ и значение производной d_0 заданной функции на левом конце отрезка $[a, b]$

1.2 Формулировка

Необходимо построить кусочно-заданную функцию S_2^1, являющуюся квадратичным сплайном такую, что

$$S_2^1|_{[x_i, x_{i+1}]} = g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, i = 1, \ldots, n$$

А также исследовать влияние количества узлов на сходимость процесса, сравнить с интерполяционным полиномом Лагранжа и дополнительно исследовать влияние точности задания дополнительных условий на точность результата. Исследования будем проводить на функции $f(x) = x^2 \cos(2x) + 1$ на отрезке $[-2, 2]$.

Глава 2

Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Условия применимости

1. Узлы x_i попарно различны
2. Функция $f(x)$ и её производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$

2.2 Алгоритм метода

На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ необходимо найти полином $g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} g_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ g_i(x_i) = y_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \text{ и } g_i'(x_i) = g_{i+1}'(x_i), i = 1, \dots, n-1$$

Объединяя эти условия и принимая во внимание то, что значение производной d_0 на левом конце у нас известно, можем составить следующую систему условий для первого отрезка, с помощью которой мы однозначно разрешим значения a_1, b_1, c_1 и дальше найдем полиномы для остальных отрезков.

$$\begin{cases} g_1(x_0) = y_0 \\ g_1(x_1) = y_1 \\ g_1'(x_0) = d_0 \end{cases} \Rightarrow a_1, b_1, c_1 \Rightarrow g_1'(x_1) \Rightarrow \begin{cases} g_2(x_1) = y_1 \\ g_2(x_2) = y_2 \\ g_2'(x_1) = g_1'(x_1) \end{cases} \Rightarrow \dots$$

Глава 3

Анализ задачи

Задана табличная функция $(x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n$, потребуем выполнения условия интерполяции на каждом подотрезке $[x_i, x_{i+1}] : \phi(x_i) = y_i$, что можно записать в виде СЛАУ. Откуда следует, что интерполяционный полином существует и единственен для каждого указанного подотрезка.

Глава 4

Выполение условий применимости

При использовании как равномерной сетки точки x_i получаются попарно различными, что нам и требуется. Также для правильного построения полинома нужно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной. Производная функции $f(x) = x^2 \cos 2x + 1$ имеет вид $f'(x) = 2x\cos(2x) - 2x^2 \sin 2x$. Данная функция определена на всей вещественной прямой, а значит, исходная функция имеет производную на всем отрезке $[a, b] = [-2, 2]$, следовательно, она непрерывна.

Глава 5

Тестовый пример

Построим квадратичный сплайн для табличной функции $y = x^2 \cos(2x) + 1$. Используем равномерную сетку на отрезке $[-2, 2]$, возьмём 6 точек.

i	x_i	y_i
0	-2	-1.6146
1	-1.2	-0.0618
2	-0.4	1.1115
3	0.4	1.1115
4	1.2	-0.0618
5	2	-1.6146

Теперь по вышеописанным формулам вычисляем полиномы. Преобразуем СЛАУ, выражая коэффициенты a_i, b_i, c_i.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{y_1 - y_0 - d_0(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2} \\ b_1 = d_0 - 2a_1 x_0 \\ c_1 = y_0 - a_1 x_0^2 - b_1 x_0 \end{cases}$$

Аналогично для следующих шагов получаем коэффициенты с новыми индексами (0 сменяется на i, 1 на $i + 1$ в общем виде), значения производных мы находим после нахождения коэффициентов: $g'(x) = 2ax + b$.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{-0.0618+1.6146+3.43985(-1.2-(-2))}{(-1.2-(-2))^2} \\ b_1 = -3.43985 + 2 \cdot 6.72606 \cdot 2 \\ c_1 = -1.6146 + 6.72606 \cdot 4 + 23.46439 \cdot 2 \\ g_1'(x_1) = 2 \cdot 6.72606 \cdot (-1.2) + 23.46439 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 6.72606 \\ b_1 = 23.46439 \\ c_1 = 18.40954 \\ g_1'(x_1) = 7.321846 \end{cases}$$

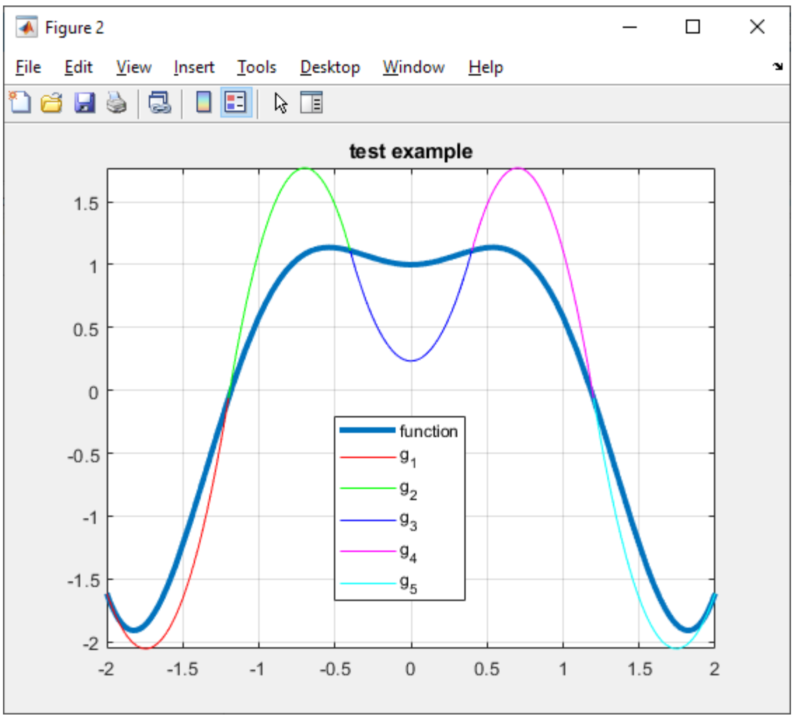
$$\begin{cases} a_2 = \frac{1.1115+0.0618-7.321846(-0.4-(-1.2))}{(-0.4-(-1.2))^2} \\ b_2 = 7.321846 + 2 \cdot 7.31903 \cdot (-1.2) \\ c_2 = -0.0618 + 7.31903 \cdot 1.2^2 - 10.243826 \\ g_2'(x_2) = 2 \cdot 7.31903 \cdot 0.4 - 10.243826 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = -7.31903 \\ b_2 = -10.243826 \\ c_2 = -1.814988 \\ g_2'(x_2) = -4.388602 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = \frac{1.1115-1.1115+4.988602(0.4-(-0.4))}{(0.4-(-0.4))^2} \\ b_3 = -4.388602 - 2 \cdot 5.48575 \cdot (-0.4) \\ c_3 = 1.1115 - 5.48575 \cdot (-0.4)^2 + 0.000002 \cdot (-0.4) \\ g_3'(x_3) = 2 \cdot 5.48575 \cdot 0.4 - 0.233779 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_3 = 5.48575 \\ b_3 = -0.000002 \\ c_3 = -0.233779 \\ g_3'(x_3) = 4.154821 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4 = \frac{-0.0618-1.1115-4.154821(1.2-0.4)}{(1.2-0.4)^2} \\ b_4 = 4.154821 + 2 \cdot 7.31877 \cdot 0.4 \\ c_4 = 1.1115 + 7.31877 \cdot 0.4^2 - 10.243826 \cdot 0.4 \\ g_4'(x_4) = 2 \cdot (-7.31903) \cdot 1.2 + 10.243826 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_4 = -7.31903 \\ b_4 = 10.243826 \\ c_4 = -1.814988 \\ g_4'(x_4) = -7.321846 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = \frac{-1.6146+0.0618+7.321846(2-1.2)}{(2-1.2)^2} \\ b_5 = -7.321846 + 2 \cdot 6.72606 \cdot 1.2 \\ c_5 = -0.0618 - 6.72606 \cdot 1.2^2 + 23.46439 \cdot 1.2 \\ g_5'(x_5) = 2 \cdot 6.72606 \cdot 2 - 23.46439 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_5 = 6.72606 \\ b_5 = -23.46439 \\ c_5 = 18.40954 \\ g_5'(x_5) = 3.43985 \end{cases}$$

Теперь построим график по полученным пяти квадратным полиномам.



Видно, что график, построенный с помощью квадратичного сплайна, приближается к графику нашей функции. Вычислим ошибку в точке $x = 0.6$. Получаем $g_4(0.6) = 1.6964$, значение функции в той же точке $f(0.6) = 1.1304$. Тогда ошибка вычисления равна $\delta = 1.6964 - 1.1304 = 0.566$. Ошибка весьма велика, однако видно, что это одно из наибольших значений погрешности на отрезке. Значит, метод сходится.

Глава 6

Контрольные тесты

Для исследования выберем функцию $f(x) = x^2 \cos(2x) + 1$. Применим для нахождения интерполяционного полинома равномерную сетку. Изучим влияние количества узлов и их расположения а сходимость интерполяционного процесса. Для этого выберем отрезок $[-2, 2]$, количество узлов будем изменять от 4 до 8 с шагом в 2 для статичных графиков и построим зависимость ошибки интерполяции при разном количестве узлов. Для динамичной картинки и влиянии большого количества узлов примем их значение от 6 до 181 с шагом 5. Дополнительно изучим влияние погрешности в начальных даных. В данно случае это значение производной на левом конце.

Глава 7

Модульная структура программы

- double f(double x) — функция, вычисляющая значение $f(x)$.
- double derf(double x) — функция, вычисляющая значение производной $f'(x)$.
- void QuadraticSplineMethod(const double x[], const double y[], polynom g[], int n, const double delta) — функция, вычисляющая значения полиномов. Принимает на вход набор пар $(x_i, y_i$, массив полиномов g_i для вычисления коэффициентов, количество узлов и возмущение (для последнего пункта исследования).
- void FillFile(FILE* file, double a, double b, const double* nodes, const double* y, int n, const double delta) — функция для заполнения файла значениями

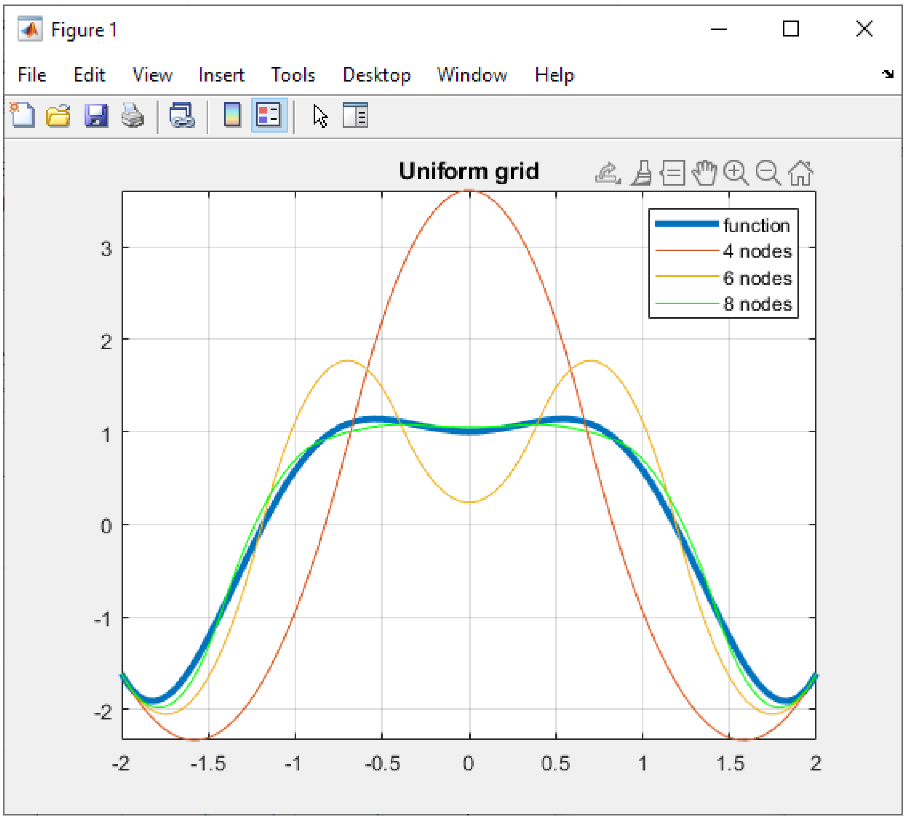
полиномов для будущего построения графика функции и её исследования.

Глава 8

Численный анализ

8.1 Графики функций

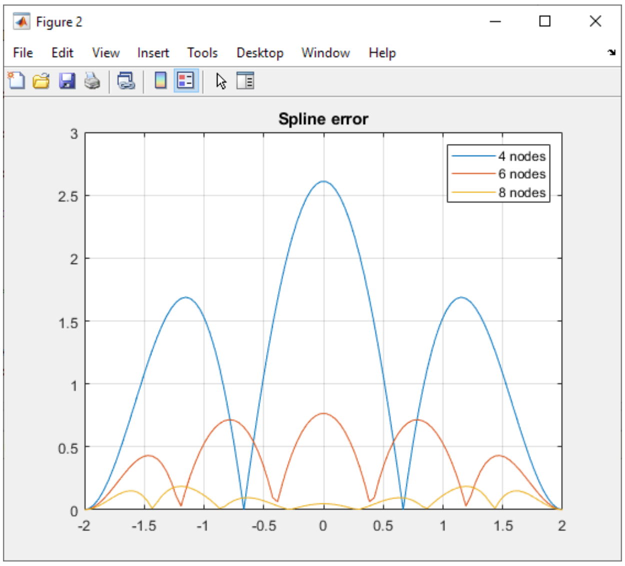
Построим графики заданной функции и полученных полиномов.

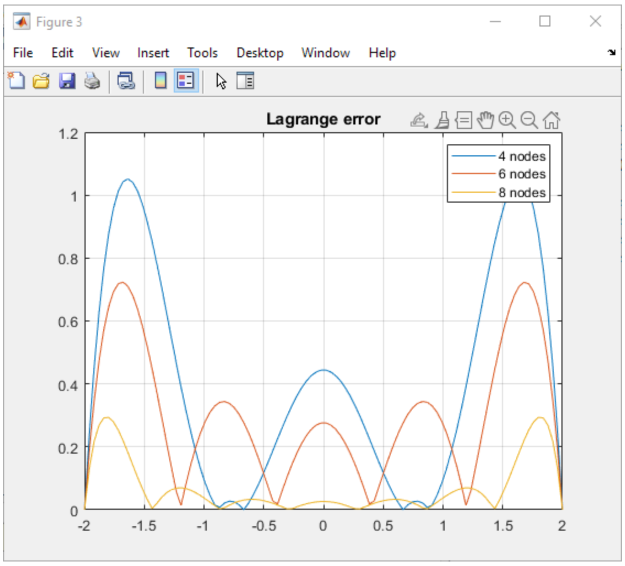


Мы видим, что с увеличением количества полиномов, точность увеличивается и график для 8 узлов почти сливается с графиком функции. Следовательно, сходимость достигается.

8.2 Ошибка интерполяции

Построим график фактической ошибки на всём отрезке.

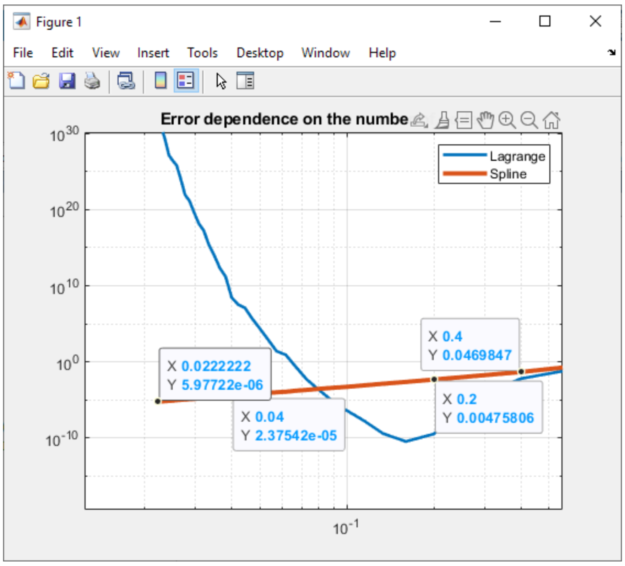


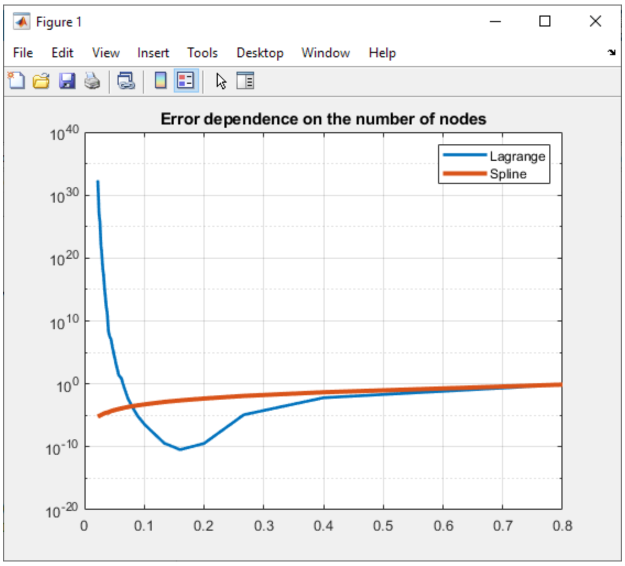


Для равномерной сетки в полиноме Лагранжа наблюдается рост ошибки интерполяции ближе к краям отрезка. В случае квадратичного сплайна картина обратная - наибольшая ошибка достигается в центре отрезка.

8.3 Ошибка интерполяции при большом числе узлов

Теперь будем менять количество узлов от 6 до 181 и смотреть, как ведет себя максимальная ошибка интерполяции в зависимости от расстояния между двумя узлами. Сравним с ошибкой полинома Лагранжа. Для удобства рассмотрим два разных способа построение (логарифмическую и обычную оси Ox).

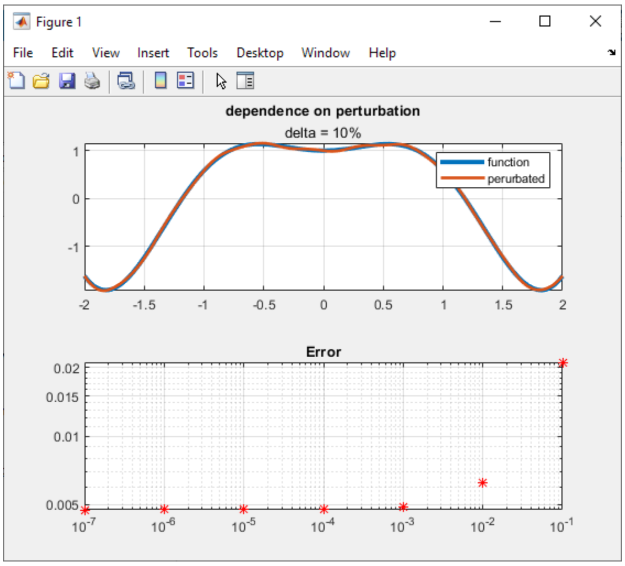


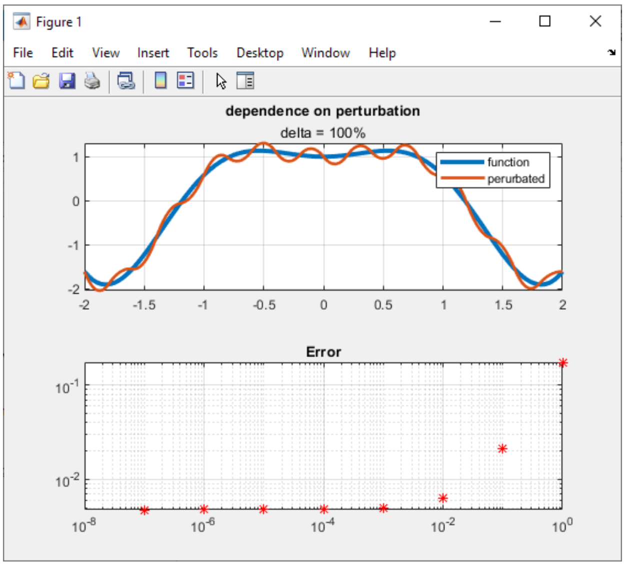


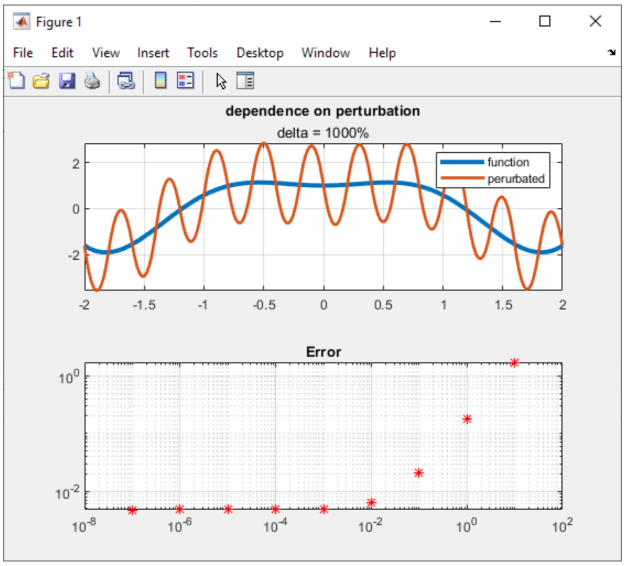
Рассмотрев точки на графике, заметим, что зависимость примерно равна $O(h^3)$. Кроме того, квадратичный сплайн лишен главного минуса метода Лагранжа, а именно быстрого возрастания ошибки после некоторого числа узлов. Но вместо этого мы получаем заметно меньшую точность, при количестве узлов около 180 мы получаем значения функций с точностью до 10^{-6}, в то время как полином Лагранжа имеет максимальную точность порядка 10^{-11}.

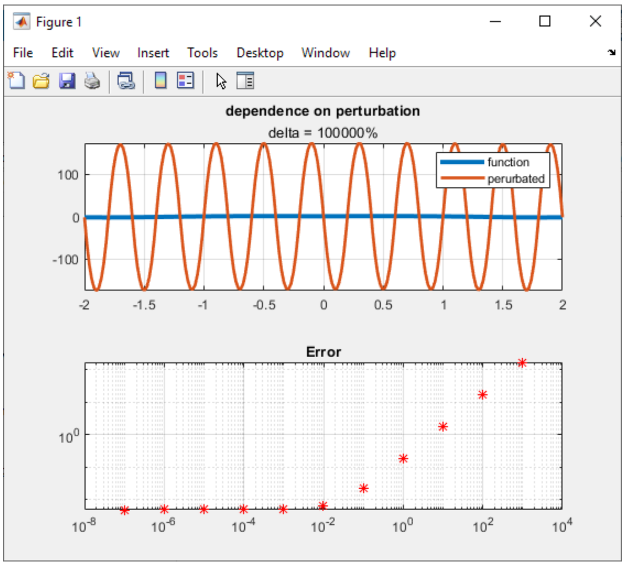
8.4 Зависимость возмущения начальных данных

Внесём возмущение в значение производной на левом конце. Возмущение будет принимать значения от $10^{-5}\%$ до 100000%.









По полученным результатам отметим, что видимое изменение достигается при возмущении около 10%), при 100% видно, что графики имеют общие формы, но ошибка уже заметна. При возмущении около 100000% в графике не проглядывается ничего общего с графиком нашей функции, а ошибка достигает значения около 172. Делаем вывод, что метод устойчив к возмущению входним данных, если это возмущение составляет примерно 10% и меньше.

Глава 9

Общие выводы

По результатам наших исследований мы видим, что метод квадратичного сплайна более удобный и надежный, чем метод полинома Лагранжа, однако имеем меньшую точность, что необходимо учитывать при выборе метода для конкретной задачи. Если важна точность, а число узлов невелико, то стоит предпочесть полином Лагранжа. Если же нужно использоать большое количество узлов, но можно принебречь точностью в разумных пределах, то следует выбрать квадратичный сплайн.