ILG - Domácí úkol
Skupina 6

Kurčíková Júlia, xkurci00
Pavelka Vojtěch, xpavel41
Strelec Matyáš, xstrel03
Tomko Matej, xtomko06
Vasík János László, xvasik05

24. června 2022

Obsah

Příklad 1

Zadání: Je dána soustava rovnic s parametrem $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 2cx & + & 3y & & & = & 0 \\ cx & + & cy & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & cz & = & 0 \end{array}$$

Najděte všechny hodnoty parametru c, pro které soustava

a) má právě jedno řešení,

b) má nekonečně mnoho řešení,

c) nemá žádné řešení,

d) má právě dvě řešení,

e) má nanejvýš dvě řešení.

Řešení vyjadřovat nemusíte, pouze rozhodněte o jeho existenci a počtu!

Krok 1: Určíme determinant matice soustavy. Homogenní lineární soustava rovnic může mít právě 1 nebo nekonečně mnoho řešení.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2c & 3 & 0 \\ c & c & 1 \\ 2 & 2 & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| = 2c^3 + 0 + 6 - (4c + 3c^2) &= \\ = 2c^3 - 3c^2 - 4c + 6 &= \\ = c^2(2c-3) - 2(2c-3) &= \\ = (c^2-2)(2c-3) & \end{aligned}$$

Krok 2: Když vyjde nulový determinant, rovnice má 0 nebo nekončně mnoho řešení. Žádné však mít nemůže, protože se jedná o homogenní soustavu rovnic.

$$(c^2-2)(2c-3) = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} c^2 - 2 = 0 & \Longrightarrow & c^2 = 2 & \Longrightarrow & c = \pm\sqrt{2} \\ 2c - 3 = 0 & \Longrightarrow & 2c = 3 & \Longrightarrow & c = \frac{3}{2} \end{array}$$

Řešení: Rovnice

a) má právě jedno řešení pro $c \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}, \pm\sqrt{2}\}$,

b) má nekonečně mnoho řešení pro $c \in \{\frac{3}{2}, \pm\sqrt{2}\}$,

c) nemá žádné řešení pro $c \in \emptyset$,

d) má právě dvě řešení pro $c \in \emptyset$,

e) má nanejvýš dvě řešení pro $c \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}, \pm\sqrt{2}\}$.

Příklad 2

Zadání: Určete všechna $c \in \mathbb{R}$ tak, aby:

$$\begin{vmatrix} c+3 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & c+3 \\ -1 & c+3 & c+3 \end{vmatrix} = 0.$$

Krok 1: Určíme determinant soustavy.

$$|A| = \begin{vmatrix} c+3 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & c+3 \\ -1 & c+3 & c+3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{gathered} |A| = 3(c+3)^2 - 5(c+3) + (c+3) - (3 + (c+3)^3 - 5(c+3)) = \\ = 3(c+3)^2 - 5(c+3) + (c+3) - 3 - (c+3)^3 + 5(c+3)) = \\ = -(c+3)^3 + 3(c+3)^2 + (c+3) - 3 = \\ = -(c^3 + 9c^2 + 27c + 27) + 3(c^2 + 6c + 9) + c = \\ = -c^3 - 9c^2 - 27c - 27) + 3c^2 + 18c + 27 + c = \\ = -c^3 - 6c^2 - 8c = \\ = -c(c^2 + 6c + 8) = \\ = -c(c+4)(c+2) \end{gathered}$$

Krok 2: Určíme, kdy je determinant roven 0.

$$-c(c+4)(c+2) = 0$$

$$\begin{aligned} -c = 0 \quad &\Longrightarrow \quad c = 0 \\ c+4 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad c = -4 \\ c+2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad c = -2 \end{aligned}$$

Řešení:

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow c \in \{0, -2, -4\}$$

Příklad 3

Zadání: Transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dána následovně:

$$[x, y, z]^T \mapsto [x + y, x - z, z + x + y]^T.$$

Zjistěte, jestli je f lineární transformace. Svoje tvrzení zdůvodněte.

Krok 1: Ověříme, jestli se nulový vektor zobrazí do nulového.

$$[0, 0, 0] \to [0 + 0, 0 - 0, 0 + 0 + 0]$$
$$[0, 0, 0] \to [0, 0, 0]\checkmark$$

Krok 2: Ověříme, jestli obraz součtu je součet obrazů.

$$f(\overline{a} + \overline{b}) = f(\overline{a}) + f(\overline{b})$$
$$f([x, y, z]^T + [i, j, k]^T) = f([x + i, y + j, z + k]^T) =$$
$$= [x + i + y + j, x + i - z - k, z + k + x + i + y + j]$$
$$f([x, y, z]^T + [i, j, k]^T) = [x + y, x - z, z + x + y]^T + [i + j, i - k, k + i + j]^T =$$
$$= [x + y + i + j, x - z + i - k, z + x + y + k + i + j])\checkmark$$

Krok 3: Ověříme, jestli obraz násobku skalárem je násobkem obrazu.

$$f(r \cdot \overline{a}) = f(r \cdot [x, y, z]) = f([rx, ry, rz]) = [rx + ry, rx - rz, rz + rx + ry]$$
$$r \cdot f(\overline{a}) = r \cdot f([x, y, z]) = r \cdot [x + y, x - z, z + x + y] = rx + ry, rx - rz, rz + rx + ry]\checkmark$$

Řešení: Všechny tři podmínky jsou splněny, f je tedy lineární transformací.

Příklad 4

Zadání: Je dána soustava rovnic

$$\begin{array}{ccccc} 4x & +500y & +3z & = & 248 \\ -3x & +2y & +200z & = & -410 \\ 250x & -y & +5z & = & 546 \end{array}$$

Řešení soutavy najděte s přesností $\varepsilon = 0{,}01$ Jacobiho metodou, vyjděte z bodu [2,0; 0,5; −2,0]. Je-li to potřeba, soustavu nejprve upravte stak, aby byla zaručena konvergence.

Krok 1: Změníme pořadí rovnic v soustavě tak, aby matice soustavy byla řádkově i sloupcově diagonálně dominatní, čímž zaručíme konvergenci.

$$\begin{array}{ccccc} 250x & -y & +5z & = & 546 \\ 4x & +500y & +3z & = & 248 \\ -3x & +2y & +200z & = & -410 \end{array}$$

Krok 2: Z první rovnice si vyjádříme první neznámou, z druhé rovnice druhou neznámou a ze třetí rovnice třetí neznámou.

$$\begin{array}{cccccc} x & = & \frac{1}{250} & (546 & +y & -5z) \\ y & = & \frac{1}{500} & (248 & -4x & -3z) \\ z & = & \frac{1}{200} & (-410 & +3x & -2y) \end{array}$$

Krok 3: Do této soustavy dosadíme počáteční iteraci [2,0; 0,5; −2,0] a určíme první iteraci.

$$\begin{array}{cccccccc} x^{(1)} & = & \frac{1}{250} & (546 & +0,5 & +(-5)\cdot(-2)) & = & 2,226 \\ y^{(1)} & = & \frac{1}{500} & (248 & +(-4)\cdot 2 & +(-3)\cdot(-2)) & = & 0,492 \\ z^{(1)} & = & \frac{1}{200} & (-410 & +3\cdot 2 & +(-2)\cdot 0,5) & = & -2 \end{array}$$

Krok 4: Pomocí první iterace získáme stejným způsobem druhou iteraci.

$$\begin{array}{cccccccc} x^{(2)} & = & \frac{1}{250} & (546 & +0,492 & +(-5)\cdot(-2)) & = & 2,225968 \\ y^{(2)} & = & \frac{1}{500} & (248 & +(-4)\cdot 2,226 & +(-3)\cdot(-2)) & = & 0,490192 \\ z^{(2)} & = & \frac{1}{200} & (-410 & +3\cdot 2,226 & +(-2)\cdot 0,492) & = & -2,02153 \end{array}$$

Krok 5: Stejným způsobem třetí iteraci pomocí druhé.

$$\begin{array}{cccccccc} x^{(3)} & = & \frac{1}{250} & (546 & +0,490192 & +(-5)\cdot(-2,02153)) & = & 2,226391368 \\ y^{(3)} & = & \frac{1}{500} & (248 & +(-4)\cdot 2,225968 & +(-3)\cdot(-2,02153)) & = & 0,490321436 \\ z^{(3)} & = & \frac{1}{200} & (-410 & +3\cdot 2,225968 & +(-2)\cdot 0,490192) & = & -2,0215124 \end{array}$$

Krok 6: Pokud výsledné hodnoty zaznamenáme do tabulky, uvidíme, že rozdíly v abs. hodnotách mezi druhou a třetí iterací jsou u všech proměnných menší než požadovaná přesnost $\varepsilon = 0{,}01$.

k	$x^{(0)}$	$y^{(0)}$	$z^{(0)}$
0	$2,0$	$0,5$	$-2,0$
1	$2,226$	$0,492$	$-2,0$
2	$2,225968$	$0,490192$	$-2,02153$
3	$2,226391368$	$0,490321436$	$-2,0215124$

Řešení: Řešením soustavy je

$$\begin{array}{ccc} x & = & 2,226391368 \\ y & = & 0,490321436 \\ z & = & -2,0215124 \end{array}$$

Příklad 5

Zadání: Najděte ortogonální průmět vektoru $\bar{v} = [-2,-1,9]$ do prostoru V generovaného vektory $\bar{a} = [3,-2,-1]$, $\bar{b} = [2,0,1]$.

Krok 1: Ortogonální průmět $\bar{v}$ do W je $\bar{w} \in W$. $\bar{u}$ je ortogolnální k prostoru W.

$$\bar{w} \in W \implies \bar{w} = r \cdot \bar{a} + s \cdot \bar{b}$$

$$\begin{gathered} \bar{v} = \bar{w} + \bar{u} \\ \bar{u} \perp \bar{a} \implies \bar{u} \cdot \bar{a} = 0 \\ \bar{u} \perp \bar{b} \implies \bar{u} \cdot \bar{b} = 0 \end{gathered}$$

Krok 2: Postupně vynásobíme $\bar{v}$ vektory $\bar{a}$ a $\bar{b}$.

$$\begin{gathered} \bar{v} = r \cdot \bar{a} + s \cdot \bar{b} + \bar{u} \ / \cdot \bar{a} \\ \bar{v} \cdot \bar{a} = r \cdot \bar{a} \cdot \bar{a} + s \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{u} \cdot \bar{a} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \bar{v} \cdot \bar{a} = [-2,-1,9] \cdot [3,-2,-1] = -6 + 2 - 9 = -13 \\ \bar{a} \cdot \bar{a} = [3,-2,-1] \cdot [3,-2,-1] = 9 + 4 + 1 = 14 \\ \bar{b} \cdot \bar{a} = [2,0,1] \cdot [3,-2,-1] = 6 - 1 = 5 \end{gathered}$$

$$-13 = 14 \cdot r + 5 \cdot s$$

$$\begin{gathered} \bar{v} = r \cdot \bar{a} + s \cdot \bar{b} + \bar{u} \ / \cdot \bar{b} \\ \bar{v} \cdot \bar{b} = r \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + s \cdot \bar{b} \cdot \bar{b} + \bar{u} \cdot \bar{b} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \bar{v} \cdot \bar{b} = [-2,-1,9] \cdot [2,0,1] = 9 - 4 = 5 \\ \bar{b} \cdot \bar{b} = [2,0,1] \cdot [2,0,1] = 4 + 1 = 5 \end{gathered}$$

$$5 = 5 \cdot r + 5 \cdot s$$

Krok 3: Ze soustavy rovnic vypočítáme r a s.

$$\begin{array}{cccccc} 14 \cdot r & + & 5 \cdot s & = & -13 \\ 5 \cdot r & + & 5 \cdot s & = & 5 \\ \hline 9 \cdot r & & & = & -18 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} r & = & -2 \\ s & = & 3 \end{array}$$

Krok 4: Vypočítané r a s dosadíme do rovnice $\bar{w} = r \cdot \bar{a} + s \cdot \bar{b}$ a dostaneme vektor $\bar{w}$.

$$\begin{gathered} \bar{w} = r \cdot \bar{a} + s \cdot \bar{b} \\ \bar{w} = -2 \cdot \bar{a} + 3 \cdot \bar{b} \\ \bar{w} = -2 \cdot [3,-2,-1] + 3 \cdot [2,0,1] = [0,4,5] \end{gathered}$$

Řešení: Ortogonálním průmětem vektoru $\bar{v}$ je vektor

$$\bar{w} = [0,4,5]$$