

1 Аналитические выводы (для решёток с одинаковой жёсткостью).

Ищем решение уравнений движения в следующем виде (метод трёх волн):

$$u_{n,m} = \begin{cases} A_I e^{i(\Omega t - a k_1^x n - a k_1^y m)} + A_R e^{i(\Omega t + a k_1^x n - a k_1^y m)}, & n < 0 \\ A_T e^{i(\Omega t - a k_2^x n - a k_2^y m)}, & n \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Дисперсионное соотношение для решётки:

$$m_i \Omega^2 = 4c \left(\sin^2 \frac{k_i^x a}{2} + \sin^2 \frac{k_i^y a}{2} \right) \quad (1.2)$$

Уравнения движения для частиц интерфейса:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_{-1,m} = c (u_{0,m} + u_{-1,m+1} + u_{-2,m} + u_{-1,m-1} - 4u_{-1,m}) \\ m_2 \ddot{u}_{0,m} = c (u_{1,m} + u_{0,m+1} + u_{-1,m} + u_{0,m-1} - 4u_{0,m}) \end{cases} \quad (1.3)$$

Получаем:

$$\frac{A_T}{A_I} = \frac{e^{i k_1^x a} - e^{-i k_1^x a}}{e^{i k_2^x a} - e^{-i k_1^x a}} \cdot \frac{e^{i k_2^y a m}}{e^{i k_1^y a m}} \quad (1.4)$$

$$T = \frac{m_2 g_2^x}{m_1 g_1^x} \left| \frac{e^{i k_1^x a} - e^{-i k_1^x a}}{e^{i k_2^x a} - e^{-i k_1^x a}} \right|^2, \quad (1.5)$$

где

$$g_i = \frac{d\Omega}{dk_i}$$

2 Сохранение потока в однородной решётке

Уравнение движения для частицы (n, m) :

$$M_{n,m} \dot{v}_{n,m} = F_{n+\frac{1}{2},m} - F_{n-\frac{1}{2},m} + F_{n,m+\frac{1}{2}} - F_{n,m-\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} F_{n+\frac{1}{2},m} &= C_{n+\frac{1}{2},m} \varepsilon_{n+\frac{1}{2},m} & \varepsilon_{n+\frac{1}{2},m} &= u_{n+1,m} - u_{n,m} \\ F_{n,m+\frac{1}{2}} &= C_{n,m+\frac{1}{2}} \varepsilon_{n,m+\frac{1}{2}} & \varepsilon_{n,m+\frac{1}{2}} &= u_{n,m+1} - u_{n,m} \end{aligned}$$

Выражение для потока:

$$\underline{h}_{n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} = -\frac{ae_1}{2} F_{n+\frac{1}{2},m} (v_{n+1,m} + v_{n,m}) - \frac{ae_2}{2} F_{n,m+\frac{1}{2}} (v_{n,m+1} + v_{n,m}) \quad (2.2)$$

Производная потока:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{h}}_{n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} &= -\frac{ae_1}{2} \dot{F}_{n+\frac{1}{2},m} (v_{n+1,m} + v_{n,m}) - \\ &\quad -\frac{ae_1}{2} F_{n+\frac{1}{2},m} (\dot{v}_{n+1,m} + \dot{v}_{n,m}) - \\ &\quad -\frac{ae_2}{2} \dot{F}_{n,m+\frac{1}{2}} (v_{n,m+1} + v_{n,m}) - \\ &\quad -\frac{ae_2}{2} F_{n,m+\frac{1}{2}} (\dot{v}_{n,m+1} + \dot{v}_{n,m}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из уравнения движения (2.1):

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{n,m} &= \frac{F_{n+\frac{1}{2},m}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n-\frac{1}{2},m}}{M_{n,m}} + \frac{F_{n,m+\frac{1}{2}}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n,m-\frac{1}{2}}}{M_{n,m}} \\
\dot{v}_{n+1,m} &= \frac{F_{n+\frac{3}{2},m}}{M_{n+1,m}} - \frac{F_{n+\frac{1}{2},m}}{M_{n+1,m}} + \frac{F_{n+1,m+\frac{1}{2}}}{M_{n+1,m}} - \frac{F_{n+1,m-\frac{1}{2}}}{M_{n+1,m}} \\
\dot{v}_{n,m+1} &= \frac{F_{n+\frac{1}{2},m+1}}{M_{n,m+1}} - \frac{F_{n-\frac{1}{2},m+1}}{M_{n,m+1}} + \frac{F_{n,m+\frac{3}{2}}}{M_{n,m+1}} - \frac{F_{n,m+\frac{1}{2}}}{M_{n,m+1}}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

И знаем, что

$$\begin{aligned}
\dot{F}_{n+\frac{1}{2},m} &= C_{n+\frac{1}{2},m} (v_{n+1,m} - v_{n,m}) \\
\dot{F}_{n,m+\frac{1}{2}} &= C_{n,m+\frac{1}{2}} (v_{n,m+1} - v_{n,m})
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Подставляем (2.4) и (2.5) в выражение (2.3):

$$\begin{aligned}
\dot{h}_{n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} &= -\frac{ae_1}{2} C_{n+\frac{1}{2},m} (v_{n+1,m}^2 - v_{n,m}^2) - \\
&\quad - \frac{ae_1}{2} F_{n+\frac{1}{2},m} \left(\frac{F_{n+\frac{1}{2},m}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n+\frac{1}{2},m}}{M_{n+1,m}} + \frac{F_{n+\frac{3}{2},m}}{M_{n+1,m}} - \frac{F_{n-\frac{1}{2},m}}{M_{n,m}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{F_{n,m+\frac{1}{2}}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n,m-\frac{1}{2}}}{M_{n,m}} + \frac{F_{n+1,m+\frac{1}{2}}}{M_{n+1,m}} - \frac{F_{n+1,m-\frac{1}{2}}}{M_{n+1,m}} \right) - \\
&\quad - \frac{ae_2}{2} C_{n,m+\frac{1}{2}} (v_{n,m+1}^2 - v_{n,m}^2) - \\
&\quad - \frac{ae_2}{2} F_{n,m+\frac{1}{2}} \left(\frac{F_{n,m+\frac{1}{2}}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n,m+\frac{1}{2}}}{M_{n,m+1}} + \frac{F_{n,m+\frac{3}{2}}}{M_{n,m+1}} - \frac{F_{n,m-\frac{1}{2}}}{M_{n,m}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{F_{n+\frac{1}{2},m}}{M_{n,m}} - \frac{F_{n-\frac{1}{2},m}}{M_{n,m}} + \frac{F_{n+\frac{1}{2},m+1}}{M_{n,m+1}} - \frac{F_{n-\frac{1}{2},m+1}}{M_{n,m+1}} \right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$