我的第一个 LaTeX 文档

我喜欢满天繁星.

2024 年 6 月 18 日

目录

1 plzover

1.1 导数

1. 已知函数 $f(x)=e^x+a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-a^2(x+1)$.

   (a) $g(x)=f(x)-a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, 试讨论 $g(x)$ 的单调性.

   (b) $f(x)\geq 0$ 对 $\forall x\in(-1,+\infty)$ 均成立, 求 a 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x)=e^{x-a}-a\ln x+1$, $a\in(-1,0)$.

   证明: 存在唯一的 x_0 使得 $f(x_0)=0$, 且 x_0 随 a 递减.

3. 已知函数 $f(x)=x^a\ln x$, $a\in\mathbb{R}$.

   (a) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

   (b) 当 $x\geqslant 1$, $a\geqslant 1$ 时, 证明:
   $f(x)\geqslant x^{a-1}(x-1)$ 以及 $f(x)\geqslant -\dfrac{1}{2}(x-1)(x-3)[1+a(x-1)]$.

   (c) 当 $a\geqslant 1$, 证明:
   $\dfrac{n(n-1)}{2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}i^a\ln i\leqslant\dfrac{[a(n-1)+(n-2)]}{(a+1)^2}n^{a+1}+\dfrac{1}{(a+1)^2}$, $i\in\mathbb{N}_+$.

4. 已知函数 $f(x)=\ln x-3ax^2+2$.

   (a) $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

   (b) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 $x_1,x_2,(x_1<x_2)$, 证明: $x_1+x_2>\sqrt{\dfrac{2}{3a}}$.

1.2 解三角形

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{CP}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$, $\cos\angle ACB=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $|CP|=\sqrt{3}$, 求 $a+2b$ 的最大值.

2 我喜欢满天繁星.

2.1 导数

1. 已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}-|\ln x|$ 有两个极值点 x_1,x_2.
   证明:
   (a) $|b-a|<1$.
   (b) $f(x_1)=f(x_2)$ 是 $a=b$ 的充分必要条件.

2. 已知函数 $f(x)=(x-1)^2e^x$, 方程 $f(x)=a$ 有三个根 x_1,x_2,x_3 $(x_1<x_2<x_3)$, 证明:
   (a) $x_2+x_3<2$.
   (b) 当 $0<a<1$ 时, $|x_2-x_3|<2\sqrt{a}$.

3. 已知函数 $f(x)=e^{ax}+a^2x^2+bx$.
   (a) 若函数 $g(x)=f(x)-a^2x^2$ 有两个不同的零点, 求 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围.
   (b) 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 证明 $f(x_0)\leqslant 1-a^2x_0^2$.

4. 已知函数 $f(x)=(1-\ln x)\,x^m$, $g(x)=(1-x)\,n^x$, $(m,n>0)$.
   (a) 证明: $f(x)$ 和 $g(x)$ 都一定有零点.
   (b) 记 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大值分别为 M,N. 当 $M\geqslant 2\ln 2$ 时, 若 $M\geqslant N$, 求 n 的取值范围.

2.2 数列

1. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $na_{n+1}=(n+1)^2a_n$, $a_1=1$.
   (a) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
   (b) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

2. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $S_{n+1}=(n+2)S_n+n+1$, $S_2=5$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $\left(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=1$, $a_1=1$.
   证明: 数列 $\{a_n\}$ 为常数列.

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $\dfrac{S_n}{n^2}+n=\dfrac{a_n}{n^2}+\dfrac{1}{n}$.
   (a) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
   (b) 令 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n, 证明:$-\dfrac{1}{3}<T_n\leqslant-\dfrac{1}{6}$.

2.3 解析几何

1. 已知椭圆 $\mathit{\Gamma}:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, 过左顶点 A 的直线 l_1 交椭圆 $\mathit{\Gamma}$ 于点 M (异于点 A), 过坐标原点 O 的直线 l_2 交椭圆 $\mathit{\Gamma}$ 于点 N, 直线 l_1 与直线 l_2 交于点 P, $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{OM}\ (\lambda\neq 0)$, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\in(-4,1)$.
   (a) 求椭圆 $\mathit{\Gamma}$ 的方程.
   (b) 是否存在定点 F_1,F_2, 使得 $|PF_1|-|PF_2|$ 为定值. 若存在, 请求出 F_1,F_2 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

2. 已知椭圆 $\mathit{\Gamma}:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 点 $P\,(m,n)$ 在圆 $M:x^2+(y+3)^2=1$ 上, PA, PB 是椭圆 $\mathit{\Gamma}$ 的两条切线, A,B 是切点.
   (a) 证明: 直线 AB 的方程为 $mx+4ny=4$.
   (b) 求 $S_{\triangle PAB}$ 的取值范围.

2.4 创新题

1. 已知点 $A\,(e^x,x)$, 点 $B\,(x,\ln x)$, 点 $C\,(\ln x,x)$.
   (a) 请探究 A,B,C 三点能否共线. 如能, 请说明理由; 如不能, 也请说明理由.
   (b) 证明: $S_{\triangle ABC}>1$.
   (c) 证明: $\sqrt{2}\,|AB|\geq|AC|$.