1 Аналитические выводы (для решёток с одинаковой жёсткостью).

Ищем решение уравнений движения в следующем виде (метод трёх волн):

$$u_{n,m} = \begin{cases} A_I e^{\mathrm{i}(\Omega t - a k_1^x n - a k_1^y m)} + A_R e^{\mathrm{i}(\Omega t + a k_1^x n - a k_1^y m)}, & n < 0 \\ A_T e^{\mathrm{i}(\Omega t - a k_2^x n - a k_2^y m)}, & n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Дисперсионное соотношение для решётки:

$$m_i \Omega^2 = 4c \left(\sin^2 \frac{k_i^x a}{2} + \sin^2 \frac{k_i^y a}{2} \right) \tag{1.2}$$

Уравнения движения для частиц интерфейса:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_{-1,m} = c \left(u_{0,m} + u_{-1,m+1} + u_{-2,m} + u_{-1,m-1} - 4u_{-1,m} \right) \\ m_2 \ddot{u}_{0,m} = c \left(u_{1,m} + u_{0,m+1} + u_{-1,m} + u_{0,m-1} - 4u_{0,m} \right) \end{cases} \tag{1.3}$$

Получаем:

$$\frac{A_T}{A_I} = \frac{e^{\mathrm{i}k_1^x a} - e^{-\mathrm{i}k_1^x a}}{e^{\mathrm{i}k_2^x a} - e^{-\mathrm{i}k_1^x a}} \cdot \frac{e^{\mathrm{i}k_2^y a m}}{e^{\mathrm{i}k_1^y a m}} \tag{1.4}$$

$$T = \frac{m_2 g_2^x}{m_1 g_1^x} \left| \frac{e^{\mathrm{i}k_1^x a} - e^{-\mathrm{i}k_1^x a}}{e^{\mathrm{i}k_2^x a} - e^{-\mathrm{i}k_1^x a}} \right|^2, \tag{1.5}$$

где

$$g_i = \frac{d\Omega}{dk_i}$$

2 Сохранение потока в однородной решётке

Уравнение движения для частицы (n, m):

$$M_{n,m} \dot{v}_{n,m} = F_{n+\frac{1}{2},m} - F_{n-\frac{1}{2},m} + F_{n,m+\frac{1}{2}} - F_{n,m-\frac{1}{2}}, \tag{2.1}$$

где

$$F_{n+\frac{1}{2},m} = C_{n+\frac{1}{2},m} \varepsilon_{n+\frac{1}{2},m} \qquad \varepsilon_{n+\frac{1}{2},m} = u_{n+1,m} - u_{n,m}$$

$$F_{n,m+\frac{1}{2}} = C_{n,m+\frac{1}{2}} \varepsilon_{n,m+\frac{1}{2}} \qquad \varepsilon_{n,m+\frac{1}{2}} = u_{n,m+1} - u_{n,m}$$

Выражение для потока:

$$\underline{h}_{n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} = -\frac{a\underline{e}_1}{2} F_{n+\frac{1}{2},m} \left(v_{n+1,m} + v_{n,m} \right) - \frac{a\underline{e}_2}{2} F_{n,m+\frac{1}{2}} \left(v_{n,m+1} + v_{n,m} \right) \tag{2.2}$$

Производная потока:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{h}}_{n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} = & -\frac{a\underline{e}_1}{2} \dot{F}_{n+\frac{1}{2},m} \left(v_{n+1,m} + v_{n,m} \right) - \\ & - \frac{a\underline{e}_1}{2} F_{n+\frac{1}{2},m} \left(\dot{v}_{n+1,m} + \dot{v}_{n,m} \right) - \\ & - \frac{a\underline{e}_2}{2} \dot{F}_{n,m+\frac{1}{2}} \left(v_{n,m+1} + v_{n,m} \right) - \\ & - \frac{a\underline{e}_2}{2} F_{n,m+\frac{1}{2}} \left(\dot{v}_{n,m+1} + \dot{v}_{n,m} \right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Из уравнения движения (2.1):

$$
\begin{aligned}
\dot v_{n,m} &= \frac{F_{n+\frac12,m}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n-\frac12,m}}{M_{n,m}} + \frac{F_{n,m+\frac12}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n,m-\frac12}}{M_{n,m}} \\
\dot v_{n+1,m} &= \frac{F_{n+\frac32,m}}{M_{n+1,m}} - \frac{F_{n+\frac12,m}}{M_{n+1,m}} + \frac{F_{n+1,m+\frac12}}{M_{n+1,m}} - \frac{F_{n+1,m-\frac12}}{M_{n+1,m}} \\
\dot v_{n,m+1} &= \frac{F_{n+\frac12,m+1}}{M_{n,m+1}} - \frac{F_{n-\frac12,m+1}}{M_{n,m+1}} + \frac{F_{n,m+\frac32}}{M_{n,m+1}} - \frac{F_{n,m+\frac12}}{M_{n,m+1}}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

И знаем, что

$$
\begin{aligned}
\dot F_{n+\frac12,m} &= C_{n+\frac12,m}\left(v_{n+1,m} - v_{n,m}\right) \\
\dot F_{n,m+\frac12} &= C_{n,m+\frac12}\left(v_{n,m+1} - v_{n,m}\right)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Подставляем (2.4) и (2.5) в выражение (2.3):

$$
\begin{aligned}
\dot{\underline{h}}_{n+\frac12,m+\frac12} = &- \frac{ae_1}{2} C_{n+\frac12,m}\left(v^2_{n+1,m} - v^2_{n,m}\right) - \\
&- \frac{ae_1}{2} F_{n+\frac12,m}\left(\frac{F_{n+\frac12,m}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n+\frac12,m}}{M_{n+1,m}} + \frac{F_{n+\frac32,m}}{M_{n+1,m}} - \frac{F_{n-\frac12,m}}{M_{n,m}} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{F_{n,m+\frac12}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n,m-\frac12}}{M_{n,m}} + \frac{F_{n+1,m+\frac12}}{M_{n+1,m}} - \frac{F_{n+1,m-\frac12}}{M_{n+1,m}}\right) - \\
&- \frac{ae_2}{2} C_{n,m+\frac12}\left(v^2_{n,m+1} - v^2_{n,m}\right) - \\
&- \frac{ae_2}{2} F_{n,m+\frac12}\left(\frac{F_{n,m+\frac12}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n,m+\frac12}}{M_{n,m+1}} + \frac{F_{n,m+\frac32}}{M_{n,m+1}} - \frac{F_{n,m-\frac12}}{M_{n,m}} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{F_{n+\frac12,m}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n-\frac12,m}}{M_{n,m}} + \frac{F_{n+\frac12,m+1}}{M_{n,m+1}} - \frac{F_{n-\frac12,m+1}}{M_{n,m+1}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Для неоднородной решётки:

$$
M_{n,m} = \begin{cases} m_1, & n < 0, \\ m_2, & n \geqslant 0, \end{cases} \qquad C_{n+\frac12,m} = \begin{cases} c_1, & n < -1, \\ c_{12}, & n = -1, \\ c_2, & n \geqslant 0, \end{cases}
\tag{2.7}
$$

Суммируя по всем частицам, получаем:

$$\dot{h} = -\frac{ae_1}{2}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\left(c_{12}-c_2\right)v_{0,m}^2+\left(c_1-c_{12}\right)v_{-1,m}^2\right]+\right.$$
$$+\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{F_{-\frac{1}{2},m}^2}{m_2}-\frac{F_{-\frac{1}{2},m}^2}{m_1}\right)+$$
$$\left.+\sum_{m,n}\left[F_{n+\frac{1}{2},m}\left(\frac{F_{n,m+\frac{1}{2}}}{M_{n,m}}-\frac{F_{n,m-\frac{1}{2}}}{M_{n,m}}+\frac{F_{n+1,m+\frac{1}{2}}}{M_{n+1,m}}-\frac{F_{n+1,m-\frac{1}{2}}}{M_{n+1,m}}\right)\right]\right)- \tag{2.8}$$
$$-\frac{ae_2}{2}\left(0+0+\right.$$
$$\left.+\sum_{m,n}\left[F_{n,m+\frac{1}{2}}\left(\frac{F_{n+\frac{1}{2},m}}{M_{n,m}}-\frac{F_{n-\frac{1}{2},m}}{M_{n,m}}+\frac{F_{n+\frac{1}{2},m+1}}{M_{n,m+1}}-\frac{F_{n-\frac{1}{2},m+1}}{M_{n,m+1}}\right)\right]\right)$$

Преобразуем

$$\dot{h} = -\frac{ae_1}{2}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\left(c_{12}-c_2\right)v_{0,m}^2+\left(c_1-c_{12}\right)v_{-1,m}^2\right]+\right.$$
$$+\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{m_1-m_2}{m_1 m_2}c_{12}^2\varepsilon_{-\frac{1}{2},m}^2+$$
$$\left.+\sum_{m,n}\left[F_{n+\frac{1}{2},m}\left(\frac{F_{n,m+\frac{1}{2}}}{M_{n,m}}-\frac{F_{n,m-\frac{1}{2}}}{M_{n,m}}+\frac{F_{n+1,m+\frac{1}{2}}}{M_{n+1,m}}-\frac{F_{n+1,m-\frac{1}{2}}}{M_{n+1,m}}\right)\right]\right)- \tag{2.9}$$
$$-\frac{ae_2}{2}\left(\sum_{m,n}\left[F_{n,m+\frac{1}{2}}\left(\frac{F_{n+\frac{1}{2},m}}{M_{n,m}}-\frac{F_{n-\frac{1}{2},m}}{M_{n,m}}+\frac{F_{n+\frac{1}{2},m+1}}{M_{n,m+1}}-\frac{F_{n-\frac{1}{2},m+1}}{M_{n,m+1}}\right)\right]\right)$$