1 Аналитические выводы (для решёток с одинаковой жёсткостью).

Ищем решение уравнений движения в следующем виде (метод трёх волн):

$$u_{n,m} = \begin{cases} A_I e^{\mathrm{i}(\Omega t - a k_1^x n - a k_1^y m)} + A_R e^{\mathrm{i}(\Omega t + a k_1^x n - a k_1^y m)}, & n < 0 \\ A_T e^{\mathrm{i}(\Omega t - a k_2^x n - a k_2^y m)}, & n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Дисперсионное соотношение для решётки:

$$m_i \Omega^2 = 4c \left(\sin^2 \frac{k_i^x a}{2} + \sin^2 \frac{k_i^y a}{2} \right) \tag{1.2}$$

По условию волна падает под углом γ (угол к нормали интерфейса), поэтому
Уравнения движения для частиц интерфейса:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_{-1,m} = c\left(u_{0,m} + u_{-1,m+1} + u_{-2,m} + u_{-1,m-1} - 4u_{-1,m}\right) \\ m_2 \ddot{u}_{0,m} = c\left(u_{1,m} + u_{0,m+1} + u_{-1,m} + u_{0,m-1} - 4u_{0,m}\right) \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\frac{A_T}{A_I} = \frac{e^{\mathrm{i}k_1^x a} - e^{-\mathrm{i}k_1^x a}}{e^{\mathrm{i}k_2^x a} - e^{-\mathrm{i}k_1^x a}} \cdot \frac{e^{\mathrm{i}k_2^y a m}}{e^{\mathrm{i}k_1^y a m}} \tag{1.4}$$

$$T = \frac{m_2 g_2^x}{m_1 g_1^x} \left| \frac{e^{\mathrm{i}k_1^x a} - e^{-\mathrm{i}k_1^x a}}{e^{\mathrm{i}k_2^x a} - e^{-\mathrm{i}k_1^x a}} \right|^2, \tag{1.5}$$

где

$$g_i^x = \frac{d\Omega}{dk_i^x} = \frac{ac}{\Omega m_i} \sin k_i^x a; \quad g_i^y = \frac{d\Omega}{dk_i^y} = \frac{ac}{\Omega m_i} \sin k_i^y a; \quad g_i = \sqrt{\left(g_i^x\right)^2 + \left(g_i^y\right)^2}$$

2 Сравнение численных результатов с аналитическим решением (для цепочек).

Аналитическое решение для отношения амплитуд проходящей и падающей волн:

$$\frac{A_T}{A_I} = \frac{2\mathrm{i}c_{12} \sin k_1}{c_{12}\left(1 - e^{-\mathrm{i}k_1}\right) + c_2\left(e^{\mathrm{i}k_2} - 1\right)\left(1 + e^{-\mathrm{i}k_1}\left(c_{12} - c_1\right)/c_1\right)} \tag{2.1}$$

Аналитическое решение для коэффициента прохождения:

$$T = \frac{m_2 g_2 \left|A_T\right|^2}{m_1 g_1 \left|A_I\right|^2} = \frac{m_2 g_2}{m_1 g_1} \left(\frac{2\mathrm{i}c_{12} \sin k_1}{c_{12}\left(1 - e^{-\mathrm{i}k_1}\right) + c_2\left(e^{\mathrm{i}k_2} - 1\right)\left(1 + e^{-\mathrm{i}k_1}\left(c_{12} - c_1\right)/c_1\right)} \right)^2, \tag{2.2}$$

где

$$k_1 = \frac{2}{a} \arcsin \sqrt{\frac{m_1 \Omega^2 - d_1}{4c_1}}; \quad k_2 = \frac{2}{a} \arcsin \sqrt{\frac{m_2 \Omega^2 - d_2}{4c_2}};$$

$$g_1 = \frac{a}{2\Omega} \sqrt{\left(\Omega^2 - \frac{d_1}{m_1}\right)\left(\frac{4c_1 + d_1}{m_1} - \Omega^2\right)}; \quad g_2 = \frac{a}{2\Omega} \sqrt{\left(\Omega^2 - \frac{d_2}{m_2}\right)\left(\frac{4c_2 + d_2}{m_2} - \Omega^2\right)}.$$

График зависимости коэффициента прохождения от жёсткости интерфейса c_{12} построен в блокноте Wolfram Mathematica:

Далее в блокноте Jupyter проведено сравнение численных результатов с аналитическим решением при $c_{12} \geqslant 0$: